

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

54-138

ФРАКТАЛЬНЫЕ КЛАСТЕРЫ**Б. М. Смирнов****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	177
2. Фрактальные структуры	178
3. Свойства фрактальных кластеров	186
4. Динамика процессов ассоциации аэрозолей	195
5. Фрактальные кластеры в физических процессах и явлениях	202
6. Фрактальные кластеры и шаровая молния	207
7. Заключение	217
Список литературы	217

1. ВВЕДЕНИЕ

Фрактальными кластерами, или фрактальными агрегатами, принято называть структуры, которые образуются при ассоциации твердых аэрозолей в газе в случае диффузионного характера их движения. Фрактальный кластер имеет характерную ветвистую структуру. В последние годы проводилось интенсивное исследование таких структур методами вычислительной физики. Модельные вычислительные эксперименты позволили получить достаточно полное представление о таких структурах и характере их образования.

Фрактальные кластеры, образуемые при ассоциации твердых частиц, и приводящий к этому процесс имеют связи и аналогии с рядом других физических систем и процессов. Сюда относятся процессы и структуры при образовании кластеров и затвердевании коллоидных растворов, коагуляция, процессы перколяции, образование полимеров, диэлектрический пробой, некоторые биофизические процессы и т. д. Хотя каждой из этих проблем присущи свои специфические особенности, общие представления о фрактальных кластерах создают позиции, с которых можно проводить более глубокий анализ исследуемых систем и явлений. Это отвечает более высокому уровню проводимых исследований.

Фрактальные кластеры имеют прямое отношение к процессам ассоциации твердых частиц — образованию кластеров в облаках, коагуляции частиц в дымах, образованию структур при релаксации металлического пара и т. д. Такие процессы могут существенно влиять на ход некоторого суммарного процесса или явления. Однако, поскольку они представляют промежуточную фазу суммарного процесса, из-за трудностей регистрации и анализа рассматриваемых эффектов они могут быть не выявлены. Понимание физики образования фрактальных структур изменяет отношение и к исследованию таких систем. Опыт показал, что основные экспериментальные исследования фрактальных структур были проведены на базе теоретических представлений о таких системах. Поэтому расширение этих представлений будет способствовать и развитию экспериментальных исследований в данной области,

а следовательно, и формированию реальной физической картины рассматриваемых структур и процессов.

Фрактальные кластеры интересны и в плане понимания природы шаровой молнии. Среди многих существующих моделей шаровой молнии только модель, согласно которой активное вещество шаровой молнии имеет структуру фрактального кластера, способна объяснить сферическую форму шаровой молнии и сохранение ее размера в процессе эволюции. Следствия, вытекающие из фрактальной структуры активного вещества шаровой молнии, позволяют проанализировать некоторые свойства шаровой молнии и наметить дальнейшие направления исследования этой проблемы.

Цель данного обзора — представить информацию по теоретическому исследованию фрактальных кластеров и динамике их образования, а также проанализировать результаты анализа экспериментов по образованию таких структур и реальные системы, где они проявляются.

2. ФРАКТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

Представим способ построения фрактального кластера, образованного из отдельных частиц, в простейшей постановке задачи. Для этого ограничимся двумерным случаем и построим кластер согласно модели Виттена — Сандера¹. В соответствии с этой моделью разобьем ограниченное двумерное пространство на множество квадратных ячеек, поместим в него одну частицу и будем добавлять по одной частице. Каждая новая частица передвигается в соседнюю клетку случайным образом — ее путь выбирается методом Монте-Карло. Если частица достигла границы пространства, она отражается от нее. Движение частицы продолжается до тех пор, пока она не окажется по соседству с одной из частиц кластера. Тогда она останавливается и закрепляется в данной ячейке, а в пространство запускается следующая частица. Таким способом «выращивается» фрактальный кластер*). Модель Виттена — Сандера сыграла важную роль в исследовании фрактальных кластеров, ибо она дала простой способ создания фрактального кластера. С появлением модели Виттена — Сандера началось широкое изучение таких структур, которое в течение относительно небольшого промежутка времени позволило создать четкое физическое представление об этих системах.

Фрактальный кластер обладает общими свойствами фрактальных систем²⁻⁴. Далее мы введем параметры, которыми удобно описывать такие системы, ориентируясь на геометрические фрактальные системы — тему нашей статьи. В качестве простой иллюстрации фрактальной системы, которая близка к исследуемым далее объектам, выберем береговую линию². Давайте измерим длину береговой линии между двумя точками. Поскольку береговая линия изрезана, результат зависит от масштаба, который мы возьмем за основу. Например, в первом измерении мы расставим вешки на границе береговой линии так, чтобы расстояние между соседними вешками равнялось 1 км. Длину береговой линии в километрах примем равной числу вешек. Следующее измерение мы проведем подобным образом, но расстояние между соседними вешками сделаем в 10 раз меньше. В третьем измерении мы пройдем береговую линию ногами, стараясь не удаляться от береговой линии на расстояние, скажем, более 1 м. Длину траектории выбранного пути мы примем за длину береговой линии. Наконец, в последнем случае доверим измерение береговой линии муравью, который проползет вдоль нее, удаляясь от границы не более, чем на длину своего тела. Длину траектории пройденного им пути примем за длину береговой линии. Ясно, что в каждом случае мы получим свой результат, ибо чем меньше масштаб, тем в большей степени

*) Отметим, что кластером принято называть большое число связанных атомов или молекул, которые внутри этой системы сохраняют свою индивидуальность. В последнее время этот термин распространился и на системы, состоящие из большого числа связанных макроскопических частиц.

будет учитываться изрезанность береговой линии. Запишем полученную в каждом случае длину береговой линии L в виде:

$$L = a \left(\frac{R}{a} \right)^D, \quad (2.1)$$

где a — величина используемого масштаба, R — расстояние между рассматриваемыми точками по прямой. Параметр D носит название фрактальной размерности.

Рассмотрим один из простейших случаев создания фрактальных структур — так называемые фигуры Коха. Для этой цели берем отрезок прямой и по определенному алгоритму (рис. 1) превращаем его в ломаную линию, состоящую из отрезков одинаковой длины. Следующая операция состоит

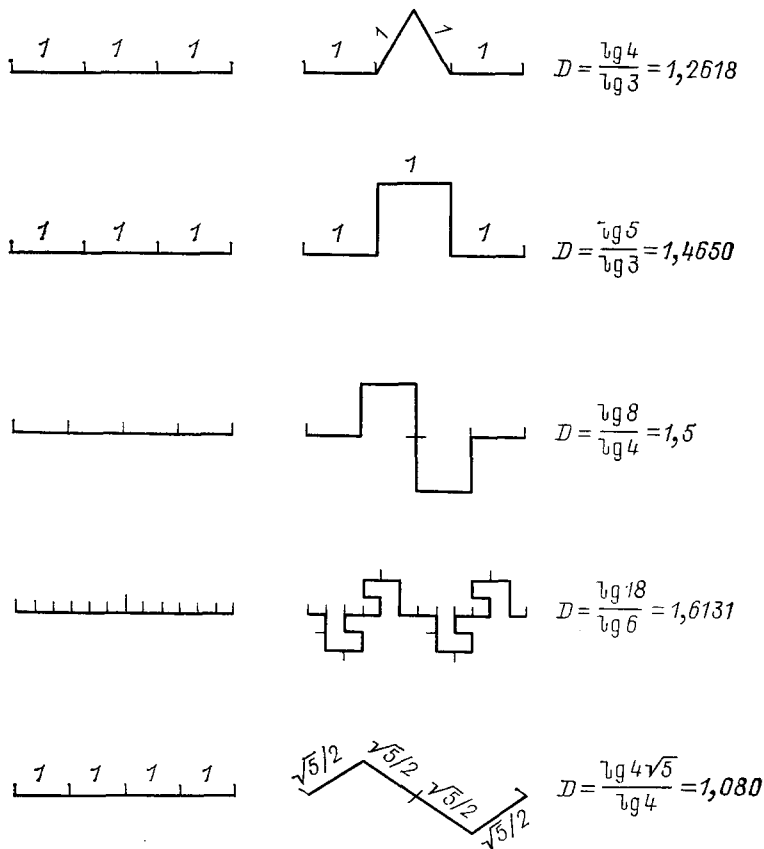


Рис. 1. Разные варианты элементов фигур Коха и соответствующая им фрактальная размерность

в преобразовании каждого отрезка в соответствии с тем же алгоритмом и характеризуется дроблением масштаба. Далее по тому же закону преобразуем каждый из новых отрезков, тем самым переходя к более мелкому масштабу. Эта операция может продолжаться многократно и создает ажурную линию с мелкой структурой. Пример такой линии при четырехкратном преобразовании отрезка приведен на рис. 2. В соответствии с выбранным алгоритмом каждая операция соответствует выбору масштаба в четыре раза меньшему и после преобразования появлению восьми отрезков. После четырехкратного преобразования происходит увеличение длины ломаной линии на рис. 2 в $2^4 = 16$ раз, а масштаб уменьшается в $4^4 = 256$ раз.

Теперь возьмем проволоку, разобьем ее на большое число одинаковых участков длиной l и пронумеруем эти участки. Построим из проволоки фигуру Коха с минимальным масштабом a , превышающим длину отдельного участка. Введем корреляционную функцию

$$C(r) = \frac{1}{N} \sum_i \rho(\mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}) = \frac{\langle \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \rangle}{\langle \rho(\mathbf{r}') \rangle}, \quad (2.2)$$

где N — число участков, i — номер участка, ρ — плотность, которая равна единице в занятой точке и нулю в точке, не занятой проволокой. В дальнейшем при рассмотрении кластера участки проволоки мы заменим частицами, из которых он составлен.

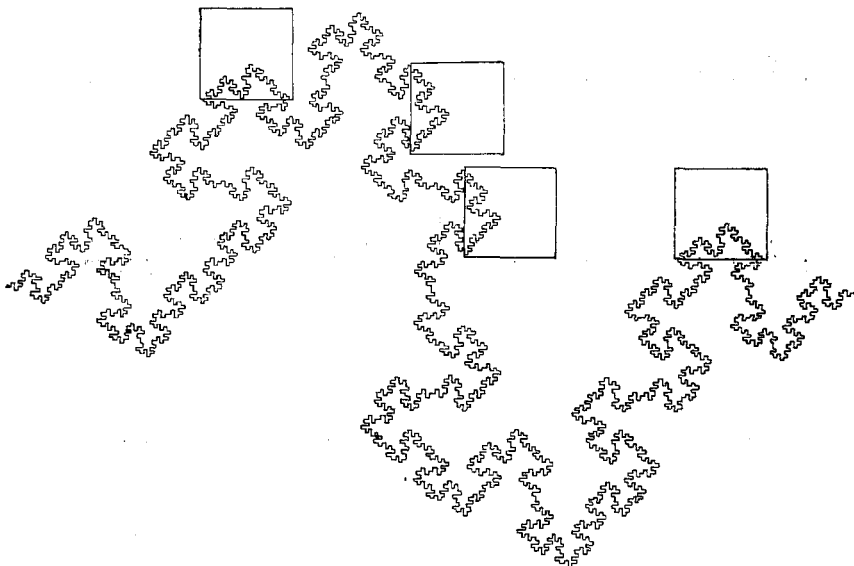


Рис. 2. Фигура Коха, полученная из отрезка четырехкратным преобразованием согласно алгоритму третьего примера на рис. 1.

Внутри квадратов заключены одинаковые куски кластера.

Если немного нарушить правильную структуру фигуры Коха и усреднить по углам вектора \mathbf{r} , то корреляционная функция будет соответствовать средней плотности проволоки на расстоянии r от занятых точек. Поскольку масса проволоки в сфере радиуса r , проведенной из занятой точки ($r \gg a$), пропорциональна r^D , то средняя плотность на этом расстоянии пропорциональна r^{D-d} , где d — размерность пространства, в которое помещена проволока. Таким образом, корреляционная функция

$$C(r) = \frac{\text{const}}{r^\alpha}, \quad (2.3)$$

где r много больше длины минимальной структуры линии и

$$D_\alpha = d - \alpha \quad (2.4)$$

Перейдем к исследуемому фрактальному кластеру. Он состоит из набора «склеенных» частиц, размер которых (или размер ячеек, в которых они находятся) значительно меньше размера кластера. Такой кластер представляет собой набор ветвистых связанных линий, минимальный масштаб структуры которых порядка размера частицы a (рис. 3). Поэтому в области размеров

$$R \gg r \gg a, \quad (2.5)$$

где R — размер кластера, корреляционная функция кластера (2.2) удовлетворяет зависимости (2.3). На рис. 4 представлена корреляционная функция для фрактального кластера, собранного в соответствии с моделью Виттена — Сандера¹. Этот рисунок подтверждает принадлежность фрактального кластера к фрактальным структурам.



Рис. 3. Типичный фрактальный кластер, полученный в машинном эксперименте при стимулировании процесса ассоциации твердых частиц в рамках модели Виттена — Сандера¹

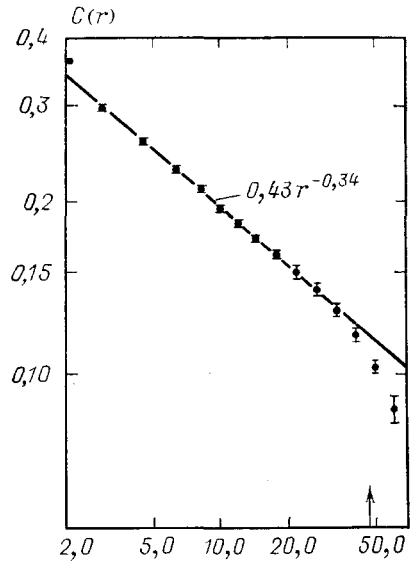


Рис. 4. Корреляционная функция (2.2), усредненная по шести кластерам, которые получены в рамках модели Виттена — Сандера¹.

Величины выражены в единицах постоянной решетки, стрелка указывает положение среднего радиуса гирации, а ошибка отвечает средней статистической ошибке для шести кластеров

Однако фрактальный кластер как геометрическая система имеет более простой физический смысл, ибо эта система существует в координатном пространстве. Одно из следствий способа его образования — средняя плотность частиц в кластере $\rho(r)$ по мере удаления от центра падает по закону (2.3), т. е. имеет вид

$$\rho(r) = \frac{\text{const}}{r^\alpha}, \quad (2.6)$$

где r — расстояние от центра. Отсюда можем найти связь между размером кластера R^*) и числом частиц N в нем:

$$N \sim R^{D_\beta}, \quad R \sim N^\beta, \quad \beta = \frac{1}{D_\beta}, \quad (2.7)$$

причем фрактальная размерность D_β должна совпадать с величиной D_α в формуле (2.4).

Фрактальные системы обладают свойством самоподобия. Именно, если в окрестности точки, занятой кластером, выделить область относительно небольшого объема, то попадающие в нее участки кластера будут подобными в физическом смысле этого слова. Именно, для кластера правильной формы по этому закону можно выделить одинаковые участки. В подтверждение этого на рис. 2 выделено несколько областей — квадратов, в которых нахо-

*) Часто в качестве параметра, характеризующего размер кластера, используют радиус гирации, который вводится на основе соотношения $R_g = (\overline{R^2})^{1/2}$, где R — расстояние частицы кластера от его центра масс, черта сверху означает усреднение по распределению частиц в кластере.

дятся одинаковые куски кластера. В случае кластера со случайным расположением частиц свойство самоподобия следует понимать статистически — если в разных частях кластера мы вырежем большое число кусков, находящихся в одинаковом объеме, то в среднем они будут содержать одинаковое число частиц. Такое утверждение следует непосредственно из соотношений (2.2) и (2.3), если мы их применим к отдельным частям кластера.

Отметим, что свойство самоподобия фрактального кластера находится в кажущемся противоречии с вытекающим из формулы (2.3) утверждением,

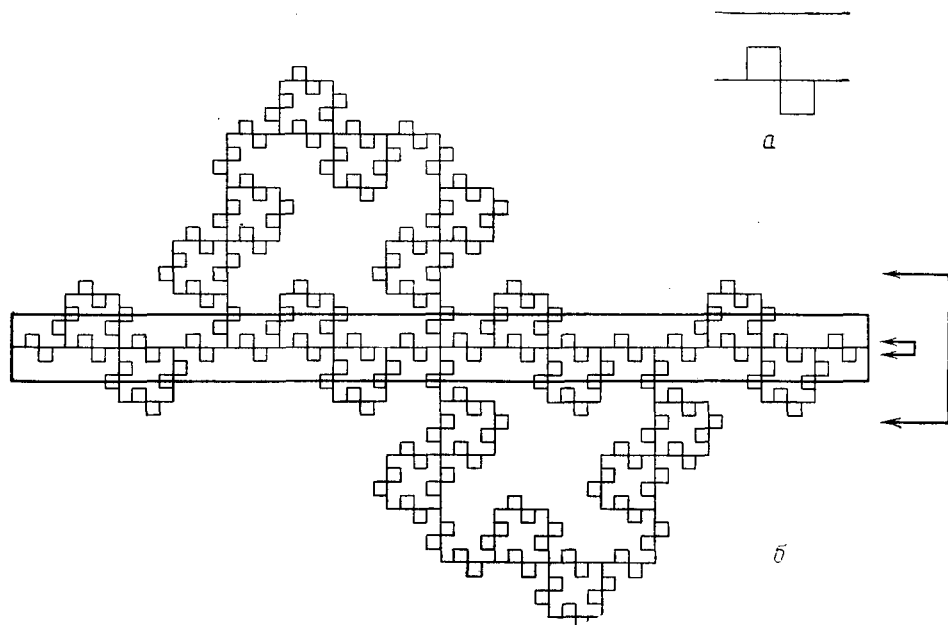


Рис. 5. Фигура Коха с фрактальной размерностью $D = 1,66$, близкой к фрактальной размерности двумерного кластера в модели Виттена — Сандера.

а — Алгоритм преобразования отрезка. б — Кластер после трехкратного преобразования по этому алгоритму. Стрелками указан масштаб размеров прямоугольников, вырезающих куски кластера для определения фрактальной размерности по формуле типа (2.7). Один из таких прямоугольников показан на рисунке

что по мере роста размеров кластера средняя плотность частиц в нем падает в соответствии с законом (2.6). При более внимательном рассмотрении это противоречие устраняется. Действительно, по мере роста размера кластера увеличиваются объемы пустот. Пустоты больших размеров, не влияющие на среднюю плотность частиц в небольшом занятом объеме кластера, вносят существенный вклад в его среднюю плотность.

Существенно, что фрактальный кластер, построенный по случайному закону и поэтому выглядящий как неупорядоченная система, все же имеет внутренний порядок. Параметром, характеризующим этот порядок, является фрактальная размерность кластера. Понимание этого факта дает экспериментаторам возможность более детально исследовать такие системы, что подтверждается опытом последних лет.

