

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

530.14.7.

**СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ***А. А. Мигдал***СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение . . . . .	3
2. Квантовая механика и статистика . . . . .	5
3. Уравнение Ланжевена . . . . .	7
4. Стохастическое квантование теории поля . . . . .	8
5. Теория скалярного поля. Диаграммная техника . . . . .	10
6. Стохастическое квантование уравнений Максвелла . . . . .	14
7. Уравнение Ланжевена в неабелевых калибровочных теориях . . . . .	16
8. Фиксация калибровки . . . . .	17
9. Матричные теории при больших значениях $N$ . . . . .	20
10. Редуцированное эрмитово поле . . . . .	22
11. Редуцированные калибровочные поля . . . . .	25
12. Численные методы в непрерывном случае . . . . .	27
13. Редуцированные решеточные калибровочные теории . . . . .	29
14. Стохастическая теория возмущений . . . . .	32
15. Проблемы и перспективы . . . . .	33
Приложения . . . . .	36
А. Уравнение Ланжевена и распределение Больцмана . . . . .	36
Б. Исследования уравнения Фоккера — Планка . . . . .	37
В. Разностное уравнение Ланжевена . . . . .	40
Г. Редуцированный белый шум . . . . .	42
Список литературы . . . . .	44

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Язык квантовой теории поля эволюционирует, приспособляясь к новым понятиям, которые возникают в новых проблемах. Операторный язык отживает, сменяясь языком функциональным — мы все чаще описываем квантовые процессы как набор альтернативных классических и суммируем альтернативные амплитуды с помощью функционального интегрирования.

Практическим методом функционального интегрирования является метод Монте-Карло, который сводится к построению равновесной последовательности альтернативных вероятных состояний. Перебор состояний происходит с учетом их веса: более вероятные состояния появляются чаще.

Можно рассмотреть непрерывный аналог такого дискретного процесса перебора состояний, введя пятую координату  $\tau$  — стохастическое, или компьютерное, время. Переход от классической теории к квантовой становится при этом особенно общим и простым. А именно, для квантования произвольной бозе-системы (ферми-системы несколько сложнее, но также укладываются в эту схему) достаточно добавить стохастическое время и ввести два новых члена в уравнения движения: случайную силу и силу трения. Дисперсия случайной силы пропорциональна постоянной Планка, и она обеспечивает квантовые флуктуации. Сила трения пропорциональна производной от соответствующей динамической переменной по стохастическому времени. Эта



сила обеспечивает переход в «тепло» «энергии», подводимой случайной силой.

Мы пользуемся термодинамической аналогией: в квантовой теории поля роль энергии 4-мерной статистической системы играет функция действия, а роль температуры играет постоянная Планка. Стохастическое время при этом играет роль физического времени, в котором происходит процесс установления термодинамического равновесия.

Стохастическое уравнение хорошо известно в статистической механике. Это — так называемое уравнение Ланжевена, описывающее кинетику слабо неравновесных систем. Подчеркнем, что хотя уравнение Ланжевена в статистической механике не эквивалентно исходной динамике (часть степеней свободы имитируется случайными силами), тем не менее состояние термодинамического равновесия воспроизводится этим уравнением точно. А именно, можно показать, что уравнение Ланжевена сохраняет детальный баланс между разными состояниями, т. е. вероятности взаимных переходов между любыми двумя состояниями относятся как их больцмановские факторы. Поэтому распределение вероятностей в состоянии термодинамического равновесия, если оно достигается, будет совпадать с распределением Больцмана.

Применительно к квантовой теории поля это означает, что средние значения, вычисленные с помощью уравнения Ланжевена, будут точно совпадать с квантовыми средними, вычисленными с помощью функционального интеграла. Вычисление средних с помощью уравнения Ланжевена сводится просто к усреднению соответствующей величины за большой интервал стохастического времени. Эквивалентность функциональному интегрированию, т. е. усреднению по ансамблю систем, означает эргодичность движения, описываемого уравнением Ланжевена.

Сказанное выше относится к евклидову варианту квантовой теории поля, т. е. к чисто мнимому времени  $t = ix$ . При переходе к реальному времени фейнмановская амплитуда  $\exp(-\text{действие})$  становится комплексной и не может более интерпретироваться как больцмановский фактор. Метод Монте-Карло в буквальном виде неприменим, так как невозможно выбрасывать случайные числа с комплексной вероятностью.

Однако уравнение Ланжевена, которое несколько иначе реализует детальный баланс, допускает аналитическое продолжение в пространство Минковского. При этом случайная сила остается вещественной гауссовой величиной, а мнимой становится сила трения.

Уравнение становится при этом комплексным, как уравнение Шрёдингера, оставаясь к тому же нелинейным. Соответствующая динамическая переменная стохастически движется в комплексной плоскости. Таким образом, можно интерпретировать квантовую механику как статистическую механику в комплексном пространстве. Вместо обычной комплексной амплитуды для вещественной координаты можно ввести вещественную положительную вероятность для комплексной координаты.

Эффекты интерференции будут возникать после усреднения по стохастическому времени. Соответствующий интеграл будет сходиться из-за осцилляций комплексного подынтегрального выражения, как и фейнмановский интеграл. Ожидается, что эти осцилляции не будут столь быстрыми, как у Фейнмана, так что их можно будет реализовать в численных экспериментах.

Первые такие эксперименты уже успешно проведены в квантовой механике одной частицы. Этого, конечно, мало, чтобы говорить о более адекватной схеме, чем обычное уравнение Шрёдингера. Однако в перспективе комплексное уравнение Ланжевена в квантовой механике позволит по-новому понять и увидеть в машинных фильмах все ее удивительные свойства, недоступные прямым наблюдениям.

\* ) Более подробно это будет обсуждаться ниже.



Что касается применений к евклидовой квантовой теории поля, то здесь уже довольно много сделано, о чем главным образом и пойдет речь в этом обзоре. Инициаторами применения уравнения Ланжевена в квантовой теории поля были Нельсон, Паризи и Ву<sup>1</sup>. В частности, в работе Паризи и Ву было осознано, что так можно обойти проблему фиксации калибровки в калибровочных теориях.

С тех пор появилось много работ, использующих и развивающих схему стохастического квантования. Оказалось, что оно во многих отношениях удобнее, чем метод Монте-Карло, и позволяет достичь большей точности. Оно также позволяет доказывать различные общие соотношения более просто, чем в других схемах квантования.

В этом обзоре будут рассмотрены приложения стохастического квантования к обычным и калибровочным теориям поля без фермионов. Структура обзора такова. В разделах 2—4 вводится и обсуждается общая схема стохастического квантования. Более подробно рассматриваются проблемы, обсуждавшиеся выше.

Разделы 5 — 8 носят более технический характер. В них рассмотрена стохастическая теория возмущений и проблема фиксации калибровки. Стохастическая теория возмущений рассмотрена в простейшем варианте, а именно, на фоне тривиального классического вакуума. Теория возмущений на фоне квантового вакуума редуцированных моделей с бесконечным числом цветов кратко обсуждается в разделе 14.

В разделах 9 — 11 вводятся и обсуждаются редуцированные модели как для обычных, так и для калибровочных теорий. Эти модели соответствуют однородным в пространстве (с точностью до унитарных преобразований) матричным полям в пределе, когда размер матрицы стремится к бесконечности. В этом пределе редуцированные модели воспроизводят результаты обычных теорий с неоднородными флуктуирующими полями.

В разделах 12 — 14 редукция обсуждается более детально, в том числе и с вычислительной точки зрения. Приводятся конкретные вычислительные схемы в непрерывных и решеточных теориях. Кратко обсуждается стохастическая теория возмущений на фоне редуцированных моделей.

Наконец, в разделе 15 подводятся итоги и обсуждаются перспективы. Здесь рассмотрено также комплексное уравнение Ланжевена и обсуждаются возможные схемы, выходящие за рамки квантовой теории поля.

В приложениях А — Г можно найти некоторые детали, отсутствующие в основном тексте. В приложении А устанавливается связь между уравнением Ланжевена и принципом детального баланса. В приложении Б выводится уравнение Фоккера — Планка, с помощью которого исследуется проблема калибровки. В приложении В выводится разностный аналог уравнения Ланжевена, сохраняющий детальный баланс. Это дает численный алгоритм, отличающийся от алгоритма Метрополиса. В приложении Г доказываются формулы редукции.

В работе над этим обзором были широко использованы результаты совместных с М. А. Бершадским и Т. А. Кожамкуловым работ<sup>24-28,32</sup>. Автор благодарит их за помощь, а В. А. Новикова за полезную критику. Нам были полезны также обсуждения с В. А. Казаковым, А. М. Поляковым и Я. Г. Сином.

## 2. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И СТАТИСТИКА

Идея стохастического квантования основана на аналогии между квантовой теорией и статистической механикой. Известно, что если заменить  $t \rightarrow -i\beta$ , то оператор эволюции квантовой системы перейдет в матрицу Блоха статистической системы:

$$\begin{aligned} \exp(-itH) &\rightarrow \exp(-\beta H), \\ t &\rightarrow -i\beta. \end{aligned} \quad (2.1)$$



При этом исчезают эффекты интерференции, но если интересоваться такими статическими свойствами, как энергия основного и первых возбужденных состояний, магнитные моменты и т.п., то их можно извлечь непосредственно из матрицы Блоха, устремляя  $\beta \rightarrow \infty$ .

Для описания эффектов интерференции надо вернуться к реальному времени, сделав аналитическое продолжение  $\beta \rightarrow it$ . Преимущество матрицы Блоха перед S-матрицей с вычислительной точки зрения состоит в том, что матричные элементы убывают, а не осциллируют, как в квантовой механике. Поэтому суммы по промежуточным состояниям сходятся.

Прежде всего это относится к функциональному интегралу для следа S-матрицы. Для этой величины 40 лет назад была получена знаменитая формула Фейнмана — Каца. Приведем ее сразу в евклидовом варианте для скалярного поля  $\varphi$ :

$$\text{tr} \exp(-\beta H) = \int D\varphi \exp(-S_E); \quad (2.2)$$

здесь

$$S_E = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + U(\varphi) \right] \quad (2.3)$$

—евклидово действие.  $x_4 = -it$  считается вещественным.

Подразумевается периодическое граничное условие

$$\varphi(0, x) = \varphi(\beta, x). \quad (2.4)$$

Это условие возникло из-за взятия следа  $\text{tr}$ . Подробный вывод формулы (2.2) можно найти, например, в книге Славнова и Фаддеева <sup>5</sup>.

В отличие от обычного действия, которое содержит разность кинетической  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi^2}{\partial\tau} \right)$  и потенциальной  $U(\varphi) + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2$  энергий, евклидово действие (2.3) содержит сумму положительных членов и поэтому положительно определено. Интеграл (2.2) сходится как при больших полях, так и при больших градиентах полей. Разумеется, это не снимает проблемы ультрафиолетовых расходимостей. Функциональный интеграл приходится определять как предел многомерного, скажем, разбивая пространство  $x$  на ячейки гиперкубической решетки.

Проблема ультрафиолетовых расходимостей состоит в том, что параметры потенциала  $U(\varphi)$  необходимо менять по мере уменьшения шага  $a$  решетки для того, чтобы наблюдаемые величины оставались конечными. А именно, в случае скалярного поля потенциал  $U$  характеризуется затравочной массой  $m$  и затравочной константой  $\lambda_0$ :

$$U = \frac{m_0^2\varphi^2}{2} + \frac{\lambda_0\varphi^4}{4!}. \quad (2.5)$$

Искомая зависимость  $m_0(a)$  и  $\lambda_0(a)$  дается уравнением ренормгруппы <sup>6</sup>, которое мы не будем здесь обсуждать. Скажем только, что в случае скалярного поля в 4-мерном пространстве не найдено такой зависимости  $m_0(a)$ ,  $\lambda_0(a)$ , чтобы физическая константа  $\lambda_\phi$  оставалась конечной при  $a \rightarrow 0$ . По-видимому, всегда  $\lambda_\phi = 0$  при  $a \rightarrow 0$  (случай нуль-заряда).

На этом мы закончим краткий экскурс в теорию функционального интеграла. Для дальнейшего он нам не понадобится.

Для того чтобы перейти к стохастическому квантованию, рассмотрим подробнее аналогию со статистической механикой. До сих пор мы говорили о квантовой статистической механике для исходной 3-мерной системы с гамильтонианом  $H$ . Матрица Блоха (2.1) описывает квантовое распределение Гиббса для исходной 3-мерной системы. Эта аналогия лежит на поверхности.

Но есть и другая, менее тривиальная аналогия. Функциональный интеграл (2.2) можно рассматривать как классическую статистическую сумму 4-мерной системы с потенциальной энергией  $S_E$ . Действительно, распреде-



ление Больцмана  $\exp(-U/kT)$  формально аналогично распределению  $\exp(-S_E)$  евклидовой теории поля. Аналогию можно усилить, выделив из евклидова действия множитель  $\lambda^{-1}$ , где  $\lambda$  — константа связи. В случае скалярного поля для этого достаточно переопределить  $\phi \rightarrow \phi/\lambda^{1/2}$ . Тогда становится ясно, что классическая теория поля, определяемая решением уравнения

$$\frac{\delta S_E}{\delta \phi_{cl}} = 0, \quad (2.6)$$

соответствует состоянию статического равновесия аналогичной 4-мерной системы. Квантовые флуктуации соответствуют тепловым флуктуациям из-за взаимодействия с термостатом. Роль температуры играет теперь не время, а константа связи.

Такая трактовка евклидовой теории поля релятивистски инвариантна и удобна как для аналитических, так и для численных расчетов. Термодинамика черных дыр, инстантоны, метод Монте-Карло, — словом, все последние достижения квантовой теории поля — связаны именно с таким статистическим подходом.

### 3. УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА

Стохастическое квантование также основано на 4-мерной статистической трактовке квантовой теории поля. Делается естественный следующий шаг — в уравнение поля (2.6) явно вводится случайная сила, действующая на поле со стороны термостата и приводящая поле в состояние термодинамического равновесия. Работа, совершенная случайной силой, переходит в тепло за счет сил трения, которые также добавляются в классическое уравнение. Термодинамическое равновесие достигается постепенно, за большое «время». Подчеркнем, что речь идет не о физическом времени  $t = ix_4$ , а о новой независимой переменной. Остановимся подробнее на этом важном моменте.

Рассмотрим обычную 3-мерную статистическую систему, например газ во внешнем поле. Соответствующее распределение Больцмана имеет вид

$$\prod_i dp_i dq_i \exp\left(-\frac{H}{kT}\right), \quad (3.1)$$

где

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(q_1, \dots, q_N). \quad (3.2)$$

Можно исключить импульсы  $p_i$  гауссовым интегрированием и получить эффективное распределение для координат

$$\prod_i dq_i \exp\left(-\frac{U}{kT}\right). \quad (3.3)$$

Как реализуется это распределение в природе? Мы наблюдаем сосуд с газом в течение времени, большего времени релаксации, и можем измерить, скажем, давление, плотность и т. п. При этом средние величины будут такими же, как если бы мы имели ансамбль сосудов, взвешенных с распределением Больцмана, и усредняли не по времени, а по ансамблю.

В том и состоит заслуга классиков статистической механики, что они сумели исключить из рассмотрения сложный вопрос о динамике (временной эволюции) системы. Если же мы все-таки интересуемся явлениями релаксации, то для этого тоже не надо рассматривать полную динамику.

Для небольших отклонений от термодинамического равновесия приближенно справедливо уравнение Ланжевена

$$\Gamma \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = f_i, \quad (3.4)$$



где  $f_i$  — случайные силы, распределенные по Гауссу:

$$\exp \left( - \int \frac{dt}{\Gamma} \frac{1}{4kT} \sum_i f_i^2 \right) df_i. \quad (3.5)$$

Величина  $\Gamma$  пропорциональна времени релаксации;  $T$  в (3.5) — обычная температура,  $k$  — постоянная Больцмана.

Эквивалентность распределения Больцмана (3.3) и уравнения Ланжевена (3.4) надо понимать в смысле средних. Среднее, вычисленное по больцмановскому ансамблю, совпадает со средним по времени, вычисленным по уравнению Ланжевена.

Это равенство средних можно записать в терминах распределения вероятностей (эргодическая теорема):

$$Z^{-1} \exp \left( - \frac{U(q)}{kT} \right) = \overline{\delta(q - q(t))}, \quad (3.6)$$

где

$$\overline{F(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt F(t) \quad (3.7)$$

— среднее по времени. Имеется в виду, что  $q(t)$  в (3.6) — это решение уравнения Ланжевена.

Доказательство эргодической теоремы (3.6) в случае уравнения Ланжевена приводится в приложении А. В приложении А выводится также ковариантное обобщение уравнения Ланжевена, которое ниже будет использовано для решеточных калибровочных теорий.

Применительно к газу частиц в статическом гравитационном поле, соответствующем метрике  $g_{\alpha\beta}$ , это ковариантное уравнение Ланжевена таково:

$$\Gamma e_\alpha(i) \frac{\partial r^\alpha}{\partial t} + e^\beta(i) \frac{\partial U}{\partial r^\beta} = f(i), \quad (3.8)$$

где  $f(i)$  — случайные силы с гауссовым распределением

$$dW(f) = \exp \left( - \int \frac{dt}{\Gamma} \frac{1}{4kT} \sum_i f^2(i) \right) \prod_i df(i); \quad (3.9)$$

здесь  $e_\alpha(i)$  — тетрады, соответствующие метрике

$$g_{\alpha\beta} = \sum_i e_\alpha(i) e_\beta(i). \quad (3.10)$$

#### 4. СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Из аналогии между евклидовой квантовой теорией поля и 4-мерной статистической механикой непосредственно вытекает полевое уравнение Ланжевена

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\delta S}{\delta \varphi} = f. \quad (4.1)$$

Мы положили «время релаксации»  $\Gamma \equiv 1$ , поскольку масштаб вспомогательной переменной  $\tau$  условен. Производная  $\partial U / \partial q$  потенциальной энергии, очевидно, переходит в вариационную производную  $\delta S / \delta \varphi$ . Индекс  $E$  у действия  $S$  мы будем опускать, пока будем иметь дело только с евклидовым вариантом теории поля.



