1986 г. Май Том 149, вып. 1
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

530.145.6

КВАНТОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ *)

Р. Джэкив

Описаны динамические модели, параметры которых (массы, заряды) должны квантоваться вследствие требования квантомеханической согласованности. Эти модели (и связанные с ними топологические представления) имеют физические приложения к феноменологическому описанию высокотемпературной и низкоэнергетической квантовой хромодинамики, к нерелятивистской динамике магнитных монополей и к квантовому эффекту Холла

Обсуждаемые здесь вопросы возникли на заре современной физики, когда Планк, Эйнштейн и Бор осознали, что динамические переменные — энергия, момент количества движения и им подобные — принимают не непрерывные значения. Эти значения квантуются. Сегодня мы, конечно, знаем, почему это так: энергия, момент количества движения и т. д.— всё это собственные значения линейных эрмитовых операторов, спектр которых имеет дискретную часть. Это существенно квантовый эффект, в классической физике он отсутствует. Однако в последнее десятилетие физики и математики обнаружили другой, чисто классический эффект квантования — квантование солитонного и инстантонного чисел. Этот эффект возникает при работе с нелинейными дифференциальными уравнениями, когда ищутся регулярные классические поля, удовлетворяющие этим уравнениям и имеющие конечную энергию. Эти модели объединяет то, что все они содержат векторное калибровочное поле **A**; для решений, удовлетворяющих требованиям регулярности, **A** ведет себя асимптотически (при $r \to \infty$) как $\mathbf{N}/r$, с целым $N = |\mathbf{N}|$, определяющим инстантонное или солитонное число. Это классическое квантование не имеет никакого отношения к квантовой механике; оно возникает вследствие условий регулярности (такие дифференциальные уравнения появляются в полуклассическом приближении к квантовой теории поля). Мы не будем обсуждать здесь солитоны и инстантоны [1], хотя они играли важную роль в развитии рассматриваемого мной вопроса: для анализа физических полевых конфигураций физики научились пользоваться топологическими методами [2], которые были затем применены для развития третьего контекста для квантования. Об этом и пойдет речь ниже.

В дополнение к квантовомеханическому квантованию динамических переменных в квантовой механике и классическому квантованию солитонного и инстантонного чисел существует еще третий эффект квантования, возникающий в результате сочетания как классических топологических, так

*) J a c k i w R. Quantization of Physical Parameters//Comm. Nucl. and Part. Phys. 1984. V. 13. No. 3. Pp. 141—156.— Перевод О. В. Огиевецкого.

Р. Джэкив работает в Массачусетском Технологическом институте, Кембридж, шт. Массачусетс, США.

и квантовомеханических рассмотрений. Он заключается в том, что квантуются параметры, описывающие динамику рассматриваемой системы (массы, константы связи и т. д.). В классической теории параметры могут пробегать широкую область непрерывных значений. В квантовой теории эти параметры не являются собственными значениями линейных эрмитовых операторов; не связаны они и с какими-либо неожиданными свойствами классических решений. Но могут возникать некоторые квантовые условия согласованности, в результате которых множество значений этих параметров становится дискретным.

Хотя квантование параметров в квантовой теории поля было понято только недавно [3], первый пример этого явления был обнаружен более чем 50 лет назад, когда Дирак проквантовал магнитный заряд(см. [4]). Этот широко известный и важный результат содержит все необходимое для теоретико-полевых обобщений, поэтому я рассмотрю его в первую очередь.

Существует много подходов к квантованию дираковского монополя. Я выбрал подход, применимый и к теории поля, и буду подчеркивать нужные свойства лагранжиана и действия.

Начнем с напоминания классического уравнения для (нерелятивистской) частицы с массой m и зарядом e, движущейся в поле магнитного монополя с магнитным зарядом g, т. е., в магнитном поле $\vec{\mathscr{B}} = g\mathbf{r}/r^3$, источником которого служит бесконечно тяжелый точечный монополь, расположенный в начале координат:

$$\nabla\vec{\mathscr{B}} = 4\pi g\delta(r). \tag{1}$$

Классическое динамическое уравнение определяет закон движения под действием силы Лоренца (я положил c равным единице):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e[\dot{\mathbf{r}}\vec{\mathscr{B}}] = eg\frac{[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]}{r^3}. \tag{2}$$

Уравнение (2) хорошо определено и может быть решено при произвольных значениях величины eg. Но квантовая динамика, как показал Дирак, состоятельна только при $eg = n/2$, где n — любое целое (в единицах постоянной Планка h, которую тоже положим равной 1).