Как следует из полученных ранее формул, фрактальная размерность кластера может быть найдена двумя способами — на основе корреляционной функции из соотношения (2.3), а также на основе формул (2.7) по числу частиц, содержащихся в кластерах разных размеров или же в отдельных частях кластера разного размера. Поскольку соотношения (2.3) и (2.7) справедливы в среднем, их использование для реальной системы дает результат с некоторой погрешностью, причем эти два способа приведут к несколько различающимся результатам. Для демонстрации этого мы приведем находже-

ние фрактальной размерности для кластера, представленного на рис. 5. Его фрактальная размерность в соответствии с формулой (2.1) равна $D = -\ln 10 / \ln 4 = 1,66$ (специально подобран кластер, фрактальная размерность которого близка к соответствующему параметру кластера, полученного в рамках модели Виттена — Сандера). Очевидно, если алгоритм рис. 5, а применить к выделенному отрезку многократно, а затем рассмотреть большое число участков кластера, занимающих в пространстве разные площади, то на основе формулы (2.7) найдем фрактальную размерность, близкую к искомой. В рассматриваемом случае мы получаем кластер после трехкратного преобразования прямого отрезка в соответствии с алгоритмом рис. 5, а. Далее мы сравниваем длину той части, которая находится внутри прямоугольников, одна сторона которых параллельна первоначальному отрезку, а длина совпадает с длиной этого отрезка. Результаты обработки по формуле (2.7) представлены на рис. 6. Статистическая обработка этих данных дает для фрактальной размерности $D_\beta = 1,64$ со статистической погрешностью $6 \cdot 10^{-4}$. Как видно, расхождение с точным значением фрактальной размерности несколько превышает 1%. Того же масштаба погрешности при обработке модельных кластеров (табл. I, II).

Рассмотренная ранее модель Виттена — Сандера, которая сыграла важную роль в исследовании фрактального кластера, на самом деле является одним из способов моделирования сборки фрактального кластера. Эта модель может быть видоизменена. Можно отказаться от деления пространства на ячейки и, представив каждую частицу в виде диска в двумерном пространстве или шара в трехмерном пространстве, задать траекторию ее движения в виде соответствующей ломаной линии. При этом столкновение частицы с одной из частиц кластера приводит к их склеиванию. Пробная частица закрепляется на кластере в таком положении, а в пространство запускается следующая частица. Описанная модель носит название нерешеточной модели⁵, тогда как модель Виттена — Сандера — решеточной. Расчеты показывают, что в исследованных случаях результаты обеих моделей совпадают в пределах их погрешностей. Последующее изменение рассматриваемых моделей может быть связано с введением вероятности P того, что частицы при касании друг друга слипаются. Ранее эта вероятность полагалась равной 1.

Представленная модель Виттена — Сандера с различными модификациями отвечает определенным физическим условиям образования фрактального кластера — он собирается добавлением к нему отдельных частиц. Можно представить себе другую физическую ситуацию, при которой образуется фрактальный кластер. В начальный момент в объем запускается определенное число частиц, которые, сталкиваясь друг с другом, слипаются. Тогда сначала будет образовано большое число малых кластеров, и далее столкновение кластеров приведет к их объединению. Со временем число кластеров в объеме

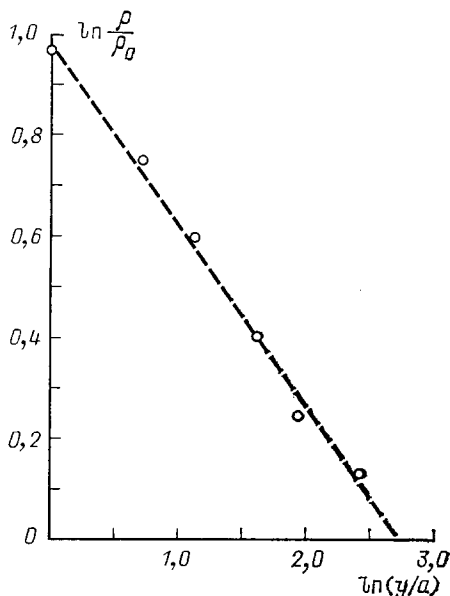


Рис. 6. Зависимость плотности куска кластера, представленного на рис. 5, который попадает в прямоугольник, от ширины прямоугольника.

Плотность куска кластера ρ — отношение полной длины куска кластера в прямоугольнике к площади прямоугольника — дана в произвольных единицах, ширина прямоугольника y — в единицах минимального масштаба. Штриховая линия соответствует фрактальной размерности кластера, равной 1,64

Фрактальная размерность кластера при ассоциации твердых частиц в двумерном пространстве

Модель ассоциации	Вероятность прилипания P	Фрактальная размерность кластера	
		D_α	D_β
1. Линейная траектория, частица — кластер	$P=1$	$1,92 \pm 0,1^{8,16}$	$1,95 \pm 0,02^{8,16}$ $1,99 \pm 0,01^{10}$ $2,00 \pm 0,02^{11}$
2. Броуновское движение, частица — кластер	$P=1$	$1,657 \pm 0,004^1$	$1,70 \pm 0,02^1$
		$1,68 \pm 0,07^5$	$1,68 \pm 0,04^5$
		$1,68 \pm 0,05^{12}$	$1,69 \pm 0,05^{12}$
	$P=0,25$	$1,71 \pm 0,05^5$	$1,71 \pm 0,04^{11}$
		$1,74 \pm 0,03^5$	$1,660 \pm 0,004^{14}$ $1,73 \pm 0,04^5$
	$P=0,1$	$1,70 \pm 0,03^5$	$1,73 \pm 0,05^{12}$ $1,73 \pm 0,06^{13}$
		$1,73 \pm 0,03^{12}$	$1,71 \pm 0,06^{12}$ $1,78 \pm 0,06^{13}$ $1,69 \pm 0,06^{13}$
Захват на 4-х диаметрах частицы			
3. Линейная траектория, кластер — кластер	$P=1$	$1,55 \pm 0,02^{15}$ $1,54 \pm 0,03^{15}$	$1,50 \pm 0,05^{15}$ $1,56 \pm 0,02^{15}$
4. Броуновское движение, кластер — кластер	$P=1$	$1,48 \pm 0,03^6$	$1,45 \pm 0,05^6$
		$1,39 \pm 0,05^7$	$1,37 \pm 0,08^7$
		$1,48 \pm 0,02^{15}$	$1,42 \pm 0,03^{9,21}$
		$1,46 \pm 0,02^{18*})$	$1,44 \pm 0,02^{15}$
	$1,479 \pm 0,017^{19*})$	$1,44 \pm 0,01^{18*})$ $1,442 \pm 0,014^{19*})$	
$P=0,1$	$1,45 \pm 0,04^{18}$	$1,46 \pm 0,03^{18}$	

*) Усреднено по результатам разных моделей.

Таблица II

Фрактальная размерность кластера при ассоциации твердых частиц в трехмерном пространстве

Модель ассоциации	Вероятность прилипания P	Фрактальная размерность кластера	
		D_α	D_β
1. Линейная траектория, частица — кластер	$P=1$		$2,97 \pm 0,03^8$ $3,0^{11}$
2. Броуновское движение, частица — кластер	$P=1$	$2,49 \pm 0,06^{12}$	$2,51 \pm 0,06^{12}$
		$2,45 \pm 0,2^{18,22}$	$2,54 \pm 0,02^{11}$
		$2,39 \pm 0,2^{22}$	$2,45 \pm 0,10^{22}$
	$P=0,25$	$2,39 \pm 0,19^{23}$	$2,49 \pm 0,19^{24}$ $2,48 \pm 0,12^{12}$
3. Линейная траектория, кластер — кластер	$P=1$	$1,95 \pm 0,05^{15}$	$1,81 \pm 0,03^{15}$
		$1,98 \pm 0,04^{15}$	$2,00 \pm 0,05^{15}$
4. Броуновское движение, кластер — кластер	$P=1$	$1,8 \pm 0,1^{15}$	$1,75 \pm 0,05^{15}$
		$1,76 \pm 0,08^{55}$	$1,72 \pm 0,10^{17}$
		$1,83 \pm 0,05^{55}$	$1,78 \pm 0,05^{20,21}$ $1,76 \pm 0,05^{55}$

будет уменьшаться, а их размеры увеличиваться. Образованные в результате этого процесса фрактальные кластеры будут более рыхлыми по сравнению с кластером в модели Виттена — Сандера, ибо при таком способе образования кластера труднее заполнить пустоты *).

До сих пор мы считали, что ассоциирующие частицы совершают диффузионное движение в пространстве, так что длина пробега частицы мала по сравнению с характерными размерами в кластере. Физически возможна и другая ситуация, когда длина пробега частицы велика по сравнению с размером области прилипания. Тогда можно считать, что частица (или кластер) движется по прямолинейной траектории. Результаты исследования фрактальных кластеров для перечисленных способов их образования представлены в табл. I, II. Эти данные получены при обработке расчетов, основанных на соответствующих моделях. Приведенные погрешности представляют собой статистические погрешности, полученные при анализе сформированных кластеров. Как видно, эта погрешность, как и в приведенном на рис. 5 примере, составляет несколько процентов. В табл. III приводятся средние значе-

Т а б л и ц а III

Фрактальная размерность кластера, образованного при ассоциации твердых частиц

Модель ассоциации	Размерность пространства	
	2	3
1. Линейная траектория, частица — кластер	2	3
2. Броуновское движение, частица — кластер	$1,68 \pm 0,02$	$2,46 \pm 0,05$
3. Линейная траектория, кластер — кластер	$1,54 \pm 0,03$	$1,94 \pm 0,08$
4. Броуновское движение, кластер — кластер	$1,44 \pm 0,04$	$1,77 \pm 0,03$

ния фрактальных размерностей кластеров, которые получены на основе данных табл. I, II и отвечают вероятности прилипания $P = 1$. Указанная в табл. III погрешность характеризует совпадение результатов разных работ, содержащихся в табл. I, II.

Фрактальные кластеры как геометрические системы, образуемые при ассоциации твердых частиц, должны реализоваться при ассоциации аэрозолей в газе (образование кластеров при релаксации металлического пара и осаждении его на поверхности, образование облаков и туманов, коагуляция аэрозолей в дыме), а также при образовании кластеров из частиц, находящихся в суспензиях и коллоидных растворах. К этим проблемам рассматриваемые структуры имеют непосредственное отношение. Однако этим не исчерпывается круг проблем, где представления о фрактальных структурах могут быть полезны. Рис. 7 и 8 демонстрируют структуры, которые имеют аналогии с фрактальными кластерами.

В соответствии с традиционным введением фрактальной размерности кластера на основе формул (2.3), (2.4) фрактальный кластер имеет аналогию с другими фрактальными структурами, реализующимися при разных процессах ²⁷. Например, в случае турбулентности аналогичная (2.2) корреляционная функция имеет вид

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}') \varepsilon(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rangle = \bar{\varepsilon}^2 \left(\frac{l_0}{r} \right)^{d-D}; \quad (2.8)$$

*) Эта модель образования фрактального кластера ^{6,7} в литературе носит название Cl-Cl (clustering of clusters model), тогда как модель Виттена — Сандера с ее модификациями часто встречается под названием DLA (diffusion-limited aggregation).

здесь ϵ — средняя энергия жидкости или газа, приходящаяся на единицу массы и перерабатываемая в единицу времени, причем $l_d \ll r \ll l_0$, где l_d — размер, на котором происходит диссипация энергии, а l_0 — размер,

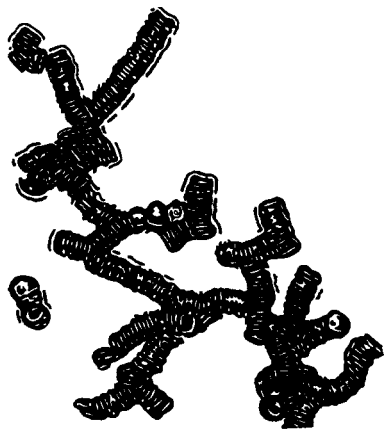


Рис. 7. Столбик эритроцитов, образующихся в суспензии крови при слипании красных кровяных телец²⁵

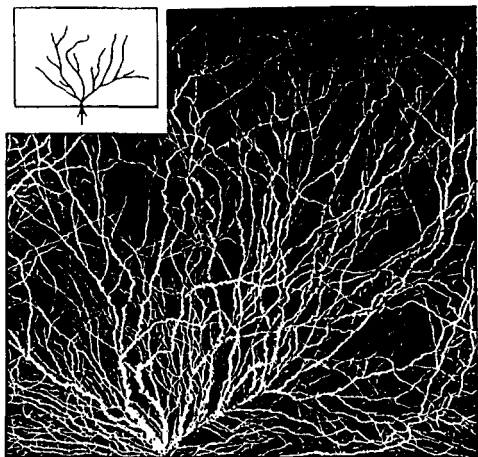


Рис. 8. Структура электрического пробоя по поверхности диэлектрика²⁶

ответственный за перемешивание. Анализ показывает^{28,29}, что фрактальная размерность, соответствующая турбулентности в трехмерном пространстве ($d = 3$), равна $D = 2,5-2,75$.

3. СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

Проведенные в последние годы исследования фрактальных кластеров методами вычислительной физики составляют основу наших представлений об этих объектах. Эти исследования продемонстрировали и возможности современной вычислительной физики. С одной стороны, используемые модели с варьированием отдельных параметров позволяют правильно аппроксимировать характер образования фрактальных кластеров. С другой стороны, они воссоздают готовый объект со всеми его особенностями, что позволяет производить всесторонний анализ такого объекта и путем сравнения выяснить, какие его свойства являются универсальными. Тем самым моделирование процесса образования фрактальных кластеров на ЭВМ формирует наше современное представление об этом объекте. Далее мы представим информацию о фрактальном кластере, полученную из анализа машинных экспериментов.

Для исследования структуры фрактального кластера проследим за природой его образования в рамках модели Виттена — Сандера. Частицы, двигаясь от периферии кластера к его центру, зацепляются за остов и тем самым прикрепляются к нему. При этом диффузионный характер движения частицы способствует продвижению вглубь по широкой области, что повышает вероятность связывания частицы с кластером на периферийной части кластера. Данный процесс удобно рассмотреть, введя глубину проникновения новой частицы вглубь кластера. Рассмотрим данную задачу на языке глубины проникновения частицы.

Введем $P(r, R)$ — вероятность того, что рассматриваемая пробная частица прикрепляется к кластеру размера R на расстоянии r от центра. Если глубина проникновения частицы внутрь кластера Δr значительно меньше разме-

ра кластера, то эту величину удобно аппроксимировать зависимостью ¹⁰

$$P(r, R) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \Delta r} \exp \left[-\frac{(R-r)^2}{2\Delta r^2} \right]; \quad (3.1)$$

использовано условие нормировки для вероятности

$$\int_0^R P(r, R) dr = 1.$$

При этом мы воспользовались наиболее простым выражением для искомой функции, которое удовлетворяет физическим требованиям задачи.

Формула (3.1) дает вполне определенное выражение для средней плотности частиц в кластере на его внешней стороне. Именно, из формулы (3.1) с учетом малой глубины проникновения по сравнению с размером кластера имеем для средней плотности частиц в кластере вблизи его края

$$\rho = \rho(r_0) \Phi \left(\frac{R-r}{\sqrt{2} \Delta r} \right), \quad (3.2)$$

где $\rho(r_0)$ — средняя плотность частиц в кластере вблизи края, но там, где его формирование закончено, т. е. при $R \gg R - r_0 \gg \Delta r$, $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, так что $\Phi(x \ll 1) = 2x/\pi^{1/2}$ и $\Phi(\infty) = 1$.

Объединяя формулы (2.6) и (3.2) для средней плотности частиц в кластере, получим

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha \Phi \left(\frac{R-r}{\sqrt{2} \Delta r} \right). \quad (3.3)$$

Отсюда находим для полного числа частиц в кластере, учитывая, что $\Delta r \ll R$,

$$N = \int_0^R 4\pi r^2 dr \cdot \rho(r) = 4\pi \rho_0 r_0^\alpha \frac{R^D}{D} \left[1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} D \frac{\Delta r}{R} \right]; \quad (3.4)$$

здесь $D = d - \alpha$ — фрактальная размерность кластера и выражение для плотности состояний относится к трехмерному случаю ($d = 3$), хотя с точностью до постоянного множителя полученное выражение годится для кластера в пространстве произвольной размерности.

Используя полученные формулы, сравним значения фрактальной размерности, которые восстанавливаются двумя разными методами. Первый из них связан с обработкой формулы (2.2) в области расстояний, малых по сравнению с размером кластера и больших по сравнению с размером отдельной частицы. В этом случае для данного кластера строится корреляционная функция, которая согласно формулам (2.3), (2.4) позволяет найти его фрактальную размерность. Эта операция приведена на рис. 3. В другом методе фрактальная размерность кластера восстанавливается из формулы (3.4). Эта формула дает

$$\frac{dN}{N} = D \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\Delta r}{R} \right] \frac{dR}{R}. \quad (3.5)$$

В пределе $\Delta r/R \rightarrow 0$ из этого соотношения можно получить фрактальную размерность кластера. Реально оно дает несколько завышенное значение для этой величины:

$$D_\beta = D \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\Delta r}{R} \right]. \quad (3.6)$$

Оценим зависимость глубины проникновения частицы Δr при соединении с кластером от параметров задачи. Поскольку частица совершает броуновское движение, то $\Delta r^2 \sim \mathcal{L}\tau$, где \mathcal{L} — коэффициент диффузии частицы, а τ — ее время жизни внутри кластера. При этом $\mathcal{L} \sim v\lambda$, где v — характерная скорость частицы, λ — длина свободного пробега частицы,

т. е. длина, на котором изменяется ее направление движения. В рассматриваемом случае λ порядка размера отдельной ячейки. Далее, $1/\tau \sim \rho v \sigma$, где ρ — средняя плотность частиц, сечение прилипания σ не зависит от R . Учитывая, что в основной области кластера $\rho \sim R^d/N$, где d — размерность пространства, получим отсюда

$$\Delta r \sim R^{(d-D)/2} \sim N^{(d-D)/2D}. \quad (3.7)$$

Вводя параметр ν на основе соотношения

$$\Delta r \sim N^\nu, \quad (3.8)$$

находим на основании формулы (3.7) в двумерном и трехмерном случаях (см. табл. I, II) $\nu \approx 0,1$. Это расходится с результатами прямого анализа характера роста кластера в рамках модели Виттена — Сандера, которое дает в двумерном случае ¹⁰ $\nu = 0,48 \pm 0,01$ и в трехмерном случае ³⁰ $\nu = 0,32 \pm \pm 0,05$. Причина расхождения в том, что при вычислении вероятности прилипания пробной частицы к кластеру мы приняли, что частицы кластера случайным образом распределены в пространстве. Как видно, это предположение неверно. Ветвистая структура кластера позволяет ассоциируемым частицам гораздо глубже проникать в глубь кластера, нежели в случае, если бы частицы кластера были случайным образом распределены в пространстве с соответствующей средней плотностью.