Аналог эргодической теоремы гласит (здесь  $F(\varphi)$  — произвольный функционал поля):

$$\langle F(\varphi) \rangle_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d\tau}{t} F(\varphi(\tau)). \quad (4.2)$$

Уравнение Ланжевена (4.1) позволяет по-новому взглянуть на квантование поля. Оказывается, уравнение квантовой теории отличается от классических уравнений только двумя слагаемыми — силой трения и случайной силой.

Что же это — скрытые параметры, о которых так много спорили основатели квантовой теории? Нет, это не совсем так. Суть дела не в скрытых параметрах, а в скрытой переменной — ланжевенском времени  $\tau$ . В квантовой механике система одновременно находится во многих альтернативных состояниях, а в классической — только в одном.

В стохастическом квантовании вводится специальная переменная  $\tau$  для перечисления альтернативных состояний. При фиксированном  $\tau$  мы имеем классическую систему, а квантовые эффекты возникают после усреднения по  $\tau$ . Это усреднение эквивалентно фейнмановскому усреднению с весом  $\exp(-S)$ , только перебор состояний производится целенаправленно.

Фейнмановский рецепт предписывает рассмотреть бесконечное множество классических состояний, взвешенных с весом  $\exp(-S)$ . Стохастическое квантование дает рецепт перехода от одного состояния к другому с таким расчетом, чтобы вероятность появления каждого состояния была пропорциональна  $\exp(-S)$ . Разница состоит в том, что маловероятные состояния не возникают в стохастическом квантовании. Можно сказать, что стохастическое квантование позволяет раскрыть неопределенность, соответствующую бесконечному числу бесконечно малых вкладов в функциональный интеграл евклидовой теории.

Например, в классическом пределе, когда  $S \rightarrow \infty$ , уравнение (4.1) описывает малые флуктуации поля вблизи классической конфигурации  $\varphi = \varphi_{cl} + \delta\varphi$ .

Рассмотрим эти флуктуации подробнее. Уравнение для флуктуации в линейном приближении таково:

$$\delta\ddot{\varphi} + S'' \delta\varphi = f; \quad (4.3)$$

здесь  $S''$  — это оператор второй вариации действия  $S$ :

$$S'' \delta\varphi(x) = \int \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x) \delta\varphi(y)} \delta\varphi(y) d^4y. \quad (4.4)$$

Раскладывая  $\delta\varphi$  и  $f$  по полной ортонормированной системе собственных функций  $\psi$  оператора  $S''$ , мы находим соответствующие коэффициенты  $\delta\varphi_\lambda$ :

$$\delta\varphi = \sum \psi_\lambda \delta\varphi_\lambda, \quad S'' \psi_\lambda = \mu_\lambda \psi_\lambda, \quad (4.5)$$

$$\delta\varphi_\lambda = \int_0^t d\tau \exp(-\mu_\lambda \tau) f_\lambda(t-\tau). \quad (4.6)$$

Видно, что случайная сила приводит к отклонениям от равновесия (т. е. от классики). Сила трения приводит к запаздыванию. Отклонение  $\delta\varphi$  является суперпозицией большого числа случайных сил в предшествующие моменты времени.

Если бы мы выключили случайную силу, начиная с какого-то момента, то система релаксировала бы к классическому состоянию (поскольку все  $\mu_\lambda \geq 0$ ). Если выключить точно так же силу трения, то исчезнет запаздывание, и отклонение станет пропорционально мгновенной величине случайной силы.



Покажем, что уравнение Ланжевена правильно описывает корреляции флуктуации поля  $\varphi$ . Эти корреляции нетрудно найти из (4.6):

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\lambda}^* \varphi_{\lambda'} \rangle &= \left\langle \int_0^t d\tau e^{-\mu_{\lambda}\tau} \int_0^t d\tau' e^{-\mu_{\lambda'}\tau'} f_{\lambda}(t-\tau) f_{\lambda'}(t-\tau') \right\rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' e^{-\mu_{\lambda}\tau - \mu_{\lambda'}\tau'} (\tau - \tau') \cdot 2\delta_{\lambda\lambda'} = 2\delta_{\lambda\lambda'} \frac{1 - e^{-2\mu_{\lambda}t}}{2\mu_{\lambda}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Видно, что для ненулевых мод достигается конечный предел при  $t \rightarrow \infty$ . Этот предел соответствует обычной теории возмущений в функциональном интеграле:

$$\langle \delta\varphi(x) \delta\varphi(y) \rangle \rightarrow \sum_{\lambda} \psi_{\lambda}^*(x) \psi_{\lambda}(y) \mu_{\lambda}^{-1} = (S''_{xy})^{-1}. \quad (4.8)$$

Например, если  $\varphi_{c1} = \text{const}$ , то собственные функции  $\psi_{\lambda}(x)$  — это плоские волны  $e^{ikx}$ . В этом случае  $\mu_k = k^2 + m^2$ , и (4.8) переходит в функцию Грина клейн-гордоновской частицы. Более подробно это обсуждается в следующем разделе, где найдено соответствие между стохастической и обычной теориями возмущений.

Нетривиальная ситуация возникает, если есть нулевая мода, как, например, в калибровочных теориях. Тогда функция Грина (4.8) не существует, что обычно приводит к необходимости фиксировать калибровку, добавляя в действие члены, фиксирующие калибровку и дѳуковые члены. Однако в уравнении Ланжевена можно без этого обойтись, как мы увидим ниже. Роль калибровочного параметра фактически берет на себя ланжевенское время. При фиксированном времени  $\tau$  пропагатор (4.7) конечен даже для нулевых мод:

$$\langle \varphi_{\lambda}^* \varphi_{\lambda} \rangle = 2\delta_{\lambda\lambda} \tau \quad (\mu_{\lambda} = 0). \quad (4.9)$$

Если сначала зафиксировать время, вычислить пропагаторы, а затем перейти к наблюдаемым величинам, то можно ожидать, что растущие члены (4.9) взаимно сократятся так же, как сокращаются члены, зависящие от калибровочного параметра при обычном подходе. Это будет подробнее обсуждаться ниже.

Дело, конечно, не в этих технических удобствах. Уравнение Ланжевена привлекает внимание исследователей тем, что открывает новые возможности выхода за рамки теории возмущений. Первые шаги в этом направлении уже сделаны, о них и пойдет речь в этом обзоре.

## 5. ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ. ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА

Сейчас мы рассмотрим теорию поля  $\varphi^4$ . Действие записывается в виде

$$S = \int d^Dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2\varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda\varphi^4 \right]. \quad (5.1)$$

Уравнение Ланжевена выглядит следующим образом:

$$\Gamma \partial_t \varphi + (-\Delta + m^2) \varphi = -\lambda \varphi^3 + \eta. \quad (5.2)$$

Коэффициент  $\Gamma$  определяет скорость релаксации системы (или масштаб времени). Его необходимо учитывать при анализе ренормгрупповых свойств уравнения Ланжевена. В целях удобства при построении теории возмущений мы положим  $\Gamma = 1$ . К уравнению (5.2) применимы известные методы физики неравновесных явлений (см. книгу Паташинского и Покровского <sup>7)</sup>).

Мы будем решать это уравнение итерациями по константе связи  $\lambda$ .



Определим сначала пропагатор теории

$$(\partial_t + m^2 - \Delta) G(t - t') = \delta(t - t'), \quad (5.3)$$

где  $G(t - t') = 0$  при  $t < t'$ .

Решение этого уравнения

$$G(t - t', x) \approx \theta(t - t') \exp[-(p^2 + m^2)(t - t')]. \quad (5.4)$$

Наша стратегия в построении теории возмущений будет состоять в следующем. Уравнение (5.2) неоднородно (обозначим неоднородность через  $J = -\lambda\phi^3 + \eta$ ). Решение уравнения (5.2) записывается в виде

$$\varphi(x, t) = \int_0^t G(t - t', x - y) J(y, t') dy dt'. \quad (5.5)$$

Однако запись (5.5), по существу, является интегральным уравнением, так как  $J$  зависит от поля  $\varphi$ . Нулевой член теории возмущений получается, если в качестве  $J$  взять  $J^0 = \eta$ . Тогда

$$\varphi^{(0)}(x, t) = \int_0^t G(t - t', x - y) \eta(t', y) dt' dy. \quad (5.6)$$

Изобразим этот член графически. Пропагатор  $G$  будем изображать в виде прямой линии, случайную силу  $\eta(x, t)$  — в виде «крестика». Тогда

$$\varphi^{(0)}(x, t) = \text{---} \times \bullet. \quad (5.7)$$

Следующий порядок теории возмущений получается, если в качестве  $J$  взять  $J^{(1)}$  ( $J^{(1)} = -\lambda(\varphi^{(0)})^3$ ).  $J^{(1)}$  выражается только через нулевое приближение поля  $\varphi$ . Вообще говоря, можно написать систему уравнений

$$J^{(n)} = \eta \delta_{n,0} - \lambda \sum_{l, s, k \geq 0} \varphi^{(k)} \varphi^{(l)} \varphi^{(s)} \delta_{n-1, l+s+k}, \quad (5.8)$$

$$\varphi^{(n)}(x, t) = \int_0^t G(t - t', x - y) J^{(n)}(y, t') dy dt'. \quad (5.9)$$

Легко видеть, что  $J^{(n)}$  выражается только через  $\varphi^{(s)}$ , где  $s < n$ . Отсюда, решая уравнение (5.9) для  $n = 0$  и затем подставляя в (5.8) с  $n = 1$ , мы находим  $J^{(1)}$ . Подставляя  $J^{(1)}$  в (5.9) и решая уравнение, получаем  $\varphi^{(1)}$ . Зная  $\varphi^{(0)}$  и  $\varphi^{(1)}$ , находим  $J^{(2)}$  и т. д. Эту процедуру удобно записать графически. Обозначим

$$\langle -\lambda \rangle = \text{---} \times \bullet. \quad (5.10)$$

Тогда легко видеть, что решение системы (5.8), (5.9) запишется в виде ряда:

$$\varphi(x, t) = \text{---} \times \bullet + \text{---} \times \bullet \times \bullet + \text{---} \times \bullet \times \bullet \times \bullet. \quad (5.11)$$

(a)                      (б)                      (в)



Член (б) соответствует первому порядку теории возмущений, при этом

$$J^{(1)}(x, t) = \begin{array}{c} + \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ - \end{array} \quad (5.12)$$

Аналогичные графические выражения можно записать для всех  $J^{(n)}$ . Все дальнейшие выражения мы для удобства будем записывать в  $(p, t)$ -представлении. Вид пропагатора в  $(p, t)$ -представлении дается выражением (5.4). В некоторых местах (это будет оговорено) окажется удобнее пользоваться  $(p, \omega)$ -представлением. Заметим, что записав уравнение Ланжевена в интегральном виде (5.5), мы, по существу, неким специальным образом выбрали начальные условия на поле  $\varphi(x, t)$ . А именно, мы подразумевали, что  $\varphi(x, 0) = 0$ . Для учета ненулевых начальных условий надо несколько изменить нулевое приближение теории. Пусть мы потребовали, чтобы  $\tilde{\varphi}(x, 0) = \Phi(x)$ . Прибавим тогда к выражению (5.7) решение уравнения (5.2) с  $J = 0$  (т. е. решение соответствующего однородного уравнения), удовлетворяющее начальным условиям:

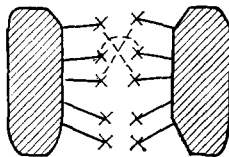
$$\varphi^{(0)}(x, t) \sim \text{---} \times + \exp[-(p^2 + m^2)t] \Phi(p). \quad (5.13)$$

Вся дальнейшая процедура построения решения уравнения (5.2) не меняется. Будем обозначать добавочный пропагатор штриховой линией, начальные условия — кружочком. Тогда  $\tilde{\varphi}$  запишется в виде

$$\tilde{\varphi}(x, t) = \text{---} \times + \text{---} \circ + \begin{array}{c} + \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ + \end{array} + 3 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ + \end{array} + 3 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \dots \quad (5.14)$$

Легко видеть, что в силу наличия фактора  $\exp[-(p^2 + m^2)t]$  начальные условия быстро забываются (за время  $\lesssim 1/m^2$ ) и интересующий нас предел  $t \rightarrow \infty$  от них не зависит.

Исследуем теперь поведение двухточечного коррелятора. Покажем, что он действительно стремится к своему квантовомеханическому среднему. Но сначала обсудим проблему усреднения по полям  $\eta(x, t)$ . Мы умеем выражать решение уравнения Ланжевена через  $\eta(x, t)$  (в виде ряда теории возмущений) и соответственно любые полиномиальные функционалы от  $\varphi$ . Случайный ток  $\eta(x, t)$  является гауссовой случайной величиной, и в силу этого работает теорема Вика, т. е. мы должны всеми возможными способами спарить между собой случайные токи. Графически это запишется так:



Так как поля  $\eta(x, t)$  скоррелированы на  $\delta$ -функцию, у нас эффективно возникает новая функция распределения

$$\text{---} \times \text{---} \quad (5.15)$$







разложение (5.14) запишется так:

$$\varphi^B + \varphi^M = \text{---} \times + \text{---} \circ + \text{---} \begin{array}{c} + \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \times + 3 \text{---} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \times + \dots$$

$$+ 3 \text{---} \begin{array}{c} + \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \circ + \text{---} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \circ + 6 \text{---} \begin{array}{c} + \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} + \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \times + \dots$$
(5.20)

Усреднение по быстро осциллирующему току означает «закрывание» кружочков друг на друга. Члены, в которые входит нечетное число «кружочков», автоматически дают нуль (в том числе  $\langle \varphi^B \rangle = 0$ ). Сгруппируем теперь члены неким специальным образом. Нас будут интересовать диаграммы с одним «крестиком» на конце. Их сумма отвечает перенормированному пропагатору

$$\varphi^M = \text{---} \times + \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \times + \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \times + \dots$$
(5.21)

В результате несложных вычислений, которые можно найти, например, в книге <sup>7</sup>, получаются обычные формулы перенормировки массы и заряда. Кинетический коэффициент также перенормируется, поэтому в теории скалярного поля его необходимо учитывать.

На этом мы закончим анализ скалярного поля, который нам понадобился главным образом для иллюстрационных целей. Мы видим, что диаграммная техника, соответствующая итерациям уравнения Ланжевена по константе связи, отличается от обычной диаграммной техники, но приводит к тем же результатам в каждом порядке. Мы убедились также, что в массивном случае поправки, связанные с конечным временем  $\tau$ , убывают экспоненциально.

