1986 г. Июнь *Том 149, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

513.83:53

ТОПОЛОГИЯ, МНОГООБРАЗИЯ И ГОМОТОПИЯ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ К МОДЕЛЯМ n-ПОЛЯ

С. С. Рожков

Физические примеры. — Топология и отображения. — Многообразия. — Топология моделей **n**-*поля. — Основные понятия теории гомотопий. — Классификация особенностей в поле параметра порядка. Гомотопические инварианты.*

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в физику все больше и больше проникают идеи и методы современной алгебры и топологии. Одним из основных истоков этого процесса «математизации» физики является проблема создания теории сильных взаимодействий. Попытки решения этой проблемы привели к представлению о том, что сильно взаимодействующие частицы — адроны — состоят из кварков и что адроны необходимо рассматривать как частицы конечных размеров, в отличие от традиционного описания элементарных частиц как точечных. В результате возникло то, что можно назвать физикой протяженных объектов. Первыми примерами топологических протяженных объектов являются кинки, солитоны и вихри, рассмотренные в 1973 г. Нильсеном и Олесеном в абелевой модели Хиггса по аналогии с вихрями в сверхпроводнике.

Следующий шаг был сделан 'т Хоофтом и Поляковым в 1974 г. В модели Джорджи — Глэшоу ими было найдено решение классических полевых уравнений, которое теперь называют монополем 'т Хоофта — Полякова. Еще более важный результат был получен в 1975 г. В чисто калибровочной неабелевой теории поля, подобной обычной электродинамике без заряженных частиц, Белавин, Поляков, Шварц и Тюпкин открыли квазичастицу, имеющую конечные размеры как в пространстве, так и во времени. Эта квазичастица была названа инстантоном. Из всех многочисленных следствий открытия монополя 'т Хоофта — Полякова и инстантона здесь назовем только одно — в физику вошло понятие топологического квантового числа, или топологического инварианта, являющегося одним из наиболее важных понятий топологии.

В то же самое время (1975 г.) Ву и Янг применили теорию расслоенных пространств в исследовании монополя Дирака. Они показали, что условие квантования заряда является чисто топологическим свойством теории. Кроме того, Ву и Янг продемонстрировали силу и элегантность теории расслоений. С ее помощью уже получен ряд интересных результатов в теории калибровочных полей.

В настоящей статье даны некоторые основные понятия топологии, теории многообразий и теории гомотопий, которые нашли свое отражение в работах, посвященных исследованию протяженных объектов как в теории поля, так и в физике конденсированного состояния.

Статья построена следующим образом. Сначала указаны физические системы (магнетики и нематические жидкие кристаллы), топологические свойства которых служат для иллюстрации общих топологических понятий, вводимых в дальнейшем. Таким образом, преследуется двоякая цель. С одной стороны, подробный разбор примеров дополняет краткое изложение общих математических вопросов, а с другой — физические системы автоматически становятся объектами топологического исследования. В целом же хотелось дать некоторое представление о той математике, которая играет существенную роль в развитии новых физических идей. О связи топологии с физикой уже кратко говорилось выше и немного подробнее рассказывается в заключении. Там также дан краткий комментарий к помещенному в конце статьи списку литературы, к которой можно обратиться за подробностями и дальнейшими ссылками.

2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ

Прежде чем перейти к изложению математических вопросов, рассмотрим несколько физических примеров, к которым будем обращаться в дальнейшем. Этими примерами являются магнетики и нематические жидкие кристаллы. В зависимости от конкретной модели указанные системы могут описываться единичным дву- или трехмерным вектором **n**, заданным на плоскости или

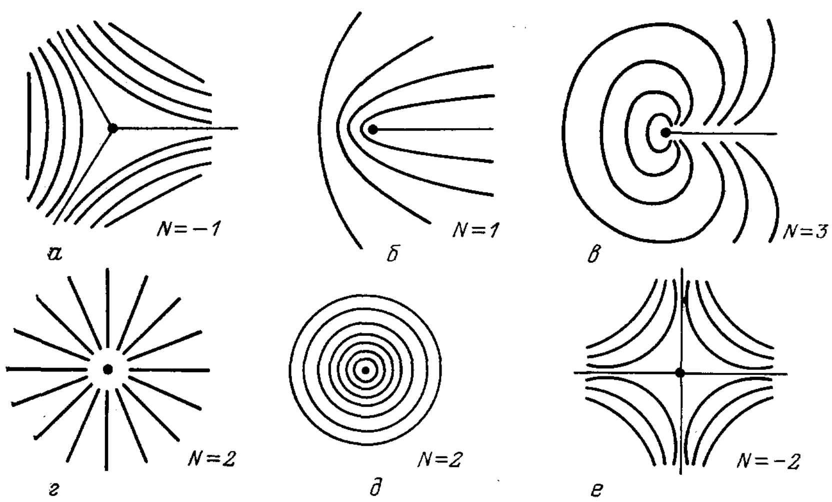

Рис. 1

в трехмерном пространстве. В случае магнетика **n** — это обычный вектор, а в случае нематика **n** — директор, т. е. направления **n** и —**n** считаются физически эквивалентными (в магнетике **n** задает направление намагниченности, а в нематике **n** указывает преимущественное направление длинных осей вытянутых молекул, из которых состоит нематик).

Будем рассматривать следующие три модели **n**-поля (магнетиков и нематиков):

1. Двумерные: $\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}) = \{n_1(\boldsymbol{\rho}),\ n_2(\boldsymbol{\rho})\}$, $\boldsymbol{\rho} = \{x,\ y\}$.
2. Трехмерные: $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \{n_1(\mathbf{r}),\ n_2(\mathbf{r}),\ n_3(\mathbf{r})\}$, $\mathbf{r} = \{x,\ y,\ z\}$.
3. Планарные: $\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}) = \{n_1(\boldsymbol{\rho}),\ n_2(\boldsymbol{\rho}),\ n_3(\boldsymbol{\rho})\}$, $\boldsymbol{\rho} = \{x,\ y\}$.

В этих моделях могут существовать такие конфигурации поля **n**, которые нельзя непрерывной деформацией перевести в однородное распределение поля **n** (т. е. $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 = \mathrm{const}$) во всем пространстве. В зависимости от размерности модели такие конфигурации поля $\mathbf{n}$ связаны с наличием в распределении поля $\mathbf{n}$ особых (в которых поле $\mathbf{n}$ не определено) или неособых точек или линий, называемых ежами, дисклинациями, вихрями и т. д.