Как следует из приведенных результатов, с ростом фрактального кластера глубина зоны проникновения частиц растет медленнее, чем его размер. Действительно, в приведенных расчетах отношение показателя роста глубины проникновения ν к показателю роста размера кластера D_β с увеличением числа частиц в нем составляет $p = \nu D_\beta = 0,82 \pm 0,04$ в двумерном случае и $p = 0,80 \pm 0,14$ в трехмерном случае. В работе ³⁰ утверждается, что отношение этих показателей стремится к единице для большого кластера. Увеличение числа частиц в кластере на порядок (до 50 тыс. частиц в кластере) приводит к значению данного отношения в двумерном случае $p = 0,93 \pm 0,01$ ³⁰.

Интересной информацией о фрактальном кластере является найденное в работе ¹² среднее координационное число, которое представляет собой среднее число ближайших соседей у входящих в состав кластера частиц. Это среднее координационное число получено для случая, когда кластер образуется в результате прилипания к нему последовательно по одной частице, каждая из которых совершает диффузионное движение в пространстве. Для равной единице вероятности прилипания частицы среднее координационное число равно $2,202 \pm 0,017$ для двумерного пространства и $2,251 \pm \pm 0,006$ для трехмерного пространства. Для вероятности прилипания $P = = 0,25$ в трехмерном пространстве среднее координационное число равно $2,514 \pm 0,018$. Эта величина слабо зависит от деталей модели. В случае единичной вероятности прилипания в двумерном пространстве среднее координационное число равно $2,191 \pm 0,007$ для решеточной и $2,216 \pm 0,019$ для перешеточной модели. Полученные значения свидетельствуют о том, что очередное ветвление в рассматриваемых кластерах происходит в среднем через каждые 4—5 частиц.

В работе ¹² исследовалась фрактальная структура проекции трехмерного кластера на плоскость. Такой анализ имеет практическое значение, поскольку реальной информацией о структуре трехмерного кластера является его фотография, полученная с помощью электронного микроскопа, т. е. проекция кластера на плоскость. В рассматриваемом случае, когда трехмерный кластер образовывался путем последовательного присоединения к нему отдельных частиц, совершающих броуновское движение в пространстве, площадь проекции кластера S связывалась с числом частиц в кластере N соотношением

$$S \sim N^\gamma. \quad (3.9)$$

Если бы трехмерный кластер был оптически прозрачным, т. е. проекции отдельных частиц попадали бы в разные места, то $S \sim N$, т. е. $\gamma = 1$. Это имеет место для кластера с низкой плотностью частиц.

Однако кластер с большим числом частиц становится оптически непрозрачным в центре, и по мере увеличения числа частиц в нем оптически непрозрачная область вблизи центра увеличивается. Поэтому $\gamma < 1$. При этом для компактного кластера $\gamma = 2/3$, т. е.

$$\frac{2}{3} < \gamma < 1. \quad (3.10)$$

В работе ¹² найдено, что для кластера, полученного при ограниченной диффузией ассоциации кластер — частица с вероятностью прилипания частицы к кластеру в случае их касания, равной единице, искомый параметр равен $\gamma = 0,864 \pm 0,003$. При вероятности прилипания частицы к кластеру $P = 0,25$ кластер становится более компактным, а параметр γ соответственно уменьшается до значения $\gamma = 0,830 \pm 0,016$.

Используя эти результаты, проанализируем данный кластер с другой точки зрения, рассматривая его как излучающее тело. В этом случае его эффективная поверхность $S_{эф}$, ответственная за излучение, в четыре раза больше средней проекции на плоскость, т. е. $S_{эф} = 4S$. Сравним эту величину с площадью поверхности сферы S_0 , в которую помещается кластер. Рассмотрим сначала физически предельные случаи. Если система достаточно плотна, т. е. просматриваются только частицы, расположенные на поверхности, то $S_{эф} = 4S_0$. Если ввести параметр

$$\frac{S_{эф}}{S_0} \sim N^k, \quad (3.11)$$

где N — число частиц в кластере, то для оптически толстого кластера получим $k = 0$. Для оптически прозрачной системы, когда можно «просматривать» каждую частицу, т. е. когда она не экранируется другими частицами, имеем $S_{эф} \sim N$, $S_0 \sim N^{2/3}$, или $k = 1/3$. Любой реальный случай находится между этими предельными

$$0 < k < \frac{1}{3}. \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим реальный кластер. Поскольку $S_{эф} \sim N^\gamma$, а $S_0 \sim R^2 \sim N^{2/D_\beta}$, то для него

$$k = \gamma - \frac{2}{D_\beta}. \quad (3.13)$$

Учитывая вышеприведенные значения параметра γ ¹², а также используя значения фрактальной размерности трехмерного кластера (см. табл. II), имеем для фрактального кластера, образованного при единичной вероятности прилипания к нему частицы при их соприкосновении ($D = 2,47 \pm 0,03$) $k = 0,054 \pm 0,013$. Для трехмерного кластера, образованного при прилипании к нему отдельных частиц, совершающих броуновское движение в пространстве, при вероятности прилипания 0,25 ($D = 2,48 \pm 0,12$) имеем $k = 0,024 \pm 0,045$. Фрактальный кластер оптически плотен вблизи центра и оптически прозрачен на периферии. Полученные результаты свидетельствуют о том, что исследованные системы ближе к оптически плотным объектам.

Приведенные результаты относятся к кластеру, собранному присоединением к кластеру по одной частице. Более рыхлым является фрактальный кластер, составленный из кластеров меньших размеров, которые в свою очередь образовались при соединении более мелких кластеров. Такой кластер оказывается прозрачным, и анализ площади его проекции может быть проведен более простым способом. При выполнении этого анализа будем считать, что рассматриваемый кластер составлен из цилиндрических волокон, причем ветвистая структура кластера обеспечивает соответствующую

его фрактальную размерность. Пусть радиус отдельной нити равен a , а средняя длина нити значительно больше радиуса, что позволяет пренебречь областями соединения нитей. Поскольку нити распределены в пространстве под случайными углами, то, усредняя по углам, находим, что нить длиной l дает среднюю площадь проекции на плоскость, равную $(\pi/2) la$.

Вероятность того, что свет пройдет по данной линии через кластер, равна $1 - e^{-u}$, где u — оптическая толщина кластера в заданном направлении. Там, где оптическая толщина кластера мала, тени от отдельных нитей не будут перекрываться и площадь проекций этой части кластера на плоскость будет равна сумме площадей проекций от отдельных нитей. Оптическая толщина кластера в данном направлении z равна $u = \int dz/\lambda$, где $\lambda = dV/dS = dV/(\pi/2) a dL$ — длина пробега фотона для данной точки кластера, так что dL — полная длина нитей в элементе объема dV . Вводя ρ_k — массовую плотность материала нитей в конденсированном состоянии и ρ — среднюю массовую плотность аэрозолей в заданной области, имеем для массы нитей в заданном элементе кластера

$$dM = \rho_k \pi a^2 dL = \rho dV.$$

Отсюда, учитывая зависимость средней плотности кластера от расстояния r до его центра масс в соответствии с формулой (2.3) и данными табл. III $\rho(r) \sim r^{-1,22}$, имеем

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2} a \frac{dL}{dV} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(r) dz}{2a\rho_k} = \frac{b\rho(b)}{2a\rho_k} B(0,11; 0,5) = 5,2 \frac{b\rho(b)}{a\rho_k}, \quad (3.14)$$

где b — минимальное расстояние от центра кластера до линии луча, причем $b \ll R$, где R — размер кластера.

Из полученной формулы следует, что оптическая толщина кластера порядка единицы только при прохождении луча вблизи центра кластера ($b \sim a$). Для основной части кластера оптическая толщина мала, т. е. площадь проекции кластера на выделенную плоскость равна сумме площадей проекций на эту плоскость отдельных элементов кластера *).

Особенность фрактального кластера, образуемого в модели Виттена — Сандера, состоит в том, что при небольших размерах он анизотропен^{24,31}. Действительно, на первой стадии его сборки новые частицы присоединяются с большой вероятностью к концам кластера, что приводит к усилению анизотропии кластера. Однако, когда кластер становится большим, так что глубина проникновения частиц становится меньше его размеров, кластер растет равномерно в разные стороны. Тем самым анизотропия кластера пропадает по мере его роста **).

Несферичность кластера, образованного в модели Виттена — Сандера, подробно исследована в работе²⁴. Путем диагонализации тензора плотности определялись главные оси кластера x, y, z . Наиболее сильно анизотропия выражена для кластера, образуемого в двумерном пространстве. Отношение длин кластера в направлении главных осей для двумерного кластера, содержащего 200 частиц, составляет $R_x/R_y = 0,69 \pm 0,13$, а для кластера из 50 тыс. частиц $R_x/R_y = 0,87 \pm 0,07$. Соответствующие фрактальные размерности равны для кластера из 2000 частиц $D_x = 1,61 \pm 0,05$, $D_y = 1,80 \pm 0,06$ и из 50 тыс. частиц $D_x = 1,69 \pm 0,03$, $D_y = 1,75 \pm 0,03$. Как видно, по мере роста кластера нарушение его сферической симметрии уменьшается. Несферичность трехмерного фрактального кластера менее заметна. Так, для кластера Виттена — Сандера, содержащего 12 500 частиц, $D_x =$

*) Этот же результат вытекает из обработки результатов машинного эксперимента⁵⁶ для фрактального кластера, образованного при кластер-кластерной ассоциации.

**) Анизотропия системы на начальной стадии ее роста имеет принципиальное значение для образования фрактальных структур^{56,72,73}.

$= 2,36 \pm 0,19$, $D_y = 2,54 \pm 0,19$, $D_z = 2,58 \pm 0,20$ ²⁴. Как видно, фрактальные размерности этого кластера совпадают с точностью до соответствующих им погрешностей. Следует отметить, что в случае анизотропного потенциала взаимодействия между соседними частицами в кластере, а следовательно, и анизотропного закона сближения частиц при сборке кластера и в пределе большого числа содержащихся в кластере частиц он оказывается существенно анизотропным³².

Рассматриваемый фрактальный кластер имеет рыхлую структуру и образуется, если присоединяющаяся к кластеру частица движется в пространстве по диффузионному закону. Если же частица, прилипающая к кластеру, движется в пространстве по прямолинейным траекториям, то в двумерном пространстве образуется компактный кластер, так что его фрактальная размерность практически совпадает с фрактальной размерностью пространства, в котором он находится. Таким образом, структура фрактального кластера, образуемого при последовательном присоединении к кластеру частиц, определяется фрактальными параметрами траектории, по которой движется частица в пространстве. В связи с этим интересно понять, как меняются свойства фрактального кластера по мере изменения фрактальных свойств траектории движения прилипающей к кластеру частицы.

Для ответа на этот вопрос Микин³³ рассмотрел траектории движения частицы, состоящие из прямолинейных отрезков, так что вероятность $P(x)$, что длина очередного отрезка равна x , определяется выражением

$$\begin{aligned} P(x < 1) &= 0, \\ P(x \geq l) &= l^{-f}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Случай $f = 0$ отвечает движению по прямолинейным траекториям, случай $f = \infty$ соответствует модели Виттена — Сандера. Фрактальные размерности кластера для промежуточных значений f приведены в табл. IV³³. При этом

Таблица IV

f	D_α	D_β
4/3	1,87±0,01	1,86±0,02
5/3	1,80±0,01	1,85
2	1,75	1,78±0,04
2,5	1,72±0,02	1,73±0,03

результаты для решеточной и нерешеточной модели близки, и приведенная в табл. IV погрешность учитывает степень совпадения этих результатов. Кроме того, отметим связь между параметром f и фрактальной размерностью траектории частицы. Для $1 < f < 2$ фрактальная размерность траектории частицы D совпадает со значением параметра f ($D = f$). При $f \leq 1$ имеем $D = 1$, а при $f \geq 2$ имеем $D = 2$. Из данных табл. IV следует, что по мере роста фрактальной размерности траектории частицы, присоединяющейся далее к кластеру, образуемый кластер становится все более рыхлым.

Исследованные ранее фрактальные кластеры вырастали из отдельных частиц. Реально основой для ассоциации твердых частиц могут служить нить или волокно, а также подложка. В этом случае образующийся кластер имеет несколько другую структуру, чем при выращивании на отдельных частицах. Такие кластеры изучались в работе³⁴. В соответствии с общим свойством фрактальных кластеров с увеличением размера они становятся все более рыхлыми. Радиус гирации R_g для кластера, прорастающего на нити или на волокне, связан с числом частиц в нем N соотношением $R_g \sim N^\delta$, причем параметр $\delta = 0,665 \pm 0,031$ ($D_\beta = 1,50 \pm 0,07$).

В случае прорастания кластера на нити длина нити значительно превышает поперечный размер кластера, т. е. начальные условия существенно влияют на характер прорастания кластера. Подобные условия выбираются и при формировании кластера на плоскости. В двумерном случае кластер прорастает в плоскости в одну сторону от линии, длина которой значительно превышает поперечный размер кластера. В трехмерном случае кластер прорастает вверх от плоскости, причем размеры плоскости, на которой формируется кластер, значительно превышают его высоту. Все рассмотренные примеры могут служить моделями для реальных случаев.

Параметром, описывающим прорастающий с плоскости кластер, является величина T — корень квадратный из среднего квадрата высоты кластера. Фрактальные свойства кластера определяются зависимостью этой величины от числа частиц N в нем: $T \sim N^{\epsilon}$. Для компактного кластера $\epsilon = 1$ и его фрактальная размерность $D_{\beta} = 1/\epsilon$ также равна единице. Для рыхлого кластера, образуемого в условиях модели Виттена — Сандера, фрактальная размерность ниже. В двумерном случае $\epsilon = 1,300 \pm 0,075$ ($D_{\beta} = 0,77 \pm 0,04$), а в трехмерном $\epsilon = 1,7 \pm 0,2$ ($D_{\beta} = 0,59 \pm 0,07$). Однако степенная зависимость толщины кластера от числа частиц в нем справедлива для массивного кластера, ибо на первом этапе образования он имеет весьма рыхлую структуру. В соответствии с этим зависимость толщины кластера от числа частиц в нем аппроксимируется зависимостями для двумерного кластера $T = 1,42 + 2,55 \cdot 10^{-4} N^{1,287}$ и для трехмерного кластера $T = 0,806 + 4,27 \cdot 10^{-6} N^{1,602}$. За единицу длины берется длина ячейки, которую может занимать отдельная частица.

Другой характеристикой рассматриваемых кластеров является средняя плотность частиц в нем $\rho(r)$, которая падает по мере удаления от нити или поверхности (r — расстояние от нити или поверхности). Эта зависимость дается формулой (2.6), причем согласно формуле (2.4) $\alpha = d - D$ и d — размерность пространства, в котором образуется кластер, для нити равна двум, а для плоскости равна единице для двумерного и трехмерного кластеров. Нахождение фрактальной размерности кластеров на основе корреляционной функции (2.2) и зависимости средней плотности кластера от расстояния дает для кластера, прорастающего с плоскости в двумерном случае, $D_{\alpha} = 0,70 \pm 0,06$, и для кластера, прорастающего с нити в трехмерном случае, $D_{\alpha} = 0,050 \pm 0,06$. Эти данные в пределах погрешности совпадают со значениями фрактальных размерностей этих кластеров D_{β} , полученных на основе зависимостей их линейных размеров от числа частиц в них. Представленные результаты³⁴ для фрактальных кластеров, которые формируются на подложках соответствующей формы, могут быть использованы при анализе реальных систем.

Успех в исследовании структуры фрактальных кластеров связан с возможностями современной вычислительной техники, которые позволяют создавать такие объекты в памяти вычислительной машины на основе соответствующих алгоритмов. Искомые параметры фрактальных кластеров получаются прямой обработкой полученных объектов, а погрешности при найденных значениях этих параметров определяются статистикой результатов. Опыт проведенных исследований свидетельствует о том, что современная вычислительная техника дает погрешность при определении фрактальной размерности образуемых кластеров, равную 1—2%. Тем самым рассматриваемая задача надежно решается «в лоб», и поэтому при ее анализе меньшего интереса заслуживают приближенные аналитические методы, ибо достоверность полученного на их основе результата проблематична. Тем не менее мы приведем некоторые из них.

В работе³⁵ при исследовании образования кластера путем присоединения к нему последовательно отдельных частиц фрактальная размерность кластера определялась путем минимизации свободной энергии кластера, выражение для которой выводилось на основе простых соображений. Полученное выра-

жение для фрактальной размерности образуемого кластера имеет вид ³⁵:

$$D = \frac{4D_{\omega} + d(2D_{\omega} - 4) + 5d^2}{5D_{\omega} - 4 + 5d}, \quad (3.16)$$

где D_{ω} — фрактальная размерность траектории частицы, d — размерность пространства. В случае броуновского движения ($D_{\omega} = 2$) в двумерном ($d = 2$) и трехмерном ($d = 3$) пространствах получаем по этой формуле для фрактальной размерности образуемого кластера значения соответственно 1,75 и 2,52, что не сильно отличается от данных табл. I, II. Однако ясно, что эта формула неточная и, в частности, для линейных траекторий ($D_{\omega} = 1$) она не дает компактного кластера ($D = d$).

В работе ³⁶ при исследовании фрактального кластера, образуемого в рамках модели Виттена — Сандера, развивалось приближение среднего поля. В этом случае в теорию вводится средняя экранировочная длина — глубина проникновения частицы вглубь кластера, которая одинакова для всех направлений внутри кластера, но зависит от средней плотности частиц в кластере. Это предположение дает для фрактальной размерности образуемого кластера

$$D = \frac{d^2 + 1}{d + 1}. \quad (3.17)$$

Для двумерного ($d = 2$) и трехмерного ($d = 3$) пространств эта формула приводит к значениям фрактальной размерности соответственно 1,67 и 2,5, что с точностью до погрешностей совпадает с данными табл. I, II. Однако при более высоких значениях размерности пространства имеет место расхождение этой формулы с прямыми расчетами ⁵. К тому же анализ показывает ³⁷, что приближение среднего поля удовлетворительно работает только для трехмерного пространства.