## 6. СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Мы будем рассматривать сейчас только чисто электромагнитное поле, оставляя в стороне проблему последовательного рассмотрения фермионов в рамках метода стохастического квантования. В отсутствие фермионов электродинамика становится теорией без взаимодействия:

$$S = \frac{1}{4} \int (F_{\mu\nu})^2 d^4x, \quad (6.1)$$

где  $F_{\mu\nu}$ , как обычно, есть  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Уравнение Ланжевена записывается обычным образом: к уравнению Максвелла добавляются случайная сила и сила трения:

$$\partial_t A_\mu = (\square \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu + \eta_\mu. \quad (6.2)$$

Как видно, случайная сила в этом случае имеет смысл случайного вакуумного тока. Это уравнение по существу содержит два уравнения: на продольную и поперечную составляющие поля  $A_\mu$ . Нам в дальнейшем будет удобно перейти к фурье-компонентам поля  $A_\mu$ . Выделяя продольную и поперечную компоненты, мы превращаем уравнение (6.2) в два:

$$\partial_t A_\nu^\perp = -k^2 A_\nu^\perp + \eta_\nu^\perp, \quad (6.3)$$

$$\partial_t A_\nu^\parallel = \eta_\nu^\parallel. \quad (6.4)$$



При этом мы также выделили две компоненты у случайной силы

$$\begin{aligned}\eta_{\mu}^{\perp}(k) &= \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) \eta_{\nu}(k), \\ \eta_{\mu}^{\parallel}(k) &= \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \eta_{\nu}(k).\end{aligned}\quad (6.5)$$

Заметим, что случайные силы  $\eta^{\perp}$  и  $\eta^{\parallel}$  можно рассматривать как независимые. Действительно,

$$\begin{aligned}\langle \eta_{\mu}^{\perp}(k) \eta_{\nu}^{\parallel}(p) \rangle &= \left( \delta_{\mu\alpha} - \frac{k_{\mu}k_{\alpha}}{k^2} \right) \frac{k_{\nu}k_{\beta}}{k^2} \langle \eta_{\alpha}(k) \eta_{\beta}(p) \rangle = \\ &= 2\delta(p+k) \delta_{\alpha\beta} \left( \delta_{\mu\alpha} - \frac{k_{\mu}k_{\alpha}}{k^2} \right) \frac{k_{\nu}k_{\beta}}{k^2} = 0,\end{aligned}\quad (6.6)$$

тогда как

$$\langle \eta_{\mu}^{\perp}(k) \eta_{\nu}^{\perp}(p) \rangle = 2 \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) \delta(p+k), \quad (6.7)$$

$$\langle \eta_{\mu}^{\parallel}(k) \eta_{\nu}^{\parallel}(p) \rangle = 2 \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \delta(p+k). \quad (6.8)$$

Как и следовало ожидать, поля  $A_{\mu}^{\parallel}$  и  $A_{\mu}^{\perp}$  не взаимодействуют:

$$\langle A_{\mu}^{\parallel} A_{\nu}^{\perp} \rangle = 0.$$

Вычислим теперь двухточечный коррелятор поля  $A_{\mu}$ . Решая уравнения (6.6), (6.4), находим

$$A_{\mu}^{\perp}(p, t) = \int_0^t \exp[-p^2(t-\tau)] \eta^{\perp}(p, \tau) d\tau, \quad (6.9)$$

$$A_{\mu}^{\parallel}(p, t) = \int_0^t \eta^{\parallel}(p, \tau) d\tau. \quad (6.10)$$

Теперь легко найти  $\langle A_{\mu}^{\perp} A_{\nu}^{\perp} \rangle$  и  $\langle A_{\mu}^{\parallel} A_{\nu}^{\parallel} \rangle$ :

$$\begin{aligned}\langle A_{\mu}^{\perp}(p, t) A_{\nu}^{\perp}(-p, t') \rangle &= \int_0^{\min(t, t')} d\tau \exp[-p^2(t+t'-2\tau)] \cdot 2 \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2} \right) = \\ &= \frac{1}{p^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2} \right) \{ \exp[-p^2|t-t'|] - \exp[-p^2(t+t')] \},\end{aligned}\quad (6.11)$$

$$\langle A_{\mu}^{\parallel}(p, t) A_{\nu}^{\parallel}(-p, t') \rangle = \frac{2p_{\mu}p_{\nu}}{p^2} \min(t, t'). \quad (6.12)$$

При  $t \rightarrow \infty$   $\langle A_{\mu}^{\perp} A_{\nu}^{\perp} \rangle$  стремится к хорошо известному поперечному пропагатору. Коррелятор продольных полей растет со временем. Это — рассмотренные выше нулевые моды. По счастью, продольная составляющая поля  $A_{\mu}$  физического смысла не имеет, она не калибровочно инвариантна. Все физически интересные величины калибровочно инвариантны и выражаются через  $A^{\perp}$ . Поэтому уравнение (6.4) можно отбросить и рассматривать только поперечную составляющую поля  $A_{\mu}$ , подчиняющуюся уравнению (6.3). Полный двухточечный коррелятор  $\langle A_{\mu} A_{\nu} \rangle$  есть

$$\langle A_{\mu}(p, t) A_{\nu}(-p, t) \rangle = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2} \right) \frac{1}{p^2} + 2t \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2} + \dots \quad (6.13)$$

Точками обозначен член, стремящийся к нулю  $\sim \exp(-2p^2t)$ . Если мы теперь попытаемся вычислить какую-нибудь калибровочно инвариантную величину, то зависимость от коррелятора продольных составляющих (и соответственно от времени) выпадет. Поэтому везде для калибровочно инвариантных величин вместо  $\langle A_{\mu} A_{\nu} \rangle$  можно ставить  $\langle A_{\mu}^{\perp} A_{\nu}^{\perp} \rangle$ .



## 7. УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА В НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

Мы будем рассматривать калибровочные теории с группами  $U(N)$ . Функциональный интеграл имеет вид

$$Z = \int DA \exp \left( - \frac{S(A)}{g_0^2} \right), \quad (7.1)$$

$$S(A) = - \int d^4x \cdot \frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu}^2, \quad (7.2)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]; \quad (7.3)$$

здесь поля  $A_\mu$ ,  $F_{\mu\nu}$  — антиэрмитовы  $N \times N$ -матрицы.

Как видно, евклидово действие  $S(A)$  аналогично энергии в распределении Гиббса, а затравочная константа  $g_0^2$  аналогична температуре.

Уравнение Ланжевена пишется сразу же по аналогии со статистической механикой:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial \tau} + \frac{\delta S}{\delta A_\mu} = J_\mu, \quad (7.4)$$

$$\langle J_\mu^{ij}(x, \tau) J_\nu^{kl}(x', \tau') \rangle = 2g_0^2 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (7.5)$$

Здесь гауссов случайный ток  $J_\mu^{ij}$  представляет собой антиэрмитову матрицу, как и  $A_\mu$ :

$$J_\mu^{ij} = -J_\mu^{ji}.$$

Переменную  $\tau$  мы будем называть собственным временем, чтобы отличить ее от времени  $t = ix_4$ .

По аналогии со статистической механикой можно предположить, что средние значения  $\langle \Phi \rangle$ , вычисленные с помощью распределения вероятностей

$$P(A) = \exp \left( - \frac{S(A)}{g_0^2} \right) Z^{-1}, \quad (7.6)$$

$$\langle \Phi(A) \rangle = \int DA P(A) \Phi(A), \quad (7.7)$$

совпадут со средними по большому интервалу собственного времени вдоль траекторий уравнения (7.4):

$$\bar{\Phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \Phi(A(\tau)). \quad (7.8)$$

Такое усреднение по собственному времени автоматически приводит к усреднению по случайному шуму — флуктуации среднего убывают обратно пропорционально  $T^{1/2}$ .

Итак, естественно предположить, что

$$\langle \Phi \rangle = \bar{\Phi}. \quad (7.9)$$

Тут-то и открываются новые возможности, заложенные в уравнении Ланжевена. Дело в том, что обычное распределение вероятностей (7.7) плохо определено. Как хорошо известно, калибровочная инвариантность этого распределения затрудняет построение теории возмущений. Классический вакуум

$$A_\mu^{cl} = S^{-1}(x) \partial_\mu S(x), \quad S^*(x) S(x) = 1 \quad (7.10)$$

зависит от произвольной унитарной матрицы  $S(x)$ , т. е. вырожден.

Для построения теории возмущений приходится фиксировать калибровку известным методом Фаддеева и Попова. Этот метод определен только для малых флуктуаций поля — при больших полях возникают известные неоднозначности Грибова<sup>9</sup>. Все члены теории возмущений правильно воспроиз-



водятся методом Фаддеева и Попова, но непертурбативные эффекты искажаются.

С другой стороны, уравнение Ланжевена невырождено. Оно инвариантно только по отношению к обычным, не зависящим от  $\tau$  калибровочным преобразованиям

$$A_\mu(x, \tau) \rightarrow S^{-1}(x) [\partial_\mu + A_\mu(x, \tau)] S(x), \quad (7.11)$$

$$J_\mu(x, \tau) \rightarrow S^{-1}(x) J_\mu(x, \tau) S(x). \quad (7.12)$$

Поэтому динамика, т. е. зависимость от  $\tau$  решения задачи Коши

$$A_\mu(x, 0) = A_\mu(x) \quad (7.13)$$

не содержит каких-либо однозначностей. Начальные условия (7.13) эквивалентны фиксации калибровки.

Разумеется, физическая проблема калибровки не исчезает, но математическая сторона дела становится проще. Исследование уравнения Ланжевена в калибровочной теории показывает, что векторный потенциал с течением собственного времени равномерно заполняет всю калибровочную орбиту, т. е. поля, отличающиеся калибровочным преобразованием, встречаются в среднем одинаково часто. Это происходит через достаточно большое собственное время, когда «забываются» начальные условия. При этом калибровочно инвариантные величины стремятся к своим средним значениям, соответствующим распределению Гиббса — Янга — Миллса.

## 8. ФИКСАЦИЯ КАЛИБРОВКИ

Как уже говорилось выше, в уравнении Ланжевена калибровочной теории можно не фиксировать калибровки. Растущие по  $\tau$  члены сокращаются между собой в каждом порядке теории возмущений для любой калибровочно инвариантной величины.

Можно, однако, так преобразовать уравнение Ланжевена<sup>10</sup>, что эти члены вообще исчезнут. Такое преобразование уравнения Ланжевена эквивалентно фиксации калибровки. Оно удобно для практических расчетов, поэтому мы его здесь опишем.

Заметим, что для вычисления среднего значения  $\langle \Phi(A) \rangle$  калибровочно инвариантного функционала можно вместо тока  $A$  пользоваться калибровочно преобразованным  $A^M$  с зависящей от времени матрицей преобразования  $M(x, \tau)$ . Разумеется, такое поле удовлетворяет уже другому уравнению, поскольку уравнение Ланжевена не инвариантно по отношению к таким преобразованиям.

Нетрудно проверить, что после преобразования

$$A_\mu = M^{-1} (\partial_\mu + B_\mu) M, \quad J_\mu = M^{-1} K_\mu M$$

уравнение приобретет добавочный член

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial \tau} + [D_\mu a] + \frac{\delta S}{\delta B_\mu} = K_\mu, \quad (8.1)$$

где

$$a = M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \tau}. \quad (8.2)$$

Величина  $a$  произвольна. Например, мы можем выбрать ее в виде

$$a = \frac{1}{\alpha} \partial_\nu B^\nu; \quad (8.3)$$

при  $\alpha = 1$  в уравнении (8.1) в линейном приближении сокращаются члены  $\partial_\mu \partial_\nu B^\nu$ .



Подставляя в уравнение (8.1)  $a$  в форме (8.3), имеем

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial \tau} + \frac{1}{\alpha} [D_\mu \partial_\nu B^\nu] + [D_\nu F_\mu^\nu] = K_\mu. \quad (8.4)$$

Видно, что линейная часть уравнения (8.4) невырождена:

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial \tau} + \square B_\mu + O(B^2) = K_\mu. \quad (8.5)$$

На первый взгляд этим исчерпывается проблема фиксации калибровки. Такая точка зрения неоднократно высказывалась в литературе<sup>10</sup>.

Есть, однако, еще тонкость, которую часто не замечают. Дело в том, что  $a$  зависит от  $B_\mu$ , а тем самым, и от случайной силы  $J_\mu$  по уравнению (8.4). Поэтому матрица  $M$ , которая определяется из (8.2),

$$M = T \exp \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad (8.6)$$

также зависит от  $J_\mu$ .

Но это означает, что  $K_\mu$ , в отличие от  $J_\mu$ , не является гауссовой случайной величиной. Например, коррелятор

$$\langle K_\mu(x, \tau), K_\nu(y, \tau) \rangle = \langle M^{-1} J_\mu(x, \tau) M M^{-1} J_\nu(y, \tau) M \rangle, \quad (8.7)$$

вообще говоря, содержит дополнительные члены от спаривания  $M$  и  $J_\mu$ . Тем не менее можно показать (см. приложение Б), что в правую часть уравнения (8.4) вместо случайной силы  $K_\mu$  можно подставить обычную гауссову случайную величину  $J_\mu$ , скоррелированную на  $\delta$ -функцию. При этом, вообще говоря, получится новое уравнение

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial \tau} + \frac{1}{\alpha} [D_\mu \partial_\nu B^\nu] + [D_\nu F_{\mu\nu}] = J_\mu. \quad (8.8)$$

Однако средние от калибровочно инвариантных величин, вычисленные с его помощью, будут точно такими же, как и для уравнения (8.4).

Сейчас мы приступим к изучению стохастического уравнения, записанного в форме (8.8). Параметр  $\alpha$  будем считать пока произвольным. При  $\alpha = \infty$  уравнение (8.8) калибровочно инвариантно. Калибровочную инвариантность нарушают только начальные условия на поле  $B_\mu$ . Если же  $\alpha \neq \infty$ , то калибровочная инвариантность нарушена явно. По сути дела параметр  $\alpha$  играет роль фиксации калибровки и аналогичен  $\alpha$ -параметру в фейнмановской калибровке. Теория возмущений для уравнения (8.8) строится обычным образом (в точности аналогична теории возмущений для  $\phi^4$ ). Функция распространения для уравнения (8.8) имеет вид

$$G_{\mu\nu}(p, t, t') =$$

$$= \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \exp[-p^2(t-t')] + \exp\left[-\frac{p^2}{\alpha}(t-t')\right] \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \quad (8.9)$$

Помимо обычных янг-миллсовских вершин

$$\frac{a}{\mu} \begin{array}{c} b \\ \swarrow \\ \mu \quad k \quad \swarrow \\ \quad \quad \quad \rho \\ \searrow \\ q \quad \quad \quad \rho \\ \quad \quad \quad \searrow \\ c \quad \quad \quad \rho \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ \swarrow \\ \rho \\ \searrow \\ \rho \end{array} = -\frac{i}{2} g c^{abc} \left[ (k-p)_\rho g^{\mu\nu} + (p-q)_\mu g^{\rho\nu} + (q-k)_\nu g^{\mu\rho} \right], \quad (8.10)$$

$$\begin{array}{c} a \quad \mu \\ | \\ d \quad \mu \\ \hline \sigma \quad \quad \quad \sigma \\ | \\ c \quad \rho \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ \swarrow \\ \sigma \\ \searrow \\ \rho \end{array} = -g^2 c^{abc} c^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \text{перестановки}, \quad (8.11)$$



член (8.8) приводит к возникновению добавочной вершины

$$\frac{1}{\alpha} D_{\mu} \partial_{\nu} B^{\nu} = \frac{1}{\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\nu} B^{\nu} - ig [B_{\mu} \partial^{\nu} B_{\nu}]) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{diagram} = \frac{1}{\alpha} \frac{g}{2} (g_{\mu\nu} k_{\lambda} - g_{\mu\lambda} p_{\nu}) c^{abc}. \quad (8.12)$$

Ряд теории возмущений для поля  $B_{\mu}$  выглядит так:

$$B_{\mu} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \dots \quad (8.13)$$

При вычислении средних возникает новая функция распространения (ср. (5.15)):

$$\langle B_{\mu}(x, t) B_{\nu}(y, t') \rangle \doteq \int_0^t \int_0^{t'} G_{\mu\alpha}(t - \tau, p) G_{\nu\beta}(t' - \tau, q) \times$$

$$\times \langle h_{\alpha}(p, \tau) h_{\beta}(q, \tau') \rangle dq d\tau d\tau' =$$

$$= P_{\mu\nu}^{\perp} \frac{1}{p^2} \left\{ \exp[-p^2 |t - t'|] - \exp[-p^2 (t + t')] \right\} +$$

$$+ P_{\mu\nu}^{\parallel} \frac{\alpha}{p^2} \left\{ \exp\left[-\frac{p^2}{\alpha} |t - t'| \right] - \exp\left[-\frac{p^2}{\alpha} (t + t') \right] \right\}. \quad (8.14)$$

Через  $P_{\mu\nu}^{\perp}$ ,  $P_{\mu\nu}^{\parallel}$  обозначены проекторы на поперечную и продольную составляющие соответственно. Выражение (8.14) при  $\alpha \rightarrow \infty$  дает

$$\langle B_{\mu}(x, t) B_{\nu}(y, t') \rangle \doteq P_{\mu\nu}^{\perp} \frac{1}{p^2} \left\{ \exp[-p^2 |t - t'|] - \exp[-p^2 (t + t')] \right\} +$$

$$+ P_{\mu\nu}^{\parallel} \cdot 2 \min(t, t'). \quad (8.15)$$

Наиболее простой вид  $\langle B_{\mu}(x, t) B_{\nu}(y, t') \rangle$  имеет при  $\alpha = 1$ :

$$\langle B_{\mu}(x, t) B_{\nu}(y, t') \rangle \doteq \delta_{\mu\nu} \frac{1}{p^2} \left\{ \exp[-p^2 |t - t'|] - \exp[-p^2 (t + t')] \right\}. \quad (8.16)$$

При вычислении калибровочно инвариантных величин зависимость от  $\alpha$  выпадает. При этом никаких полей типа духов вводить не надо. Для численных расчетов удобно положить  $\alpha$  равной единице.

Как и в обычной теории поля, при стохастическом подходе имеется проблема регуляризации. Обрезание по частоте, эквивалентное для теории  $\phi^4$  обрезанию по импульсам, для калибровочных теорий не годится. Как обычно, разумно пользоваться калибровочно инвариантной регуляризацией (т. е. размерной регуляризацией).

Мы приведем здесь результаты вычислений для вильсоновского среднего (с точностью до четвертого порядка по  $g$ ). Вильсоновское среднее определяется как  $P$ -экспонента вдоль замкнутого контура  $C$  от векторного потенциала (см. <sup>11</sup>):

$$W(C) = \left\langle \text{tr } P \exp \oint_C ig A_{\mu} dx^{\mu} \right\rangle = \lim \left\langle \text{tr } \prod_{\mu} (1 + ig A_{\mu}(x) \Delta x^{\mu}) \right\rangle. \quad (8.17)$$

В обычной теории Янга — Миллса перенормируемость вильсоновского среднего была показана Доценко и Вергелесом <sup>12</sup>. В нашем случае вильсоновское



среднее зависит от «фиктивного» времени. При  $t \rightarrow \infty$

$$W(C, t) \rightarrow W(C). \quad (8.18)$$

Раскрывая выражение (8.17), имеем

$$W(C) = \sum_n (ig)^n \oint_0^{x_n} dx_n^{\mu_n} \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-1}^{\mu_{n-1}} \dots \int_0^{x_2} dx_1^{\mu_1} \langle A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \rangle, \quad (8.19)$$

$$W(C) = \sum_n n \cdot \text{[diagram of a circle with a shaded sector and external lines]} \cdot \quad (8.20)$$

Мы ввели обозначение для  $n$ -го члена ряда в сумме (8.19). Теория петлевых функционалов подобного рода детально исследована в обзоре<sup>13</sup>.