Для того чтобы понять, почему это так, исследуем лагранжиан L, из которого следует уравнение движения (2). В него входит знакомый лоренцевский член, содержащий скорость. Этот член, однако, нельзя выразить через $\vec{\mathscr{B}}$; для его записи необходимо ввести векторный потенциал $\mathbf{A}$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа для L есть (2), если положить $\vec{\mathscr{B}}$ равным ротору потенциала $\mathbf{A}$,

$$[\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A}] = \vec{\mathscr{B}}. \tag{4}$$

Посмотрим, что изменится, если мы сделаем статическое калибровочное преобразование векторного потенциала:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\Theta. \tag{5}$$

Уравнение движения (2) нечувствительно к изменениям калибровки, так как в него входит калибровочно-инвариантное магнитное поле $\vec{\mathscr{B}}$. Однако в выражение для лагранжиана входит векторный потенциал, поэтому L преобразуется на полную производную (так как Θ не содержит явной зависимости от времени):

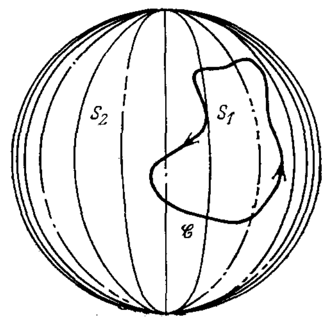
$$L \to L + e\dot{\mathbf{r}}\boldsymbol{\nabla}\Theta = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e\Theta). \tag{6}$$

Конечно, изменение лагранжиана на полную производную не влияет на уравнение движения и поэтому (2) калибровочно-инвариантно. Тем не менее, L, а вместе с ним и действие I, *меняются* при калибровочных преобразованиях:

$$I \equiv \int_{t_1}^{t_f} dt \cdot L,$$

$$I \to I + e\Theta \,|_{t_1}^{t_f}. \tag{7}$$

На самом деле в классической физике лагранжиан и действие несущественны, и вся информация о динамической системе содержится в уравнениях движения. Таким образом, калибровочная неинвариантность этих величин



Интегрирование действия для точечного монополя.

Криволинейный интеграл от потенциала **A** вдоль пути $\mathscr{C}$ может быть преобразован в поверхностный интеграл либо по S_1, либо по S_2 в зависимости от того, на каком из этих кусков **A** несингулярен. Разность между этими поверхностными интегралами равна полному магнитному потоку через $S = S_1 \cup S_2$

не имеет следствий в классической теории. Однако в квантовой механике лагранжиан и действие становятся важными объектами: канонические переменные определяются с помощью лагранжиана и, более того, квантовомеханические амплитуды перехода содержат e^{iI} — это видно, например, из формулировки с помощью функционального интеграла. Поэтому нужно как следует разобраться с уравнением (7), чтобы точно понять, как изменяется действие.

Поступим следующим образом. Рассмотрим замкнутый путь $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_f)$ и оценим действие вдоль него в двух различных калибровках. Ясно, что нужно рассматривать только член, описывающий взаимодействие; его можно записать как криволинейный интеграл вдоль замкнутого пути $\mathscr{C}$

$$\int_{t_1}^{t_f} dt e\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = e \oint_{\mathscr{C}} d\mathbf{r}\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{8}$$

При работе с интегралами подобного типа возникает соблазн использовать формулу Стокса для перехода к поверхностному интегралу по стягиваемой контуром $\mathscr{C}$ поверхности. Однако для этого нужно, чтобы подынтегральное выражение не имело особенностей, а потенциал магнитного поля обязательно их имеет, так как из уравнений (1) и (4) следует, что дивергенция его ротора не равна нулю. Подробное исследование природы этих особенностей — «струн Дирака»— увлекательнейший предмет; с ним в физику вошла большая область математических исследований — теория расслоений [4]. Сейчас нам нужно знать только то, что сингулярные струны зависят от калибровки. Это видно из того, что калибровочно-инвариантное магнитное поле регулярно (кроме особенности типа $1/r^2$ в точке нахождения самого монополя). Кроме того, подходящим выбором калибровки можно зафиксировать положение особенностей в пространстве; например, имеется калибровка, в которой особенности лежат на положительной части оси z, или другая, в которой они лежат на отрицательной части оси z и т. д.