Модель иерархий ⁹ позволяет простым способом построить кластер, образуемый при кластер-кластерной ассоциации. В этой модели в начальный момент берется 2^k частиц и на первом этапе из них строится 2^{k-1} кластеров. На следующем этапе эти кластеры объединяются попарно в результате броуновского движения. Каждый последующий этап приводит к попарному объединению кластеров, так что число кластеров вдвое уменьшается, а число частиц в каждом из них вдвое увеличивается. На последнем этапе образуется один кластер, состоящий из 2^k частиц. Хотя способ сборки рассматриваемого кластера более простой, чем в общем случае, фрактальная размерность такого кластера ($1,42 \pm 0,03$; $d = 2$) совпадает с фрактальной размерностью кластера, образуемого в двумерном пространстве при кластер-кластерной ассоциации (см. табл. I).

Приближение ренормализационной группы ³⁸⁻⁴², которое используется в перколяционных задачах, может быть распространено и на фрактальные кластеры. В случае фрактального кластера, образуемого в рамках модели Виттена — Сандера в двумерном пространстве, приближение ренормализационной группы дает для его размерности ⁴² $D = 1,67 - 1,71$, что согласуется с данными табл. I.

Рассматривая свойства фрактального кластера, мы прежде всего ориентируемся на физическую задачу, связанную с ассоциацией твердых аэрозолей. На самом деле они проявляются в ряде других физических задач — задачах протекания (перколяции), затвердевания дисперсионных систем (гелеобразования), полимеризации и др., где возникают свои специфические проблемы, иногда и фундаментального характера. Например, в задаче о перколяции необходимо исследовать блуждание частицы по кластеру. Расстояние R , на которое она сместится за n шагов (длина отдельного шага a), для $n \gg 1$ дается зависимостью

$$\frac{R}{a} \sim n^{\nu}. \quad (3.18)$$

В случае диффузионного движения в свободном пространстве $\nu = 1/2$. В данном случае возникает новая фрактальная размерность $D_\omega = 1/\nu$. Это фундаментальная характеристика процесса перемещения частицы в области, занятой (или не занятой) кластером. Согласно утверждению, полученному в работе Александера и Орбаха ⁴³, новая фрактальная размерность пропорциональна фрактальной размерности кластера, так что величина

$$d_s = \frac{2D}{D_\omega} \quad (3.19)$$

является универсальной величиной и не зависит от размерности пространства. Для перколяционного кластера величина d_s , называемая спектральной размерностью, равна ⁴³ $4/3$. Последующие исследования показали, что спектральная размерность зависит от типа фрактального кластера, т. е. модели, по которой он образуется.

Существенно, что спектральная размерность кластера может быть связана с характером случайного блуждания частицы по кластеру. Действительно, будем оставаться в рамках решеточной модели, считая, что частица перемещается случайным образом от ячейки к ячейке. Тогда вероятность обнаружить ее в начальной точке убывает со временем t^* по закону ⁴³

$$P_0(t) \sim t^{-d_s/2}. \quad (3.20a)$$

Далее, зависимость от времени для среднего числа разных отрезков, пройденных частицей, имеет вид ^{44,45}:

$$S_0(t) \sim t^{d_s/2}. \quad (3.20б)$$

И, наконец, среднее число визитов к первоначальному положению связано с промежутком времени от начала движения соотношением ⁴⁶

$$M_0(t) \sim t^{1-(d_s/2)}. \quad (3.20в)$$

В работе ⁴⁷ для фрактального кластера, полученного при условиях модели Виттена — Сандера, найдены фрактальные размерности, описывающие блуждание частицы по кластеру (см. также ⁸⁸). Для двумерного пространства они равны $d_s = 1,2 \pm 0,1$, $D_\omega = 2,56 \pm 0,1$, для трехмерного пространства $d_s = 1,3 \pm 0,1$, $D_\omega = 3,33 \pm 0,25$. Более тщательные расчеты, выполненные в работе ¹⁴, дают для двумерного пространства: $d_s = 1,205 \pm 0,018$, $D_\omega = 2,70 \pm 0,05$. Как видно, хотя соотношение Александера — Орбаха ($d_s = 4/3$) нарушается для фрактального кластера, полученного на основе модели Виттена — Сандера, нарушение этого соотношения не столь серьезно.

Продолжая анализировать фрактальные параметры кластера, представим наряду с (2.3) и (2.7) еще один способ нахождения фрактальной размерности кластера. Рассматривая для простоты двумерный случай, давайте проведем на расстоянии l от кластера контур. Правило, по которому проведем этот контур, следующее: любая точка контура должна находиться на расстоянии l хотя бы от одной точки кластера, но ни одна точка кластера не может отстоять от любой точки контура ближе, чем на l . Такой контур имеет меньшую изрезанность, чем сам кластер, причем по мере увеличения l контур «теряет» все новые детали структуры кластера. Если l много меньше характерных размеров кластера, то полная длина контура зависит от l по закону ^{48,49}

$$S \sim l^{D-1}. \quad (3.21)$$

В работе ¹⁴ это соотношение было использовано для нахождения фракталь-

^{*} Время t , прошедшее от начала движения, и число шагов n , которое проходит частица за это время, пропорциональны друг другу. В соответствии с этим, например, формула (3.18) может быть переписана в виде $t \sim R^{D_\omega}$.

ной размерности кластера, отвечающего модели Виттена — Сандера в двумерном пространстве. Полученный результат $D = 1,68 \pm 0,02$ согласуется с данными табл. I, III.

Удобство моделирования процесса образования фрактального кластера на вычислительной машине связано с возможностью включения в модель различных деталей процесса. Это позволяет выяснить чувствительность структуры образуемой системы к различным факторам, имеющим место в реальной ситуации. Ранее (см. табл. I, II) выяснялась зависимость фрактальной размерности кластера от вероятности слипания частиц при взаимном касании. Чем меньше вероятность прилипания, тем глубже может проникать частица внутрь кластера (в модели Виттена — Сандера) и тем выше фрактальная размерность образуемого кластера. Однако расчеты показывают (табл. I, II, а также ^{50,51}), что эта зависимость довольно слабая. Другой фактор, влияющий на структуру образуемого кластера, — вращательная диффузия кластера. Увеличение вращательной диффузии кластера приводит к захвату частицы или кластера краями кластера и поэтому способствует уменьшению фрактальной размерности образуемого кластера. Влияние вращательной диффузии на структуру кластера при ассоциации кластер — частица и при кластер-кластерной ассоциации исследовалось в работе ⁵².

При кластер-кластерной ассоциации структура образуемого кластера может зависеть от того, как скорость диффузии кластеров изменяется с их размером. В работе ¹⁹ были выполнены расчеты кластер-кластерной ассоциации с разными предположениями о зависимости коэффициента диффузии от их массы. Фрактальные размерности кластеров, полученные для разных законов зависимости коэффициента диффузии кластера от его массы, совпадают в пределах полученных ошибок.

При моделировании конкретных процессов в модель могут быть включены и более специальные предположения. Так, при кластер-кластерной ассоциации будем считать, что образуемая при слипании частиц связь может вращаться или с определенной вероятностью может распасться. Тогда для образования устойчивой связи необходимо соприкосновение кластеров, по крайней мере, в двух точках. Расчеты показывают ⁵⁴, что при таких условиях образуется более компактный кластер на малых расстояниях. Он содержит большое число петель. Однако на больших расстояниях он характеризуется той же фрактальной размерностью, которая имела бы место при отсутствии рассматриваемых эффектов.

Таким образом, моделирование процесса образования фрактального кластера в машинном эксперименте позволяет выяснить влияние различных эффектов на его структуру. Это позволяет получить достаточно полное представление о его возможных структурах в реальной ситуации.

4. ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ АССОЦИАЦИИ АЭРОЗОЛЕЙ

Наряду с самой структурой фрактальных агрегатов важную роль играют представления о динамике их образования. Поскольку эти системы образуются при слипании отдельных элементов, информативным является распределение кластеров по размерам в каждый момент времени и характер изменения этого распределения со временем. Очевидно, в этих задачах имеются определенные соотношения между основными параметрами, которые сохраняются со временем. Чтобы разобраться в «скейлинге», характеризующем эти задачи, рассмотрим сначала простейшую из задач такого рода — ассоциацию жидких аэрозолей относительно больших размеров в газе. Хотя эта задача не имеет прямого отношения к исследуемым здесь объектам, она позволяет получить представление об универсальности законов, характеризующих процесс, и о параметрах, которыми его удобно описывать.

В данной задаче мы имеем набор жидких аэрозолей, находящихся в газе и совершающих броуновское движение в нем. При соприкосновении два

аэрозоля объединяются в один, который принимает сферическую форму и участвует в дальнейшем процессе. Наша задача состоит в нахождении функции распределения жидких аэрозолей по размерам в произвольный момент времени.

Для этой цели определим сначала константу скорости ассоциации аэрозоля радиуса r_1 с окружающими его аэрозолями. Будем сначала считать, что рассматриваемый аэрозоль покоится, а все остальные аэрозоли имеют радиус r_2 и характеризуются коэффициентами диффузии \mathcal{D}_2 в газе. Плотность этих аэрозолей вдали от пробного аэрозоля $N(\infty) = N_2$, а при соприкосновении с пробным аэрозолем эти аэрозоли поглощаются, т. е. $N(r_1 + r_2) = 0$. Диффузионный поток аэрозолей на рассматриваемый равен $j = -\mathcal{D}_2 (dN/dr)$, где r — расстояние между центрами аэрозолей. Отсюда следует, что полный ток аэрозолей на пробный равен

$$J = -4\pi r^2 \mathcal{D}_2 \frac{dN}{dr}. \quad (4.1)$$

Поскольку поглощение аэрозолей в объеме ($r > r_1 + r_2$) отсутствует, то J не зависит от r . Решая полученное уравнение (4.1) с заданными граничными условиями, получим в конечном итоге

$$J = 4\pi \mathcal{D}_2 (r_2 + r_1) N_2. \quad (4.2)$$

Эта формула носит название формулы Смолуховского⁵⁷. Отсюда находим для константы скорости ассоциации аэрозолей

$$k = \frac{J}{N_2} = 4\pi \mathcal{D}_2 (r_1 + r_2). \quad (4.3)$$

Это выражение получено в предположении, что первый аэрозоль покоится. Очевидно, учет диффузионного движения первого аэрозоля приводит нас к симметричной формуле

$$k = 4\pi (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) (r_1 + r_2), \quad (4.4)$$

где \mathcal{D}_1 — коэффициент диффузии первого аэрозоля в газе.

Получим выражение для коэффициента диффузии аэрозоля относительно большего размера. Пусть этот аэрозоль имеет заряд e и движется в электрическом поле напряженностью E . Тогда он движется с направленной скоростью $v = KE$, где K — подвижность аэрозоля. При этом электрическая сила eE , действующая на аэрозоль, уравнивается силой трения, которая определяется формулой Стокса

$$eE = 6\pi r_0 \eta v,$$

где r_0 — радиус аэрозоля, η — коэффициент вязкости газа. Отсюда получаем выражение для подвижности аэрозоля

$$K = \frac{e}{6\pi r_0 \eta}. \quad (4.5)$$

Из формулы (4.5), используя соотношение Эйнштейна, получим для коэффициента диффузии аэрозоля

$$\mathcal{D} = \frac{KT}{e} = \frac{T}{6\pi r_0 \eta}. \quad (4.6)$$

Поскольку при получении этого выражения мы использовали формулу Стокса, то оно справедливо при условии $r_0 \gg \lambda$, где λ — длина пробега молекул газа.

Подставляя формулу (4.6) в (4.4), имеем для константы скорости ассоциации аэрозолей

$$k = \frac{8T}{3\eta} F(r_1, r_2), \quad F(r_1, r_2) = \frac{(r_1 + r_2)^2}{4r_1 r_2}. \quad (4.7)$$

Величина $F = 1$ при $r_1 = r_2$ и не сильно отличается от единицы, если $r_1 \sim r_2$. Например, при $r_1 = 2r_2$ имеем $F = 9/8$. Поскольку функция F слабо зависит от отношения радиусов для ассоциирующих аэрозолей, то в дальнейшем будем считать, что константа скорости, ассоциации двух жидких аэрозолей не зависит от их размеров. Это существенно упростит результат и проводимый анализ.

Напишем теперь кинетическое уравнение для функции распределения жидких аэрозолей по массам $f(m, t)$ — уравнение Смолуховского⁵⁸. Учитывая, что при слипании двух аэрозолей массы m и m' образуется новый аэрозоль массы $m + m'$, представим уравнение Смолуховского в виде

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} = -\nu f(m, t) + \nu \int_0^m f(m', t) f(m - m', t) dm'; \quad (4.8)$$

здесь функция распределения нормирована условием

$$\int_0^{\infty} f(m, t) dm = 1, \quad \nu = Nk,$$

где N — число аэрозолей в единице объема, причем существенно, что константа скорости ассоциации не зависит от размеров ассоциирующих аэрозолей, а следовательно, от их масс.

Представляет интерес автомодельное решение этого уравнения, которое не зависит от начальных условий и к которому система переходит за времена $t \gg 1/\nu$. Из структуры уравнения следует, что такое решение имеет вид:

$$f(m, t) = \frac{1}{m} e^{-m/\bar{m}}, \quad (4.9)$$

где $\bar{m}(t) = \int mf(m, t) dm$ — средняя масса аэрозоля в данный момент времени. Подстановка (4.9) в (4.8) дает

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = \bar{m}\nu. \quad (4.10)$$

Это уравнение позволяет установить зависимость $\bar{m}(t)$ при произвольном виде $\nu(\bar{m}, t)$. Последняя зависимость определяется газодинамикой газа, содержащего аэрозоли. В простейшем случае неподвижного газа имеем, что масса материала аэрозоля, находящегося в единице объема газа, сохраняется. Отсюда получаем $N \sim 1/\bar{m}$, т. е. $\nu \sim 1/\bar{m}$, так что решение уравнения (4.10) дает

$$\bar{m} = m_0 N_0 k t, \quad \bar{m} \gg m_0, \quad (4.11)$$

где m_0 — средняя масса аэрозоля в начальный момент времени, N_0 — их число в единице объема в начальный момент времени. Решение (4.11), как и (4.9), представляет собой асимптотическое решение при $t \gg 1/\nu$. За такие времена устраняется роль начальных условий и устанавливается самосогласованное распределение, не зависящее от начальных условий и допускающее скейлинг.

Столь простое решение оказалось возможным, поскольку константа скорости ассоциации аэрозолей не зависит от их размеров и, следовательно, массы *).

*) Отметим, что для полученного распределения входящая в выражение (4.7) для константы скорости ассоциации величина F равна

$$F = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle r \rangle \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = 1,105,$$

где скобки означают усреднение по распределению аэрозолей. Это дает для константы скорости ассоциации аэрозолей (4.7) $k = 2,95 T/\eta_1$. Эта величина не зависит не только

Формула (4.9) позволяет сделать общие заключения о динамике распадаемого процесса, которые должны сохраниться для любого закона ассоциации частиц. Во-первых, через некоторое время система «забывает» о начальных условиях, т. е. имеется асимптотическое распределение, к которому система стремится независимо от начальных условий. Во-вторых, функция распределения по размерам допускает скейлинг, т. е. существует автомодельное решение, так что функцию распределения можно свести к функции от одной комбинации размера кластера и времени. Из физики процесса следует, что эти заключения должны сохраниться для разных законов слипания частиц при кластеризации. Поэтому с этих позиций мы будем оценивать результаты исследования динамики образования фрактальных кластеров⁶⁰.

Основываясь на общих представлениях о процессе ассоциации частиц, остановимся на особенностях этого процесса при образовании фрактального кластера. В рассмотренном выше примере удалось получить решение для функции распределения ассоциирующих частиц (4.9) потому, что константа скорости ассоциации частиц не зависела от размеров сталкивающихся кластеров. В общем случае, представляя зависимость константы скорости ассоциации от характерного размера сталкивающихся кластеров в виде

$$k \sim R^{2\omega}, \quad (4.12)$$

можно установить связь параметра ω с параметрами, описывающими движение кластеров в пространстве и их структуру. Эта связь имеет вид⁶¹

$$2\omega = -\gamma + d - D_\omega, \quad (4.13)$$

где γ характеризует зависимость коэффициента диффузии кластеров от его размеров ($\mathcal{D} \sim R^{-\gamma}$), d — размерность пространства, D_ω — фрактальная размерность, характеризующая движение кластеров в пространстве. Отметим, что в рассмотренном ранее случае для компактной системы в трехмерном пространстве ($d = 3$), для броуновского движения частиц в пространстве ($D_\omega = 2$) и для коэффициента диффузии, обратно пропорционального размеру частицы ($\mathcal{D} \sim 1/R$), имеем $\omega = 0$.

В случае броуновского движения кластеров в пространстве формула (4.13) может быть получена непосредственно из уравнения диффузии (4.1). Действительно, из этого уравнения имеем

$$k \sim \mathcal{D}R^{d-2} \sim R^{-\gamma+d-2},$$

что и дает формулу (4.13) $2\omega = -\gamma + d - 2$ (для броуновского движения кластеров $D_\omega = 2$).

Соотношение (4.13) позволяет получить скейлинг в случае кластер-кластерной ассоциации. Действительно, в этом случае из формулы (4.11) имеем ($\bar{m} \sim RD$) для характерного размера и массы кластеров¹⁷

$$R \sim t^{1/(D-2\omega)}, \quad \bar{m} \sim t^{D/(D-2\omega)}. \quad (4.14)$$

На основе соотношения (4.13) можем связать эти параметры с характеристиками движения кластеров в пространстве и их фрактальной размерностью.

Более полная информация об ассоциации кластеров следует из расчетов, где этот процесс моделировался в машинном эксперименте. В частности, на рис. 9 приводится распределение кластеров по размерам в разные момен-

от размера ассоциирующих аэрозолей, но и от природы аэрозолей. Для воздуха при комнатной температуре константа скорости ассоциации аэрозолей равна $6,6 \cdot 10^{-10}$ см³/с. Экспериментальные значения этой величины равны⁵⁹ в единицах 10^{-10} см³/с: 6,0 для хлорида аммония; 6,6 для окиси железа; 8,3 для окиси магния; 8,0 для окиси кадмия; 5,1 для стеариновой кислоты; 5,1 для олеиновой кислоты; 4,9 для смолы; 5,0 для парафинового масла и 6,3 для *n*-ксилолазо- β -нафтанола. Среднее статистическое значение данных эксперимента дает $(6 \pm 1) \cdot 10^{-10}$ см³/с, что согласуется с вышеприведенным теоретическим значением и свидетельствует о слабой зависимости от материала аэрозоля.