Для того чтобы вычислить  $W(C, t)$ , необходимо в (8.19) подставить  $A_\mu$ , выраженное с помощью ряда (8.19) через случайные токи. Квантовомеханическое усреднение  $\langle \dots \rangle$  заменяется усреднением по случайному полю  $J_\mu$ . В результате для  $W(C, t)$  получаем

$$W(C, t) = \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \text{[diagram 3]} + 4 \cdot \text{[diagram 4]} + 2 \cdot \text{[diagram 5]} + 8 \cdot \text{[diagram 6]} + 6 \cdot \text{[diagram 7]} \quad (8.21)$$

где мы ввели обозначение для эффективной треххвостки

$$\text{[diagram of a three-pronged vertex]} = \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} \quad (8.22)$$

Вычисления приводят к

$$W(C, t) = \text{[diagram of a circle with a cross]} \left( 1 + \frac{22}{3} g^2 \frac{C_2}{16\pi^2 \varepsilon} \right) + O(g^4);$$

$C_2$  — собственное значение оператора Казимира для группы  $SU(N)$ ,  $\varepsilon$  — дефект размерности пространства ( $D = 4 - \varepsilon$ ). Выражение в круглых скобках есть ни что иное, как известное выражение для перенормировки заряда, т. е. для усреднения расходимостей в  $W(C, t)$  нужно только перенормировать заряд. Это означает, что кинетический коэффициент не перенормируется:

$$\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(0) + O(g^2).$$

Его с самого начала можно положить равным единице и не рассматривать. Именно так мы и поступили с ним.

## 9. МАТРИЧНЫЕ ТЕОРИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ $N$

Рассмотрим сначала калибровочную теорию с группой  $U(N)$ . При  $N \rightarrow \infty$   $U(N)$ - и  $SU(N)$ -теории становятся эквивалентными. Действительно,  $SU(N)$ -поля и  $U(N)$ -поля отличаются друг от друга на одну абелеву компоненту поля:

$$SU(N) = \frac{N}{(Ng^2)} \int \text{tr} (F_{\mu\nu}^a T^a + \mathcal{F}_{\mu\nu})^2 d^4x = S_{SU(N)} + \frac{N^2}{Ng^2} \int (\mathcal{F}_{\mu\nu})^2 d^4x. \quad (9.1)$$



где  $T^a$  — генераторы группы  $SU(N)$ . Мы имеем две невзаимодействующие теории:  $SU(N)$ -калибровочную теорию и свободное электромагнитное поле. Если в теории присутствуют кварки, то между фотонами и глюонами возникает взаимодействие. В этом случае мы имеем хорошо знакомую ситуацию нуля заряда, т. е. взаимодействие между глюонами и фотонами подавлено радиусом обрезания. С другой стороны, взаимодействие между глюонами и фотонами подавлено также по  $1/N$ .

Для исследования поведения  $U(N)$ -калибровочной теории при больших  $N$  удобно переформулировать диаграммную технику. Мы хотим явным образом выделить цветные индексы. Пропагатор глюонного поля можно записать в виде

$$\langle A_\mu^{ij}(x) A_\nu^{kl}(y) \rangle = (G^a)^{ij} (G^b)^{kl} \langle A_{a\mu}(x) A_{b\nu}(y) \rangle = (G^a)^{ij} (G^b)^{kl} \delta_{ab} G_{\mu\nu}(x-y) = \delta^{il} \delta^{jk} G_{\mu\nu}(x-y). \quad (9.2)$$

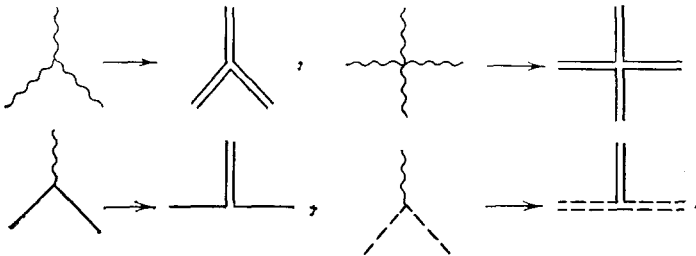
$G^a$  — генераторы группы  $U(N)$ . Мы воспользовались соотношением  $\sum_a (G^a)^{ij} \times \times (G^b)^{kl} = \delta^{il} \delta^{jk}$ . Заметим, что для группы  $SU(N)$  такого простого соотношения нет (для группы  $SU(N)$  мы имеем  $\sum_a (T^a)^{ij} (T^a)^{kl} = \delta^{il} \delta^{jk} - \left(\frac{1}{N}\right) \delta^{ij} \delta^{kl}$ ).

Теперь понятно, что пропагатор глюонного поля можно представить графически двумя линиями, по каждой из которых распространяется цветной индекс:

$$\langle A_\mu^{ij}(x) A_\nu^{kl}(y) \rangle \sim \mu \xrightarrow{j} \xleftarrow{k} \nu. \quad (9.3)$$

Аналогичным образом можно переопределить кварковый и духовый пропагаторы и вершины:

$$\langle \bar{\psi}^i(x) \psi^j(y) \rangle \sim i \xrightarrow{j}, \quad \langle c^{ij}(x) c^{kl}(y) \rangle \sim \frac{i}{j} \xrightarrow{j} \xleftarrow{k} \frac{l}{k}, \quad (9.4)$$



$$(9.5)$$

Такая переформулировка фейнмановских диаграмм была предложена в пионерской работе г'Хоофта<sup>14</sup>. В этих обозначениях просто оценить порядок любой фейнмановской диаграммы по  $N$ . Этот порядок есть ни что иное, как число индексных циклов диаграммы. Для синглетной величины, нормированной на константу при  $N \rightarrow \infty$ , например для вильсоновского среднего, фейнмановская диаграмма пропорциональна

$$N^{2-2H-L} (g^2 N)^h, \quad (9.6)$$

где  $k = 1/2 V_3 + V_4$ ,  $V_3$  — число треххвосток,  $V_4$  — число четыреххвосток,  $H$  есть число ручек на поверхности, натянутой на диаграмму, а  $L$  — число дырок в этой поверхности. Дырки связаны с кварковыми петлями.



Таким образом, при  $N = \infty$  остаются только планарные (без ручек) диаграммы без внутренних кварковых петель. Эффективной константой связи при  $N \rightarrow \infty$  является не  $g^2$ , а  $\lambda = Ng^2$ , т. е. при стремлении  $N$  в бесконечность заряд  $g$  должен обращаться в нуль таким образом, чтобы произведение  $Ng^2$  оставалось конечным.

В точности аналогичные рассуждения проходят для теории эрмитова матричного поля с действием

$$S[\Phi] = \text{tr} \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{m^2}{2} \Phi^2 + \frac{\tilde{g}}{4} \Phi^4 \right); \quad (9.7)$$

$\Phi$  — предполагается эрмитовой матрицей  $N \times N$ . Эта теория понадобится нам в дальнейшем в качестве удобного примера, на котором будет продемонстрирована идея редукции. Пропагатор в матричной модели изображается двумя линиями (см. 9.3)

$$\frac{i}{k} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \frac{j}{l} \sim \delta^{ij} \delta^{kl}, \quad (9.8)$$

а вершина (см. (9.5))

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} \cdot \quad (9.9)$$

В калибровочной теории диаграмма была пропорциональна

$$\sim N^{2-2H-L} (g^2 N)^{(1/2)V_3+V_4}. \quad (9.10)$$

Формула для порядка диаграммы в теории эрмитова матричного поля получается из (9.6), просто положив  $L = 0$ ,  $V_3 = 0$ . Отсюда диаграмма пропорциональна

$$\sim N^{2-2H} (\tilde{g} N)^{V_4}. \quad (9.11)$$

Опять, как и в теории калибровочных полей, мы видим, что основной вклад дают планарные графики, а эффективная константа связи есть

$$\lambda = gN. \quad (9.12)$$

В следующем разделе будет показано, как с помощью метода стохастического квантования можно получать редуцированные модели при  $N \rightarrow \infty$ , воспроизводящие диаграммы исходных (не редуцированных) теорий при  $N \rightarrow \infty$ .

## 10. РЕДУЦИРОВАННОЕ ЭРМИТОВО ПОЛЕ

Мы продемонстрируем метод редукции на примере эрмитова поля. Действие теории дается выражением (9.7). Напишем уравнение Ланжевена

$$\partial_t \Phi_{ij} = (\square - m^2) \Phi_{ij} - \frac{\lambda}{N} (\Phi^3)_{ij} + \eta_{ij}, \quad (10.1)$$

где  $\eta_{ij}$  — случайное гауссово матричное поле:

$$\langle \eta_{ij}(x, t) \eta_{kl}(y, t') \rangle = 2\delta_{ij}\delta_{kl}\delta(x-y)\delta(t-t'). \quad (10.2)$$

Теория эрмитова матричного поля инвариантна относительно глобальных  $U(N)$ -преобразований и изменения знака у поля  $\Phi$ :

$$\Phi \rightarrow U\Phi U^+, \quad \Phi \rightarrow -\Phi. \quad (10.3)$$



Мы будем рассматривать следы от  $2k$ -точечных корреляторов  $((2k + 1)$ -точечные корреляторы, очевидно, равны нулю)

$$\langle \text{tr} \Phi(x_1, t) \dots \Phi(x_{2k}, t) \rangle. \quad (10.4)$$

Разработанная в предыдущих разделах теория возмущений вполне пригодна для уравнения (10.1). Подставляя в (10.4) выражение для поля  $(\Phi)_{ij}$  в виде ряда, по теории возмущений видим, что корреляторы от следа произведения случайных матриц (10.4) выражаются только через корреляторы следов произведения случайных матриц  $\eta_{ij}$ . Матричное поле  $\eta_{ij}(x, t)$  представляет собой белый шум. Основная идея редукции состоит в том, что для вычисления корреляторов

$$\langle \text{tr} \eta(x_1, t_1) \dots \eta(x_n, t_n) \rangle \quad (10.5)$$

при  $N \rightarrow \infty$  совсем не обязательно пользоваться белым шумом, а можно пользоваться некоторой другой, специальным образом построенной случайной величиной. Можно, например, добиться того же эффекта белого шума, введя для каждой компоненты  $\eta_{ij}$  только одну гармонику

$$\eta_{ij}(x, t) = \bar{\eta}_{ij}(t) \exp[i(p_i - p_j)x], \quad (10.6)$$

где  $\bar{\eta}_{ij}$  — случайная гауссова величина, скоррелированная на  $\delta$ -функцию, а  $p_i$  (так называемые замороженные импульсы) — случайные векторы, распределенные равномерно в импульсном пространстве. Для ультрафиолетового обрезания можно ограничить область изменения импульсов зоной Бриллюэна — кубом со стороной  $2\pi\Lambda$ :

$$dW(p) = \prod_i \frac{d^D p_i}{(2\pi\Lambda)^D} \prod_\mu \theta(\pi\Lambda - |p_i^\mu|). \quad (10.7)$$

Нетрудно проверить, что усреднение выражения (10.5) по случайной силе  $\eta_{ij}(t)$ , а затем усреднение по импульсам с весом  $dW(p)$  при  $N \rightarrow \infty$  приводят к тому же результату, что и усреднение по белому шуму  $\eta_{ij}(x, t)$ . Это подробно показано в приложении Г. В частности,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \langle \text{tr} \eta(x, t) \eta(y, t') \rangle &= 2\delta(t - t') \delta(x - y) - \frac{2}{N} \delta(t - t') \delta(x - y) + \\ &+ \frac{2}{N} \delta(t - t') \frac{\Lambda^D}{(2\pi)^D} = 2\delta(t - t') \delta(x - y) + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned} \quad (10.8)$$

При  $N \rightarrow \infty$  доминирует только первый член, совпадающий с правильным ответом. Аналогичным образом можно показать (см. приложение Г), что главный порядок по  $1/N$ , получающийся при вычислении  $\langle \text{tr} \eta(x_1, t_1) \dots \eta(x_n, t_n) \rangle$  с использованием представления (10.6), совпадает с правильным ответом.

Случайный ток, записанный в форме (10.6), позволяет явным образом избавиться в уравнении (10.1) от координаты. Подставим в уравнение (10.1) следующий анзац для поля:

$$\Phi_{ij}(x, t) = \exp[i(p_i - p_j)x] \bar{\Phi}_{ij}(t). \quad (10.9)$$

Тогда легко видеть, что  $\bar{\Phi}_{ij}(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \bar{\Phi}_{ij} = -[(p_i - p_j)^2 + m^2] \bar{\Phi}_{ij} - \frac{\lambda}{4} (\bar{\Phi}^3)_{ij} + \eta_{ij}(\Lambda)^{D/2}. \quad (10.10)$$

Может показаться удивительным, что фурье-гармоники не размножаются в нелинейном уравнении — ведь обычно нелинейность приводит к взаимодействию различных гармоник. Это «чудо» объясняется специальным видом уравнения и анзаца (10.9). Анзац (10.9) может быть записан как унитарное преобразование

$$\Phi(x) = e^{iPx} \Phi e^{-iPx}, \quad P = \text{diag}(P_1, \dots, P_N). \quad (10.11)$$



Множители  $e^{iPx}$  сокращаются так, что гармоники действительно не взаимодействуют.

Формула (10.11) имеет наглядный физический смысл. Вместо оператора импульса  $\bar{P}$  в гильбертовом пространстве, мы пользуемся диагональной матрицей  $P$  в пространстве внутренней симметрии системы. Говоря математическим языком, мы представляем алгебру трансляций в подалгебре Картана группы  $U(\infty)$ . Конечно, это верно только в пределе  $N \rightarrow \infty$ .

Вернемся, однако, к редуцированному уравнению Ланжевена (10.10). Функция распространения для него имеет вид

$$G_{jl}^{ik}(p_i - p_j; t - t') = \delta_{ik} \delta_{jl} \exp[-[(p_i - p_j)^2 + m^2](t - t')] \theta(t - t'). \quad (10.12)$$

Графически ее можно изображать двумя линиями

$$\begin{array}{c} i \quad p_i \quad i \\ \xrightarrow{\quad} \\ j \quad p_j \quad j \end{array}. \quad (10.13)$$

Как обычно, решение уравнения (10.10) дается в виде суммы ряда древесных диаграмм

$$\bar{\Phi}_{ij} = \text{---} \times + \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ \times \end{array} \times + \dots \quad (10.14)$$

Двухточечный коррелятор полей  $\bar{\Phi}_{ij}(t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Phi}_{ij}(t) \bar{\Phi}_{ik}(t') \rangle &= \text{---} \times = \delta_{ik} \delta_{jl} (\Lambda)^D \frac{1}{(p_i - p_j)^2 + m^2} \times \\ &\times [\exp\{-[p_i - p_j]^2(t - t')\} - \exp\{-[p_i - p_j]^2(t + t')\}]. \end{aligned} \quad (10.15)$$

При  $t = t' \rightarrow \infty$  выражение (10.15) пропорционально обычному квантово-механическому пропагатору. Отличие состоит только в множителе. Исходные средние (6.4) выражаются с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \langle \text{tr } \varphi_{ij}(x_1, t) \dots \varphi_{kl}(x_n, t) \rangle &= \int \prod_{i,j} \frac{dP}{(2\pi\Lambda)^D} \text{tr} \exp[i(p_i - p_j)x_1] \dots \\ &\dots \exp[i(p_i - p_j)x_n] \langle \varphi_{ij}(t_1) \dots \varphi_{kl}(t_n) \rangle. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Интегрирование по импульсам  $p_i$  в (10.16) мы в дальнейшем будем обозначать  $\langle \dots \rangle_P$ . При  $t \rightarrow \infty$  выражение  $\langle \varphi_{ij}(t) \dots \varphi_{kl}(t) \rangle$  стремится к среднему некоторой теории, действие которой просто угадывается:

$$S_{\text{red}}[\Phi, P] = \sum_{ij} \frac{1}{2} [(p_i - p_j)^2 + m^2] \Phi_{ij} \Phi_{ji} + \frac{\lambda}{4N} \text{tr} \Phi^4. \quad (10.17)$$

Это и есть действие редуцированной модели. Теперь мы можем сформулировать рецепт вычисления средних

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle \quad (10.18)$$

без помощи стохастического уравнения (10.10). Фиксируем набор  $p_i$  (эта операция называется замораживанием импульсов). Потом рассматриваем теорию с действием (10.17). Свободная энергия в редуцированной теории определяется как

$$F_{\text{red}}(J) = -\ln Z_{\text{red}}(J), \quad (10.19)$$

где  $J$  — внешний матричный ток;

$$Z_{\text{red}} = \left[ \int \prod_{i,j} d\Phi_{ij} \exp(-S_{\text{red}} + \text{tr } J\varphi) \right] \left[ \int \prod_{i,j} d\Phi_{ij} \exp(-S_{\text{red}}) \right]^{-1}. \quad (10.20)$$



Тогда среднее (10.16) записывается в виде

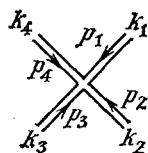
$$\langle \text{tr } \varphi_{ij}(x_1, t) \dots \varphi_{kl}(x_n, t) \rangle = \left\langle \text{tr} \exp [i(p_i - p_j)x_1] \dots \exp [i(p_k - p_l)x_n] \frac{\delta^4 F_{\text{red}}}{\delta J_{ij} \dots \delta J_{kl}} \right\rangle_p. \quad (10.21)$$

На самом деле при  $N \rightarrow \infty$  у нас нет необходимости производить явным образом интегрирование по импульсам. Поскольку импульсы  $p_i$  распределены равномерно в кубе размером  $2\pi\Lambda$ , мы можем изначально распределить их каким-то образом и заморозить (т. е. на самом деле это означает, что мы вычисляем интеграл по методу Монте-Карло).