Рассмотрим теперь наш замкнутый контур $\mathscr{C}$, лежащий на замкнутой поверхности S, как показано на рисунке. Контур ограничивает область S_1

из S, кроме того, $\mathscr{C}$ ограничивает (при противоположном выборе ориентации) дополнительную область S_2. Очевидно, $S = S_1 \cup S_2$. Мы выбираем калибровку (I) так, что A_I не имеет особенностей в S_1 и другую калибровку (II), в которой нет особенностей в S_2. По формуле Стокса можно записать

$$e \oint_{\mathscr{C}} d\mathbf{r}\mathbf{A}_{\mathrm{I}} = e \int_{S_1} d\mathbf{S}\,[\nabla, \mathbf{A}_{\mathrm{I}}] = e \int_{S_1} d\mathbf{S}\vec{\mathscr{B}}, \tag{9а}$$

$$e \oint_{\mathscr{C}} d\mathbf{r}\mathbf{A}_{\mathrm{II}} = -e \int_{S_2} d\mathbf{S}\,[\nabla, \mathbf{A}_{\mathrm{II}}] = -e \int_{S_2} d\mathbf{S}\vec{\mathscr{B}}. \tag{9б}$$

Знак минус в (9б) возникает вследствие противоположного по сравнению с (9а) выбора ориентации. Разница между двумя формулами (9а), (9б) и составляет изменение действия при переходе от калибровки (I) к калибровке (II):

$$\Delta I = e \int_{S_1 \cup S_2} d\mathbf{S}\vec{\mathscr{B}} = e \int_V d^3r \nabla \vec{\mathscr{B}} = 4\pi e g. \tag{10}$$

Мы использовали формулу Гаусса, чтобы преобразовать интеграл по поверхности S в объемный интеграл по объему V, ограниченному поверхностью S. При получении последнего равенства учтено уравнение (1) (для случая, когда монополь находится в объеме V).

Теперь дираковские условия квантования становятся очевидными. Квантовая физика содержит величину e^{iI}, и она должна быть калибровочно-инвариантной. С этим совместны только кратные 2π изменения действия — что возможно только в случае, если $eg = n/2$.

Мы не прибегали к топологическому анализу, чтобы получить этот результат. Для приложений к более сложным примерам все же полезно проследить связи с математическими понятиями. Калибровочные преобразования $U(t) = e^{i\Theta(r(t))}$ образуют группу SO(2). Эти групповые элементы зависят от t и задают отображение одномерного пространства в группу. Когда это одномерное пространство компактифицировано в окружность (необходимый шаг в математических рассмотрениях), возникает вопрос: все ли отображения единичной окружности в группу SO(2) ($t \in$ окружность $\mapsto U(t) \in \mathrm{SO}(2)$) могут быть продеформированы в тривиальное отображение в единицу группы ($t \in$ окружность $\mapsto I \in \mathrm{SO}(2)$) или же отображения распадаются на гомотопически различные классы, не деформируемые один в другой? Геометрическая интуиция подсказывает, что верно последнее; математически этот факт выражается следующим образом:

$$\Pi_1(\mathrm{SO}(2)) = \{\text{аддитивная группа целых чисел}\} \equiv \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Именно эти целые числа из (11) — «числа вращения» отображения — и встречаются в дираковском квантовании заряда монополя.

Теперь ясен путь к теоретико-полевым обобщениям: мы ищем теорию, в которой полевые уравнения калибровочно-инвариантны, а лагранжиан — нет. Требование инвариантности экспоненты от действия приводит к квантованию параметров, задающих калибровочное преобразование. Такие действия называются «многозначными» [5].