В нематиках под микроскопом дисклинации выглядят как темные нити, плавающие в образце. Одни из них достаточно подвижны, другие кажутся

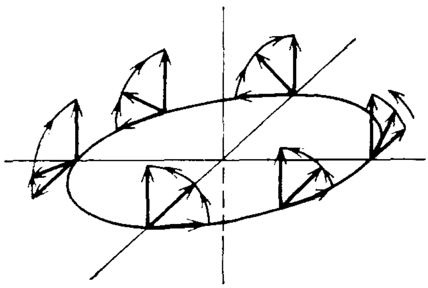

Рис. 2

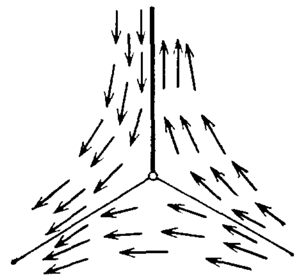

Рис. 3

закрепленными. Из наблюдений такой картины и возникло название «нематик», оно образовано от греческого слова «нема»— нить. Это название придумал Фридель.

На рис. 1 приведены типичные конфигурации поля директора вблизи линии дисклинации (линия перпендикулярна плоскости рисунка).

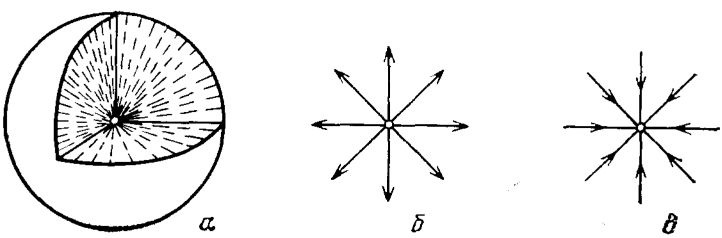

Рис. 4

В двумерном нематике существуют все изображенные на рис. 1 типы дисклинаций, а в трехмерном нематике дисклинации типа рис. 1, *г* — *е* неустойчивы: они «вытекают в третье измерение». Этот процесс показан на рис. 2 для дисклинации, изображенной на рис. 1, *д*.

В двумерном магнетике нет особенностей, изображенных на рис. 1, *а* — *в*, так как это привело бы к разрыву поля $\mathbf{n}$ на полубесконечной линии, как это видно из рис. 3. В трехмерном магнетике оставшиеся дисклинации (рис. 1, *г* — *е*), как и в нематике, неустойчивы.

При обходе по замкнутому контуру вокруг линии дисклинации вектор $\mathbf{n}$ поворачивается на угол πN, где N — целое число, причем для случаев рис. 1, *а* — *в* N — нечетное число, а для случаев рис. 1, *г* — *е* N — четное. Целое число N называется индексом Франка. В трехмерном нематике устойчивы только дисклинации с нечетным индексом Франка, а в трехмерном магнетике вообще нет устойчивых линейных особенностей.

Пример точечной особенности (еж) в трехмерном нематике изображен на рис. 4, *а*. В магнетике радиальное распределение $\mathbf{n}$ может быть двух типов (рис. 4, *б*, *в*).

Еще один важный случай — неособый точечный вихрь в планарном нематике или магнетике (рис. 5, *а*), а также линейный вихрь или линейный солитон в трехмерном случае (рис. 5, *б*). Напомним, что в магнетиках замена $\mathbf{n}$ на $-\mathbf{n}$ приводит к разным типам вихрей. Точечный вихрь в планарной модели можно рассматривать как сечение линейного солитона в трехмерной модели. Впервые такие вихри были рассмотрены в физике жидких кристаллов, однако особый интерес к таким полевым конфигурациям возник после появления в 1975 г. работы Белавина и Полякова, посвященной исследованию планарного гейзенберговского магнетика, который является одновременно представителем широкого класса моделей теории поля с геометриче-

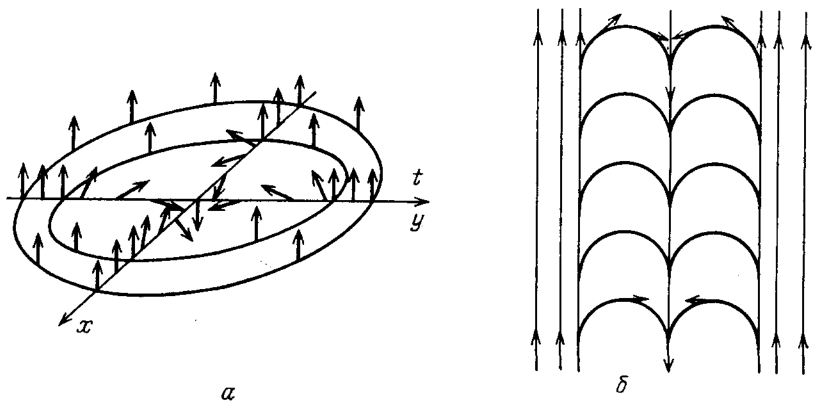

Рис. 5

ским типом взаимодействия. Белавин и Поляков нашли точные N-вихревые решения в рассмотренной ими модели. Эти решения обладают многими свойствами инстантонов, найденных в калибровочных теориях поля.

Если заменить одну из координат, например y, на время t, то из рис. 5, *а* становится понятным смысл названия «инстантон» (от слова instant (*англ.*) — мгновение): вихрь Белавина — Полякова имеет конечные размеры как в пространстве, так и во времени.

Некоторые топологические свойства описанных моделей будут обсуждены ниже. Перейдем теперь к математическому введению.

3. ТОПОЛОГИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ

С формальной точки зрения никаких предварительных сведений, для того чтобы начать изучение топологии, не требуется. Однако практически любой курс по топологии предполагает знание некоторых сведений об евклидовых пространствах и непрерывных функциях или отображениях. На примере n-мерного вещественного евклидова пространства, обозначаемого символом R^n ($R = R^1$ — вещественная прямая, R^2 — плоскость, R^3 — обычное трехмерное пространство), легко получить представление об основных понятиях топологии — таких, как окрестность, связность, компактность и топологическая эквивалентность. Такой путь введения в топологию предлагают Стинрод и Чинн в книге «Первые понятия топологии».

Евклидово пространство R^n является топологическим пространством. Однако понятие топологического пространства гораздо более абстрактное и общее, чем привычное понятие евклидова пространства. Определение топологического пространства включает в себя аксиомы, основанные на понятии окрестности точки или открытого множества. Чтобы понять определение и основные свойства топологических пространств, нужно выработать взгляд на пространство как на множество точек, каждая из которых обладает открытой окрестностью, а непрерывные отображения пространств представлять как отображения, при которых близкие друг к другу точки одного пространства отображаются в близкие точки другого. Усвоить эту общую точку зрения также помогают наглядные примеры евклидовых пространств.