ты времени, полученное в одной из первых работ по кластер-кластерной ассоциации. Из анализа таких распределений с набором подходящей статистики и составляется общая картина динамики процесса ассоциации кластеров при разных предположениях о параметрах этого процесса. Далее представим результаты таких работ. При этом будем считать, что функция распределения кластеров по размерам R удовлетворяет зависимости

$$f(R, t) = Ct^{-w}R^{-\tau}F\left(\frac{R}{t^z}\right), \quad (4.15)$$

где $F(x)$ — универсальная функция, которая зависит от характера сближения и слипания отдельных кластеров. Из условия нормировки функции распределения $\left(\int fR^{d-1} dR = 1\right)$ следует соотношение между параметрами в данной формуле

$$z(d - \tau) - w = 0, \quad (4.16)$$

где d — размерность пространства, в котором происходит процесс.

В работе ⁶² исследовалась динамика ассоциации кластеров в двумерном пространстве, причем считалось, что коэффициент диффузии не зависит от

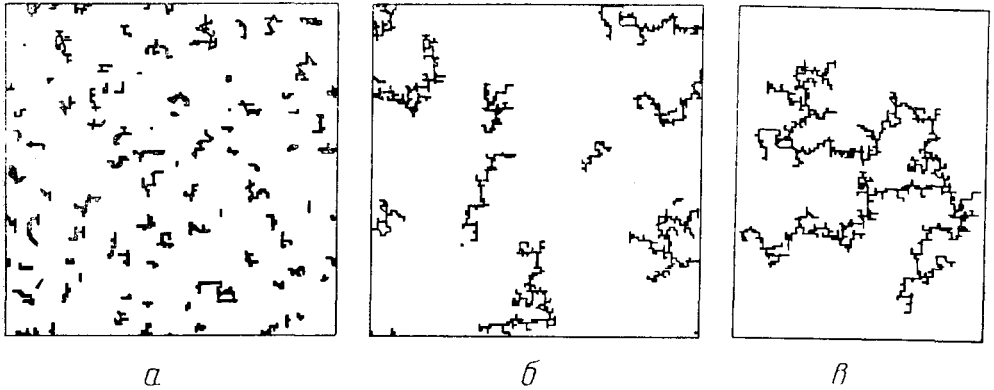


Рис. 9. Промежуточные этапы образования кластера ($a - в$) в кластер-кластерной модели, когда все частицы одновременно участвуют в процессе ассоциации ⁷

размера кластера ($\gamma = 0$). Движение кластеров в пространстве моделировалось стандартным образом — кластер мог смещаться на постоянную решетки в любую сторону в соответствии с методом Монте-Карло. Касание кластеров приводит к их слипанию.

В работе ⁶³ был рассмотрен более общий случай, когда коэффициент диффузии кластера зависит от его размеров: $\mathcal{D} \sim R^{-\gamma}$. Заметим, что формула (4.9) соответствует $\gamma = 1$ для жидких аэрозолей и согласно этой формуле $z = 0,5$. Согласно результатам рассматриваемой работы ⁶³ для ассоциации фрактальных кластеров в трехмерном пространстве этому случаю соответствует $z = 0,8$, формула (4.14) дает $z = 0,6$. Остановимся еще на одной особенности функции распределения. Формула (4.9) соответствует тому, что небольших кластеров всегда больше, чем больших, хотя число малых кластеров убывает со временем. Такое же заключение относится и к ассоциации фрактальных кластеров ⁶², если коэффициент диффузии их не зависит от размеров. Если же коэффициент диффузии кластеров уменьшается с увеличением их размера, при достаточно резкой зависимости получится, что малые кластеры исчезают значительно быстрее, чем успевают разрушиться большие. В этом случае функция распределения в формуле (4.15) перестает быть монотонной, т. е. ее максимальное значение соответствует ненулевому значению аргумента. В работе ⁶³ получено, что переход от одной формы к другой

происходит в двумерном случае при $\gamma = 0,25$, а в трехмерном случае при $\gamma = 0,5$.

Рассмотренный метод исследования функции распределения по размерам кластеров состоит в следующем. В пространство одновременно запускается большое число частиц, которые совершают в нем броуновское движение и ассоциируют в кластере. Пока имеется большое количество кластеров в системе, их распределение по числу частиц в каждый момент времени дает функцию распределения, зависящую от числа частиц и времени. Многократное повторение этой операции позволяет повысить точность найденной функции распределения. Из анализа полученных результатов, а также из анализа уравнения Смолуховского можно определить скейлинг в данном процессе.

В случае ассоциации кластер — частица скейлинг устанавливается более простым способом⁶⁴. Скорость изменения числа частиц в кластере

$$\frac{dN}{dt} = J$$

причем ток частиц на кластер согласно формуле (4.1) $J \sim \mathcal{D} n_0 R^{d-2}$, где n_0 — плотность свободных частиц вдали от кластера, d — размерность пространства. Отсюда, учитывая, что число частиц в кластере связано с его размером соотношением $N \sim R^D$, получаем связь между размером кластера и временем

$$R^\alpha \sim t, \quad \alpha = D - (d - 2). \quad (4.17)$$

В частности, в трехмерном пространстве $\alpha = 1,5$ *). При этом анализ⁶⁵ показывает, что существует критическая скорость роста кластера, ограниченная плотностью частиц, находящихся в зоне проникновения частиц в кластер. Если скорость роста кластера превысит критическую, изменится характер роста кластера, а соответственно и его структура.

При исследовании процесса кластер-кластерной ассоциации мы считали, что для образующихся кластеров выполняется условие газовой, т. е. объем, приходящийся на один кластер, значительно превышает занимаемый им объем. Однако, поскольку по мере роста размера кластера средняя плотность вещества в нем падает, на некоторой стадии процесса условие газовой нарушится. Тогда мы получим набор фрактальных кластеров, среднее расстояние между которыми сравнимо с их размерами. Дальнейший процесс ассоциации кластеров приведет к образованию одного большого кластера. Эта стадия моделирует процесс гелеобразования (затвердевания коллоидной массы в растворе), т. е. процесс перехода из золя в гель. Процессу гелеобразования свойственна своя специфика^{66,67}, и образуемый кластер характеризуется более высокой фрактальной размерностью, чем в случае, когда для ассоциирующихся кластеров выполняется условие газовой.

Отметим одну особенность ассоциации твердых частиц в газовой-плазменной системе. В том случае, когда начальная высокая плотность частиц создается испарением материала под действием электрического тока, на начальной стадии релаксации созданного пара из затвердевших аэрозолей образуются аэрозоли цилиндрической формы. Такой процесс имеет место при наличии электрических полей в системе. В качестве демонстрации этого утверждения представлен рис. 10, который отражает характер взаимодействия цилиндрического и сферического аэрозолей в однородном электрическом поле, когда под действием этого поля на аэрозолях наводятся заряды, которые и вызывают это взаимодействие. Как видно, при ассоциации цилиндрического и сферического аэрозолей сферическому аэрозолю выгоднее подойти с торца цилиндрического. Поэтому ассоциация аэрозолей в сильном электрическом поле способствует росту именно цилиндрических аэрозолей.

* Согласно формулам (4.13), (4.14) при $\gamma = 0$ $\alpha = D - 2\omega = D - (d - D_\omega)$, что для броуновского движения частиц ($D_\omega = 2$) совпадает с данным результатом.

Приведем конкретный пример, отвечающий реальной ситуации. Пусть радиусы сферического и цилиндрического аэрозолей равны 1 мкм, длина цилиндрического аэрозоля в 100 раз больше. Пусть сферический аэрозоль находится на продолжении оси цилиндрического аэрозоля на расстоянии от его конца, равном 10 радиусам. Тогда энергия притяжения аэрозолей за счет взаимодействия наведенных зарядов будет равна средней тепловой энергии частицы для комнатной температуры газа при напряженности электрического поля менее 200 В/см.

Этот пример подтверждает, что на начальной стадии ассоциации твердых аэрозолей образуются структуры, имеющие цилиндрическую форму. Этот факт хорошо известен в физике аэрозолей^{57,59,68}, где такие системы носят

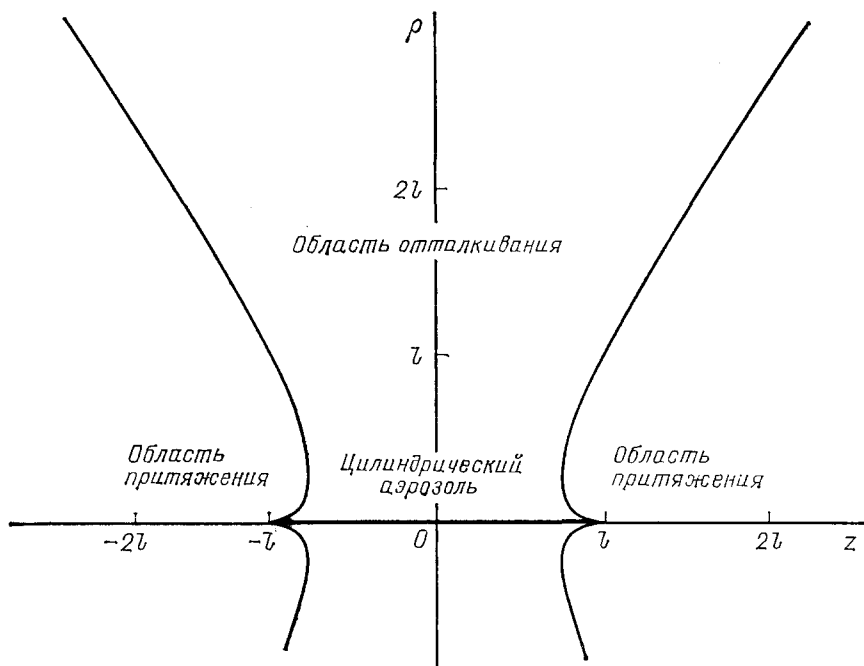


Рис. 10. Характер взаимодействия цепочечного агрегата со сферическим аэрозолем в однородном электрическом поле

название цепочечных агрегатов. Известно, что цепочечные агрегаты образуются при электрическом способе создания аэрозолей. Укажем в качестве примера эксперименты пятидесятилетней давности⁶⁹, в которых показано, что дымы окиси магния, полученные в дуговом разряде, содержат цепочечные агрегаты, тогда как в дыме, получаемом при сжигании магниевой ленты, частицы окиси магния имеют компактную структуру.

Образование цепочечных агрегатов на первой стадии ассоциации аэрозолей способствует созданию на следующей стадии более рыхлых кластеров, чем получились бы из ассоциации аэрозолей с компактной структурой. Поэтому рассмотренный факт должен быть учтен при анализе ассоциации аэрозолей, образованных после испарения материала в дуговом разряде, при взрыве проволочек, под действием молнии или импульсного разряда и при других электрических способах воздействия.

При исследовании кластер-кластерной ассоциации рассматривался распространенный случай, когда первоначальная масса частиц в заданном объеме не изменяется со временем. Реальные газодинамические условия могут приводить к несохранению массы частиц в объеме. Одна из таких возможностей рассматривалась в работе⁷⁰. В объем постоянно вводятся новые простые

частицы, причем скорость ввода в единицу объема в единицу времени равна k . Число кластеров в системе зависит от времени по закону

$$N(t) \sim k^{\alpha} f(k^{\beta} t),$$

причем ³⁷ $\alpha + \beta = 1$ и асимптотические выражения для искомой функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \ll 1, \\ 1, & x \gg 1. \end{cases}$$

Действительно, на первой стадии число кластеров в системе пропорционально числу простых частиц в ней, на последней стадии система выходит на насыщение. При этом зависимость коэффициента диффузии от размера кластеров проявляется только на хвосте функции распределения, который не влияет на ее нормировку. В трехмерном пространстве найденные значения искомых параметров составляют ⁷⁰ $\alpha = 0,47 \pm 0,05$, $\beta = 0,54 \pm 0,05$.

Более сложная модель, включающая в себя ассоциацию кластеров и испарение частиц, рассмотрена в работе ⁷¹. В двумерном пространстве при наличии этих процессов из компактного образования генерируется облако кластеров, которое в течение долгого времени характеризуется экспоненциальным распределением кластеров по размерам и одинаковой фрактальной размерностью кластеров. В случае диффузионного движения кластеров их фрактальная размерность близка к 1, а в случае движения кластеров по линейным траекториям — к $4/3$.

Полученная информация о динамике процесса ассоциации аэрозолей позволяет составить хорошее представление об этом процессе, которое может быть использовано при качественном и количественном анализе таких явлений.

5. ФРАКТАЛЬНЫЕ КЛАСТЕРЫ В ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ И ЯВЛЕНИЯХ

Рассмотрим случаи экспериментального наблюдения фрактальных кластеров, а также исследования процессов и явлений, где проявляется фрактальная структура фрактальных кластеров. Хотя число таких примеров в настоящее время ограничено, опыт показывает, что понимание природы фрактальных кластеров позволяет находить новые области, где эти представления могут быть полезны. Среди экспериментальных исследований фрактальных структур первое место занимает исследование пленок, образующихся на поверхности. Если пленка создается из твердых аэрозолей, напыляемых на поверхность, то при соответствующих сортах аэрозоля и подложки пленка развивается в виде фрактального кластера. Это имеет место, если аэрозоли плохо связываются с подложкой, но хорошо связываются друг с другом. Поверхностный фрактальный кластер может возникнуть из объемного кластера, осажденного на поверхность.

Наблюдение и анализ поверхностных фрактальных кластеров производились многократно. Одно из первых исследований такого рода — исследование Фореста и Виттена ⁷⁴. Анализируя фотографии агрегатов металлических частиц в воздухе, полученных с помощью электронного микроскопа, они обнаружили фрактальную структуру таких систем. Обычная фотография кластера охватывала площадь в несколько квадратных микрон и включала в себя часть кластера, содержащего большое число частиц. Эта фотография с помощью сетки разбивалась на отдельные ячейки и в зависимости от степени заполнения отдельной ячейки ее считали либо заполненной, либо пустой. В соответствии с этим информация о фотографии вводилась в машину в численном виде (в виде нулей и единиц) и в таком виде там обрабатывалась. Фрактальная размерность кластера определялась на основе зависимости от расстояния для корреляционной функции (2.3) либо по числу занятых ячеек в зависимости от площади выделенного участка фотографии. Результаты при-

ведены в табл. V. Значение фрактальной размерности кластера, усредненной по этим данным, составляет $1,60 \pm 0,07$. Используемые в этой работе подходы легли в основу модели Виттена — Сандера¹, которая перевела исследования фрактальных кластеров на новый уровень.

Таблица V

Фрактальная размерность кластеров, образующихся после испарения материала⁷⁴

Материал	Fe	Fe	Zn	Zn	SiO ₂
D_α	$1,69 \pm 0,02$	$1,68 \pm 0,01$	$1,67 \pm 0,02$	$1,68 \pm 0,02$	$1,55 \pm 0,02$
D_β	$1,52 \pm 0,04$	$1,56 \pm 0,02$	$1,50 \pm 0,04$	$1,60 \pm 0,04$	$1,55 \pm 0,06$

Другой пример экспериментального исследования фрактального кластера представлен в работе⁷⁵. Золотые частицы образуются из NaAuCl₄, помещенного в три-натриевую соль лимонной кислоты. На первой стадии образуются сферические золотые частицы диаметром 14,5 нм*). Это связано с тем, что поверхностно сорбированный ион лимонной кислоты создает заряд

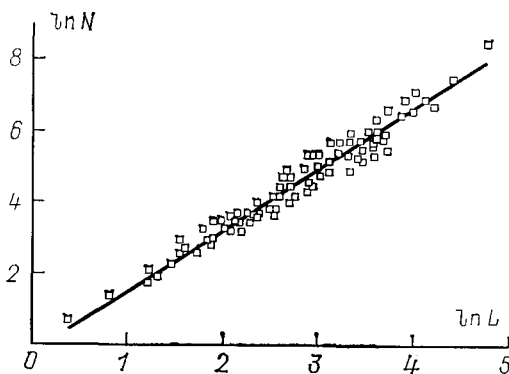


Рис. 11. Зависимость массы коллоидного кластера из золотых частиц от его размера⁷⁵.

Масса кластера выражается в 10^{-17} г, размер кластера — в размерах отдельных частиц, равных 14,5 нм. Сплошная кривая соответствует фрактальной размерности кластера $D = 1,75$

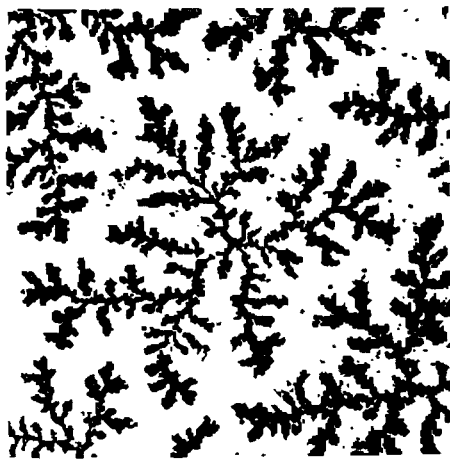


Рис. 12. Поверхностный кластер NbGe₂, образуемый на кварцевой подложке⁷⁶

на частице, что приводит к отталкиванию от поверхности частицы подходящих к ней атомных ионов золота и препятствует дальнейшему росту частиц. Добавление малого количества пиридина в раствор снимает поверхностный заряд частиц и способствует их слипанию. В результате этого из отдельных частиц золота образуются кластеры, которые и исследовались в работе⁷⁵. Эти кластеры осаждались на сетку и далее фотографировались с помощью электронного микроскопа. По этим фотографиям восстанавливалось число частиц N в зависимости от размера кластера L . Поскольку оптическая толщина кластера мала, то эта связь может быть восстановлена с хорошей точностью. Анализ 100 кластеров на сетке ($L \sim 1$ мкм) дает для фрактальной размерности кластера $D = 1,77 \pm 0,1$ (рис. 11). В пределах точности экспе-

*) Для сравнения отметим, что диаметр частиц примерно в 60 раз превышает диаметр атома золота, и отдельная частица содержит примерно 10^5 атомов золота.

римента масса образуемого кластера может аппроксимироваться формулой

$$m = m_0 \left(\frac{R}{a} \right)^D, \quad (5.1)$$

где $m_0 = 3 \cdot 10^{-17}$ г — масса отдельной частицы, a — ее радиус, R — радиус кластера.

Другой пример фрактального кластера представлен на рис. 12⁷⁶. Это пленка NbGe₂, образованная на кварцевой подложке. В процессе эксперимента кварц нагрет до температуры 840 °С, над ним находится смесь гелия с парами германия, полное давление газа менее 0,1 торр. В газовую мишень производится высокочастотное разбрызгивание ниобия. При взаимодействии ниобия с германием образуются аэрозоли, представляющие химическое соединение этих компонент. Осаждаясь на подложке, эти аэрозоли создают пленку в виде фрактальных кластеров. Толщина пленки составляет 0,2—0,5 мкм, размер малых зерен 0,1 мкм, больших зерен, которые образуются на периферии кластеров, — около 1 мкм.