Первый теоретико-полевой пример был обнаружен в трехмерных калибровочных теориях [3]. Эти теории любопытны тем, что они допускают калибровочно-инвариантные уравнения поля с массовым членом [6]:

$$D_\mu F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\varepsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0; \tag{12}$$

здесь $F_{\mu\nu}$ — напряженность поля. Это антиэрмитова матрица, связанная с потенциалом A_μ обычной формулой,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{13}$$

D_μ обозначает ковариантную производную,

$$D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \quad] \tag{14}$$

и m — это параметр с размерностью массы. Хотя эта модель может рассматриваться и в абелевом случае (когда A_μ и $F_{\mu\nu}$ не матрицы, а просто функции), нас, в основном, будет интересовать неабелева теория; в ней A_μ и $F_{\mu\nu}$ принимают значения в алгебре Ли компактной неабелевой группы. Очевидно, что калибровочные преобразования

$$\begin{aligned} A_\mu &\to U^{-1}A_\mu U + U^{-1}\partial_\mu U, \\ F_{\mu\nu} &\to U^{-1}F_{\mu\nu}U, \end{aligned} \tag{15}$$

где U — это элемент группы, не меняют уравнения движения (12).

В абелевой «электромагнитной» версии уравнение (12) линейно. Теорию можно решить; обнаруживается, что возбуждения действительно массивны, с массой m. Часто можно слышать утверждение, что фотон является безмассовым вследствие калибровочной инвариантности; это не так. Из подхода Вайнберга и Салама [7] к электрослабому объединению мы знаем, что в калибровочно-инвариантной теории могут возникать массивные векторные мезоны. Кроме того, в двумерной калибровочно-инвариантной электродинамике Швингера [8] «фотон» массивен. Наш пример трехмерной калибровочной теории еще раз, особенно просто, показывает, что с калибровочно-инвариантной теорией совсем не обязательно связывать безмассовые векторные мезоны [9].

Какой лагранжиан приводит к уравнениям (12) и каковы его калибровочные свойства? Интегрируя (12) по отношению к A_μ, получаем следующее выражение для лагранжиана:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2g^2}\operatorname{tr} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{m}{2g^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\operatorname{tr}\left(F_{\mu\nu}A_\alpha - \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha\right). \tag{16}$$

Здесь g — это константа связи с размерностью $(\text{масса})^{1/2}$. Первый член в правой части (16) — это обычный лагранжиан калибровочного поля, а второй-массовый член, несмотря на то, что его появление никак не связано с мате, матикой, хорошо в ней известен — это вторичный характеристический класс Черна — Саймонса [10] (раньше в физике черн-саймоновская структура возникала при анализе угла Θ в четырехмерной квантовой хромодинамике [11] (КХД), ниже об этом пойдет речь. Здесь же эта структура впервые играет динамическую роль). Действие

$$I = \int d^3x\mathscr{L} = I_{YM} + \frac{8\pi^2 m}{g^2}W(A) \tag{17}$$

включает в себя янг-миллсовское выражение $(1/2)\,g^2\int d^3x \operatorname{tr} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ и $W(A)$ — стандартным образом нормированный член Черна — Саймонса

$$W(A) = -\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\int d^3x \operatorname{tr}\left(F_{\mu\nu}A_\alpha - \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha\right).$$

Очевидно, что $\mathscr{L}$ и I калибровочно не инвариантны. Можно было бы явно вычислить, как изменяется действие при калибровочных преобразованиях; обратимся к математическим рассуждениям. Мы видим, что калибровочная функция U задает отображение из (компактифицированного) трехмерного пространства в (неабелеву) калибровочную группу. Такие отображения, как и раньше, распадаются в гомотопически различные классы, занумерованные целыми числами, что математически выражается так:

$$\Pi_3\,(\text{неабелева калибровочная группа}) = \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Более того, известно, что $W(A)$ при калибровочных преобразованиях изменяется на целое число — «число вращения» преобразования

$$W(A) \to W(A) + \text{целое число}. \tag{19}$$

Таким образом, действие изменяется на целочисленное кратное величины $8\pi^2 m/g^2$, и калибровочная инвариантность экспоненты приводит к следующему условию квантования [3]:

$$\frac{4\pi m}{g^2} = n. \tag{20}$$

Мы делаем вывод, что трехмерные калибровочные теории характеризуются не только константой связи g, но также и целочисленным коэффициентом перед членом Черна — Саймонса

$$I = I_{YM} + 2\pi n W(A). \tag{21}$$

Действие зависит от калибровки; оно многозначно. Экспонента от действия, e^{iI}, однако, однозначна при выполнении уравнения (20). Подчеркнем, что квантованный параметр возникает только в неабелевых калибровочных теориях; в соответствующей (трехмерной) электродинамике калибровочная группа гомотопически тривиальна*).