Исследуем теперь вопрос, как связаны между собой обычные фейнмановские диаграммы с диаграммами редуцированной модели (10.17). Пропагатор редуцированной модели совпадает с пределом выражения (10.15) при  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{i}{\underline{f}} \rightarrow \frac{i}{\underline{f}} = \frac{1}{(p_i - p_j)^2 + m^2} (\Lambda)^D. \quad (10.22)$$

«Двойная линия» (пропагатор) несет импульс  $k_{ij} = p_j - p_i$ . При этом в вершине



$$\begin{aligned} k_1 &= p_2 - p_1, \\ k_2 &= p_3 - p_2, \\ k_3 &= p_4 - p_3, \\ k_4 &= p_1 - p_4. \end{aligned}$$

импульс автоматически сохраняется:

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4. \quad (10.23)$$

Пусть диаграмма содержит  $k$  линий. Если  $k \ll N$ , то можно считать, что все импульсы не скоррелированы, т. е. усреднение по случайным импульсам  $\langle \dots \rangle_p$  в редуцированной модели есть ни что иное, как интегрирование по внутренним импульсам диаграммы. В случае  $k \sim N$  или  $k > N$  мы очевидным образом получаем неправильный ответ, так как импульсы, стоящие на линиях, сильно скоррелированы и нельзя считать, что интегрирование по ним происходит независимо. При конечных  $N$  левая часть выражения (10.21) воспроизводит правильно диаграммы с числом внутренних линий много меньше  $N$ . Так как нас интересует случай  $N \rightarrow \infty$ , то выражение (10.21) остается справедливым. Отметим, что добавочный фактор в (10.22)  $(\Lambda)^D$  нужен для правильной нормировки интеграла по  $dp$ .

## 11. РЕДУЦИРОВАННЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Редуцированная калибровочная теория строится аналогичным образом. Стартуем с уравнения Ланжевена в форме (7.4). Далее делаем подстановку (ср. (10.9))

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(x, t) &\rightarrow e^{i\hat{p}x} \hat{A}_\mu(t) e^{-i\hat{p}x}, \\ \hat{J}_\mu(x, t) &\rightarrow e^{i\hat{p}x} \hat{J}_\mu(t) e^{-i\hat{p}x}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где мы ввели диагональную матрицу импульсов

$$(\hat{p}_\mu)_{ij} = p_\mu^i \delta_{ij}. \quad (11.2)$$



При такой замене переменных ковариантная производная перейдет в коммутатор:

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \rightarrow \tilde{D}_\mu = i p_\mu + A_\mu, \quad (11.3)$$

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = [i p_\mu + A_\mu, i p_\nu + A_\nu], \quad (11.4)$$

$$D_\mu F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{D}_\mu \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (11.5)$$

Теперь можно сформулировать стохастическое уравнение на поле  $A_\mu(t)$ :

$$\partial_\tau A_\mu(t) = \tilde{D}_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} + J_\mu(t). \quad (11.6)$$

Действие для редуцированной теории однозначно записывается в виде

$$S_{\text{red}}[p_\mu A_\mu] = \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^D \cdot \frac{1}{4} \text{tr} |F_{\mu\nu}|^2. \quad (11.7)$$

Уравнение (11.6) инвариантно по отношению к редуцированным калибровочным преобразованиям

$$A_\mu(t) \rightarrow S(A_\mu + i p_\mu) S^+ - i p_\mu = S A_\mu S^+ + S[i p_\mu S^+] \quad (11.8)$$

с произвольной, но не зависящей от  $t$  унитарной матрицей  $S$ .

Рассмотрим подробнее калибровочное стохастическое уравнение (11.6). Как можно проверить (см., например, <sup>4</sup>), непосредственные итерации этого уравнения по константе связи дают в пределе  $N \rightarrow \infty$  для калибровочно инвариантных следов, например для вильсоновского среднего  $W(C)$ , те же члены теории возмущений, что и обычное уравнение Ланжевена (7.4). В пределе  $t \rightarrow \infty$  воспроизводятся результаты диаграммной техники Фаддеева и Попова.

Заметим, однако, что пределы  $t \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$  непереставимы (этот вопрос подробно обсуждался Альфаро <sup>8</sup>). Действительно, если бы эти пределы можно было переставить, то зависимость от замороженных импульсов  $p_\mu$  вообще исчезла бы, поскольку сдвигом  $A_\mu = B_\mu - i p_\mu$  эти импульсы можно перевести из уравнения (11.6) в начальные условия  $B_\mu(0) = i p_\mu$ .

Явления, которые происходят в пределе  $N \rightarrow \infty$  в редуцированных моделях, сродни тем, которые происходят в квантовой механике при переходе от матриц конечного размера к операторам в гильбертовом пространстве (здесь гильбертово пространство вкладывается в групповое многообразие  $SU(\infty)$ , так что оператор  $\hat{P}$  представлен диагональной матрицей).

Напомним, что, например, для матриц конечного размера коммутатор  $[pq]$  является бесследной матрицей, в то время как для операторов координаты и импульса этот коммутатор пропорционален единичному оператору.

Более конкретно покажем, как происходит предельный переход  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty}$  и почему не исчезают замороженные импульсы.

При фиксированных  $N$ ,  $t$  опасные члены, не убывающие с  $t$ , происходят из-за нулевых мод, о которых говорилось выше. Выделим эти нулевые моды, сделав замену переменных

$$A_\mu(t) = S(t) B_\mu(t) S^+(t) + S(t) [i p_\mu, S^+(t)], \quad (11.9)$$

$$\eta(t) \rightarrow S(t) \eta(t) S^+(t); S(0) = 1.$$

Нетрудно убедиться, что уравнение для  $B_\mu$  будет отличаться добавочным членом:

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial t} - [D_\mu \alpha] + D_\nu F_{\mu\nu} = \eta, \quad (11.10)$$

где  $\alpha$  связана с  $S$  уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial t} = S \alpha. \quad (11.11)$$



Выберем

$$\alpha = [ip_\mu + A_\mu^c, A_\mu - A_\mu^c], \quad (11.12)$$

где  $A_\mu^c$  — решение классических уравнений, вблизи которого мы строим квазиклассическое разложение (в простейшем случае  $A_\mu^c = 0$ ).

Тогда, как и в случае полевого уравнения Ланжевена, линейная часть уравнения становится невырожденной, так что нулевые моды исчезают.

Взяв начальные условия

$$A_\mu(0) = A_\mu^c \quad (11.12')$$

и итерируя по константе  $g$ , мы теперь не столкнемся с растущими членами. Очевидно, они все собраны в матрицу

$$S = T \exp \int_0^t \alpha dt. \quad (11.13)$$

Эта матрица сокращается в калибровочно инвариантных величинах, что и доказывает существование предела  $t \rightarrow \infty$ ; с другой стороны, зависимость от  $p_\mu$  теперь явно видна, поскольку их нельзя устранить из уравнения преобразованием.

Подробности вычисления  $\langle \text{tr } F \mu^2 v \rangle$  этим методом можно найти в цитированной выше статье Альфаро<sup>8</sup>. Если отвлечься от технических деталей, то суть дела состоит в том, что растущие с  $t$  вклады нулевых мод содержат поправочные члены  $t/N$ , которые не сокращаются в наблюдаемых величинах при конечных  $N$ , но исчезают в пределе  $N \rightarrow \infty$  при фиксированном  $t$ .

Таким образом, если пользоваться правильным предельным переходом (сначала  $N \rightarrow \infty$ , а потом  $t \rightarrow \infty$ ), то уравнение Ланжевена в калибровочной теории может быть записано в очень простом виде:

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial t} + [B_\nu [B_\nu B_\mu]] = J_\mu, \quad (11.14)$$

$$B_\mu(0) = ip_\mu + A_\mu^c. \quad (11.15)$$

При этой форме записи замороженные импульсы введены через начальные условия и влияют на решение при  $t \rightarrow \infty$  из-за нулевых мод.

Этот порядок предельных переходов покажется менее удивительным, если вспомнить, что при конечном  $N$  редуцированная теория содержит конечное число степеней свободы (матрица  $N \times N$ , не зависящая от  $x$ ) и поэтому не может претендовать на описание квантовой теории поля.

Заметим, что в литературе обсуждались<sup>4,8,18</sup> более сложные калибровочные редуцированные уравнения, в которых вводились те или иные ограничения на матрицы  $A_\mu$  для того, чтобы импульсы нельзя было устранить, сдвигая  $A_\mu \rightarrow A_\mu - ip_\mu$ . Мы не приводим этих уравнений, так как при правильном предельном переходе можно обойтись без ограничений.

## 12. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В НЕПРЕРЫВНОМ СЛУЧАЕ

Большая часть численных расчетов редуцированных моделей была проведена в рамках решеточной регуляризации. Однако, прежде чем переходить к этим расчетам, стоит сказать несколько слов об альтернативном методе, который пока не реализован, но в принципе более совершенен.

Речь идет о методе гауссовой регуляризации редуцированного уравнения Ланжевена. Дело в том, что при фиксированных замороженных импульсах  $p_i$  и фиксированном  $N$  ультрафиолетовых расходимостей вообще не возникает, поскольку нет интегрирований по импульсам в фейнмановских диаграммах. Эти интегрирования эффективно возникают в результате суммирования по цветовым индексам, как обсуждалось выше на примере скалярного



поля. Типичная сумма такова:

$$G(x-y) = \frac{1}{N^2} \sum_{a,b} \exp[i(x-y)(p_a - p_b)] \frac{1 - \exp[-2(p_a - p_b)^2 t]}{(p_a - p_b)^2} =$$

$$= \int \rho(q) dq \exp[iq(x-y)] \frac{1 - \exp(-2q^2 t)}{q^2} \rightarrow \frac{2t}{N} +$$

$$+ \int \frac{dq}{(2\pi)^D} \frac{\exp[iq(x-y)]}{q^2}; \quad (12.1)$$

здесь

$$\rho(q) = \frac{1}{N^2} \sum \delta(q - p_a + p_b) = \frac{1}{N} \delta(q) + \frac{1}{N^2} \sum'_{a,b} \delta(q - p_a + p_b). \quad (12.2)$$

Член  $(1/N)\delta(q)$  дает вклад  $\sim t/N$ , который исчезает в пределе  $N \rightarrow \infty$ . Второй член в (12.2) имеет конечный предел, не зависящий от  $q$ , если  $p_a$  и  $p_b$  равномерно распределены в бесконечном объеме.

Если обрезать распределение по импульсам  $p_a$ , поместив их внутрь единичного куба или единичной сферы, то плотность  $\rho(q)$  будет убывать при больших  $q$ , так что сингулярности пропагатора при  $x \rightarrow y$  пропадут. Это же, очевидно, относится и к остальным ультрафиолетовым расходимостям.

Все они возникают из-за сумм по цветовым индексам и исчезают, если обрезать распределения вероятностей для  $p_a$ , так что в среднем суммы будут сходиться.

Наиболее простое распределение — гауссово:

$$dW(p_a) = \prod_a \frac{d^D p_a}{(2\pi\Lambda^2)^{D/2}} \exp\left(-\sum \frac{p_a^2}{2\Lambda^2}\right). \quad (12.3)$$

В этом случае  $\rho$  тоже гауссово:

$$\rho(q) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int \frac{d^D p_1 d^D p_2}{(2\pi\Lambda^2)^D} \exp\left(-\frac{p_1^2}{2\Lambda^2} - \frac{p_2^2}{2\Lambda^2}\right) \delta(q - p_1 + p_2) =$$

$$= \int \frac{dP}{(2\pi\Lambda^2)^D} \exp\left(-\frac{2p^2}{2\Lambda^2}\right) \exp\left(-\frac{q^2}{4\Lambda^2}\right) = (2\Lambda\pi^{1/2})^{-D} \exp\left(-\frac{q^2}{4\Lambda^2}\right). \quad (12.4)$$

Численная реализация гауссовых величин  $p_{a\mu}$  чрезвычайно проста. Надо разбить 4 компоненты  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на пары:

$$p_{a1} + ip_{a2} = \Lambda (-2 \ln \xi)^{1/2} \exp(2\pi i \eta'),$$

$$p_{a3} + ip_{a4} = \Lambda (-2 \ln \xi')^{1/2} \exp(2\pi i \eta'), \quad (12.5)$$

где  $\xi, \xi', \eta, \eta'$  — случайные числа, равномерно распределенные между 0 и 1.

После того, как задали  $p_{a\mu}$ , можно решать численно уравнение Ланжевена, например, в несингулярной форме (11.10). Для повышения точности можно пользоваться разностными схемами высших порядков (см. приложение В). Главная проблема при этом связана с замороженными импульсами. Как уже говорилось выше, в пределе  $N = \infty$  все нормированные матричные следы не зависят от реализации случайных величин  $p_{a\mu}$ . Происходит так называемое самоусреднение, хорошо известное в физике твердого тела (там роль замороженных переменных играют координаты и спины примесных атомов).

Однако для того, чтобы самоусреднение произошло с достаточной точностью, необходимо большое число степеней свободы. При конечных  $N$  поправки, связанные с флуктуациями в средних типа (12.1), порядка  $1/N$ , т. е. того же порядка, что и поправки от диагональных членов. Для того чтобы довести эти поправки до уровня, скажем, 1%, нужно взять  $N \sim 100$ .



Соответствующие матрицы будут иметь  $\sim 10^4$  элементов, что находится на пределе возможностей современных компьютеров. Поэтому методом замороженных импульсов пока получено сравнительно мало результатов (см. <sup>15</sup>).

### 13. РЕДУЦИРОВАННЫЕ РЕШЕТОЧНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

В решеточных калибровочных теориях была найдена интересная альтернатива замороженным импульсам, при которой поправки убывают как  $N^{-2}$ , а не как  $N^{-1}$ . Речь идет о так называемой ТЕК модели (Twisted Eguchi — Kawai; см. <sup>17</sup>).

Начнем с обыкновенной модели Eguchi — Kawai (см. <sup>16</sup>), которая описывает высокотемпературную фазу решеточных калибровочных теорий. Эта модель, так же как и ТЕК модель, была получена с помощью петлевых уравнений (см. обзор <sup>13</sup>). Однако вывод, основанный на уравнении Ланжевена <sup>8</sup>, физически более нагляден и позволяет пойти дальше, учтя отброшенные в уравнении Ланжевена члены с помощью стохастической теории возмущений (см. <sup>25</sup> и ниже).

Прежде всего выведем уравнение Ланжевена в решеточной калибровочной теории. Как показано в приложении А (см. также <sup>4</sup>), в кривом пространстве полей  $\varphi$  уравнение Ланжевена имеет вид

$$e_{\alpha}^a(\varphi) \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial t} + e^{\alpha\alpha}(\varphi) \frac{\delta S}{\delta \varphi^{\alpha}} = f^a, \quad (13.1)$$

где  $e_{\alpha}^a(\varphi)$  — тетрады в пространстве полей, удовлетворяющие обычным свойствам

$$e_{\alpha}^a e^{b\alpha} = \delta^{ab}, \quad e_{\alpha}^a e_{\beta}^a = g_{\alpha\beta}. \quad (13.2)$$

Что касается случайных сил  $f^a$ , то они распределены по гауссу, как в плоском пространстве:

$$dW(f) = Df \exp \left( -\frac{1}{4} \int dt d^4x (f^a)^2 \right). \quad (13.3)$$

В интересующем нас сейчас случае унитарных  $N \times N$ -матриц  $U_i$ , сопоставленных ребрам решетки <sup>2</sup>, в качестве параметров  $\varphi^x$  можно выбрать, например, компоненты антиэрмитовой матрицы  $R = (U - 1)(U^+ - 1)^{-1}$ . Не будем пока конкретизировать  $\varphi^{\alpha}$ , поскольку уравнение общеквариантно.

Роль тетрад  $e_{\alpha}^a$  в групповом пространстве играют величины

$$e_{\alpha}^a = \frac{1}{2i} \operatorname{tr} \left( T^a U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \varphi^{\alpha}} \right), \quad (13.4)$$

где  $T^a$  — генераторы группы.

Нетрудно проверить, что при левых сдвигах  $U \rightarrow AU$ ,  $A = \text{const}$ ,  $e_{\alpha}^a$  инвариантны, а при правых сдвигах  $U \rightarrow UB$ ,  $B = \text{const}$   $e_{\alpha}^a$  подвергаются линейному преобразованию

$$e_{\alpha}^a \rightarrow \Omega^{ab} e_{\alpha}^b, \quad \Omega^{ab} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (T^a B^{-1} T^b B), \quad (13.5)$$

сохраняющему метрику

$$g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \varphi^{\alpha}} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \varphi^{\beta}} \right). \quad (13.6)$$

Соответственно элемент объема (мера Хаара)

$$(dU) = g^{1/2} d\varphi = (\det e) d\varphi. \quad (13.7)$$

Для того чтобы записать уравнение Ланжевена (13.1) в удобной форме, воспользуемся локально плоской системой координат, т. е. представим  $U$  в виде

$$U = U_0 (1 + i \sum \varphi_a T^a), \quad (13.8)$$



где  $\varphi_a$  — бесконечно малые функции от  $e$ . В этой системе координат  $e_a^a = \delta_a^a$ , и уравнение (13.1) тривиально:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial t} + \frac{\partial S [U (1 + i \sum \varphi_a T^a)]}{\partial \varphi_a} = f^a. \quad (13.9)$$

Остается только выразить  $\frac{\partial U}{\partial t}$  через  $\frac{\partial \varphi_a}{\partial t}$  и положить  $\varphi = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = iU \sum_a T^a \left( f^a - \frac{\partial S [U (1 + i \sum \varphi_a T^a)]}{\partial \varphi_a} \right)_{\varphi=0}. \quad (13.10)$$

Это уравнение можно было и угадать как единственное уравнение, инвариантное (ковариантное) относительно левых (правых) сдвигов и переходящее в обычное при  $U \rightarrow 1$ .