Одним из центральных понятий современной геометрии является понятие многообразия. Многообразие — это топологическое пространство, окрестность каждой точки которого находится во взаимно однозначном соответствии с некоторой открытой областью евклидова пространства. Простейшим примером многообразия является евклидово пространство R^n. Простым, но нетривиальным примером многообразия является n-мерная сфера, обозначаемая символом S^n (S^1 — окружность, S^2 — обычная сфера в R^3), в пространстве R^{n+1}. В отличие от евклидового пространства, сфера не допускает введения единой системы координат (см. ниже). Следует также заметить, что определение многообразия требует использования понятия дифференцируемой функции. Вполне доступным источником сведений о топологических пространствах, многообразиях, гомотопии и т. д. является книга Милнора и Уоллеса «Дифференциальная топология», которая, как и упомянутая выше книга Стинрода и Чинна, относится к популярной серии «Современная математика» издательства «Мир». Читатель, который не знаком с топологией, при необходимости может обращаться к указанным книгам (см. также список литературы, данный в конце статьи).

В теории множеств исходными понятиями являются *множества* (или совокупности, или семейства) и *элементы* (или точки) множеств. Запись $x \in A$ означает, что x является элементом множества A. Запись $\{x \in A\colon P(x)\}$ определяет подмножество всех элементов $x \in A$, для которых справедливо утверждение $P(x)$. Например: $A = \{x\colon x \in A\}$. Множество, не содержащее ни одного элемента, или пустое множество, обозначается символом $\varnothing$ (например, $\varnothing = \{x\colon x \neq x\}$). Определим также *объединение* $A \cup B$ и *пересечение* $A \cap B$ двух множеств A и B: $A \cup B = \{x\colon x \in A$ или(и) $x \in B\}$ и $A \cap B = \{x\colon x \in A$ и $x \in B\}$. Говорят, что множества A и B не пересекаются, если $A \cap B = \varnothing$. *Прямым (декартовым) произведением* двух множеств A и B называется множество $A \times B = \{(x, y)\colon x \in A, y \in B\}$, где пара (x, y) рассматривается как элемент множества $A \times B$.

Символом $f\colon A \to B$ ($b = f(a)$ для $a \in A$ и $b \in B$) будем обозначать *отображение* (функцию) множества A в множество B.

Для двух отображений $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ определим композицию $g \circ f$ (или gf), являющуюся отображением A в C: $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ для $a \in A$.

Топологией множества X называют семейство подмножеств τ из X, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\varnothing$ и X принадлежат τ.
2. Если U и U' принадлежат τ, то $U \cap U' \in \tau$.
3. Объединение любого семейства из τ принадлежит τ. Элементы системы τ называются *открытыми* множествами в топологии τ. Множество X вместе с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством*.

Для последующего достаточно представлять интуитивно понятную обычную топологию на множестве вещественных чисел R — это семейство всех множеств, которые вместе с каждой своей точкой содержат некоторый интервал около нее. Представителем такого семейства является любое открытое подмножество A множества вещественных чисел R ($A \subset R$), т. е. подмножество A, в котором для каждой его точки x существуют такие числа a и b, что $a < x < b$ и что множество $\{y\colon a < y < b\}$ (интервал) является подмножеством множества A.

Если рассмотреть множество вещественных чисел R с обычной топологией и образовать прямое произведение n экземпляров пространств R, то получим n-мерное евклидово пространство R^n, топология на котором определяется как произведение топологий пространства R. Открытые множества пространства R^n — это, например, n-мерные кубы, рассматриваемые как прямое произведение открытых интервалов из R.

Окрестностью точки $x \in X$ называется любое подмножество из X, в котором содержится открытое множество, содержащее x.

Топологическое пространство называют *хаусдорфовым*, если любые две его точки имеют непересекающиеся окрестности.

Топологические пространства изучаются с помощью *непрерывных* отображений, среди которых особенно важно выделить *взаимно однозначные непрерывные отображения.* Такие отображения называют *гомеоморфизмами*. Если $f\colon X \to Y$ гомеоморфизм и $f(X) = Y$, то пространства X и Y называются *гомеоморфными* или *топологически эквивалентными*. Таким образом, топология изучает не каждое топологическое пространство в отдельности, а классы пространств, состоящие из гомеоморфных пространств. При этом особый интерес представляют те свойства, которыми обладают все пространства, гомеоморфные данному. Такие свойства называются *топологическими инвариантами.*

Топологическое пространство X называется *связным*, если множество X не является объединением двух непересекающихся множеств. Связность является топологическим инвариантом.

Дадим еще несколько определений, чтобы указать класс топологических пространств, которые встречаются в физических приложениях.

Подмножество A топологического пространства X называется *замкнутым*, если *дополнение* $X \setminus A$ открыто.

Замыкание $\overline{A}$ множества A топологического пространства X — это наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Например, отрезок $[0, 1]$ является замыканием открытого интервала $(0, 1)$.

Покрытием множества X называют систему подмножеств в X, объединение которых совпадает со всем X. Пространство называется *компактным*, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Теорема Гейне — Бореля — Лебега. Подмножество вещественного R^n и комплексного C^n n-мерных евклидовых пространств компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Например, замкнутый интервал $[0, 1] \subset R$ компактен.

Топологическое пространство называется *локально компактным*, если каждая его точка обладает окрестностью, замыкание которой компактно. Пространства R^n и C^n локально компактны (но не компактны). Сфера S^n компактна.

Часто бывает необходимо вложить данное пространство в некоторое компактное. Известный пример — сфера Римана, которая строится из евклидовой плоскости добавлением к ней бесконечно удаленной точки.

Одноточечной компактификацией топологического пространства X называется множество X^*, которое получается добавлением к X одной точки, обозначаемой символом ∞: $X^* = X \cup \{\infty\}$.

Пространство X^* компактно. Пространство X^* хаусдорфово тогда и только тогда, когда X хаусдорфово и локально компактно.

Для дальнейшего достаточно рассматривать *локально компактные хаусдорфовы пространства.*

В физических приложениях, как правило, имеют дело с метрическими пространствами, которые являются хаусдорфовыми. Однако метрика может быть задана разными способами, в то время как часто вообще нет необходимости ее вводить. А топология хаусдорфова пространства, т. е. отделимость двух любых точек пространства, не менее очевидна, чем расстояние между двумя точками.

Тем не менее топологические пространства и непрерывные отображения являются слишком общими для физических приложений. В физике используется координатное описание (координатное описание не требует введения метрики), а отображения, как правило, должны быть определенное число раз дифференцируемы (даже если об этом не упоминают). Поэтому для физических приложений подходящим классом топологических пространств являются многообразия, т. е. пространства, каждую точку которых можно описать набором чисел или координат.