Трехмерные калибровочные теории, наряду с двумерными, не только служат лабораторией для изучения запутанной калибровочно-инвариантной динамики; они также представляют непосредственный физический интерес. Я опишу два приложения нашей теории; одно относится к высокотемпературному пределу четырехмерной КХД, второе — к динамике заряженной частицы, удерживаемой на плоскости.

Известно, что высокотемпературный предел d-мерной теории сводится к эффективной теории в размерности, на единицу меньшей [12]. В частности, трехмерная калибровочная теория связана с высокотемпературным пределом четырехмерной КХД — ныне общепринятой моделью сильных взаимодействий; она описывается лагранжианом

$$\mathscr{L}_{\text{QCD}} = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\Theta}{32\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \operatorname{tr} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + \text{кварковые члены.} \tag{22}$$

Первый член — это обычное янг-миллсовское выражение с константой связи e; второй член носит чисто квантовомеханический характер; он возникает из «киральной аномалии». Поскольку $(1/2)\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \operatorname{tr} F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$ есть полная производная

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \operatorname{tr} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = \partial_\mu \mathscr{Y}^\mu, \\ \mathscr{Y}^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{tr} \left(F_{\alpha\beta} A_\gamma - \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma \right), \end{gathered} \tag{23}$$

то этот член не влияет на уравнения поля; классическая динамика калибровочного поля нечувствительна к нему. Однако в квантовом действии $I_{\text{QCD}} = \int d^4 x \mathscr{L}_{\text{QCD}}$ возникают члены, пропорциональные Θ, нарушающие (T, P)-симметрии. Они служат причиной нарушения CP-симметрии в квантовой теории [11,13]. Кроме того, так же, как и в трехмерном действии с массовыми членами, зависящий от Θ вклад в I_{QCD} имеет математический (топологический) смысл: он пропорционален характеристическому классу Черна — Понтрягина, $(1/32\pi^2)\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \int d^4 x \operatorname{tr} F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$. Действительно, между ними существует математическая связь: из (23) мы видим, что $W(A)$ есть трехмерный интеграл от одной из компонент $\mathscr{Y}^\mu$ [14].

Топологический член в КХД возникает в результате одного твердо установленного, но не до конца понятого квантовомеханического явления, связанного с фермионами. Оно имеет наиболее простое объяснение при рассмот-

*) В статье калибровочной группой называются два различных объекта: например, для трехмерной абелевой теории это и сама группа U (1), и группа функций на трехмерном пространстве со значениями в U (1). Имеется в виду гомотопическая тривиальность последней. (*Примеч. пер.*)

рении безмассовых фермионов, которые подразделяются на два типа: имеющие левую спиральность и правую. Каждый тип несет заряд, Q_{L} и Q_{R}, причем полный заряд $Q = Q_{\mathrm{L}} + Q_{\mathrm{R}}$ сохраняется, $\dot{Q} = 0$, а по отдельности они меняются. Было показано, что изменение заряда дается выражением [15]

$$\Delta Q_{\mathrm{L}} = -\Delta Q_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{64\pi^2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{tr}\,F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}. \tag{24}$$

Хотя подынтегральное выражение в правой части есть полная производная, интеграл, вообще говоря, не равен нулю [16]. Явление несохранения заряда называется «аномалией», поскольку оно не возникает в классическом или первично-квантованном описании. Оно появляется только во вторично-квантованной теории; таким образом, открытие этого явления было крупным сюрпризом; его было трудно предугадать.

Фермионы в КХД —«кварковые члены» в (22) — подвержены влиянию электрослабых процессов, различных для фермионов с левой и правой спиральностями. В свою очередь, это вызывает изменение левых и правых зарядов, несохранение которых индуцирует топологический Θ-член в КХД. Разумеется, поскольку нарушение CP в сильных взаимодействиях весьма незначительно, физические эффекты, вызванные Θ-членом, должны быть малы; однако объяснение этого факта отсутствует. Это остается загадкой современной физики частиц.