Обработка наблюдаемых поверхностных кластеров дает их фрактальную размерность $D = 1,88 \pm 0,06$. Если убрать утолщения на концах кластеров, то это приведет к фрактальной размерности кластера $D = 1,73 \pm 0,08$, что в пределах точности совпадает с результатами модели Виттена — Сандера¹. Расчеты показывают, что образование наблюдаемых кластеров может быть описано в рамках модели Виттена — Сандера, если использовать двухстадийную схему. На первой стадии вероятность прилипания частицы к кластеру при их касании равна единице, так что образуется кластер с фрактальной размерностью около 1,7. На второй стадии принимает участие примерно такое же количество отдельных частиц, что и на первой. Вероятность прилипания отдельной частицы к кластеру 0,1, что приводит к утолщению ветвей кластера и повышению его фрактальной размерности. Получаемая в такой модели структура кластера соответствует наблюдаемой в эксперименте. Это свидетельствует и о сложном характере рассматриваемого реального процесса образования кластера.

Отметим, что в двух последних случаях сравнение результатов эксперимента проводится с поверхностной моделью кластерообразования. Однако в первом случае (а возможно, и во втором) образование кластера происходит в объеме, так что восстановленная фрактальная размерность более соответствует трехмерному случаю. Тогда наблюдаемый фрактальный кластер лучше моделируется кластер-кластерной моделью, которой в трехмерном случае отвечает фрактальная размерность $D = 1,77 \pm 0,03$ (см. табл. III).

Приведем другой пример наблюдаемого поверхностного фрактального кластера, который исследован в работе⁷⁷. На подложке, которая одновременно служит электродом и помещена в электролит, под действием приложенного к электродам напряжения выделяется металл — цинк. Пока разность потенциалов между электродами не превышает некоторой критической величины, осаждение цинка на подложку происходит в виде фрактального кластера с фрактальной размерностью $1,66 \pm 0,03$ (рис. 13), которая соответствует модели Виттена — Сандера. Увеличение разности потенциалов над критической изменяет характер осаждения металлических частиц на подложке и приводит к увеличению фрактальной размерности образуемого кластера.

Во всех рассмотренных выше случаях исследование кластеров производилось на основе анализа их фотографий, полученных с помощью электронного микроскопа. Этот метод позволяет изучать двумерные кластеры, образующиеся на подложке, или проекции трехмерных кластеров на плоскость. Удобный способ диагностики трехмерных кластеров по рассеянию на них рентгеновского излучения был использован в работах^{78,79}. Интенсивность рассеяния рентгеновского излучения на фрактальном кластере пропорциональна фурье-компоненте от плотности материала в нем, и в соответствии

с формулами (2.2) — (2.4)

$$S(k) \sim k^{-D_\alpha}, \quad (5.2)$$

где S — интенсивность рассеянного света, k — волновой вектор фотона. Указанная зависимость справедлива при $1/R \ll k \ll 1/a$, где R — размер кластера, a — размер отдельной частицы. Поэтому измерение зависимости интенсивности рассеянного света от длины волны позволяет определить фрактальную размерность кластера D_α .

В работе ⁷⁸ исследовалось образование коллоидов из двуокиси кремния. Так же как в приведенном выше примере с золотыми частицами, параметры раствора подбирались таким образом, что в нем образовывались частицы строго заданного размера 2,7 нм. Дальнейший их рост останавливался из-за образования на их поверхности заряда, который препятствовал присоединению других молекул двуокиси кремния и они в конечном итоге образовывали другие частицы такого же размера. На следующем этапе кислотность раствора менялась, что позволяло частицам соединиться. Измерение интенсивности рассеяния рентгеновского излучения для разных длин волн позволило установить, что при ассоциации частиц образовывался кластер с фрактальной размерностью $D_\alpha = 2,12 \pm 0,05$.

Другой пример, исследованный с помощью рентгеновской диагностики, — образование полимеров двуокиси кремния в неводных растворах ⁷⁹. Эти полимеры имеют ветвистую структуру, и найденная по рассеянию рентгеновского излучения фрактальная размерность этих полимеров составляет $D_\alpha = 2,0 \pm 0,1$.

Как видно, в обоих случаях вышерассмотренных трехмерных кластеров фрактальная размерность близка и оказывается больше, чем фрактальная размерность кластера в кластер-кластерной модели, но меньше, чем в модели Витена — Сандера. Это свидетельствует о непростом характере образования таких кластеров и требует более детального исследования механизма их сборки. Фрактальную размерность образующихся кластеров лучше всего объясняет модель линейных траекторий при кластер-кластерной ассоциации (см. табл. II), которая может быть справедливой только для кластеров больших размеров, когда диффузия кластеров не играет роли при их перемещении.

Ассоциация твердых частичек в объеме и на поверхности — наиболее распространенный случай образования фрактального кластера. Однако для выделения фрактальной структуры образуемых кластеров необходим дополнительный анализ. Из-за отсутствия такого анализа за пределами нашего обзора остались наблюдения объектов, которые могли иметь фрактальную структуру. Так, в работе ⁸⁰ взрывом металлических проволок при определенных параметрах пропускаемых по ним токов удавалось получить рыхлые структуры, которые авторы называли нитевидными. По аналогии с процессами образования фрактальных кластеров эти структуры, видимо, можно было бы отнести к фрактальным кластерам, однако из-за отсутствия соответ-

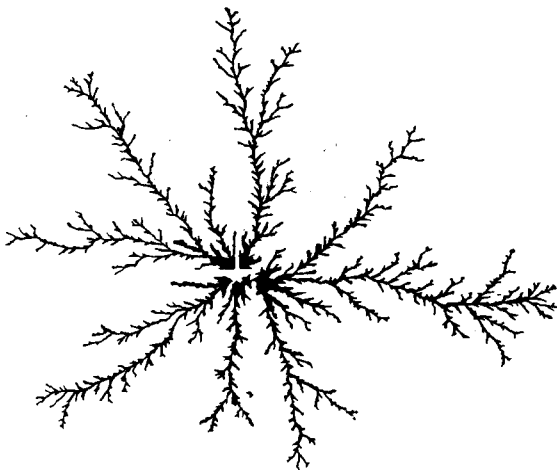


Рис. 13. Фрактальный кластер цинка, образуемый при выделении цинка на поверхности в процессе электролиза ⁷⁷.

Фрактальная размерность кластера $1,66 \pm 0,03$

ствующего анализа такое утверждение в данном случае проблематично.

Фрактальные кластеры могут эффективно образовываться при ассоциации аэрозолей в объеме и на поверхности при определенных условиях процесса. В дальнейшем кластеры будут слипаться, что ведет к разрушению фрактальной структуры. Поэтому фрактальные кластеры не наблюдаются

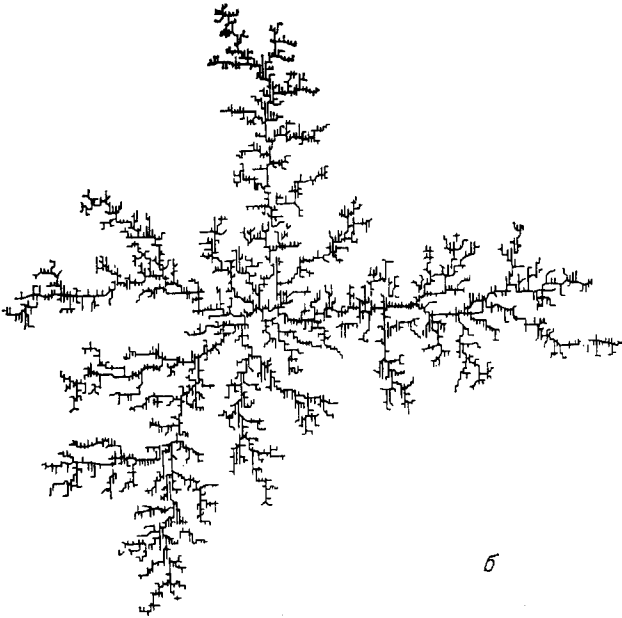
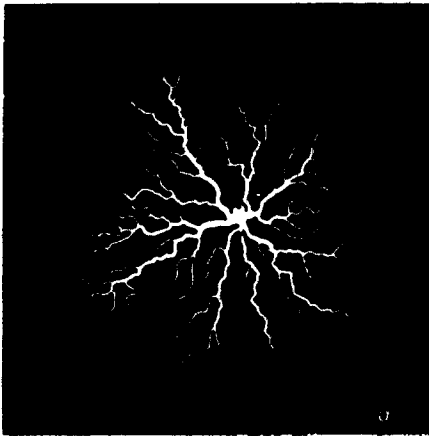


Рис. 14. *a* — Фигура Лихтенберга⁸¹ (проинтегрированная по времени интенсивность свечения от диэлектрического пробоя) для стеклянной пластинки, находящейся в шестифтористой сере под давлением 0,3 МПа. *б* — Картина⁸¹, полученная при стимулировании процесса в машинном эксперименте методом Монте-Карло.

Фрактальная размерность кластера $1,75 \pm 0,02$

там, где они могут быть обнаружены. Появившиеся в последние годы физические представления об этих структурах, несомненно, помогут более детально разобраться во многих реальных процессах, сопровождающихся ассоциацией аэрозолей.

Наряду с процессами образования фрактальных кластеров из твердых аэрозолей в объеме и на поверхности существуют другие процессы и явления, где полезны представления о фрактальной структуре кластеров. Остановимся на некоторых из них. На рис. 14 приведены фигуры Лихтенберга, которые дают картину диэлектрического пробоя в газовом, жидком или твердом изоляторе. В условиях работы⁸¹ один из электродов располагался в центре, а другой представлял собой окружность на диэлектрической поверх-

ности (см. также рис. 7). Светящиеся области диэлектрика, по которым протекает пробойный ток, напоминают фрактальный кластер. Его фрактальная размерность, полученная из соотношения между размерами и числом элементов, составляет примерно 1,7. Из-за ограниченного разрешения не удается определить эту величину по корреляции между плотностями элементов. Простейшая модель такого разряда, включающая движение светящейся точки по ломаным линиям с заданным размером прямых отрезков, дает для фрактальной размерности фигуры Лихтенберга значение $D = 1,75 \pm 0,02$.

Другой пример⁸² относится к гидродинамике. Если жидкость низкой вязкости (например, вода) проталкивается через жидкость высокой вязкости (например, масло), то при этом возникает так называемая неустойчивость вязкого пальца. При этом пространственное распределение жидкости малой вязкости соответствует ветвистой структуре, которая может быть аппроксимирована структурой фрактального кластера.

Следующий пример относится к процессу адсорбции молекул внутренней поверхностью пористых материалов⁸³⁻⁸⁷. Оказывается, распределение по размерам пор в пористом веществе определяется формулой (2.3). Поэтому характеристикой пористого вещества является не его пористость, которая в большей степени связана с размером пор, а фрактальная размерность вещества, отвечающая распределению по порам. По этой причине, как это следует из анализа данных по адсорбционным свойствам отдельных пористых веществ по отношению к разным молекулам, полный удельный размер поглощающей поверхности как функция размера поглощаемой молекулы может быть представлен в виде формулы, отвечающей фрактальной системе⁸⁶.

Если рассматривать систему, составленную из пустот пористого вещества, как фрактальный кластер, то фрактальные свойства такого кластера могут быть установлены по рассеянию рентгеновского излучения или нейтронов с использованием формулы (5.2). В работе⁸⁵ таким способом было установлено, что фрактальная размерность бурого угля составляет $2,56 \pm 0,03$. В работе⁸⁷ исследовались фрактальные свойства пористых песчаников. По рассеянию вторичных электронов от сканирующего электронного микроскопа было найдено, что фрактальная размерность песчаников меняется для разных типов образцов в пределах 2,57—2,87, их пористость составляет 5—30%. При этом свойство самоподобия отдельных участков образцов и свойство фрактальности, определяемое формулой типа (2.3), выполняются в области размеров, изменяющихся в пределах 3—4 порядков (от 0,1 до 100 мкм).

Приведенные примеры показывают, что представления о фрактальных кластерах и фрактальных структурах расширяют наши знания о ряде систем и явлений и способствуют более детальному анализу реальных процессов и явлений. Эти представления являются тем фундаментом, на котором могут успешно развиваться экспериментальные исследования фрактальных структур и динамики их образования.

6. ФРАКТАЛЬНЫЕ КЛАСТЕРЫ И ШАРОВАЯ МОЛНИЯ

Фрактальные кластеры имеют непосредственное отношение к шаровой молнии. В настоящее время практически единственная модель шаровой молнии, которая объясняет ее форму, а также сохранение формы и размеров шаровой молнии в процессе ее эволюции, основана на представлении, что активное вещество шаровой молнии — сгусток нитевидных аэрозолей⁸⁹. Авторы этой модели пришли к ней из своих экспериментальных исследований⁸⁰ релаксации паров металлов, где они наблюдали образование систем в виде сгустка нитей. Учитывая интерес к проблеме шаровой молнии, остановимся на этом вопросе несколько подробнее. В настоящее время мы располагаем достаточным набором обзоров и книг⁹⁰⁻¹⁰³, в которых собрана и обработана информация по наблюдательным данным, относящихся к шаровой молнии,

а также представлены возможные модели шаровой молнии. Число наблюдаемых случаев шаровой молнии достаточно велико. Так, в книге Стаханова¹⁰⁰ проведена обработка свыше тысячи случаев наблюдения шаровой молнии в СССР, в книге Барри¹⁰² учтено свыше 1 800 научных публикаций, в которых сообщалось о случаях наблюдения шаровой и четочной молний и производился анализ наблюдательных данных, а также моделей шаровой молнии. Накопившаяся информация о шаровой молнии позволяет сделать однозначное заключение, что это явление реально существует, и построить образ типичной шаровой молнии с усредненными параметрами. Параметры такой шаровой молнии представлены в табл. VI.

Таблица VI

Параметры средней шаровой молнии по данным наблюдений¹⁰³

Параметр	Значение или заключение
1. Диаметр, см	28 ± 4
2. Время жизни, с	$10^{0,95 \pm 0,25}$
3. Скорость перемещения, м/с	4 ± 1
4. Энергия шаровой молнии, Дж	$10^{4,3 \pm 0,2}$
5. Плотность энергии в шаровой молнии, Дж/см ³	$10^{1,2 \pm 0,4}$
6. Световой поток	$1400 \pm_{800}^{800}$ лм
7. Цвет	Белый ($24 \pm 2\%$), желтый ($24 \pm 2\%$), красный ($18 \pm 2\%$), оранжевый ($14 \pm 2\%$), голубой и фиолетовый ($12 \pm 1\%$) и др.*
8. Корреляция с электрическими явлениями в атмосфере	$70 \pm 10\%$ шаровых молний наблюдается в грозовую погоду
9. Распад шаровой молнии	$50 \pm 20\%$ случаев, когда конец шаровой молнии связан с взрывом
10. Вероятность появления шаровой молнии, км ⁻² мин ⁻¹	$10^{-8,5 \pm 0,5}$

*) В скобках указана относительная вероятность наблюдения шаровой молнии данного цвета.

При анализе модели шаровой молнии необходимо учесть пять сторон этого явления, которые независимым образом должны войти в описание данной модели. Во-первых, это способ хранения энергии в шаровой молнии; во-вторых, характер тепловыделения в шаровой молнии; в-третьих, форма шаровой молнии и структура активного вещества в ней, в-четвертых, механизм излучения шаровой молнии, и в-пятых, электрические явления в шаровой молнии. Если принять отсутствие внешних источников энергии, подпитывающих шаровую молнию, то из анализа происходящих в ней процессов¹⁰⁴ можно прийти к выводу, что единственный способ хранения энергии в шаровой молнии — химический. Действительно, время жизни шаровой молнии намного превышает времена элементарных процессов столкновения частиц в воздухе, и за это время внутренняя энергия гипотетической шаровой молнии успевает перейти в тепловую. Например, в системе, содержащей плазму либо возбужденные атомы или молекулы с достаточной энергией в них, рекомбинация заряженных частиц либо тушение возбужденных состояний осуществляются за времена, существенно меньшие наблюдаемых времен жизни шаровой молнии. Химическая реакция связана с подбарьерными переходами ядер и может происходить достаточно долго, так что этого ограничения для химического способа хранения энергии не существует.

Сосредоточив внимание на химическом способе хранения энергии в шаровой молнии, следует подчеркнуть, что выделенная химически активная ком-

понента в воздухе — озон. При разных способах возбуждения воздуха озон образуется с большей эффективностью и с более высокой концентрацией, чем другие химически активные компоненты ^{105,106}, и при невысоких температурах достаточно медленно разлагается в реальном воздухе ¹⁰⁷. Поэтому озон может быть одной из химических компонент активного вещества шаровой молнии, выполняя в ней роль окислителя.

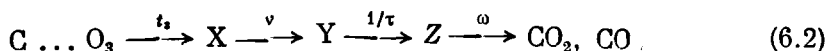
Перейдем ко второй из представленных проблем шаровой молнии, связанной с характером тепловыделения в ней. Тепловыделение осуществляется в результате химических процессов, и попутно с этим имеет место свечение шаровой молнии. Анализ ¹⁰⁷ показывает, что наиболее вероятно химические превращения происходят в газовой-гетерогенной системе. При этом подход газовой компоненты (озона) к гетерогенной системе осуществляется весьма медленно, так что наиболее вероятно, что с самого начала процесса газовая и гетерогенная системы совмещены. Один из вариантов такого совмещения имеет место в случае, когда гетерогенная система имеет пористую структуру и газовая компонента адсорбируется на ее внутренней поверхности *).

Существенное требование к характеру тепловыделения — в шаровой молнии осуществляется интенсивный и медленный процесс. Высокая интенсивность процесса означает, что выделяемая при этом удельная энергия достаточно велика и способна существенно нагреть активное вещество шаровой молнии. Требование интенсивности процесса, как и требование его медленности следуют из наблюдаемых параметров шаровой молнии (см. табл. VI). Однако одновременное выполнение этих двух требований проблематично. Покажем, что эти два требования одновременно не могут быть выполнены для простейшего процесса тепловыделения — одноступенчатого. В этом случае характерное время химического процесса τ связано с температурой реагирующих компонент T законом Аррениуса:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} e^{-E_a/T}. \quad (6.1)$$

Выбрав в качестве предэкспонента характерное время столкновения связанных молекул $\tau_0 \sim 10^{-13} - 10^{-12}$ с и потребовав, чтобы при комнатной температуре время протекания процесса соответствовало времени жизни шаровой молнии $\tau \sim 10$ с, получим для энергии активации процесса $E_a = 18$ ккал/моль. Это значение вполне разумно, так как попадает в интервал существующих значений энергий активации для химических процессов. Используя его, получим при $T = 400$ К $\tau = 0,004$ с, т. е. при повышении температуры на 100 К скорость процесса увеличивается в несколько тысяч раз. Тем самым, если имеется возможность изменения температуры, данный процесс не может быть медленным.