4. МНОГООБРАЗИЯ

Дадим определение многообразия. Хаусдорфово пространство X называется n-мерным многообразием, если каждая точка X обладает окрестностью, гомеоморфной некоторому открытому множеству n-мерного евклидового пространства F^n ($F^n = R^n$ или C^n).

Простейшими примерами многообразий являются прежде всего евклидовы пространства R^n и C^n.

Чтобы лучше понять свойства многообразий, данное выше определение необходимо уточнить.

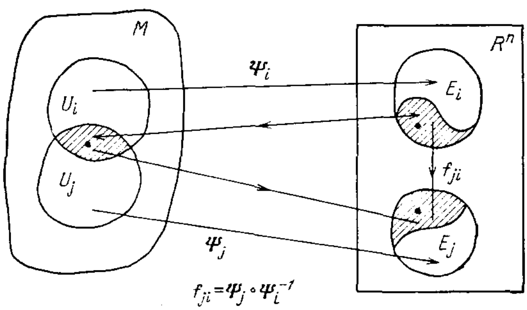

Рис. 6

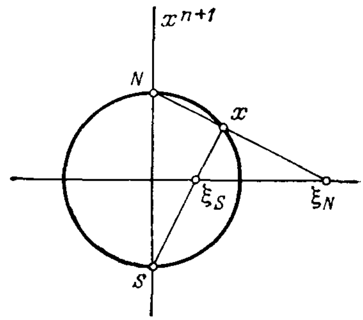

Рис. 7

Атласом n-мерного многообразия M называется семейство открытых множеств $\{U_j\}$, покрывающих M, и таких гомеоморфизмов Ψ_j: $U_j \to E_j$, где E_j — область в F^n, что отображение

$$f_{ji} = \Psi_j \circ \Psi_i^{-1}\colon \Psi_i(U_i \cap U_j) \to \Psi_j(U_i \cap U_j)$$

является гомеоморфизмом (рис. 6).

Пара (U_j, Ψ_j) называется *картой*.

Отображение f открытого множества из F^n в F^m ($f(x) = \{f_1(x^1, \ldots, x^n), \ldots \ldots, f_m(x^1, \ldots, x^n)\}$) называется отображением класса C^r, $r = 1, 2, \ldots, \infty$, если f непрерывно дифференцируема r раз (если все функции f_i дифференцируемы по каждой из координат x^j).

Дифференцируемым многообразием класса C^r называется многообразие, для которого все гомеоморфизмы f_{ji} и $(f_{ji})^{-1} = f_{ij}$ являются отображениями класса C^r. Если $r = \infty$, то многообразие называют *дифференцируемым* или *гладким* многообразием, или просто многообразием.

Пусть дана карта (U_i, φ_i) n-мерного многообразия M в окрестности точки $p \in U_i \subset M$. Декартовы координаты точки $\varphi(p)$ $x^j = x_j(\varphi_i(p))$, $x = \{x^1, \ldots, x^n\} \in F^n$ называются *локальной координатной системой* в U_i, а множество U_i называется *координатной окрестностью*.

В случае евклидова пространства локальные координаты совпадают с обычными декартовыми координатами.

Рассмотрим простой, но нетривиальный пример многообразия — сферу S^n в R^{n+1}, заданную уравнением

$$x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = a^2. \tag{1}$$

Сфера дает пример многообразия, на котором нельзя задать координаты глобально, т. е. на всем многообразии. Однако, выбросив какую-либо точку сферы, можно установить взаимно однозначное соответствие между остальными точками сферы S^n и евклидовым пространством R^n, т. е. ввести локальные координаты. Введение локальных координат можно осуществить с помощью так называемой *стереографической проекции* (рис. 7). Пусть выброшенной точкой является северный полюс сферы S^n с координатами $x_N = \{0, \ldots, 1\}$. Каждой точке множества $U_- = S^n \setminus \{x_N\}$ можно поставить в соответствие точку $\xi = \{\xi^1, \ldots, \xi^n\} \in R^n$ экваториальной плоскости $x^{n+1} = 0$ с помощью луча, исходящего из северного полюса, проходящего через заданную точку сферы x и соответствующую ей точку ξ экваториальной плоскости. Связь между локальными координатами $\xi_N = \{\xi_N^1, \ldots, \xi_N^n\}$ в U_- и декартовыми координатами $x = \{x^1, \ldots, x^{n+1}\}$ сферы S^n в R^{n+1} дается формулой

$$\xi_N^i = \frac{ax^i}{a - x^{n+1}}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Аналогичная формула для стереографической проекции из южного полюса имеет вид:

$$\xi_S^i = \frac{ax^i}{a + x^{n+1}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $\xi_S = \{\xi_S^1, \ldots, \xi_S^n\}$ — локальные координаты в области $U_+ = S^n \setminus \{x_S\}$, $x_S = \{0, \ldots, -1\}$.

Области U_- и U_+ являются координатными окрестностями с локальными координатами ξ_N и ξ_S соответственно.

Атлас $\{U_-, U_+\}$ покрывает всю сферу S^n. Картами этого атласа являются пары (U_-, Ψ_N) и (U_+, Ψ_S), где отображения Ψ_N и Ψ_S заданы соответственно формулами (2) и (3). Гомеоморфизмы $\Psi_N \circ \Psi_S^{-1}$ и $\Psi_S \circ \Psi_N^{-1}$, определенные формулами

$$\xi_N^i = \frac{a^2}{|\xi_S|^2} \xi_S^i, \tag{4}$$

$$\xi_S^i = \frac{a^2}{|\xi_N|^2} \xi_N^i, \tag{5}$$

позволяют переходить в области $U_- \cap U_+$ от локальных координат ξ_S к координатам ξ_N и обратно.

Итак, сфера S^n с выколотой точкой гомеоморфна пространству R^n. Дополним R^n бесконечно удаленной точкой ∞, тогда стереографическая проекция устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками S^n и $R^n \cup \{\infty\}$. Топологическую эквивалентность S^n и $R^n \cup \{\infty\}$ будем обозначать как $S^n = R^n \cup \{\infty\}$.

Пусть заданы m-мерное многообразие M и n-мерное многообразие N класса C^r.

Отображение f: $M \to N$ называется *дифференцируемым отображением класса* C^k $(k \leqslant r)$, если для каждой карты (U_j, φ_j) в M и каждой карты (V_i, Ψ_i) в N отображение из $\varphi_j(U_j)$ в $\Psi_i(V_i)$ есть дифференцируемое отображение (из R^m в R^n) класса C^k. Отображение класса C^∞ будем называть *дифференцируемым отображением*.

Гомеоморфизм f: $M \to N$ называется *диффеоморфизмом*, если f и f^{-1} дифференцируемы, а многообразия M и N *диффеоморфными* (или *гладко эквивалентными*).