Зададимся теперь вопросом о структуре эффективного высокотемпературного трехмерного лагранжиана для КХД. Мы пока не располагаем полной теорией при высоких температурах и поэтому не знаем точного лагранжиана. Нам остается только догадываться, каким он мог бы быть. Естественно предположить, что эффективный лагранжиан должен содержать все члены, совместные с симметриями КХД. В пределе высоких температур фермионы перестают взаимодействовать, так что эффективный лагранжиан должен описывать чисто калибровочную теорию с обычным янг-миллсовским кинетическим членом и черн-саймоновским топологическим массовым членом. Коэффициент при последнем не произволен — он должен квантоваться в единицах 2π, и он обеспечивает магнитное экранирование при высоких температурах (размерная константа связи g в уравнении (16) связана с безразмерной e в (22) соотношением $g^2 = e^2T$, где T — температура). Хотя мы и не располагаем точным доказательством, мы верим, что трехмерный черн-саймоновский массовый член есть высокотемпературный остаток Θ-члена Черна — Понтрягина, поскольку оба они нарушают симметрию при отражениях. Квантованная целочисленная константа при черн-саймоновском члене указывает на нетривиальную зависимость КХД от значения величины Θ: равенство $\Theta = 0$ не вело бы, конечно, к массовому члену, в то время, как различные значения Θ ведут, по-видимому, к различным целым значениям квантованной топологической массы.

Во втором приложении мы ограничиваемся существенно плоскими физическими процессами, поэтому динамика описывается теорией в трехмерном пространстве-времени. Известно, что заряженные частицы в постоянных магнитном и электрическом полях, перпендикулярных друг другу, движутся в плоскости, перпендикулярной магнитному полю и дрейфуют в направлении, перпендикулярном электрическому полю. Это — эффект Холла [17]. Индуцированная плотность тока, j^i связана с электрическим полем $\mathscr{E}^i$ через тензор проводимости σ^{ij}

$$j^i = \sigma^{ij}\mathscr{E}^j, \tag{25}$$

и эффект Холла отвечает тому, что $\sigma^{xx} = 0 = \sigma^{yy}$, $\sigma^{xy} = -\sigma^{yx}$. Мы считаем, что магнитное поле направлено вдоль оси z.

В классической физике σ^{ij} легко вычислить с помощью формулы Лоренца. Однако нам нужно квантовомеханическое описание электронов в веществе, движущихся во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. Оказывается, что черн-саймоновское выражение, теперь уже в абелевой калибровочной теории электромагнетизма, дает эффективное действие для электронов в эффекте Холла.

Действие для микроскопического описания динамики задачи содержит электромагнитный максвелловский член, I_{EM}, ограниченный на трехмерное пространство-время, и, кроме того, член, описывающий движение электронов и их взаимодействие с электромагнитным полем. Последний линеаризован вблизи поверхности Ферми, и электроны описываются действием, подобным дираковскому. В функциональном интеграле от экспоненты от действия степени свободы электронов можно «отынтегрировать». Остается эффективное действие для электромагнитного поля, состоящее из максвелловского члена и члена, возникшего из-за электронов. Форму последнего легко вычислить в случае постоянного электромагнитного поля. Для полного действия получается следующее выражение [18]:

$$I = I_{\text{EM}} + \frac{e^2}{8\pi} \int d^3x \varepsilon^{\alpha\beta\delta} F_{\alpha\beta} A_\delta. \tag{26}$$

Коэффициент при черн-саймоновском члене не фиксирован условиями квантования — они применяются только в неабелевой теории; в абелевом случае этот коэффициент явно вычисляется. Индуцированный ковариантный ток есть вариация индуцированного действия по отношению к A_μ

$$j^\mu = \frac{e^2}{4\pi} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{27а}$$

Пространственные компоненты в (27а)

$$j^i = \frac{e^2}{2\pi} \varepsilon^{ij} \mathcal{E}^j \tag{27б}$$

дают холловскую проводимость для (целочисленного) квантового эффекта Холла [19], который, тем самым, есть физическое проявление (абелева) черн-саймоновского члена [20].

