

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

540.12:531.51

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ И ФОТОНОВ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

И. Г. Дымникова

Памяти Владимира Афанасьевича Рубана

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	393
2. Метрика Керра	399
3. Интегралы движения	402
4. Рассеяние и гравитационный захват:	407
4.1. Прицельные параметры	407
4.2. Нерелятивистские частицы	408
4.3. Фотоны и ультрарелятивистские частицы	409
5. Траектории падения	412
6. Связанные состояния:	415
6.1. Сферические орбиты	415
6.2. Круговые экваториальные орбиты	418
6.3. Влияние эффекта увлечения на орбитальное движение	420
7. Отклонение лучей	423
8. Гравитационное запаздывание сигналов	425
9. Вращающаяся гравитационная линза	427
Список литературы	429

1. ВВЕДЕНИЕ

В лекциях, прочитанных в мае 1921 г. в Принстонском университете и озаглавленных «Основы теории относительности», Эйнштейн сделал следующее утверждение: «Вращающееся полое внутри тело должно создавать в этой полости «кориолисово» поле, отклоняющее тело в направлении вращения, а также центробежное поле... Указанное выше центробежное действие также вытекает из теории, как это показал Тирринг». В своей работе 1918 г. ⁷³ Лензе и Тирринг показали также, что аналогичное действие должно производить гравитационное поле вне массивного вращающегося тела, вовлекающая пробные тела во вращение относительно далекой инерциальной системы, связанной с неподвижными звездами, причем в этом случае увлечение не обязано происходить в направлении вращения, в частности смещение перигелия Меркурия $\Delta\Omega = 42'',9$ за 100 лет — классический эффект ОТО — должно за счет вращения уменьшаться на величину $\Delta\Omega_{\text{вр}} \approx 4 \cdot 10^{-4} \Delta\Omega$. Это было предсказание и первая количественная оценка эффекта увлечения инерциальных систем гравитационным полем вращающегося тела.

Долгое время эффект Лензе — Тирринга представлял чисто академический интерес, так же как и те существенно релятивистские объекты — нейтронные звезды и черные дыры, предсказанные в рамках ОТО в конце 30-х го-

дов Оппенгеймером и его сотрудниками²⁴, к которым он имеет самое непосредственное отношение. Сейчас, когда нейтронные звезды стали привычной реальностью, а окончательное подтверждение открытия первой черной дыры в созвездии Лебедя является, по-видимому, делом ближайшего будущего^{15, 40}, общая теория относительности становится рабочим инструментом астрофизических исследований.

Учет эффектов ОТО особенно важен для объяснения тех астрофизических явлений, непосредственными участниками которых могут оказаться черные дыры. Согласно нашим сегодняшним представлениям, к таким явлениям относятся космические источники рентгеновского и, возможно, гамма-излучения, процессы, обеспечивающие бурную активность квазаров и ядер галактик, гравитационные линзы, а также возможные космические источники гравитационного излучения.

Как известно, черная дыра образуется в процессе неограниченного гравитационного сжатия вещества в таких ситуациях, когда противодействие внутреннего давления сжатию оказывается недостаточным. Качественно черная дыра была предсказана более двухсот лет назад английским физиком Джоном Мичеллом в докладе Королевскому обществу в 1783 г.: он утверждал, что, если сжать Солнце до размеров ≈ 6 км в поперечнике, свет не сможет его покинуть (ссылки в¹¹⁴). В 1799 г. Лаплас опубликовал работу¹¹⁶, в которой была дана количественная теория, основанная на законе Ньютона. В 1939 г. черные дыры были предсказаны в рамках ОТО Оппенгеймером и Снайдером²⁴. Согласно современным представлениям, черные дыры (если они есть) либо возникают из начальных возмущений в распределении плотности вещества на ранних стадиях эволюции Вселенной, если она в то время была сильно неоднородной (идея первичных черных дыр (ПЧД) высказана Зельдовичем и Новиковым в 1966 г.¹⁰⁴; о деталях их образования и дальнейшей судьбе можно прочесть в обзорах^{23, 30}, о современном физическом и астрофизическом статусе ПЧД — в недавнем обзоре¹⁰⁷), либо являются конечным продуктом эволюции достаточно массивных звезд²⁴ (сценарий см. в монографиях^{10, 18}) и звездных скоплений (идея и механизм образования массивной черной дыры в процессе коллапса бесстолкновительной системы звезд предложены в 1965 г. в работе Зельдовича и Подурца¹⁰⁵; дальнейшее развитие см. в обзоре⁴⁰ и приведенных там ссылках).