Примером дифференцируемых или гладких многообразий являются сферы. Для наглядности гладкость многообразия можно представить как гладкость поверхности какого-либо предмета. Кажется интуитивно ясным, что, если два гладких многообразия гомеоморфны, то они и диффеоморфны, или гладко эквивалентны. Это действительно так в случае обычной сферы S^2 и, например, эллипсоидальной поверхности. Однако Милнор нашел примеры гладких многообразий, которые гомеоморфны семимерной сфере S^7, но не диффеоморфны ей. Это означает примерно следующее. Семимерные многообразия Милнора «на ощупь» такие же гладкие, как и сфера S^7, и «по виду» похожи на сферу S^7 — топологически ей эквивалентны, но нет гладких отображений, переводящих указанные многообразия в сферу S^7. Открытие Милнора явилось значительным событием в математике и не является абсолютно удаленным от физики. Многообразия Милнора — это расслоения с группой SU(2) и базой S^4. Именно для калибровочных полей группы SU(2), определенных на пространственно-временно́м многообразии в виде четырехмерной сферы S^4 (компактифицированного пространства R^4), в теории поля были открыты инстантоны.

Здесь уместно сказать несколько слов о расслоениях, или расслоенных пространствах. Расслоенное пространство представляет собой обобщение прямого произведения пространств. Например, прямоугольник есть прямое произведение двух отрезков, цилиндр — это прямое произведение отрезка I и окружности S^1. Такие пространства, как прямоугольник и цилиндр, называются тривиальными расслоениями. В случае цилиндра окружность S называется базой расслоения, а отрезок I называется слоем. Простейший пример нетривиального расслоения — лист Мёбиуса. В отличие от цилиндра или прямоугольника, лист Мёбиуса не является прямым произведением, однако является таковым локально, т. е. лист Мёбиуса склеивается из прямоугольников топологией расслоенного пространства. Для листа Мёбиуса, как и в случае цилиндра, базой расслоения является окружность S^1, а слоем отрезок I. Нетривиальная топология листа Мёбиуса возникает в результате действия в слое преобразования симметрии отрезка относительно его центра. Дело в том, что когда склеивают лист Мёбиуса из полоски бумаги, то отождествляют концы полоски после их поворота друг относительно друга на 180°. Именно это отличает лист Мёбиуса от цилиндра. Говорят, что в слое действует группа, называемая структурной группой расслоения.

В общем о расслоениях можно сказать следующее. Расслоенное пространство представляет собой обобщение прямого произведения пространств, которое в данной терминологии называется тривиальным расслоением. Сечение в нетривиальном расслоении — это естественное обобщение понятия функции (векторного поля) на тот случай, когда функцию нельзя задать на всем пространстве, называемом базой расслоения. Такая ситуация может возникнуть, когда база расслоения (например, сфера) не допускает введения единой системы координат без особых точек. В этом случае сечения задаются на перекрывающихся окрестностях, покрывающих базу (для сферы — это южная и северная полусферы), и в областях перекрытия (на экваторе в случае сферы) сечения склеиваются топологией расслоенного пространства. Построив, например, главное расслоение, можно многое узнать об общих свойствах физической теории еще до построения лагранжиана. Для этого достаточно рассмотреть только базу расслоения (пространственно-временно́е многообразие) и структурную группу расслоения (группу симметрии физической теории).

5. ТОПОЛОГИЯ МОДЕЛЕЙ n-ПОЛЯ

Вернемся теперь к рассмотренным ранее моделям **n**-поля. Совокупность единичных векторов $\mathbf{n} \in R^{n+1}$ есть n-мерная сфера S^n. Если направления **n** и —**n** эквивалентны, то сфера превращается в другое многообразие, называемое вещественным проективным пространством, которое обозначается символом RP^n. RP^n — это сфера S^n с отождествленными диаметрально противоположными точками. Другое представление RP^n — это совокупность всех прямых, проходящих через начало координат в пространстве R^{n+1}.

Таким образом для рассмотренных моделей имеем отображения:

1. а) Двумерный магнетик — **n**: $R^2 \to S^1$.
   б) Двумерный нематик — **n**: $R^2 \to RP^1$.
2. а) Трехмерный магнетик — **n**: $R^3 \to S^2$.
   б) Трехмерный нематик — **n**: $R^3 \to RP^2$.
3. а) Планарный магнетик — **n**: $R^2 \to S^2$.
   б) Планарный нематик — **n**: $R^2 \to RP^2$.

Следует отметить, что окружность S^1 и проективная прямая RP^1 топологически эквивалентны. Это видно из следующего построения. Для получения RP^1 нужно взять только полуокружность и склеить ее концы. В результате опять получается окружность. Однако учет преобразования симметрии, как было видно на примере дисклинаций, делает магнетик и нематик различимыми.

В высших размерностях сфера S^n и RP^n топологически не эквивалентны. В частности, в магнетике вообще отсутствуют линейные особенности.

Планарная модель нематика или магнетика дает пример неособой конфигурации поля $\mathbf{n}$. Неособый вихрь получается при задании на бесконечности однородного распределения поля $\mathbf{n}$: $\mathbf{n} \to \mathbf{n}_0 = \mathrm{const}$ при $|\mathbf{r}| \to \infty$. Физически это означает стремление распределения поля $\mathbf{n}$ к основному или вакуумному состоянию на бесконечности. Математически указанные граничные условия определяют компактификацию плоскости R^2, т. е. присоединение к ней бесконечно удаленной точки. Так как $R^2 \cup \{\infty\} = S^2$, то неособые вихри в планарных моделях дают пример отображений сферы в сферу или в RP^2

$$\mathbf{n}\colon S^2 \to S^2 \quad \text{или} \quad \mathbf{n}\colon S^2 \to RP^2.$$

Задание аналогичных граничных условий в трехмерном случае: $\mathbf{n} \to \mathbf{n}_0$, при $|\mathbf{r}| \to \infty$, превращает R^3 в сферу S^3 и приводит к отображениям

$$\mathbf{n}\colon S^3 \to S^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}\colon S^3 \to RP^2$$

для магнетика и нематика соответственно. Простейший нетривиальный пример полевой конфигурации для отображения S^3 в S^2 или RP^2 — неособый кольцевой вихрь.

Более точное исследование рассмотренных выше отображений требует привлечения теории гомотопий.

6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГОМОТОПИЙ

Гомотопией или *деформацией* называется семейство отображений f_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ класса C^k пространства X в пространство Y. Два отображения f: $X \to Y$ и g: $X \to Y$ называются *гомотопными*, если существует такая гомотопия f_t: $X \to Y$, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Множество гомотопных отображений образует гомотопический класс отображений X в Y, а множество всех отображений X в Y разбивается, таким образом, на *гомотопические классы отображений X в Y*.