Ясно, что этот вывод не связан с числовыми параметрами, которые мы использовали, а обусловлен резкой зависимостью времени процесса (6.1) от температуры, что в свою очередь определяется сильным различием между характерным молекулярным временем τ_0 и характерным временем протекания процесса τ — временем жизни шаровой молнии. Таким образом, интересующий нас процесс тепловыделения не может быть одновременно интенсивным и медленным, если он одноступенчатый. Возникает вопрос, а существует ли интенсивный и медленный процесс? Экспериментальные исследования ^{108,109} дают нам пример такого процесса — горение пыли древесного угля в поглощенном ей озоне, который феноменологически можно записать в виде



* В осветительных составах используется другой вариант — окислитель и горючее содержатся в виде малых частичек и могут быть забавлены нейтральной компонентой для замедления химической реакции.

Над стрелками указаны скорости соответствующих стадий процесса, причем времена наиболее медленных стадий процесса приведены в табл. VII. При этом сгорает $89 \pm 3\%$ пыли, а тепловыделение, отнесенное к весу всей пыли, составляет 28 ± 3 кДж/г, т. е. сравнимо с удельным тепловыделением при полном сгорании угля в кислороде (32 кДж/г). Основным продуктом процесса является CO_2 ($84 \pm 5\%$ при температуре насыщения 226 К¹¹⁰). Еще одной особенностью процесса является память к температуре насыщения образца

Таблица VII
Времена медленных стадий процесса (6.2)

Т, К	300	400	500	600	700
$\frac{1}{v}$, с	330	190	140	110	90
$\frac{1}{\omega}$, с	740	170	70	40	26

озоном. Если температура насыщения образца озоном менее 245 К, последующие процессы определяются схемой (6.2). Если же насыщение озоном осуществляется при температуре выше 245 К, последующее нагревание образца приводит к разложению озона до кислорода, а древесный уголь при этом полностью сохраняется. Видимо, при поглощении озона древесным углем происходят разные химические перестройки на его внутренней поверхности, которые зависят от температуры процесса. Это и определяет дальнейшую эволюцию системы.

Таким образом, процесс (6.2) может быть рассмотрен как модельный процесс, протекающий в шаровой молнии. Представленные исследования позволяют ответить на вопросы, относящиеся к первым двум проблемам шаровой молнии, которые связаны с характером хранения энергии в ней и тепловыделению. Далее мы сосредоточим внимание на третьей из проблем шаровой молнии, которая отвечает теме данного обзора.

Наблюдательные факты, относящиеся к шаровой молнии, предъявляют к ее модели набор требований, которые для большинства гипотез о природе шаровой молнии оказываются противоречивыми. В частности, тепловыделение при химических процессах приводит к появлению конвективных потоков, которые изменяют область, занятую активным веществом, если оно находится в виде газа или пыли. Оценки¹¹¹ показывают, что в этом случае нагревание активной области в атмосферном воздухе на величину порядка 100 К приводит к потере ее формы и изменению размеров за времена менее 0,1 с, что существенно меньше наблюдаемого времени жизни шаровой молнии. Тем самым активное вещество шаровой молнии не может находиться в виде пыли или газа.

Гипотеза о нитевидной структуре активного вещества в шаровой молнии⁸⁹ не приходит в противоречие с указанными требованиями. Однако при ассоциации твердых аэрозолей возникает не нитевидная структура, а структура фрактального кластера. Поэтому далее будем считать, что активное вещество шаровой молнии имеет структуру фрактального кластера. Такое уточнение структуры для многих процессов не имеет принципиального значения, но в других случаях позволяет иметь более полное представление о данной системе. При этом существенно, что структура фрактального кластера является единственной структурой, создающей легкую и жесткую конструкцию активного вещества. Пока эта конструкция не разрушается при химических процессах, шаровая молния сохраняет свою форму. При этом электрический заряд, который несет шаровая молния, предотвращает «схлопыва-

ние» конструкции⁸⁹. Далее мы рассмотрим следствия, которые вытекают из фрактальной структуры активного вещества шаровой молнии.

Одним из них является движение нагретого воздуха, которое создает подъемную силу для данной конструкции. Движение нагретого воздуха над рассматриваемой системой эквивалентно его движению из трубы. Такая задача была рассмотрена Я. Б. Зельдовичем (см.^{112,113}), и далее мы воспользуемся полученными в ней результатами. Нагретый воздух движется вверх над нагретым телом в виде расширяющегося конуса. Его направленная скорость в области, где находится данная конструкция, составляет по порядку величины

$$u \sim \left(gR_0 \frac{\Delta T}{T} \right)^{1/2}, \quad (6.3)$$

где g — ускорение свободного падения, R_0 — радиус системы, ΔT — разность между температурой системы и температурой окружающего воздуха, которая равна T_0 ($\Delta T \ll T_0$). Характерное значение $u \sim 1$ м/с для $R_0 \sim \sim 10$ см, так что число Рейнольдса $Re \sim R_0 u / \nu \sim 10^3 - 10^4$ (ν — кинематическая вязкость воздуха) и сила сопротивления данной конструкции движущемуся воздуху составляет

$$\mathcal{F} \sim \rho u^2 S,$$

где ρ — массовая плотность воздуха, S — сечение конструкции, т. е. площадь проекции системы на плоскость, перпендикулярную движению. Таким образом, стационарное движение воздуха создает подъемную силу, которая

$$F = a \rho g R_0 \frac{\Delta T}{T} S, \quad (6.4)$$

где a — численный коэффициент. Если подъемная сила уравновешивает силу веса конструкции, то шаровая молния плавает в воздухе.

Численный коэффициент a в формуле (6.4) был определен в серии модельных экспериментов¹¹⁴. Для этой цели из вольфрамовой проволоки радиуса 4 и 7 мкм изготавливались комки радиуса 0,8—2 см и весом 20—150 мг. Эти комки подвешивались на тонкой кварцевой нити, по прогибу которой определялась сила, действующая на нее со стороны комка. Комок нагревался лазерным излучением, температура комка определялась по его тепловому излучению. Одновременное измерение температуры комка и подъемной силы позволило восстановить коэффициент a в формуле (6.4), который оказался равным $a = 11 \pm 5$. Отсюда следует, что шаровая молния может плавать при относительно большом содержании вещества в конструкции. С учетом полученного значения численного коэффициента на основании формулы (6.4) получаем условие всплывания оптически непрозрачного фрактального кластера ($D > 2$)

$$\frac{m}{M} = 8 \frac{\Delta T}{T_0}. \quad (6.5)$$

Для оптически тонкого ($D < 2$) фрактального кластера это условие имеет вид:

$$\frac{r_0}{R_0} = 5 \frac{\rho}{\rho_K} \frac{\Delta T}{T_0}; \quad (6.6)$$

здесь m — масса фрактального кластера, M — масса воздуха находящегося внутри него, ρ — плотность воздуха, ρ_K — плотность материала кластера.

Еще одной существенной особенностью газодинамики воздуха в рассматриваемом явлении оказываются относительно большие энергопотери, затрачиваемые на его движение. Действительно, мощность, затрачиваемая на нагревание протекающего воздуха, составляет $\mathcal{P} \sim \rho_s \Delta T \cdot \text{ил} R_0^2$, где c_p — удельная теплоемкость воздуха. Отсюда находим мощность, затрачи-

ваемую на единицу объема V конструкции:

$$\frac{\rho}{V} = p_0 \left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)^{3/2}, \quad (6.7)$$

где $p_0 \sim \rho_0 T_0 c_p (g/R_0)^{1/2}$. Учитывая численные значения входящих в формулу коэффициентов, получим для $R_0 = 10$ см $p_0 = 7,2$ Вт/см³. Полученное значение приводит нас к выводу, что шаровая молния должна обладать высоким удельным энергозапасом.

Таким образом, из фрактальной структуры шаровой молнии вытекают следствия, связанные с ее газодинамикой. При этом следует отметить, что мы исходили из предположений, согласно которым тепловыделение носит стационарный характер и шаровая молния находится вдали от поверхностей. Эти предположения не выполняются в реальном случае, так что сохраняется лишь качественный характер представленной картины.

Остановимся на четвертой из поставленных проблем шаровой молнии, связанной с ее свечением. Сначала рассмотрим тепловое излучение, создаваемое каркасом шаровой молнии при его нагревании под действием химической реакции, хотя ясно, что тепловым излучением нельзя объяснить большой набор наблюдаемых цветов свечения шаровой молнии (см. табл. VI). Если размеры частиц, из которых составляется каркас шаровой молнии, малы по сравнению с длиной волны, то излучение в инфракрасной области спектра несколько зарезается. Однако этот эффект принципиально не меняет общей картины теплового излучения фрактального кластера.

Тем не менее тепловым излучением можно объяснить один из вариантов шаровой молнии, которая образуется из металлического пара в процессе его остывания. Сначала образуются жидкие аэрозоли, которые растут в паре, затвердевают и объединяются во фрактальный кластер. Будем считать, что оптическая толщина кластера мала и его конструкцию можно составить из совокупности цилиндрических нитей. В соответствии с теорией излучения металлической поверхности¹¹⁵ мощность излучения с единицы поверхности пропорциональна $T^{9/2}$ (T — температура поверхности). Предполагая, что потери энергии рассматриваемой системы определяются излучением его поверхности, получим, что характерное время остывания τ_0 пропорционально радиусу отдельных проволок. В табл. VIII приводятся значения искомого параметра $\tau_0 = T/(dT/dt)$ для радиуса металлических нитей 10 мкм. Из анализа данных, приведенных в таблице, следует, что этот механизм имеет право на жизнь. Он может объяснить явления светящихся шаров, которые иногда наблюдаются при коротком замыкании или при взрыве проволоки. Такие светящиеся шары обычно падают на землю и там гаснут.

Таблица VIII

Время остывания нитей радиуса 10 мкм за счет излучения

T, K		1200	1400	1600	1800
τ_0 , с	Медь	2,8	—	—	—
	Железо	1,3	0,74	0,46	0,31
Доля излучения в оптической части спектра		$1,6 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$

Однако представленная схема не подходит для объяснения большинства наблюдаемых случаев шаровой молнии, ибо обычно время жизни шаровой молнии больше (см. табл. I). При анализе свечения в общем случае для получения представления о яркости шаровой молнии сделаем две описки, сравним среднюю шаровую молнию как источник излучения с равновесным

излучателем. Во-первых, выясним, какой должна быть температура абсолютно черного тела с радиусом средней шаровой молнии, чтобы оно создавало такой же световой поток, что и шаровая молния (см. табл. VI). Найдем $T = 1360 \pm 30$ К. Во-вторых, определим, при какой температуре абсолютно черного тела оно обеспечит такую же световую отдачу*), что и средняя шаровая молния (согласно данным табл. VI световая отдача средней шаровой молнии равна $10^{-0,2 \pm 0,65}$ лм/Вт (световая отдача электрической лампы 14 лм/Вт). Эта температура равна 1800 ± 300 К. Эффективная температура излучающих частиц выше, чем дают проведенные оценки, ибо в первом случае излучение шаровой молнии создается в узкой области спектра, а во втором случае основные потери энергии шаровой молнии связаны с газодинамическим уносом тепла. Поэтому можно ожидать, что эффективная температура излучающих частиц в шаровой молнии $T \geq 2000$ К.

Важной особенностью процессов излучения в атмосферном воздухе является высокая эффективность тушения излучающих атомов и молекул молекулами воздуха. Например, константа скорости тушения резонансно возбужденного атома натрия Na(3p) молекулами азота составляет $(7,0 \pm 1,5) \times 10^{-10}$ см³/с в области температур 400—2200 К, а молекулами кислорода $(12 \pm 1) \cdot 10^{-10}$ см³/с в области температур 1000—2500 К. Эти данные взяты из обзора¹¹⁷, указанные погрешности отвечают статистическому усреднению результатов разных работ. Используя приведенные данные, находим, что в воздухе при атмосферном давлении и температуре 2000 К вероятность тушения резонансно возбужденного атома натрия составляет 0,98, а вероятность высвечивания 0,02.

Высокая вероятность тушения возбужденных атомов и молекул в атмосферном воздухе приводит к тому, что они находятся в термодинамическом равновесии с воздухом и их локальная плотность не зависит от способа создания. Это обстоятельство с учетом ограниченной локальной температуры в шаровой молнии позволяет отобрать возбужденные атомы или молекулы, которые могут быть ответственны за свечение шаровой молнии. Соответствующие возбужденные состояния должны иметь малое излучательное время жизни, приводить к излучательным переходам в основное состояние и рождать фотоны в оптической части спектра. Возбужденные атомы или молекулы, которые могут создавать свечение шаровой молнии, представлены на диаграмме (рис. 15).

Рассматриваемый механизм свечения шаровой молнии аналогичен свечению пламени, в которое введена присадка, а также свечению осветительных составов в пиротехнике. В связи с этим проанализируем с точки зрения свечения желтой шаровой молнии излучение состава желтого огня в пиротехнике. Содержание химических компонент этого состава таково¹²⁰: KNO₃ — 37%, Na₂C₂O₄ — 30%, Mg — 30%, смолы — 3%. Этому составу отвечает удельный энергозапас 6 кДж/г и световая отдача 8 лм/Вт, максимальная температура горения 2500—3000 К. Свечение средней шаровой молнии может обеспечить 0,3 л состава, а его химический энергозапас 3 г. Если содержание натрия в этом составе снизить на два порядка, тогда световая отдача рассматриваемого осветительного состава будет соответствовать световой отдаче шаровой молнии.

Существенная особенность химического процесса в осветительном составе обусловлена тем, что окислитель берется из самого состава, а не является кислородом воздуха. Это определяет быстрое протекание реакции, создает высокие температуры и приводит к высокой световой отдаче рассматриваемого источника света. Ранее подобный вывод о совмещении реагирующих компонент был сделан в отношении химического процесса в шаровой молнии. При этом, кроме озона, кислородсодержащими компонентами в атмо-

*) Световая отдача источника света — отношение создаваемого им светового потока к затраченной на это мощности¹¹⁶.

сферном воздухе могут быть окислы азота и серы, а также соли азотной и серной кислот.

Последний из рассматриваемых вопросов относится к электрическим свойствам шаровой молнии. Они следуют из наблюдений, согласно которым¹⁰⁰

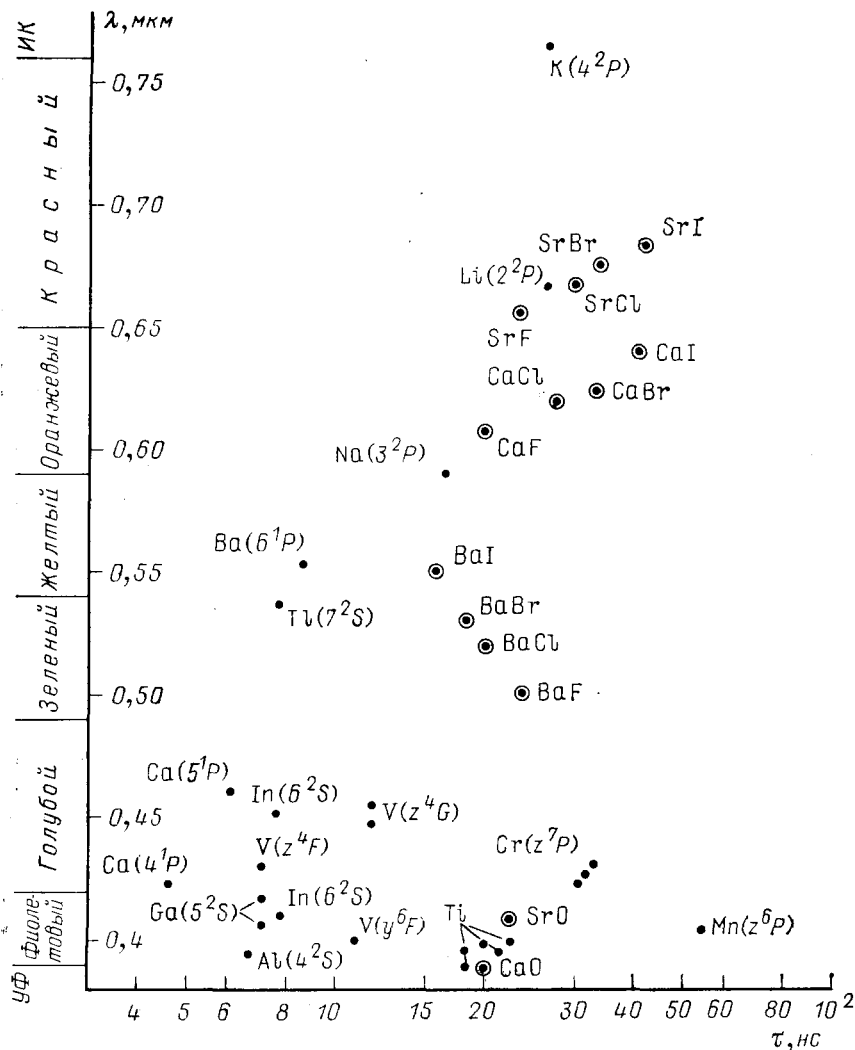


Рис. 15. Длины волн переходов в основное состояние для короткоживущих возбужденных состояний атомов и молекул, излучающих в оптической области спектра.

Для молекул указано положение перехода между основными колебательными состояниями электронных переходов

шаровая молния нередко притягивается к металлическим предметам, взаимодействует с электрическими системами, иногда появляется из электрических приборов. В ряде случаев, когда наблюдалось воздействие шаровой молнии на человека, отмечался одинаковый характер последствий от шаровой молнии и электрического разряда. Возникает вопрос, откуда берется электрический заряд шаровой молнии, создающий ее поверхностное натяжение и устойчивость конструкции, а также какие электрические явления это вызывает.

Образование электрического заряда идет параллельно с образованием фрактального кластера при ассоциации твердых частиц. Эти частицы заряжены, причем в случае сферической частицы радиуса r_0 электрический заряд

частицы Z , выраженный в единицах заряда электрона e , равен ⁵⁷

$$Z = \frac{7r_0}{e^2} \ln \frac{K_-}{K_+}, \quad (6.8)$$

где K_- , K_+ — подвижности отрицательных и положительных ионов в воздухе. Сорт ионов в воздухе, а следовательно, их подвижность зависят от влажности воздуха и содержащихся в нем примесей. Усредняя по значениям подвижностей ионов в реальном воздухе ^{118,119}, имеем

$$\frac{Z}{r_0} = -6 \pm 2 \text{ мкм}^{-1}.$$

При ассоциации отрицательно заряженных частиц образуется отрицательно заряженный кластер. Существенно, чтобы перетекание заряда на периферию кластера происходило медленнее, чем его образование. Тогда поверхностный заряд не будет препятствовать образованию заряженного кластера.