Поиск черных дыр считается одной из главных задач астрономии последнего десятилетия^{29, 40}. Непосредственно наблюдать черную дыру практически невозможно, ее можно обнаружить лишь по косвенным проявлениям, связанным с влиянием ее сильного гравитационного поля на движение окружающего вещества и распространение излучения. В астрофизических моделях, включающих черные дыры, излучение генерируется в процессе нагревания падающего на дыру газа и ускорения его в сопутствующем магнитном поле. Для получения нужной температуры, обеспечивающей соответствие модели наблюдаемой картине, требуется огромное количество энергии, источником которой способно быть гравитационное поле черной дыры. Считается весьма вероятным, что астрофизические черные дыры могут обладать собственным вращением (вращающаяся черная дыра естественно образуется при коллапсе вращающейся звезды и при коллапсе звезды в двойной системе). Наличие углового момента дыры требуется прежде всего для моделей квазаров, в которых расположенная в центре массивная ($10^7 - 10^8 M_\odot$) черная дыра призвана обеспечивать энергией генетически связанный с квазаром радиоисточник: наличие оси вращения могло бы служить для запоминания выделенного направления в продолжение всего времени жизни радиоисточника (см.⁴⁰ и приведенные там ссылки). Кроме того, вращение черной дыры во внешнем поле сопровождается полезными эффектами, аналогичными униполярной индукции^{108, 109, 115}. Вращающаяся черная дыра с массой M и угловым моментом I во внешнем магнитном поле H и при наличии постоянного притока электрического заряда работает как электрическая

батарея с мощностью (см., например, ¹⁰⁶ и приведенные там ссылки) $W_n \approx 10^{40} (M/10^6 M_\odot)^2 (I/I_{\max})^2 (H/10^4)^2$ эрг/с.

При исследовании газодинамических и радиационных процессов в окрестности компактных вращающихся астрофизических объектов неизбежно возникает вопрос о характере движения пробных тел и распространения излучения в их сильных гравитационных полях. Согласно ОТО, пробные тела *) в гравитационном поле движутся по геодезическим линиям геометрии пространства-времени, создаваемой распределением и движением материи. Геодезические линии являются мировыми линиями свободного движения, т. е. движения, которое управляется только гравитационным полем, описываемым данной геометрией. При этом времениподобные геодезические являются траекториями свободного движения пробных тел, а нулевые геодезические — свободного движения фотонов, т. е. распространения излучения, пока его длина волны намного меньше характерного масштаба изменения поля. Геометрия пространства-времени, создаваемая вращающимся массивным телом, описывается метрикой Керра. Характерный масштаб изменения поля определяется величиной радиуса горизонта событий $r_+ = [1 + (1 - a^2)^{1/2}] GMc^{-2}$, где G — гравитационная постоянная, c — скорость света, M — масса и a — удельный безразмерный угловой момент гравитирующего тела, связанный с его полным угловым моментом как $a = J (GM^2c^{-1})^{-1}$. Если радиус вращающегося объекта $r_* \gg r_+$, то метрика Керра описывает гравитационное поле вращающейся звезды или галактики, при $r_* > r_+$ — нейтронной звезды и при $r_* \rightarrow r_+$ — черной дыры.

Поскольку частицы в окрестности вращающегося тела движутся по времениподобным геодезическим метрики Керра, а излучение распространяется по нулевым геодезическим, изучение геодезических линий этой метрики, с одной стороны, дает наглядное представление о свойствах геометрии пространства-времени в окрестности вращающихся объектов и, с другой, является необходимым для астрофизических приложений. (Имеется краткий обзор геодезических линий метрики Керра, известных к 1979 г., написанный в стиле путеводителя: где что искать или кто что сделал ⁸⁵, и более поздний в книге ¹¹².)

Область применимости геодезического подхода к изучению физических процессов в окрестности вращающейся черной дыры ограничена для фотонов условием малости длины волны по сравнению с характерным масштабом изменения поля r_+ ; когда длина волны сравнима с r_+ , становятся очень существенными волновые эффекты (см. монографию ¹¹²). Рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной статьи, однако наиболее интересные результаты, связанные с явлением сверхизлучательного рассеяния на черной дыре, здесь кратко изложены (п. 2). Кроме того, учет влияния гравитационного излучения качественно меняет картину движения даже в слабом поле (детальный анализ для метрики Шварцшильда дан в книге ¹⁰, с. 135). Количественно энергия, теряемая телом с массой m на излучение гравитационных волн, характеризуется величиной $\alpha mc^2 (m/M)$, где коэффициент α является величиной, существенно меньшей единицы (для случая гравитационного излучения в поле вращающейся черной дыры см. ⁶ и приведенные там ссылки). Поэтому ограничение на рассматриваемое ниже приближение свободных неизлучающих частиц характеризуется величиной, пропорциональной отношению массы пробной частицы к массе гравитирующего тела, создающего метрику.