Отображение f пространства X в некоторую его точку x_0 (f: $X \to x_0$) называется *постоянным отображением*. Отображение пространства X в себя называется *тождественным отображением* и обозначается символом 1_X: $X \to X$.

Пример. Отображения $f(x) = x$ и $g(x) = 0$ из R^n в R^n гомотопны. Гомотопия задается формулой $f_t(x) = (1 - t)\,x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, из которой следует, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$ ($f_0 = 1_{R^n}$ — тождественное отображение, f_1: $R^n \to 0$ — постоянное отображение R^n в его начало координат).

Пусть заданы два пространства X и Y и два отображения f: $X \to Y$ и g: $Y \to X$. Пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными*, если найдутся такие отображения f и g, что композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям 1_Y и 1_X соответственно ($(f \circ g)(y) = f(g(y))$, $y \in Y$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in X$). Гомотопическую эквивалентность X и Y будем обозначать как $X \sim Y$.

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение X гомотопно постоянному. Как показано выше, пространство R^n стягиваемо или гомотопически эквивалентно одной точке $x_0 \in R^n$: $R^n \sim x_0$.

Любые два отображения произвольного пространства в стягиваемое гомотопны, а следовательно, любое отображение гомотопно постоянному. Это достаточно очевидное утверждение важно для последующих построений.

Пространство называется *односвязным*, если любой замкнутый контур в этом пространстве можно стянуть в точку.

Примеры. Окружность S^1 не односвязна. Сфера S^n для $n \geqslant 2$ односвязна. Пространство RP^2 или сфера S^2 с отождествленными диаметрально противоположными точками не односвязны, так как любой контур, соединяющий диаметрально противоположные точки на такой сфере, замкнут, но его нельзя стянуть в точку. В этом, в частности, проявляется отличие магнетика от нематика.

Важным обобщением понятия односвязности является *n-связность*, т. е. стягиваемость в точку n-мерных замкнутых поверхностей, в качестве которых можно взять n-мерные сферы S^n. Стягиваемое пространство (такое, как R^m) является n-связным для каждого n.

Таким образом ясно, что отображения сферы S^m в некоторое пространство X для каждого $m \geqslant 0$ (нульмерная сфера $S^0 = \{-1, 1\}$, т. е. граница интервала $[-1, 1]$) характеризуют определенные топологические и гомотопические свойства пространства X.

Рассмотрим множество гомотопических классов отображений $[S^m, X]$ сферы S^m в топологическое пространство X. Если $X = R^l$, то множество отображений $[S^m, R^l]$ гомотопно постоянным отображениям или, другими словами, сфера любой размерности в евклидовом пространстве стягивается в точку.

В качестве нетривиального примера рассмотрим множество гомотопических классов отображений $[S^1, S^1]$ окружности в окружность. Если представить окружность как кривую $|z| = 1$ в комплексной плоскости, то примером отображения окружности в себя является отображение $z \to z^n$. Тогда каждому целому n соответствует гомотопический класс отображений из множества $[S^1, S^1]$ или, иначе, всякое отображение $S^1 \to S^1$ гомотопно отображению $z \to z^n$ для некоторого n. Наглядно число n характеризует гомотопический класс отображения окружности в окружность, для которого число n есть число витков в намотке первой окружности на второй (нитка $\to$ катушка) причем одному и тому же классу принадлежат всевозможные намотки с различной длиной и формой петель (без узлов).

Таким образом, имеет место взаимнооднозначное соответствие между гомотопическими классами отображения $S^1 \to S^1$ и группой целых чисел Z.

Напомним определение группы. Множество G называется *группой*, если в нем определена *операция умножения*: $g \cdot h \in G$ для всех $g, h \in G$, причем: а) операция умножения *ассоциативна* ($f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$, где $f, g, h \in G$), б) существует *единичный элемент* e, для которого $e \cdot g = g \cdot e$ для любого $g \in G$ и в) для каждого $g \in G$ существует *обратный элемент* g^{-1} такой, что $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Группа называется *абелевой* или *коммутативной*, если $g \cdot h = h \cdot g$. В этом случае вместо $g \cdot h$ часто пишут $g + h$, единичный элемент обозначают символом 0, а обратный элемент к g символом $-g$.

Примеры. Множество всех целых чисел Z — абелева группа по сложению. Множество $R \setminus \{0\}$ — абелева группа по умножению, множество $Z_2 = \{-1, 1\}$ — абелева группа по умножению.

На примере отображения $S^1 \to S^1$ было показано, что элементы множества $[S^1, S^1]$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с элементами группы целых чисел Z. Оказывается, что множеству гомотопических классов отображений $[S^n, X]$ сферы произвольной размерности n в пространство X также соответствует некоторая группа, структура которой зависит от размерности сферы S^n и топологии X. Поэтому для множества $[S^n, X]$ вводят специальное обозначение $\pi_n(X)$, и множества $\pi_n(X)$ называют *n-мерными гомотопическими группами*. Для $n \geqslant 2$ группы $\pi_n(X)$ абелевы. В рассмотренном выше примере $X = S^1$ и $\pi_1(S^1) = Z$. Последнее означает, что группа $\pi_1(S^1)$ изоморфна группе целых чисел. Группа $\pi_n(X)$ для $n = 1$ имеет специальное название: $\pi_1(X)$ называют фундаментальной группой пространства X.

Изоморфизм $\pi_n(X) = 1$ или $\pi_n(X) = 0$ (в случае абелевой группы) означает, что группа $\pi_n(X)$ тривиальна, т. е. изоморфна группе, состоящей только из единичного элемента. Для любого стягиваемого пространства X $\pi_n(X) = 1$ для всех n. Как и в случае отображения $S^1 \to S^1$, для отображения $S^n \to S^n$ имеем изоморфизм $\pi_n(S^n) = Z$. Так как любой контур по сфере S^2 можно стянуть в точку, то $\pi_1(S^2) = 1$ и вообще $\pi_i(S^n) = 1$ для $i < n$.

Для гомеоморфных пространств гомотопические группы изоморфны. Например, $\pi_1(RP^1) = \pi_1(S^1) = Z$.