Удобно рассматривать действие  $S$  как функцию независимых переменных  $U$ ,  $U^+$ . Тогда, пользуясь условием полноты,

$$\sum_a (T^a)^{ij} (T^a)^{kl} = \delta^{il} \delta^{jk}, \quad (13.11)$$

уравнение (13.10) можно привести к матричной форме

$$\frac{\partial U_l}{\partial t} = U_l (\mathcal{F}^{(l)} + J^{(l)} - J^{(l)+}), \quad (13.12)$$

где

$$\mathcal{F} = i \sum_a T^a f^a$$

— антиэрмитова гауссова случайная матрица, а

$$J_{ik}^{(l)} = \frac{\partial S}{\partial U_{ri}^{(l)}} U_{rk}^{(l)}. \quad (13.13)$$

Полученное уравнение справедливо во всех теориях с  $U(N)$ -матрицами — в киральных, решеточных калибровочных и т. д.

В решеточных калибровочных теориях действие имеет вид

$$S = -\beta N \sum_{\square} \text{tr} (U_1 U_2 U_3 U_4 + \text{з.с.}), \quad (13.14)$$

где  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  соответствуют ребрам плакета, а сумма идет по всем плакетам на решетке. Это выражение билинейно по  $U$ ,  $U^+$ ; ток  $J$  находится без труда:

$$J^{(l)} = -\beta N \sum_{\square} U_2 U_3 U_4 U_1. \quad (13.15)$$

Здесь подразумевается, что варьируется переменная  $U_1$ . Суммирование идет по всем плакетам, имеющим ребро 1 (таких плакетов 2 ( $D - 1$ ), где  $D$  — размерность пространства).

Нетрудно проверить, что ток  $J$  калибровочно ковариантен — он преобразуется подобно

$$J^{(1)} \rightarrow S_1^{-1} J^{(1)} S_{1x} \quad (13.16)$$

когда матрицы  $U$  подвергаются калибровочным преобразованиям

$$U_k \rightarrow S_{k-1}^{-1} U_k S_k \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad S_0 = S_4. \quad (13.17)$$

Применим теперь к матричному уравнению Ланжевена редукцию. Для этого удобно записать  $U_l$  как  $U_\mu(x)$ , где  $x$  соответствует конечной точке ребра, а  $\mu = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm D$  описывает его направление. Аналогично  $\mathcal{F}^{(l)}$ ,  $J^{(l)}$  будут записаны как  $\mathcal{F}_\mu(x)$  и  $J_\mu(x)$ .



В точности так, как и выше, случайный белый шум  $\mathcal{F}$  можно имитировать с помощью замороженных импульсов  $p_\mu$

$$\mathcal{F}_\mu(x) = e^{-iPx} f_\mu e^{iPx}. \quad (13.18)$$

Все корреляторы вида

$$N^{-2} \langle \text{tr } \mathcal{F}(x_1) \dots \mathcal{F}(x_n) \rangle \quad (13.19)$$

будут правильно воспроизводиться при  $N \rightarrow \infty$ . Но, с другой стороны, (13.18) представляет собой калибровочное преобразование. Поэтому замороженные импульсы можно устранить, сделав соответствующее преобразование полей

$$U_\mu(x) = e^{-iP(x-\hat{\mu})} W_\mu e^{iPx}; \quad (13.20)$$

здесь  $x - \hat{\mu}$  — начало ребра, а  $x$  — его конец. Уравнение для  $W_\mu$  не зависит от замороженных импульсов:

$$\frac{\partial W_\mu}{\partial t} = W_\mu (f_\mu + J_\mu - J_\mu^\dagger), \quad (13.21)$$

$$J_\mu = -\beta N \sum_v (U_v U_\mu^\dagger U_v^\dagger U_\mu + \text{э. с.}). \quad (13.22)$$

В принципе можно, как и выше, ввести замороженные импульсы через начальные условия при  $t = 0$ . Однако, как было замечено в работе Окавы и Голзалвеса-Арройро<sup>17</sup>, есть другой способ, гораздо более эффективный и красивый.

А именно, заметим, что до редукции можно было сделать в решеточной теории следующее преобразование полей:

$$U_l \rightarrow Z_l U_l, \quad (13.23)$$

где  $Z_l$  — элементы центра  $\mathbb{Z}_N$  групп  $\text{SU}(N)$ , т.е.

$$Z_l = \exp\left(\frac{i 2\pi n_l}{N}\right), \quad n_l \text{ — целое.} \quad (13.24)$$

При этом произведение матриц по плакету тоже приобретает фазовый множитель:

$$(U_1 U_2 U_3 U_4) \rightarrow (U_1 U_2 U_3 U_4) Z(\square). \quad (13.25)$$

Поэтому можно ввести в действие (13.14) фазовый множитель  $Z(\square)$ , не меняя содержания теории. Критерием того, что заданный наперед фазовый множитель  $Z(\square)$  можно устранить преобразованием полей, служит решеточное тождество Бианки

$$\prod_{\text{куб}} Z(\square) = 1, \quad (13.26)$$

где произведение берется по всем граням элементарного куба (с учетом их ориентации).

Поскольку каждая грань входит сюда вместе с противоположно ориентированной, то можно, например, выбрать

$$Z_{\mu > \nu} = \exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right), \quad (13.27)$$

$$Z_{\mu < \nu} = Z_{\mu > \nu}^*$$

и независимым от координаты плакета.

Теперь, если сделать редукцию, т.е. заменить матрицы  $U(N)$  на постоянные, то четыре матрицы плакета уже не будут независимыми, поскольку противоположные ребра получаются друг из друга параллельным переносом и заменой ориентации

$$U_3 = U_1^\dagger, \quad U_4 = U_2^\dagger, \quad (13.28)$$

$$\text{tr}(U_1 U_2 U_3 U_4) = \text{tr}(U_1 U_2 U_1^\dagger U_2^\dagger).$$



Но это означает, что фазовый множитель  $Z(\square)$  после редукции невозможно устранить преобразованием матриц  $U_1, U_2$ . Иными словами, имеется целое семейство редуцированных моделей с произвольными фазовыми множителями  $Z(\square)$ , удовлетворяющими тождеству Бианки. Исходная ЕК-модель соответствует  $Z_{\mu\nu} = 1$ .

Какой же выбор  $Z_{\mu\nu}$  правилен? Как показал тщательный анализ <sup>19</sup>, наилучшими свойствами обладает решение (13.21) при

$$n = N^{1/2} - \text{целое.} \quad (13.29)$$

В этом случае редуцированная модель воспроизводит как разложение сильной связи (ряд по степеням  $\beta$ ), так и теорию возмущений Фаддеева — Попова (ряд по степеням  $\beta^{-1}$ ).

Теория возмущений воспроизводится весьма нетривиально <sup>18</sup>. Роль импульсов  $p_\mu^i$  играют параметры вырожденного вакуума ТЕК-модели, т. е. решения ее классических уравнений

$$U_\mu^{\text{cl}} U_\nu^{\text{cl}} = Z_{\mu\nu} U_\nu^{\text{cl}} U_\mu^{\text{cl}} \quad (13.30)$$

При этом оказывается, что не только воспроизводится предел бесконечного объема в пределе бесконечных  $N$ , но и при конечных  $N = L^2$  воспроизводится решеточная система конечного размера  $L$ . Подробности этого красивого построения можно найти в работах <sup>19</sup>.

Результаты численных расчетов, полученные для ТЕК с помощью уравнения Ланжевена (13.21) <sup>20</sup>, хорошо согласуются и в некоторых отношениях уточняют обычные расчеты по методу Монте-Карло <sup>21</sup> (см. также <sup>22,23</sup>).

#### 14. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Уравнение Ланжевена открывает новые возможности выхода за рамки теории возмущений. А именно, можно рассматривать в качестве нулевого приближения не классическое решение, а стохастическое, соответствующее редуцированной модели. При этом в нулевом приближении будут учтены важные эффекты компактности группы, которые, как мы думаем, обуславливают удержание кварков. При  $N \rightarrow \infty$  нулевое приближение становится точным, так что поправки стремятся к нулю. Это позволяет рассчитывать на успех стохастической теории возмущений при конечных  $N$ , в том числе и в интересующем нас случае  $N = 3$ .

Мы не будем описывать технические детали стохастической теории возмущений, а скажем несколько слов о стратегии этого подхода. Идея состоит в том, чтобы разбить случайную силу на два слагаемых, первое из которых соответствует редуцированной модели. Как известно, сумма независимых гауссовых случайных величин представляет собой гауссову величину с суммарной дисперсией, поэтому можно считать второе слагаемое в случайной силе независимой гауссовой величиной с дисперсией, равной разности дисперсий точной и редуцированной моделей. При этом все корреляторы такой составной случайной силы будут правильно воспроизводиться, поскольку перекрестные члены отсутствуют (здесь срабатывает гауссовость обоих слагаемых).

Теперь, когда правая часть уравнения Ланжевена представлена в виде главного члена плюс возмущение, становится ясно, как строить теорию возмущений. Надо представить поле в виде суперпозиции главного члена плюс возмущение и разложить левую часть в сумму членов разного порядка. В главном порядке получается линейаризованное уравнение, а члены следующих порядков выражаются через функцию Грина линейаризованного уравнения. Получается обобщенная диаграммная техника <sup>25</sup>.



## 15. ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Каждый раз, когда удается по-новому взглянуть на основы теории, можно ждать интересных приложений. Стохастическое квантование существует уже несколько лет, и за это время были найдены приложения в решеточных калибровочных теориях. Что еще можно ожидать от этого метода?

1. Прежде всего сравним этот метод с известным методом Монте-Карло в варианте Метрополиса<sup>2</sup>. Оба метода дают в принципе одно и то же — случайную последовательность состояний, удовлетворяющую принципу детального баланса, а поэтому воспроизводящую в среднем фейнмановское распределение вероятностей  $\exp(-S)$  (— действие) евклидовой теории.

Однако реализации детального баланса различны, так что методы дополняют друг друга, а не дублируют. Главная разница состоит в том, что в методе Метрополиса состояния не всегда принимаются\*); система может сколько угодно долго застревать в одном состоянии, если предлагаются маловероятные состояния для перехода. Это явление особенно опасно в квазиклассической области, когда состояния могут быть отделены барьером. С этим можно бороться, варьируя интервал  $\Delta\tau$  изменения поля  $\phi$  за один шаг. В квантовой области  $\Delta\tau$  выгодно взять большим, а в классической — маленьким.

В методе стохастического квантования, напротив, состояния принимают всегда. Из каждого состояния за один шаг мы переходим в соседнее, отличающееся на величину  $\Delta\phi$ , которая вычисляется, а не задается в качестве входного параметра. Это — большое преимущество, особенно в квазиклассической области. В частности, из стохастического квантования, в отличие от метода Метрополиса, непосредственно вытекает теория возмущений. Что касается инстантонов и других подбарьерных переходов, то в тех случаях, когда они вносят малые поправки, их трудно уловить любым численным методом. Однако если они доминируют, как, например, в рождении киральных спиноров, то, должным образом подбирая граничные условия, можно воспроизвести их опять-таки в любом методе.

До недавнего времени недостатком уравнения Ланжевена считалось отсутствие точной разностной схемы — если буквально заменить производные конечными разностями, то из-за разрывности случайной силы точность будет низкой. Однако эта трудность преодолима. В приложении В (см. также<sup>26,28</sup>) разработаны разностные схемы для уравнения Ланжевена.

Таким образом, как и в методе Метрополиса, можно делать конечные (хотя и малые) шаги, но зато, в отличие от этого метода, каждый раз принимать новые состояния.

Это объясняет более высокую эффективность уравнения Ланжевена, замеченную в ряде работ<sup>20</sup>.

2. Уравнение Ланжевена обычно пишется в евклидовом пространстве, где оно вещественно. Представляется чрезвычайно важным обобщение и численная реализация уравнения Ланжевена в пространстве Минковского. Действительно, тогда удастся моделировать процессы в реальном времени, включая явление интерференции.

Рассмотрим, например, теорию скалярного поля. Уравнение Ланжевена

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \left(m^2 - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \phi + \lambda\phi^3 = \eta, \quad (15.1)$$

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle = 2\delta^4(x - x') \delta(\tau - \tau') \quad (15.2)$$

при замене  $x_4 = -it$ ,  $\tau = i\zeta$  переходит в комплексное уравнение

$$-i \frac{\partial\phi}{\partial\zeta} + \left(m^2 - \Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi + \lambda\phi^3 = \eta, \quad (15.3)$$

$$\langle \eta(r, t, \zeta) \eta(r', t', \zeta') \rangle = 2\delta^3(r - r') \delta(t - t') \delta(\zeta - \zeta'). \quad (15.4)$$

\*) Вопрос о приеме предложенных состояний решается с помощью датчика случайных чисел.



Для того чтобы интегралы по  $\zeta$  в теории возмущений сходились, необходимо сделать фейнмановскую замену  $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ . Нетрудно понять, что  $\zeta$  играет ту же роль, что и собственное время для пропагатора скалярной частицы.

Что же касается белого шума  $\eta$ , то он остался без изменений, поскольку множители  $\pm i$  взаимно компенсировались.

Замечательным свойством комплексного уравнения Ланжевена (15.3) является то, что оно описывает явления типа интерференции, недоступные обычному методу Монте-Карло. Действительно, алгоритм Метрополиса не позволяет генерировать состояния с комплексной вероятностью  $\exp(iS)$ . Уравнение (15.3) обходит эту трудность, поскольку белый шум остается обычным гауссовым, с положительной вероятностью. Комплексная единица появляется перед членом  $\partial\varphi/\partial\zeta$  и вызывает явления интерференции. В этом можно убедиться, линеаризуя уравнение вблизи классического решения.

Если раньше отклонения  $\delta\varphi$  от классического решения складывались из большого числа вещественных членов, соответствующих собственным модам  $\psi_\lambda$  линеаризованного уравнения, то теперь эта сумма

$$\delta\varphi(r, t, \zeta) = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda}(r, t) i \int_0^{\zeta} d\zeta' \exp[-i\lambda(\zeta - \zeta')] \eta_{\lambda}(\zeta') \quad (15.5)$$

комплексна. Если раньше отклонения были ограничены за счет сходимости, т. е. за счет «забывания» старых значений случайной силы  $\eta$  ( $\zeta' < \zeta$ ), то теперь это происходит за счет интерференции старых и новых членов.

Было бы интересно проанализировать в терминах комплексного уравнения Ланжевена осцилляции в пучках К-мезонов, интерференцию фотонов и другие квантовые явления. В принципе, они должны получиться, но не вполне ясно, как.

3. Уравнение Ланжевена дает интересную возможность обобщать квантовую теорию поля, «вывести» ее в каком-то приближении из более фундаментальных законов. Здесь мы, конечно, вступаем в область фантазий, но при том уровне развития, которого достигла квантовая теория поля за последние годы, эти фантазии могут послужить толчком к построению реальных моделей.

Основным незыблемым законом квантовой теории является принцип суперпозиции, согласно которому каждый процесс характеризуется комплексной амплитудой, складывающейся из амплитуд альтернативных историй процесса.

С другой стороны, обычно в природе линейные процессы представляют собой идеализацию, а подлинные явления нелинейны. Не так ли произойдет с квантовой теорией? Что, если это — линеаризация уравнений некоторой более фундаментальной теории, действующей на планковских расстояниях?

Мы никогда не узнаем этого, если не попробуем построить хотя бы грубую модель такой теории. Уравнение Ланжевена дает для этого естественную основу. А именно, можно предположить, что это уравнение является приближением к нелинейной динамической системе, где роль времени играет  $\tau$  (или  $\zeta$  в пространстве Минковского).

В этой системе должны быть два типа переменных — переменные типа  $\eta$ , которые на больших масштабах переходят в белый шум, и переменные типа  $\varphi$ , которые переходят в поля.

При этом поля  $\varphi$  не малы, так что уравнение по ним нелинейно, а поля  $\eta$  малы, так что уравнение для  $\varphi$  можно линеаризовать по  $\eta$ . Схематически

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = F(\varphi, \eta) \rightarrow A(\varphi) + B(\varphi)\eta, \quad (15.6)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = G(\varphi, \eta). \quad (15.7)$$



Коэффициент  $B(\varphi)$  при  $\eta$  в последнем уравнении можно устранить преобразованием полей  $\varphi, \eta$ . Существенно, конечно, чтобы после этого система имела вид (3.4), т. е. чтобы  $A(\varphi)$  было градиентом некоторого функционала  $S(\varphi)$ .

Самое сложное в этой конструкции — это динамический механизм возникновения белого шума. Во втором уравнении должно оказаться, что переменная  $\eta$  хаотически изменяется на малых масштабах, так что на больших масштабах корреляции отсутствуют. Это нетрудно получить, если имеется эргодичность, т. е. решения уравнения для  $\eta$  при постоянных  $\varphi$  (которое изменяется гораздо медленнее) распределены с некоторой плотностью вероятностей.