Для получения представления о количественной стороне процесса мы рассмотрим конкретный режим, когда фрактальный кластер сферической формы с радиусом $R_0 = 10$ см собирается из частиц радиуса 1 мкм и его поверхностное натяжение равно поверхностному натяжению воды (0,073 Дж/м²). Поверхностное натяжение α , определяемое электрическим зарядом кластера q , равно

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi R_0^2} = \frac{E^2}{4\pi R_0}, \quad (6.9)$$

где E — напряженность электрического поля около его границы. Эти величины в данном случае равны $q = 10^3$ CGS, $E = 300$ кВ/м, потенциал кластера 30 кВ. Если воспользоваться формулой (5.1), то это отвечает фрактальной размерности кластера $D = 2,31$, что вполне реально (см. табл. III). После перетекания на периферию кластера заряд будет сосредоточен на концах размером порядка 50 мкм. Вблизи их поверхности создается поле напряженностью 30 мВ/м, что недостаточно для осуществления коронного разряда. Фрактальный кластер разряжается под действием ионов, находящихся в атмосфере. При характерных плотностях ионов в атмосфере $10^2 - 10^3$ см⁻³ это осуществляется за времена порядка 10 мин, причем ионы собираются с большого объема атмосферы порядка $10^3 - 10^4$ см⁻³. Кроме того, вблизи концов кластера, где напряженность поля превышает 3 мВ/м, отрицательный заряд в воздухе связан с электронами. Столкновение электронов с молекулами воздуха возбуждает молекулы и вызывает свечение. Однако такое свечение слабое и может быть сравнимо только с интенсивностью свечения ночных насекомых.

Остановимся еще на одном моменте, связанном со свойством фрактального кластера, который включает в себя активное вещество шаровой молнии. Отметим, что если этот кластер образуется последовательным присоединением к нему отдельных частиц, то его фрактальная размерность равна $2,46 \pm \pm 0,05$ (см. табл. III) и он оптически непрозрачен. Если же он образуется при кластер-кластерной ассоциации, то фрактальная размерность кластера равна $1,77 \pm 0,03$ и он оптически прозрачен. Выбор между этими двумя вариантами может быть сделан, если известна оптическая прозрачность шаровой молнии. В ряде наблюдений шаровой молнии сообщалось, что она оптически прозрачна. Однако такие сообщения вряд ли могут считаться надежными. Более определенная информация может быть получена с помощью поперечного фотометрирования снимка шаровой молнии. Это было проделано в работе ⁵³. Использовался снимок следа шаровой молнии, который сделан В. М. Дерюгиным во время грозы на метеостанции Карабад в Гурьевской области 9 июня 1958 г. в 21 ч. 30 мин.

Фотометрия следа шаровой молнии позволяет установить, как количество света, попавшее на пленку, убывает в поперечном направлении от сере-

дины следа шаровой молнии. Выясним, какова эта зависимость в двух предельных случаях. Количество света, падающего на данный участок фотографии, равно мощности света, падающего на него в данный момент времени, проинтегрированной по времени. Будем считать, что шаровая молния — сферически симметричная система радиуса R_0 и движется равномерно. Пусть в данную точку проектируется излучение, соответствующее прицельному параметру ρ (ρ — минимальное расстояние до совокупности точек шаровой молнии, проектируемых в данную точку фотографии). Если шаровая молния оптически непрозрачна, то мощность излучения, попадающего в данную

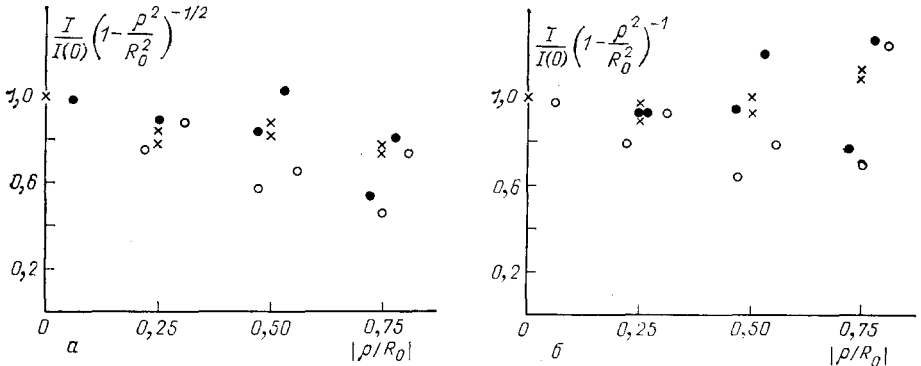


Рис. 16. Поперечное фотометрирование следа шаровой молнии.

Относительное почернение пленки в перпендикулярном к следу направлении, выраженное в удобных единицах для двух моделей: излучение идет с поверхности (а), излучение идет с объема (б). Если соответствующая модель работает, а шаровая молния имеет сферическую форму и однородна, то для данной модели точки должны лечь на прямую $y = 1$

точку, одинакова в течение всей экспозиции. Почернение пропорционально времени экспозиции $2(R_0^2 - \rho^2)^{1/2}/v$ (v — скорость движения шаровой молнии). Поэтому относительное почернение пленки равно $[1 - (\rho^2/R_0^2)]^{1/2}$, где за единицу взято почернение в центре следа. Подобным способом для оптически прозрачной шаровой молнии получим для относительного почернения поперечного следа шаровой молнии величину $1 - (\rho^2/R_0^2)$.

На рис. 16 приводятся результаты фотометрирования следа шаровой молнии⁶³, подогнанные под один из рассмотренных вариантов. Если шаровая молния оптически прозрачна или оптически непрозрачна, на соответствующем графике экспериментальные точки должны лечь на прямую $y = 1$. Данные рис. 16 не позволяют сделать выбор между рассматриваемыми предельными случаями «на глазок», как поступили авторы работы⁶³. Статистическая обработка данных рис. 16 дает среднее значение относительного почернения в предположении оптической непрозрачности шаровой молнии $y = 0,81 \pm 0,16$, а предположение оптической прозрачности дает $y = 0,96 \pm 0,17$. Как видно, хотя мы должны отдать предпочтение случаю оптически прозрачной шаровой молнии, большая погрешность используемых данных не позволяет считать несостоятельным другой предельный случай. Проведенный анализ показывает, что поперечное фотометрирование фотографии следа шаровой молнии при наборе соответствующей статистики позволит получить полезную информацию о состоянии активного вещества в шаровой молнии.

В заключение этого раздела отметим следующее. Понимание того, что активное вещество шаровой молнии имеет структуру фрактального кластера, позволяет ответить на основные принципиальные вопросы, относящиеся к шаровой молнии, и схематически представить физическую картину этого явления. Тем не менее для создания лабораторных моделей шаровой молнии необходимо более детальное исследование каждого из поставленных вопросов с использованием конкретных систем и конкретных условий.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Фрактальные кластеры являются промежуточным этапом образования конденсированной фазы из твердых аэрозолей. Поэтому информация, полученная о таких структурах, в ближайшем будущем позволит создать детальную физическую картину образования конденсированной фазы и выяснить роль фрактальных кластеров в реальных явлениях образования конденсированного вещества в газе и жидкости.

Фрактальные кластеры являются одним из представителей систем с фрактальной структурой. Поскольку это геометрические системы, их анализ более прост, чем ряда аналогов фрактальных кластеров. Поэтому информация, полученная для фрактальных кластеров, будет полезна для понимания физической картины различных структур и явлений фрактального типа.

Исследование фрактальных кластеров интересно и в чисто методологическом отношении. Опыт изучения фрактальных кластеров показал, что в настоящее время машинный эксперимент является мощным средством исследования физических объектов и явлений и для соответствующего круга задач по своим возможностям существенно превосходит другие методы.

В заключение отметим, что фрактальный кластер вошел в современную физику как интересная и распространенная физическая структура и найдет в ней заметное место.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Witten T. A., Sander L. M. // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 47. P. 1400.
2. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. — San Francisco: Freeman, 1982.
3. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — М.: Гидрометеоиздат, 1978.
4. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. // *УФН*. 1985. Т. 146. С. 493.
5. Meakin P. // *Phys. Rev. Ser. A*, 1983, V. 27. P. 604.
6. Meakin P. // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 51. P. 1119.
7. Kolb M., Botet R., Jullien R. // *Ibidem*. P. 1123.
8. Meakin P. // *J. Colloid. and Interface Sci.* 1985. V. 102. P. 491.
9. Botet R., Jullien R., Kolb M. // *J. Phys. Ser. A*. 1984, V. 17. P. L75.
10. Plischke M., Racz Z. // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 415.
11. Racz Z., Plischke M. // *Phys. Rev. Ser. A*. 1985. V. 31. P. 985.
12. Meakin P. // *Ibidem*. 1983. V. 27. P. 1495.
13. Meakin P. // *J. Chem. Phys.* 1983. V. 79. P. 2426.
14. Sahimi M. et al. // *Phys. Rev. Ser. A*. 1985, V. 32. P. 590.
15. Meakin P. // *Ibidem*. 1984. V. 29. P. 997.
16. Meakin P. // *J. Colloid. and Interface Sci.* 1983. V. 96. P. 415.
17. Kolb M. // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 1653.
18. Meakin P., Wasserman Z. P. // *Phys. Lett. Ser. A*. 1984. V. 103. P. 337.
19. Meakin P. // *Phys. Rev. Ser. B*. 1984. V. 29. P. 2930.
20. Jullien R., Kolb M., Botet R. // *J. de Phys.* 1984. Т. 45. P. L211.
21. Botet R., Jullien R., Kolb M. // *Phys. Rev. Ser. B*. 1984. V. 30. P. 2150.
22. Richter R. et al. // *Bull. Am. Phys. Soc.* 1983. V. 28. P. 261.
23. Sander L. M., Cheng Z. M., Richter R. // *Phys. Rev. Ser. B*. 1983. V. 28. P. 6394.
24. Garik P. // *Ibidem. Ser. A*. 1985. V. 32. P. 1275.
25. Wiegand F. W., Perelson A. S. // *J. Stat. Phys.* 1982. V. 29. P. 813.
26. Sawada Y. et al. // *Phys. Rev. Ser. A*. 1982. V. 26. P. 3557.
27. Pattern Formation of Dynamic Systems and Pattern Recognition // Ed. H. Haken. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979.
28. Hentschel H. G. E., Procaccia I. // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49. P. 1158.
29. Hentschel H. G. E., Procaccia I. // *Phys. Rev. Ser. A*. 1983. V. 27. P. 1266.
30. Meakin P., Sander L. M. // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 54. P. 2053.
31. Witten T. A., Sander L. M. // *Phys. Rev. Ser. A*. 1983. V. 27. P. 5686.
32. Ball R. C. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 55. P. 1406.
33. Meakin P. // *Phys. Rev. Ser. B*. 1984. V. 29. P. 3722.
34. Meakin P. // *Ibidem. Ser. A*. 1983. V. 27. P. 2616.

35. Hentschel H. G. E. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 212.
36. Muthukumar M. // Ibidem. 1983. V. 50. P. 686.
37. Rasz Z. // Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 32. P. 1129.
38. Пататинский А. З., Похровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1982.
39. Pfeuty P., Toulouse G. Introduction to the Renormalization Group and to Critical Phenomena.— N. Y.: J. Wiley, 1977.
40. Amit D. J. Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena.— N. Y.: MacGraw Hill, 1978.
41. Вильсон К. Дж. // УФН. 1983. Т. 141. С. 193.
42. Gould H., Family F., Stanley H. E. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 686.
43. Alexander S., Orbach R. // J. de Phys. 1982. T. 43. P. L625.
44. Rammal R., Toulouse G. // Ibidem. 1983. T. 44. P. L13.
45. Halvin S., Nossal R. // Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L427.
46. Sahimi M. // Ibidem. P. 2567.
47. Meakin P., Stanley H. E. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1457.
48. Djordjevic Z; V. et al. // Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 30. P. 478.
49. Vannimenus J., Nadal J. P., Martin H. // J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L351.
50. Botet R., Jullien R., Kolb N. // Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 30. P. 2150.
51. Kolb M., Jullien R. // J. de Phys. 1984. V. 45. P. L977.
52. Meakin P. // J. Chem. Phys. 1984. V. 81. P. 4637.
53. Дмитриев М. Т., Дерюгин В. М., Калинин Г. А. ЖТФ. 1972. Т. 42. С. 2187.
54. Meakin P. // Ibidem. 1985. V. 83. P. 3645.
55. Meakin P. // J. Colloid. and Interface Sci. 1984. V. 102. P. 491.
56. Ball R. C. et al. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 1406.
57. Фукс Н. А. Механика аэрозолей.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.
58. Smoluchowski M. V. // Zs. Phys. 1916. Bd 17. S. 585.
59. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли — пыли, дымы и туманы/Пер. с англ.— Л.: Химия, 1972.— С. 147.
60. Kinetics of Aggregation and Gelation/Eds F. Family, D. P. Landau.— Amsterdam: North-Holland, 1984.
61. Botet R., Jullien R. // J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. 2517.
62. Vicsek T., Family F. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1669.
63. Meakin P., Vicsek T., Family F. // Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 564.
64. Deutsch J. M., Meakin P. // J. Chem. Phys. 1983. V. 77. P. 2093.
65. Nauenberg M. // Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 28. P. 449.
66. Herrmann H. J., Landau D. P., Stauffer D. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 412.
67. Herrman H. J., Stauffer D., Landau D. P. // J. Phys. Ser. A, 1983. V. 16. P. 1221.
68. Friedlander K. Smoke, Dust, Haze: Fundamental of Aerosol Behaviour.— N. Y.: J. Wiley, 1977.
69. Beischer D. // Zs. Electrochem. 1938. Bd 44. S. 375.
70. Vicsek T., Meakin P., Family F. // Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 32. P. 1122.
71. Meakin P., Deutsch J. M. // J. Chem. Phys. 1985. V. 83. P. 4086.
72. Sander L. M., Ramandal P. Ben-Jacob E. // Phys. Rev. 1985. V. 32. P. 3156.
73. Ben-Jacob E. et al. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 1315.
74. Forrest S. R., Witten T. A. // J. Phys. Ser. A. 1979. V. 12. P. L109.
75. Weitz D., Oliveria M. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1433.
76. Elam W. T. et al. // Ibidem. 1985. V. 54. P. 701.
77. Matsushita M. et al. // Ibidem. 1984. V. 53. P. 286.
78. Schaefer D. W., Keefer K. D. // Ibidem. P. 1383.
79. Schaefer D. W. et al. // Ibidem. V. 52. P. 2371.
80. Александров В. Я., Бородин И. П., Киченко Е. В., Подмошненский И. В. // ЖТФ. 1982. Т. 52. С. 818.
81. Niemeyer L., Pietronero L., Weismann H. J. // Phys. Rev. Lett. 1984, v. 52. P. 1033.
82. Nittmann J., Daccord G., Stanley N. E. // Nature. 1985. V. 314. P. 141.
83. Pfeifer P., Avnir D. // J. Chem. Phys. 1983. V. 79. P. 3558.
84. Avnir D., Farin D., Pfeifer P. // J. Chem. Phys. 1983. V. 79. P. 3566.
85. Vale H. D., Schmidt P. W. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 596.
86. Avnir D., Farin D., Pfeifer P. // Nature. 1984. V. 308. P. 261.
87. Katz A. J., Thompson A. H. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1325.
88. Amitranov S., Bunde A., Stanley H. E. // J. Phys. Ser. A. 1985. V. 18. P. L923.
89. Александров В. Я., Голубев Е. М., Подмошненский И. В. // ЖЭТФ. 1982. Т. 52. С. 1987.
90. Араго Ф. Гром и молния/Пер. с франц.— СПб., 1859.

91. Brand W. Der Kugelblitz.— Hamburg: H. Grand, 1923.
92. Humphreys W. J.//Sci. News Lett. 1931. V. 20. P. 73.
93. Humphreys W. J.//Am. Phil. Soc. Proc. 1936. V. 76. P. 613.
94. Леонов Р. Загадка шаровой молнии.— М.: Наука, 1965.
95. McNally J. R. Preliminary Report on the Ball Lightning. ORNL-3938.— Oak Ridge Nat. Lab., May 1966.
96. Rayle W. D. Ball Lightning Characteristics. NASA Techn. Note. NASA-TN-D-3188.—1966.
97. Дмитриев М. Т.//Природа. 1971. № 6. С. 50.
98. Сингер С. Природа шаровой молнии/Пер. с англ.— М.: Мир, 1973.
99. Chagman W. N.//Phys. Rept. 1979. V. 54. P. 261.
100. Стаханов И. П. Физическая природа шаровой молнии.— М.: Атомиздат, 1979.
101. Имянитов И., Тихий Д. Я. За гранью закона.— М.: Атомиздат, 1980.
102. Барри Дж. Шаровая молния и четочная молния/Пер. с англ.— М.: Мир, 1983.
103. Смирнов Б. М. Проблема шаровой молнии.— М.: Наука.
104. Смирнов Б. М.//УФН, 1975. Т. 116. С. 731.
105. Смирнов Б. М.//ДАН СССР. 1976. Т. 226. С. 806.
106. Смирнов Б. М.//ЖТФ. 1977. Т. 47. С. 830.
107. Смирнов Б. М.//Химия плазмы.— М.: Атомиздат, 1976.— Вып. 4. С. 191.
108. Назарян А. О., Плюхин В. Г., Смирнов Б. М. Тепловые процессы при взаимодействии озона и древесного угля: Препринт ИТФ СО АН СССР. № 121.— Новосибирск, 1985.
109. Назарян А. О., Плюхин В. Г., Смирнов Б. М.//Химия плазмы.— М.: Энергоатомиздат, 1986. Вып. 14.
110. Плюхин В. Г., Смирнов Б. М.//ДАН СССР. 1986.
111. Крайнов В. П., Смирнов Б. М., Шматов И. П.//Ibidem. 1985. Т. 283. С. 361.
112. Зельдович Я. Б.//ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 1463; то же://Избранные труды. I.— М.: Наука, 1984.—С. 74.
113. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.— § 56. Задача 4. С. 267.
114. Крайнов В. П., Лебедев Г. П., Назарян А. О., Смирнов Б. М.—//ЖТФ. 1986.
115. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.— С. 420.
116. Сена Л. А. Единицы физических величин.— М.: Наука, 1973.
117. Андреев Е. А., Никитин Е. Е.//¹⁰⁷—1976.— С. 28.
118. Красногорская Н. В. Электричество нижних слоев атмосферы и методы его измерения.— Л.: Гидрометеоздат, 1972.
119. Hussin A. et al.//J. Aerosol Sci. 1983. V. 14. P 671.
120. Шидловский А. А. Основы пиротехники.—/М.: Машиностроение, 1973.