Изоморфизм гомотопических групп имеет место также для гомотопически эквивалентных пространств. Например,

$$\pi_1(R^2 \setminus x_0) = \pi_1(R^3 \setminus R) = \pi_1(S^1) = Z,$$

$$\pi_2(R^3 \setminus x_0) = \pi_2(S^2) = Z.$$

Группа $\pi_1(RP^2) = Z_2$. То, что фундаментальная группа проективного пространства RP^2 состоит из двух элементов, означает следующее: на сфере с эквивалентными диаметрально противоположными точками существует только два класса замкнутых путей. Все замкнутые контуры, которые стягиваются в точку на обычной сфере, соответствуют единичному элементу группы $\pi_1(RP^2)$. Нетривиальному элементу соответствуют контуры, соединяющие диаметрально противоположные точки сферы. Все такие контуры замкнуты, и их нельзя стянуть в точку. Они гомотопны друг другу и гомотопны, например, некоторой большой полуокружности. Укажем еще, что $\pi_i(RP^2) = \pi_i(S^2)$ для $i > 1$.

Несмотря на наглядность определения гомотопических групп, их вычисление даже в простейших случаях является весьма сложной задачей. В настоящее время гомотопические группы вычислены для большого числа пространств.

7. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПОЛЕ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Упорядоченные системы, такие, как магнетики, жидкие кристаллы, сверхтекучие жидкости и т. д., описывают на языке параметра порядка. В случае магнетика параметр порядка — единичный вектор $\mathbf{n}$, а в случае нематика — директор. Область значений параметра порядка, называемая пространством параметра порядка, в этих случаях есть S^2 и RP^2 соответственно. Область определения — координатное пространство R^3. Наличие точечных или линейных особенностей в поле параметра порядка меняет топологию координатного пространства. В случае точечной особенности параметр порядка не определен в некоторой точке, например в начале координат. С топологической точки зрения это означает, что вместо R^3 имеем $R^3 \setminus \{0\} \sim S^2$. В случае линейной особенности из R^3 удаляется линия $R : R^3 \setminus R \sim S^1$. Таким образом, наличие линейных и точечных особенностей приводит соответственно к отображениям окружности S^1 и сферы S^2 в пространство параметра порядка M. Следовательно, группы $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ характеризуют топологические особенности в поле параметра порядка. Если, например, $\pi_1(M) = 1$, то любое распределение поля параметра порядка с линейной особенностью можно непрерывной деформацией или гомотопией перевести в однородное распределение. Такие особенности называют топологически неустойчивыми.

В случае магнетика пространство параметра порядка $M = S^2$ и $\pi_1(S^2) = 1$ и, следовательно, нет устойчивых линейных особенностей в поле вектора $\mathbf{n}$ (в трехмерном магнетике). В двумерном магнетике $M = S^1$ и вместо линейных особенностей имеем точечные, которые также характеризуются группой π_1. Но теперь группа $\pi_1(S^1) = Z$, и каждому целому числу N, описывающему тот или иной гомотопический класс отображения S^1 в S^1, соответствует точечная особенность, для которой целое число N равно числу вращений вектора $\mathbf{n}$ на 2π при обходе по замкнутому контуру вокруг особенности (на языке директора — это дисклинация с четным индексом Франка).

При описании точечной особенности в трехмерном магнетике приходим к отображению S^2 в S^2 и группе $\pi_2(S^2) = Z$. И вообще точечная особенность в $(n+1)$-мерном единичном векторном поле $\mathbf{n}$, определенном на пространстве $R^{n+1} \setminus x_0 \sim S^n$, характеризуется отображением S^n в S^n (так как совокупность всех единичных $(n+1)$-мерных векторов является сферой S^n) и группой $\pi_n(S^n) = Z$. Целое число $N \in Z$, с которым связан каждый гомотопический класс отображения $S^n \to S^n$, называется *степенью отображения* векторного поля и обозначается символом $\deg \mathbf{n}(\mathbf{r})$. Степень отображения указывает, сколько раз вектор $\mathbf{n}$ пробегает по сфере S^n при движении по области $R^{n+1} \setminus x_0 \sim S^n$. Если $\deg \mathbf{n} = 0$, то векторное поле не имеет особенности и любые неоднородные распределения векторного поля можно непрерывной деформацией перевести в однородное распределение ($\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_0 = \mathrm{const}$ во всем пространстве R^{n+1}). В случае, когда $\deg \mathbf{n} = 1$, имеем, например, радиальное распределение векторного поля (еж) с особенностью в начале координат. Никакой непрерывной деформацией нельзя перевести такое распределение в однородное, и вообще с $\deg \mathbf{n} \neq 1$. Степень отображения является *гомотопическим* (и топологическим) *инвариантом*, т. е. величиной, не меняющейся при гомотопиях отображения $S^n \to S^n$. Отметим, что определение степени отображения можно обобщить на случай дифференцируемых отображений многообразий одинаковой размерности.

В двумерном нематике пространство параметра порядка $M = RP^1 = S^1$ и $\pi_1(RP^1) = Z$. Отличие от магнетика состоит в том, что целое число N, характеризующее некоторый гомотопический класс отображения S^1 в RP^1, равно числу поворотов директора $\mathbf{n}$ на угол π при обходе по замкнутому контуру вокруг особой точки, т. е. в двумерном нематике существуют дисклинации как с четным, так и с нечетным индексом Франка.

Для трехмерного нематика $M = RP^2$ и $\pi_1(RP^2) = Z_2$, а значит, имеем один тип устойчивых линейных особенностей — это дисклинации с нечетным индексом Франка. Их можно преобразовывать друг в друга с помощью гомотопии, и с топологической точки зрения они не различимы. Физически дисклинации отличаются по энергии (энергия зависит от индекса Франка). Точечные особенности в трехмерном нематике такие же, как и в магнетике (с точностью до эквивалентности направлений $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$).

В планарном магнетике с граничными условиями $\mathbf{n} \to \mathbf{n}_0$ при $|\mathbf{r}| \to \infty$ имеем отображение $R^2 \cup \{\infty\} = S^2$ в $M = S^2$, характеризуемое группой $\pi_2(S^2) = Z$. Таким образом, неособые вихри в планарном магнетике, как и точечные особенности в трехмерном магнетике, классифицируются целыми числами или степенью отображения S^2 в S^2.

В трехмерном случае с однородными граничными условиями на бесконечности ($\mathbf{n} \to \mathbf{n}_0$ при $|\mathbf{r}| \to \infty$) приходим к отображению $R^3 \cup \{\infty\} = S^3$ в S^2, называемому отображением Хопфа, и группе $\pi_3(S^2)$. Группа $\pi_3(S^2) = Z$, но показать это труднее, чем в рассмотренных выше случаях. Целое число, характеризующее отображение S^3 в S^2, называется *инвариантом Хопфа*. Простейшей нетривиальной конфигурацией поля $\mathbf{n}$ является неособый кольцевой вихрь с инвариантом Хопфа, равным единице. Все сказанное в равной мере относится к нематикам, для которых надо лишь учесть эквивалентность направлений $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше было дано описание основных понятий современной алгебры и топологии, вошедших в последнее время в физику. На примере классификации особенностей в поле параметра порядка магнетиков и нематиков было продемонстрировано применение топологических методов при решении физических задач. И теперь необходимо подчеркнуть еще раз то, о чем говорилось вначале. Введение в физику языка и методов топологии связано с развитием в физике новых идей. Пожалуй, наиболее наглядным (и весьма существенным) следствием проникновения топологии в физику явилось то, что физика обогатилась не только новыми методами, но и новыми физическими величинами, примером которых являются топологические инварианты. В теории поля топологические инварианты получили название топологических квантовых чисел, или топологических зарядов. Для них выполняются определенные законы сохранения, что делает их похожими на такие величины, как электрический заряд, спин, изоспин и т. д.