Квантование физических параметров не ограничивается трехмерными теориями поля. Другой пример возникает в эффективном низкоэнергетическом лагранжиане КХД. Предположим, что мы интересуемся только низкоэнергетическими процессами, описываемыми лагранжианом (22). Тогда следует отделить существенные степени свободы в (22) и выписать эффективный лагранжиан для их низкоэнергетической динамики. С этой целью рассмотрим u (up)-, d (down)- и s (strange)-кварки и введем поле, описывающее их псевдоскалярные мезонные связанные состояния. Опыт работы с алгеброй токов показывает, что низкоэнергетическая феноменология дается нелинейной σ-моделью, где σ — матрица из SU(3)

$$\sigma = e^{i\lambda_a \varphi_a}, \tag{28}$$

φ_a — мезонные поля и λ_a — гелл-манновские SU(3)-матрицы (группа SU(3) здесь существенна, поскольку мы имеем дело с тремя типами кварков). Обычное действие для σ-модели

$$I_\sigma \equiv \frac{f_\pi^2}{16\pi} \int d^4x \operatorname{tr} \partial_\mu \sigma^+ \partial^\mu \sigma \tag{29}$$

($f_\pi \equiv$ константа пионного распада) не учитывает, однако, процессов, связанных с киральными аномалиями. Чтобы включить их в рассмотрение, требуется еще один член, называемый «действие Весса — Зумино», I_{WZ} [21]. Таким образом, низкоэнергетические процессы в КХД описываются действием

$$I_{\text{ef QCD}} = I_\sigma + cI_{\text{WZ}}. \tag{30}$$

Здесь мы опять сталкиваемся с многозначным действием: I_{WZ} не может быть описано обычным образом как четырехмерный интеграл; вместо этого оно возникает как интеграл от полной дивергенции по пятимерному пространству, границей которого служит физическое пространство-время. Из того факта, что Π_5 $(\mathrm{SU}(3)) = \mathbb{Z}$ следует, что I_{WZ} определено с точностью до величины, кратной 2π; следовательно, c должно быть целым [22].

Как и раньше, свобода в выборе возможного эффективного лагранжиана ограничена условиями квантования. Сверх того можно сравнить предсказания о киральных аномалиях, основанные на выражении (30), с предсказаниями, полученными прямым вычислением треугольных диаграмм [23]: они согласуются, когда c равно числу цветов в исходной теории кварков.

Имеются другие модели полевых теорий, в которых требование согласованности приводит к квантованию параметров [24], но до сих пор они не имели физических приложений.

Итак, мы видим, что многозначные действия с соответствующими квантованными параметрами важны в физических теориях скорее на феноменологическом, чем на фундаментальном уровне. Все три наших примера — нерелятивистская квантовая механика точечного магнитного монополя, высокие температуры и низкоэнергетическая КХД — связаны с феноменологическим описанием, возникающим из микроскопической теории, в которой отсутствуют квантовые ограничения на параметры. Тем не менее, в тех случаях, когда феноменологическое действие может быть выведено из микроскопической теории, квантованный феноменологический параметр несет информацию о целом числе, участвующем в исходной теории (например, число цветов в теории кварков есть квантованный параметр в члене, описывающем аномалию, в нелинейной σ-модели). Замечательно, что математические (топологические) понятия «знают» о микроскопической динамике. Необходимость квантования параметров полезно учитывать при построении феноменологических лагранжианов: это до некоторой степени ограничивает содержащийся в них произвол.

Топологические эффекты на феноменологическом уровне, возникающие из топологически тривиальной фундаментальной теории, новы в физике частиц; но в теории конденсированного состояния они были известны. Фундаментальный многочастичный гамильтониан — электроны с кулоновским взаимодействием — не содержит топологических ограничений. Тем не менее, в феноменологическом описании, например в теории Гинзбурга — Ландау — Абрикосова вихрей в сверхпроводниках, топологические рассмотрения дают условие квантования потока. Таким образом, мы встретили еще один пример, когда богатая эффектами теория конденсированного состояния предлагает полезную идею физике частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. См. обзоры: Jackiw R.//Rev. Mod. Phys. **1977**. V. 49. P. 681.
   Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.— М.: Мир, 1985.
2. См. обзоры: Eguchi T., Gilkey P., Hanson A.//Phys. Rept. **1980**. V. 66. P. 213.
   Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C. Analysis Manifolds and Physics.— Amsterdam: North-Holland, 1981.
3. Deser S., Jackiw R., Templetone S.//Phys. Rev. Lett. **1980**. V. 48. P. 975; Ann. Phys. (N.Y.). **1982**. V. 140. P. 372.
4. См. обзор: Yang C.N.//Ann. N.Y. Acad. Sci. **1977**. V. 294. P. 86.
5. Такая терминология введена С. П. Новиковым; он независимо открыл этот эффект в теории поля: ДАН СССР. **1981**. Т. 260. С. 31.
6. Jackiw R., Templetone S.//Phys. Rev. Ser. D. **1981**. V. 23. P. 2291.
   Schonfeld J.//Nucl. Phys. Ser. B. **1981**. V. 185. P. 157.
7. Weinberg S.//Phys. Rev. Lett. **1967**. V. 19. P. 264.
   Salam A. Elementary Particle Theory/Ed. N. Cvartholm.— Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1980.
8. Schwinger J.//Phys. Rev. **1962**. V. 125. P. 397; V. 128. P. 2425.