Гауссова плотность

$$dW(\eta) \sim \exp\left(-\int C\eta^2 d^Dx\right) d\eta$$

может возникнуть естественно, как в центральной предельной теореме теории вероятностей. Для этого обычно достаточно иметь симметрию, запрещающую линейные по  $\eta$  члены. Члены с градиентами и с производными по времени от  $\eta$ , как и члены высшего порядка по  $\eta$ , будут сказываться только на сверхмалых масштабах.

Эти гипотезы покажутся менее странными, если вспомнить, как реально генерируется белый шум на компьютере. Это делается с помощью динамической системы, только с дискретным временем. Гауссовы числа выражаются через равномерно распределенные случайные числа, которые получаются рекуррентно, по формулам типа

$$\zeta_{n+1} = \{a\zeta_n + b\}, \quad (15.8)$$

где  $\{\dots\}$  означает дробную часть. Линейное уравнение выбрано для экономии машинного времени; в нелинейном уравнении получить стохастическое поведение тоже несложно. Этой теме посвящены многие работы последних лет<sup>30</sup>, которые мы не будем здесь обсуждать.

Есть еще один нетривиальный момент — это усреднение по ланжевеновскому времени  $\tau$  (или  $\zeta$ ). Обычно в уравнении Ланжевена (произвольный!) масштаб  $\tau$  выбирается того же порядка, что и масштаб физического времени. Это, однако, может не соответствовать сути дела. Для того чтобы объяснить, почему наблюдаемые величины в квантовой теории поля соответствуют средним по  $\tau$ , приходится предположить, что подлинный масштаб  $\tau$  — времени релаксации — чрезвычайно мал. Возможно, это планковский масштаб. Подчеркнем, что до тех пор, пока мы интересуемся средними, масштаб  $\tau$  произволен, так что нет противоречий между часами работы компьютера и планковским временем релаксации.

Мы не ставили перед собой задачу построить реалистическую модель нелинейной системы, обобщающую, скажем, квантовую гравитацию на планковских масштабах. Наша цель была более скромная — привлечь внимание исследователей к уравнению Ланжевена, которое открывает новые перспективы в квантовой теории поля.

В заключение несколько слов о литературе, посвященной стохастическому квантованию. Мы не претендуем на полноту в нашем списке литературы, тем более, что эта область быстро развивается. Более полный список можно найти в сборе<sup>31</sup>, где также обсуждается квантование спинорных полей.



## ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Уравнение Ланжевена  
и распределение Больцмана

Рассмотрим переход за время  $\delta t$  из состояния  $q_i = q_i(t)$  в состояние  $q'_i = q_i(t + \delta t)$ . Поскольку случайная сила распределена по Гауссу (3.5), то вероятность перехода пропорциональна

$$dW(q \rightarrow q') \sim \exp\left(-\frac{\delta t}{\Gamma} \sum_i \frac{f_i^2(q, q')}{4kT}\right) \prod_i df_i(q, q'). \quad (A.1)$$

Подставляя из (3.4)

$$f_i(q, q') = \Gamma \frac{q'_i - q_i}{\delta t} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (A.2)$$

и переходя к переменной  $q'_i$  (якобиан постоянен при  $\delta t \rightarrow 0$ ), мы находим

$$dW(q \rightarrow q') \sim \exp\left[-\frac{\delta t}{4\Gamma kT} \sum_i \left(\Gamma \frac{q'_i - q_i}{\delta t} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\right)^2\right] \prod_i dq'_i. \quad (A.3)$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{dW(q \rightarrow q')/dq'}{dW(q' \rightarrow q)/dq} \quad (A.4)$$

вероятностей прямого и обратного переходов.

В главном порядке по  $q' - q \sim \delta t$  остается только перекрестный член в  $f_i^2$ , и мы находим

$$\frac{dW(q \rightarrow q')/dq'}{dW(q' \rightarrow q)/dq} = \exp\left[-\frac{1}{kT} \sum_i (q'_i - q_i) \frac{\partial U}{\partial q_i}\right] \rightarrow \exp\left(-\frac{U(q'_i) - U(q_i)}{kT}\right). \quad (A.5)$$

В этом суть дела. Отношение вероятностей переходов совпадает с отношением больцмановских факторов. Это — так называемый принцип детального баланса, который гарантирует выполнение эргодической теории.

Действительно, рассмотрим изменения числа  $dN(q)$  частиц с координатами в интервале  $q_i + dq_i$  за время  $\delta t$ . Учтя приход и уход частиц, имеем

$$\delta dN(q) = \int dW(q' \rightarrow q) dN(q') - dW(q \rightarrow q') dN(q). \quad (A.6)$$

Это — известное кинетическое уравнение. Из кинетического уравнения видно, что равновесное распределение числа частиц связано с переходными вероятностями  $dW(q \rightarrow q')$  уравнением детального баланса

$$\frac{dW(q \rightarrow q')}{dW(q' \rightarrow q)} = \frac{dN(q')}{dN(q)}. \quad (A.7)$$

Если мы априори знаем равновесное распределение вероятностей, то мы должны подобрать переходные вероятности, исходя из детального баланса. При этом можно быть уверенным, что асимптотическое распределение будет таким, каким мы его «заказывали».

Интересно, что существует не одно, а много решений для переходных вероятностей, соответствующих одному и тому же равновесному распределению. Это очевидно из (A.7), поскольку ограничивается только антисимметричная часть в экспоненте в  $dW(q \rightarrow q')$ . Симметричная часть сокращается в уравнении детального баланса.

Последнее замечание связано с ковариантным обобщением уравнения Ланжевена и распределения Больцмана. Допустим, мы имеем газ, движущийся в кривом пространстве с римановой метрикой. Удобно работать в терминемах тетрад  $e_\alpha(i)$ :

$$g_{\alpha\beta} = \sum_i e_\alpha(i) e_\beta(i). \quad (A.8)$$



Введем также обратные тетрады  $e^\alpha(i)$ , так что

$$\sum_{\alpha} e^\alpha(i) e_\alpha(j) = \delta_{ij}. \quad (\text{A.9})$$

Вместо  $q_i(t)$  мы будем писать  $x_\mu$ , что более привычно в теории гравитации. Напомним, что «время»  $t$  не имеет отношения к  $x_4$ .

Как видно из вывода уравнения детального баланса, экспонента (A.5) не изменится, если ввести тетрады в (A.2):

$$f_i(x, x') = \Gamma e_\alpha(i) \frac{(x' - x)^\alpha}{\delta t} + e^\beta(i) \frac{\partial U}{\partial x^\beta}. \quad (\text{A.10})$$

Перекрестные члены, которые остаются в (A.5), по-прежнему сводятся к  $U(x') - U(x)$  в силу соотношения ортогональности (A.9).

На первый взгляд кажется, что  $e_\alpha(i)$  — это произвол в уравнении Ланжевена. Однако при более внимательном анализе мы замечаем, что якобиан преобразований от  $f$  к  $x$

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x'_\mu} \sim \det e = (\det g_{\alpha\beta})^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

дает в  $dW(x \rightarrow x')$  правильный элемент объема

$$dV = (\det g_{\alpha\beta})^{1/2} d^4x \quad (\text{A.12})$$

только в том случае, если тетрады связаны с метрикой (A.8).

Итак, мы вывели ковариантное уравнение Ланжевена — предел (A.10) при  $\delta t = 0$ :

$$\Gamma e_\alpha(i) \frac{dx^\alpha}{dt} + e^\beta(i) \frac{\partial U}{\partial x^\beta} = f_i, \quad (\text{A.13})$$

$$dW(f_i) \sim \exp \left( - \int dt \sum_i \frac{f_i^2}{4kT\Gamma} \right) \prod_i df_i. \quad (\text{A.14})$$

## Б. Исследование уравнения Фоккера — Планка

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\Gamma \frac{\partial q_i}{\partial t} + C_i(q) = f_i, \quad (\text{Б.1})$$

где  $f_i$  — случайные силы, распределенные по Гауссу и скоррелированные на  $\delta$ -функцию. В случае, когда  $C_i(q)$  есть частная производная по  $i$ -й координате от некоторой функции  $U$  ( $C_i(q) = \frac{\partial U}{\partial q_i}$ ), мы имеем обычное уравнение Ланжевена (3.4). Найдем теперь уравнение, которому подчиняется распределение вероятностей

$$P(x, t) = \left\langle \prod_{i=1}^N \delta(x_i - q_i(t)) \right\rangle, \quad (\text{Б.2})$$

где  $q_i(t)$  есть решение уравнения (Б.1). Для простоты ограничимся случаем одной степени свободы. Продифференцируем  $P(x, t)$  по времени и воспользуемся уравнением (Б.1):

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{\partial P}{\partial t} &= \left\langle -\Gamma \dot{q}(t) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - q(t)) \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_i} \langle f_i - C_i(q(t)) \delta(x - q(t)) \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} C_i(x) P(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle f_i \delta(x - q(t)) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Все производные  $\partial/\partial q(t)$  мы заменили на производные  $-\partial/\partial x$ , так как  $\delta$ -функция зависит только от разности  $x - q(t)$ . Теперь необходимо вычи-



слить  $\langle f\delta(x - q(t)) \rangle$  через известные величины. Так как  $f_i$  является белым шумом, то мы можем воспользоваться теоремой Вика:

$$\langle fF(f) \rangle_f = 2\Gamma \left\langle \frac{\delta F}{\delta f} \right\rangle_f. \quad (\text{Б.4})$$

Выражение (Б.4) — это теорема Вика, записанная не совсем в обычной форме. В справедливости (Б.4) легко убедиться непосредственным образом, например разложив функционал  $F$  в степенной ряд по  $f$ . Тогда для  $\langle f\delta(x - q(t)) \rangle$  можно записать

$$\begin{aligned} \langle f\delta(x - q(t)) \rangle_f &= 2\Gamma \left\langle \frac{\delta q(t)}{\delta f(t)} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x - q(t)) \right\rangle = \\ &= -2\Gamma \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\delta q(t)}{\delta f(t)} \delta(x - q(t)) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Вариационная производная от  $q(t)$  по случайной силе  $f(t')$  равна  $(1/\Gamma)\theta(t - t') + O(t - t')$ . При стандартной процедуре регуляризации (в смысле разложения Фурье) это выражение при  $t = t'$  равно  $(1/\Gamma)\theta(0) = 1/2\Gamma$ . Такая нормировка согласуется, как будет видно ниже, с нормировкой  $f$ , полученной в приложении А, из соотношения детального баланса. В результате имеем следующее уравнение (пока для одной переменной):

$$\Gamma \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} C(x) P(x, t).$$

Для системы с конечным или бесконечным числом переменных это выражение легко обобщается:

$$\Gamma \frac{\partial P}{\partial t} = -L^* P(q, t), \quad (\text{Б.6})$$

где

$$L^* = -\sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} + C_i(q) \right].$$

Исходное стохастическое уравнение (Б.1) при этом может быть записано в виде

$$\Gamma \frac{\partial q_i}{\partial t} + Lq_i = f_i, \quad (\text{Б.7})$$

где

$$L = -\sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} - C_i(q) \right] \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Операторы  $L$  и  $L^*$  сопряжены друг другу.

Разберем теперь частный случай, когда  $C_i(q) = \partial U / \partial q_i$  (он отвечает обычному уравнению Ланжевена (3.4)). В уравнении (Б.6) удобно сделать подстановку  $P(q, t) = \exp(-U/2) \tilde{P}(q, t)$ . Тогда функция  $\tilde{P}(q, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\Gamma \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -H \tilde{P}(q, t), \quad (\text{Б.8})$$

где

$$H = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^\dagger Q_i, \quad Q_i = \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad Q_i^\dagger = -\frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial q_i};$$

$H$  — положительно определенный самосопряженный оператор. Уравнение (Б.8) похоже на уравнение Шрёдингера. Роль потенциальной энергии играет



выражение

$$V(q) = \sum_i \frac{1}{8} \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_i}.$$

$\tilde{P}(q, t)$  можно разложить по собственным функциям оператора  $H$ :

$$\tilde{P}(q, t) = \sum_n C_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n(q), \quad (\text{Б.9})$$

где  $\varphi_n$  удовлетворяют уравнению  $H\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ . При  $t \rightarrow \infty$  выживает только нулевое собственное значение:

$$P(q, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \varphi_0(q) \exp\left(-\frac{U}{2}\right).$$

Можно предъявить явное выражение для нулевой моды

$$\varphi_0(q) = \exp\left(-\frac{U}{2}\right). \quad (\text{Б.10})$$

В принципе могут существовать другие нулевые моды, удовлетворяющие уравнениям

$$Q\varphi_0 \neq 0, \quad Q^+Q\varphi_0 = 0.$$

Для конечного числа степеней свободы известна теорема из квантовой механики, что вакуум невырожден. Это означает, что нулевая мода  $\varphi_0 = \exp(-U/2)$  единственна. В результате мы показали, что в случае конечного числа степеней свободы предел функции распределения вероятностей при  $t \rightarrow \infty$  совпадает с больцмановским распределением  $\exp(-U)$ .

При бесконечном числе степеней свободы может иметь место вырождение вакуума, как и в действительности происходит в калибровочных теориях. Предел функции распределения в этом случае зависит от начальных условий. Именно этого и следовало ожидать, так как в калибровочных теориях мера интегрирования (функция распределения) явным образом зависит от выбранной калибровки.

Разберем теперь более подробно особенности стохастического квантования в калибровочных теориях.

В калибровочных теориях разумно интересоваться средними не от произвольных функционалов, а только от калибровочно инвариантных величин  $\Phi[A]$ :

$$\hat{G}^a \Phi = 0, \quad (\text{Б.11})$$

где  $\hat{G}^a$  — генераторы калибровочных преобразований

$$\hat{G}^a(x) = \int dy [-\partial_\mu \delta^{ab} \delta(x-y) + f^{abc} A_\mu^c(x) \delta(x-y)] \frac{\delta}{\delta A_\mu^c(y)}.$$

Среднее от калибровочно инвариантного функционала можно записать в виде

$$\langle \Phi \rangle(t) \sim \int (e^{-L^+ t} P(A, 0)) \Phi(A) DA. \quad (\text{Б.12})$$

Мы явным образом выделили зависимость функции распределения от времени, «решив» уравнение Фоккера — Планка для  $P(A, t)$ ;  $P(A, 0)$  — начальное распределение вероятностей. Действие оператора  $L^+$  можно «перекинуть» интегрированием по частям на функционал  $\Phi(A)$ :

$$\langle \Phi \rangle(t) = \int P(A, 0) e^{-Lt} \Phi(A) DA. \quad (\text{Б.13})$$

Воспользуемся теперь тем, что  $\Phi(A)$  — калибровочно инвариантная величина. Тогда

$$\langle \Phi \rangle(t) = \int P(A, 0) e^{-t(L + \alpha \hat{G})} \Phi(A) DA = \int [e^{-t(L + \alpha \hat{G})} P(A, 0)] \Phi(A) DA. \quad (\text{Б.14})$$



Это означает, что вместо обычного уравнения Ланжевена (7.4) можно написать уравнение

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial t} + (LA)_\mu + ((\alpha \hat{G}) A)_\mu = J_\mu. \quad (\text{Б.15})$$

Перепишывая его в привычных обозначениях, имеем

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial t} + \frac{\delta S}{\delta A_\mu} + [D_\mu a] = J_\mu. \quad (\text{Б.16})$$

Это уравнение по виду совпадает с уравнением (8.1) с той лишь разницей, что  $J_\mu$  случайный ток, распределенный по Гауссу и скоррелированный на  $\delta$ -функцию, тогда как коррелятор полей  $K_\mu$  имеет нетривиальный вид (см. (8.2)).

Уравнения (8.1) и (Б.16) различны, однако средние от калибровочно инвариантных величин, вычисленные с их помощью, совпадают. Мы имеем хорошо знакомую нам ситуацию в квантовой теории калибровочных полей, когда имеется бесконечное число различных мер интегрирования в континуальном интеграле (отвечающих разным способам фиксации калибровки), а средние от калибровочно инвариантных величин совпадают.

## В. Разностное уравнение Ланжевена

Как показано в приложении А, дифференциальное уравнение Ланжевена вытекает из соотношения детального баланса в главном порядке по временному шагу  $\Delta t$ . Нельзя ли из соотношения детального баланса найти разностные уравнения высших порядков?

Будем искать разностное уравнение Ланжевена сначала в неявном виде:

$$\begin{aligned} \varphi' - \varphi - \Delta t F(\varphi', \varphi) &= \eta, \\ \varphi &= \varphi_n; \varphi' = \varphi_{n+1}; \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

здесь  $\eta$  — гауссов шум с дисперсией  $2\Delta t$ , а  $F(\varphi', \varphi)$  — неизвестная функция, которую мы будем считать симметричной относительно перестановки аргументов.