В упорядоченных системах (магнетиках, жидких кристаллах и сверхтекучих жидкостях) топологический заряд является наблюдаемой величиной (физический смысл топологического заряда соответствует наглядной геометрической интерпретации). В физике элементарных частиц ситуация оказывается гораздо более сложной. Протяженные объекты (вихри, монополи, инстантоны и др.), являющиеся носителями топологических квантовых чисел или топологического заряда, довольно естественно появляются в классических полевых теориях, но наделение этих объектов квантовомеханическими свойствами сталкивается с большими трудностями. В настоящее время не существует однозначной физической интерпретации топологических протяженных объектов. Одни из них (например, монополи) рассматривают как некоторые экзотические элементарные частицы, другие служат моделями адронов. Инстантон, например, является точным решением уравнений Янга — Миллса и с математической точки зрения обладает привлекательными свойствами. С другой стороны, инстантон описывает процесс туннелирования между квантовомеханическими вакуумами теории Янга — Миллса, что приводит к нарушению некоторых симметрий (например, четности). Одним из следствий инстантонных эффектов является предсказание нового легкого бозона, названного аксионом.

Список топологических результатов в теории поля велик и продолжает расти. Некоторые сравнительно недавние результаты успели уже оказать существенное влияние на физическую идеологию, но многие топологические результаты ждут еще своей интерпретации в квантовой теории и выяснения их связи с наблюдаемыми величинами.

Важно также отметить, что все, о чем шла речь выше, является только частью процесса геометризации физики, который протекает в последние годы, причем частью, которая активно взаимодействует с другими составными частями этого процесса.

Можно считать, что начало этому процессу положено в общей теории относительности, в которой была дана геометрическая интерпретация гравитационного взаимодействия. Современный взгляд на то, что переносчиками взаимодействий являются геометрические объекты, называемые калибровочными полями, был сформулирован Янгом и Миллсом в 1954 г. Калибровочные поля, или поля Янга — Миллса, аналогичны вектор-потенциалу в электродинамике, а значит, можно было предположить, что поля Янга — Миллса, как и фотоны, должны быть переносчиками какого-то взаимодействия. Эта идея интенсивно разрабатывалась, и в 1967 г. Вайнберг и Салам независимо друг от друга построили теорию слабых и электромагнитных взаимодействий, в которой «фотонам» Янга — Миллса, названным $W^{\pm}$- и Z^0-бозонами, отводилась роль переносчиков слабых взаимодействий (типа β-распада нейтрона). В 1973 г. теория Вайнберга — Салама получила первое, правда, косвенное экспериментальное подтверждение. Оставалось обнаружить непосредственно калибровочные бозоны. Это было сделано в 1983 г.

Протяженные объекты — это объекты калибровочных теорий, таких, как теория Вайнберга — Салама или теория сильных взаимодействий, называемая хромодинамикой, т. е. теорий, которые в той или иной мере находят экспериментальное подтверждение. Обнаружение в таких теориях нетривиальных топологических следствий как говорит о богатом содержании калибровочных теорий, так и ,возможно, указывает будущее развитие теории элементарных частиц.

В заключение укажем ссылки на литературу, которая может быть полезна при изучении вопросов, затронутых в данной статье.

Одним из лучших руководств по общей топологии считается книга Келли [1], хотя, возможно, для первоначального знакомства с топологией больше подходят книги [2,3]. Вполне доступное изложение методов дифференциальной геометрии, которые находят свое применение в физике, дано в недавно вышедшей, но уже популярной книге Шутца [4]. Прекрасное изложение теории гомотопий можно найти в книге Дубровина, Новикова и Фоменко [5], где также рассмотрены многие математические вопросы, тесно связанные с физикой. Некоторые сведения о многообразиях и гомотопических группах можно почерпнуть из обзора Ольшанецкого [6], в котором также содержатся дополнительные литературные указания. В брошюре Воловика и Минеева [7] подробно описан топологический подход к исследованию пространственно неоднородных состояний типа вихрей и дисклинаций в упорядоченных системах (магнетиках, нематиках, сверхтекучем He^3 и др.). С калибровочными теориями можно познакомиться по книгам [8,9]. Монополям и инстантонам посвящена статья Прасада, перевод которой напечатан в сборнике [10]. Вихри или инстантоны Белавина — Полякова подробно рассмотрены в обзоре Переломова [11].

В [12] даны основные понятия алгебры и топологии: 1. Множества и отображения. 2. Топологические пространства и непрерывные отображения. 3. Многообразия. 4. Топологические группы и группы Ли. 5. Касательные пространства дифференцируемых многообразий. 6. Теория гомотопий (гомотопические группы, степень отображения, инвариант Хопфа).

Институт физики АН УССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келли Дж. Л. Общая топология.— М.: Наука, 1968.
2. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии.— М.: Мир, 1967.
3. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология.— М.: Мир, 1972.
4. Шутц Б. Геометрические методы математической физики.— М.: Мир, 1984.
5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979; 2-изд., перераб.— 1986.
6. Ольшанецкий М. А. Краткий путеводитель для физиков по современной геометрии//УФН. 1982. Т. 136. С. 421.
7. Воловик Г. Е., Минеев В. П. Физика и топология.— М.: Знание, 1980.
8. Тейлор Дж. Калибровочные теории слабых взаимодействий.— М.: Мир, 1978.
9. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля.— М.: Наука, 1980.
10. Прасад М. К. Инстантоны и монополи в теориях калибровочных полей Янга—Миллса//Геометрические идеи в физике.— М.: Мир, 1983.— С. 64.
11. Переломов А. М. Решения типа инстантонов в киральных моделях //УФН, 1981. Т. 134. С. 577.
12. Рожков С. С. Алгебра и топология для физических приложений: Препринт ИФ АН УССР № 30.—Киев, 1985; Теория гомотопий и топология моделей n-поля: Препринт ИФ АН УССР № 31.— Киев, 1985.