9. Дальнейшее обсуждение массивных калибровочно-инвариантных векторных мезонов см.: Jackiw R.//Asymptotic Realms of Physics/Eds A. Guth, K. Huang, R. Jaffe.— Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1983.
Farhi E., Jackiw R. Dynamical Gauge Symmetry Breaking.— Singapore: World Scientific, 1982.
10. Chern S. Complex Manifolds without Potential Theory.— 2nd ed.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979.
11. Jackiw R., Rebbi C.//Phys. Rev. Lett. **1976**. V. 37. P. 172.
12. Gross D., Pisarski R., Yaffe L.//Rev. Mod. Phys. **1981**. V. 53. P. 43.
13. Callan C., Dashen R., Gross D.//Phys. Lett. Ser. B. **1976**. V. 63. P. 334.
14. Природа этих топологических величин и их роль в квантовой теории поля описаны: Трейман С., Джекив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов.— М.: Атомиздат, 1977.
Relativity, Groups and Topology, II/Eds B. DeWitt, R. Stora.— Amsterdam: North-Holland, 1984.
Математические основы см. в [2], краткий «словарь» для физиков — в [4].
15. См. первые две ссылки в [14].
16. Belavin A., Polyakov A., Schwartz A., Tyupkin Y.//Phys. Lett. Ser. B. **1975**. V. 59. P. 85.
't Hooft G.//Phys. Rev. Lett. **1976**. V. 37. P. 8.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— 2-е изд.— М.: Наука, 1982.
18. Redlich N.//Phys. Rev. Lett. **1984**. V. 52. P. 18.; Phys. Rev. Ser. D. **1984**. V. 29. P. 2366.
19. Von Klitzing K., Dorda G., Pepper M.//Phys. Rev. Lett. **1980**. V. 45. P. 494.
20. Обсуждение целочисленного квантового эффекта Холла с топологической точки зрения, затрагивающее черн-саймоновские члены, см.: Jackiw R.//Phys. Rev. Ser. D. **1974**. V. 29. P. 2375; Comm. Nucl. and Part. Phys. **1984**. V. 8. P. 15.
Ishikawa K. Hokkaido University preprint EPHOU-83-Dec. 005.— 1983.
Srivastava Y., Widom A.//Lett. Nuovo Cimento (in press).
Приложение к квантовому эффекту Холла см: Friedman M., Sokoloff J., Widom A., Srivastava Y.//Phys. Rev. Lett. **1984**. V. 52. P. 1587.
21. Wess J., Zumino B.//Phys. Lett. Ser. B. **1971**. V. 37. P. 95.
22. Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. **1983**. V. 223. P. 422.
23. Gerstein I., Jackiw R.//Phys. Rev. **1969**. V. 181. P. 1955.
Bardeen W.//Ibidem. V. 184. P. 1548.
24. Многозначные действия и соответствующее квантование параметров возникают также в нелинейной σ-модели, взаимодействующей с гравитацией: Bagger J., Witten E.//Phys. Lett. Ser. B. **1982**. V. 115. P. 202.
Четырехмерные калибровочные SU(2)-теории с фермионами в фундаментальном (двумерном) представлении: Witten E., Redlich A.//Ibidem. V. 117. P. 324.
Трехмерные неабелевы калибровочные теории с фермионами: Redlich A.//[18].
Alvarez-Gaume L., Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. **1984**. V. 234. P. 269.
Двумерные неабелевы калибровочные теории: Polyakov A., Wiegman P.// Phys. Lett. Ser. B. **1983**. V. 131. P. 121.