Гауссово распределение

$$dW(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\Delta t}\right) d\eta \quad (\text{Б.2})$$

можно трактовать как переходную вероятность  $dW(\varphi \rightarrow \varphi')$ , выразив  $\eta$  через  $\varphi'$  из (Б.1):

$$dW(\varphi \rightarrow \varphi') = \exp\left[-\frac{(\varphi' - \varphi - \Delta t F(\varphi', \varphi))^2}{4\Delta t}\right] \left|\frac{\partial \eta}{\partial \varphi'}\right| d\varphi'. \quad (\text{Б.3})$$

Таким образом,

$$dW(\varphi \rightarrow \varphi') = \exp\left[-\frac{(\varphi' - \varphi - \Delta t F(\varphi', \varphi))^2}{4\Delta t} + \ln\left|1 - \Delta t \frac{\partial F}{\partial \varphi'}\right|\right] d\varphi'. \quad (\text{Б.4})$$

Теперь соотношение детального баланса (А.5) (в наших обозначениях) принимает вид

$$\Delta \varphi F(\varphi', \varphi) = -\Delta S(\varphi) + \Delta \Phi(\varphi', \varphi), \quad (\text{Б.5})$$

$$\Phi(\varphi, \varphi') = \ln\left(1 - \Delta t \frac{\partial F}{\partial \varphi'}\right), \quad (\text{Б.6})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi' - \varphi, \\ \Delta S(\varphi) &= S(\varphi') - S(\varphi), \\ \Delta \Phi(\varphi', \varphi) &= \Phi(\varphi', \varphi) - \Phi(\varphi, \varphi'). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.7})$$



Правую часть (B.5) можно переписать как интеграл

$$\int_{-1}^1 d\lambda \frac{\Delta\varphi}{2} \left[ -\frac{\partial S(\varphi_\lambda)}{\partial \varphi_\lambda} + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_\lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi_{-\lambda}} \right) \Phi(\varphi_\lambda, \varphi_{-\lambda}) \right], \quad (B.8)$$

$$\varphi_\lambda = \bar{\varphi} + \lambda \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi - \varphi'}{2}.$$

После этого, сократив на  $\Delta\varphi$ , мы приходим к уравнению

$$F(\varphi', \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\lambda \left[ -S'(\varphi_\lambda) + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_\lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi_{-\lambda}} \right) \Phi(\varphi_\lambda, \varphi_{-\lambda}) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\lambda \left[ -S'(\varphi_\lambda) + \Delta t \left( 1 - \Delta t \frac{\partial F}{\partial \varphi_\lambda} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_\lambda \partial \varphi_{-\lambda}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_\lambda \partial \varphi_\lambda} \right) \right]. \quad (B.9)$$

Это уравнение можно итерировать по  $\Delta t$  и по  $\Delta\varphi$ . При итерациях надо помнить, что  $\Delta\varphi \sim (\Delta t)^{1/2}$ , поскольку случайная сила имеет дисперсию  $\sim \Delta t$ .

В первом порядке по  $\Delta t$  и соответственно во втором по  $\Delta\varphi$  мы находим (члены  $\sim \Delta t$  сокращаются в (B.9))

$$F(\varphi, \varphi') = -S'(\bar{\varphi}) - \frac{1}{24} (\Delta\varphi)^2 S'''(\bar{\varphi}) + O((\Delta t)^2). \quad (B.10)$$

С той же точностью можно написать

$$F(\varphi, \varphi') = -\frac{1}{6} (S'(\varphi) + 4S'(\bar{\varphi}) + S'(\varphi')). \quad (B.11)$$

Теперь дискретное уравнение Ланжевена (B.1) можно свести к уравнению для  $\Delta\varphi$  при фиксированном  $\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \eta - \frac{\Delta t}{6} \left( S'(\varphi) + 4S' \left( \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) + S'(\varphi + \Delta\varphi) \right) + O((\Delta t)^3). \quad (B.12)$$

Можно ввести четыре последовательные итерации

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \eta - \Delta t S'(\varphi), \\ \Delta\varphi_2 &= \Delta\varphi_1 - \Delta t \left[ S' \left( \varphi + \frac{\Delta\varphi_1}{2} \right) - S'(\varphi) \right], \\ \Delta\varphi_3 &= \Delta\varphi_2 - \Delta t \left[ S' \left( \varphi + \frac{\Delta\varphi_2}{2} \right) - S' \left( \varphi + \frac{\Delta\varphi_1}{2} \right) \right], \\ \Delta\varphi_4 &= \Delta\varphi_3 - \frac{\Delta t}{6} \left[ S'(\varphi) + S'(\varphi + \Delta\varphi_2) - 2S' \left( \varphi + \frac{\Delta\varphi_2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (B.13)$$

По построению  $\Delta\varphi_4$  удовлетворяет уравнению Ланжевена с точностью  $(\Delta t)^2 \sim (\Delta\varphi)^2 \Delta t \sim (\Delta\varphi)^4$  включительно. Нетрудно построить и схемы более высоких порядков, итерируя уравнение детального баланса (B.9).

Заметим, что обычная схема Рунге — Кутты неприменима к стохастическому уравнению, так как предполагает существование некоторого числа производных от правой части уравнения.

Полученные уравнения без труда обобщаются на произвольное число степеней свободы  $\varphi^i$  и на поле  $\varphi^i(x)$ . Достаточно заменить производные в (B.9) соответствующими частными (функциональными в случае поля) производными, а логарифм — следом логарифма матрицы (оператора в случае поля). В частности, уравнения (B.13) остаются без изменений, если понимать  $\delta S/\delta\varphi$  под  $S'(\varphi)$ .



Несколько менее тривиально обобщение на кривое  $\varphi$ -пространство. В этом случае вместо (B.1) надо написать следующее ковариантное уравнение:

$$\Delta^i \varphi - \Delta t F^i(\varphi', \varphi) = \eta^i, \quad (\text{B.14})$$

$$\Delta^i \varphi = \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi^\alpha e_\alpha^i(\varphi), \quad (\text{B.15})$$

здесь  $e_\alpha^i(\varphi)$  — тетрады,  $\eta^i$  — гауссова случайная величина с дисперсией  $2\Delta t$ , а  $F^i$  — искомая симметричная функция  $\varphi', \varphi$ . Интеграл в (B.15) идет по геодезической от  $\varphi$  к  $\varphi'$ .

Уравнение (B.5) перейдет в следующее уравнение:

$$\Delta^i \varphi F^i(\varphi, \varphi') = S(\varphi) - S(\varphi') + \Phi(\varphi', \varphi) - \Phi(\varphi, \varphi'), \quad (\text{B.16})$$

$$\Phi(\varphi', \varphi) = \text{tr} \ln \left\| \delta_{ij} - \Delta t \frac{\partial F^i}{\partial \varphi'^\alpha} e^{\alpha j}(\varphi') \right\|. \quad (\text{B.17})$$

Уравнение можно привести к виду, удобному для итераций, продифференцировав по  $\varphi^\alpha$  и умножив на  $-e_k^\alpha$ . Поскольку

$$e_k^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} \Delta^i \varphi = \delta_i^k + O(\Delta\varphi), \quad (\text{B.18})$$

то возникает член  $F^h(\varphi', \varphi)$ . Переносим остальные члены в правую часть, находим  $\left( \partial_i = e_i^\alpha(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \partial'_i = e_i^\alpha(\varphi') \frac{\partial}{\partial \varphi'_i} \right)$

$$F^h(\varphi', \varphi) = -\partial_h S(\varphi) + \Delta^i \varphi \partial_h F^i + \Delta t (\delta - \Delta t \partial' F)_{ji}^{-1} \partial'_j \partial_h F^i - \Delta t (\delta - \Delta t \partial F)_{ji}^{-1} \partial_j \partial_h F^i. \quad (\text{B.19})$$

С точностью до членов  $\sim \Delta t \sim (\Delta\varphi)^2$  включительно остается первая строка

$$F^h = -\partial_h S(\varphi) + \Delta^i \varphi \partial_h F^i + O((\Delta t)^2). \quad (\text{B.20})$$

Дифференцируя (B.19), находим уравнение для производной  $\partial_l F^h \equiv F_{,l}^h$ :

$$F_{,l}^h = -\partial_l \partial_h S - F_{,h}^l + \Delta^i \varphi \partial_l F_{,h}^i. \quad (\text{B.21})$$

Переносим член  $-F_{,h}^l$  в левую часть, находим в старшем порядке

$$F_{,l}^h = -\frac{1}{2} \partial_h \partial_l S \dots \quad (\text{B.22})$$

члены с  $[\partial_h \partial_l]$  имеют более высокий порядок малости). В (B.20) находим

$$F^h = -\left(1 + \frac{1}{2} \Delta^i \varphi \partial_i\right) \partial_h S \dots = -\partial_h S(\bar{\varphi}) + \dots, \quad (\text{B.23})$$

$$\bar{\varphi}^\alpha = \varphi^\alpha + \frac{1}{2} e_i^\alpha(\varphi) \Delta^i \varphi + \dots \quad (\text{B.24})$$

Геометрический смысл этой формулы состоит в том, что на геодезической линии между  $\varphi$  и  $\varphi'$  находится средняя точка  $\bar{\varphi}$ , равноудаленная от  $\varphi, \varphi'$  — это ковариантный аналог  $(\varphi + \varphi')/2$ . Из-за симметрии между  $\varphi$  и  $\varphi'$  ясно, что при таком выборе  $\varphi$  следующая поправка начнется с  $(\Delta\varphi)^2$ , как и в плоском случае (B.10). Вычисление этой поправки в принципе не сложно, но не входит сейчас в наши задачи.

### Г. Р е д у ц и р о в а н н ы й б е л ы й ш у м

Усреднение следов произведения случайных сил с использованием анзаца (10.6) приводит к тем же результатам, что и усреднение с обычным белым шумом с точностью до членов по  $1/N$ .



Разберем для примера нормированный двухточечный коррелятор

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \langle \text{tr } \eta(x, t) \eta(y, \tau) \rangle &= \sum_{i, j} \frac{1}{N^2} \langle \eta^{ij}(x, t) \eta^{ji}(y, \tau) \rangle = \\ &= \sum_{ij} \frac{1}{N^2} \langle \exp[i(p_i - p_j)(x - y)] \eta^{ij}(t) \eta^{ji}(\tau) \rangle_{n, p}. \end{aligned} \quad (\Gamma.1)$$

Импульсы  $p_i$  равномерно распределены в кубе размером  $2\pi\Lambda$  ( $\Lambda \equiv 1$ ). В сумме (Г.1) выделим члены с  $i \neq j$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \langle \text{tr } \eta(x, t) \eta(y, \tau) \rangle &= \\ &= 2\delta(t - \tau) \frac{1}{N^2} \int \prod_i \frac{dp_i}{(2\pi)^D} \left\{ \sum_{i \neq j} \exp[i(p_i - p_j)(x - y)] + N \right\} = \\ &= 2\delta(t - \tau) \frac{1}{N^2} [(N^2 - N)\delta(x - y) + N] = 2\delta(x - y)\delta(t - \tau) + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned} \quad (\Gamma.2)$$

Для четырехточечного коррелятора случайных сил имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{N}\right)^3 \langle \text{tr } \eta(x, t_1) \eta(y, t_2) \eta(z, t_3) \eta(\omega, t_4) \rangle &= \\ &= \sum_{i, j, k, l} \frac{1}{N^3} \langle \eta^{ij}(t_1) \eta^{jk}(t_2) \eta^{kl}(t_3) \eta^{li}(t_4) \rangle \times \\ &\times \exp\{i[p_j(y - x) + p_k(z - y) + p_l(\omega - z) + p_i(x - \omega)]\}. \end{aligned} \quad (\Gamma.3)$$

Среднее от гауссовых случайных сил  $\eta$  можно расписать с помощью теоремы Вика:

$$\begin{aligned} \sum_{i, j, k, l} \frac{1}{N^3} \langle \exp\{i[p_j(y - x) + p_k(z - y) + p_l(\omega - z) + p_i(x - \omega)]\} \rangle \times \\ \times [\langle \eta^{ij}(t_1) \eta^{jk}(t_2) \rangle \langle \eta^{kl}(t_3) \eta^{li}(t_4) \rangle + \langle \eta^{ij}(t_1) \eta^{kl}(t_3) \rangle \times \\ \times \langle \eta^{jk}(t_2) \eta^{li}(t_4) \rangle + \langle \eta^{ij}(t_1) \eta^{li}(t_4) \rangle \langle \eta^{jk}(t_2) \eta^{kl}(t_3) \rangle]. \end{aligned} \quad (\Gamma.4)$$

Вычисляя это выражение, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^3} 4\delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) \sum_{ijl} \int \frac{dp}{(2\pi\Lambda)^D} [\exp\{i[p_i(x - \omega + z - y)] + \\ + i p_l(\omega - z)\} \exp[i p_j(y - x)]] + \\ + \frac{1}{N^3} 4\delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) \sum_{i, j, k, l} \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{kl} \delta_{ji} \int \frac{dp}{(2\pi)^D} + \\ + \frac{1}{N^3} 4\delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \sum_{j, i, k} \int \frac{dp}{(2\pi)^D} [\exp\{i[p_j(y - x + \omega - z)] + \\ + i p_i(x - \omega)\} \exp[i p_k(z - y)]] = 4\delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4)\delta(x - y)\delta(z - \omega) + \\ + 4\delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3)\delta(x - \omega)\delta(z - y) + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

$\delta$ -функции, как обычно, возникают при интегрировании по импульсам. Когда индексы у импульсов из  $\exp$  различны, получаем лидирующий вклад в выражение для среднего. Если же часть индексов совпадает, то получающиеся члены имеют порядок  $O(1/N)$ . Аналогичные рассуждения проходят для среднего от произвольного (четного) числа случайных сил.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nelson E.//Phys. Rev. 1966, V. 150. P. 1079.  
Parisi G., Wu Y.//Scientia Sin. 1981. V. 24, P. 483.
2. Макеенко Ю. М.//УФН. 1984. Т. 143. С. 161.
3. Falcioni M., Marinari E., Paciello M. L., Parisi G., Taglient B., Zheng Yi-Cheng.//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 215 [FS7]. P. 265.
4. Alfaro J. Stochastic Quantization and the Large  $N$  Reduction of  $U(N)$  Gauge Theory: Preprint CCNY-HEP-8316, February 1983;//Phys. Rev. Ser. D. 1983. V. 28. P. 1001.
5. Floratos E., Iliopoulos J.//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 214. P. 392.
6. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1983.
7. Wilson K. G.//Phys. Rept. Ser. C. 1974. V. 12. P. 75.
8. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1982.
9. Alfaro J., Sakita B.//Phys. Lett. Ser. B. 1983. V. 121. P. 339.
10. Gribov V. N.//Nucl. Phys. Ser. B. 1978. V. 139. P. 1.  
Horibe M., Okio Hozoa, Sakamoto J.//Progr. Theor. Phys. 1983. V. 70. P. 1636.
11. Zwanziger D.//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 192. P. 259.  
Baulien L., Zwanziger D.//Ibidem. 1981. V. 193. P. 163.  
Zwanziger D.//Ibidem. 1982. V. 209. P. 336.
12. Wilson K. G.//Phys. Rev. Ser. D. 1974. V. 10. P. 2445.
13. Dotsenko V., Verges S.//Nucl. Phys. Ser. B. 1980. V. 169. P. 527.
14. Migdal A. A.//Phys. Rept. Ser. C. 1984. V. 102. P. 200.
15. 't Hooft G.//Nucl. Phys. Ser. B. 1974. V. 72. P. 461.
16. Greenside J.//Phys. Lett. Ser. B. 1983. V. 121. P. 169.  
Greenside J., Helporn M. B. Quenched Master Field: Berkeley preprint UCB-PDH-82/14.
17. Eguchi T., Kawai H.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 38. P. 1063.  
Gross D., Kitazawa Y. Princeton preprint PRE-2564.— April 1982.  
Das S., Wadia S. Chicago University preprint EFI-82-15.— April. 1982.
18. Okawa M., Gonzalves-Arroya A.//Phys. Lett. Ser. B. 1983. V. 120. P. 245.
19. Migdal A. A.//L. D. Landau Institute preprint.— Moscow, 1982.
20. Gonzalves-Arroya A., Okawa M.//Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 22, p. 2397.
21. Migdal A. A., Polikarpov M. I., Veselov A. I., Yarov V. P., Kozhamkulov T. A., Varlamova A. N. Numerical Study of Langevin Equation in Twisted Eguchi-Kawai Model: Preprint ITEP-186.— Moscow, 1983;//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 243. P. 212.
22. Gonzalves-Arroya A., Okawa M. Preprint BNL 32988.— 1983.
23. Makeenko Y. M., Polikarpov M. I.//Nucl. Phys. Ser. B. 1982. V. 205 [FS5]. P. 386.  
Samuel S.//Phys. Lett. Ser. B. 1982. V. 112. P. 237.  
Chen T.-L., Tan C.-I., Zheng Z.-T.//Ibidem. V. 109. P. 383.
24. Makeenko Y. M., Polikarpov M. I. Preprint ITEP-139.— Moscow, 1983.
25. Кожамкулов Т. А. Препринт ИТФ АН УССР 85-139 Р.— Киев 1985.
26. Мигдал А. А., Кожамкулов Т. А.//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 1596; Т. 40. С. 548.
27. Кожамкулов Т. А.//Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1985. Вып. 4. С. 57.
28. Кожамкулов Т. А., Бершадский М. А.//Вопросы теории поля.— Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1985. С. 25.
29. Кожамкулов Т. А.//ЯФ. 1986. Т. 43. С. 248.
30. Drummond J. T., Duane S., Horgan R. R.//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 220 [FS8]. P. 119.
31. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
32. Бужек В. Препринт ОИЯФ Р2-84-419.— Дубна, 1984.
33. Мигдал А. А., Бершадский М. А., Кожамкулов Т. А. Препринт ИСХ АН СССР.— Москва, 1986.
34. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля.— М.: Мир, 1984.— Т. 2. Гл. 12.