Следует также отметить, что в данном обзоре рассматривается движение пробных тел и фотонов в гравитационном поле стационарной черной дыры, т. е. предполагается, что черная дыра уже образовалась и параметры ее не меняются. В реальных астрофизических условиях черные дыры являются динамическими объектами, они взаимодействуют с окружающим веществом

*) Имеются в виду пробные тела, не обладающие собственным вращением.

и полями, и характеризующие их параметры меняются со временем. Направление, исследующее динамическое поведение черных дыр в астрофизическом окружении и использующее идеи ранних работ А. Л. Зельманова, стало особенно популярным в последнее время в связи с теорией квазаров. Поэтому, хотя эти вопросы лежат в стороне от темы обзора, упомянем кратко об основных принципах динамического описания черных дыр¹²². В основе описания лежит приписывание черной дыре двумерной замкнутой «поверхности», или, как ее называют, мембраны. Существование мембраны во времени изображается времениподобной гиперповерхностью, как если бы мембрана была обыкновенным, но весьма тонким материальным слоем. В каждый фиксированный момент времени размер мембраны лишь незначительно превышает размер горизонта событий черной дыры. Как и обычный материальный слой, мембрана наделяется механическими и электромагнитными свойствами. Слой представляет собой вязкую деформирующуюся жидкость, электрически заряженную и проводящую, обладающую конечной энтропией и температурой. Уравнения внешних электромагнитных и гравитационных полей, в которые помещена черная дыра, вместе с естественными граничными условиями для этих полей на горизонте черной дыры, определяют конкретные свойства мембраны и их эволюцию во времени. Такой «мембранный» подход к описанию динамических свойств черных дыр позволяет опираться на физическую интуицию и обычные астрофизические методы при анализе взаимодействия черной дыры со своим окружением.

Отметим также, что черные дыры в составе звездных систем движутся по обычным законам релятивистской небесной механики. Детальные расчеты для случая двойных систем приведены в работах¹²³.

Для построения астрофизических моделей, непосредственно связанных с наблюдениями, особенно интересно геодезическое движение вне горизонта событий, которое можно разделить на три типа: 1) движение, начинающееся вдали от гравитирующего тела, включая отклонение лучей и запаздывание сигналов в поле вращающегося тела и траектории падения и гравитационный захват в поле вращающейся черной дыры; 2) движение по финитным орбитам, включая влияние эффекта увлечения на орбитальное движение; 3) распространение фотонов, которые излучаются в окрестности черной дыры и потом либо уходят к удаленному наблюдателю, либо захватываются дырой, либо поглощаются или рассеиваются в аккреционном диске вокруг дыры, если он есть. Задачи, относящиеся к третьему пункту, обычно решаются в рамках построения конкретных моделей астрофизических явлений, в которых эффекты ОТО рассматриваются в связи с другими физическими (магнитогидродинамическими, радиационными и др.) эффектами (см. обзоры^{40, 77}), причем их решение опирается на результаты, полученные в первом и втором пунктах. Влияние вращения на распространение излучения, испущенного вблизи черной дыры, «в чистом виде» исследовано в задаче о формировании изображения звезды на близкой к дыре орбите⁵⁷, а также в задаче о распространении излучения, испущенного во внутренних оптически тонких областях аккреционного диска и затем захваченного в его внешних областях^{25, 58, 87}. Такие задачи решаются, как правило, численно. (Сравнение эффективности некоторых численных методов интегрирования уравнений геодезических метрики Керра дано в работе⁸⁶.)

В данной статье рассматривается движение первого и второго типов. Многочисленные результаты, включающие точные аналитические и численные решения уравнений геодезических, полученные к настоящему времени в этой области, фактически представляют кинематическую картину движения в гравитационном поле вращающегося тела. В этой картине эффект увлечения инерциальных систем принимает разнообразные и нетривиальные формы, так что можно говорить о своеобразном «спин-орбитальном» (спин характеризует гравитирующий центр) взаимодействии в гравитационном поле вращающегося объекта. Например, знаменитый эффект отклонения

лучей в поле массивного тела, предсказанный Эйнштейном в ОТО, в поле вращающегося тела оказывается зависящим от взаимной ориентации волнового вектора фотона и оси вращения, и в результате лучи с отрицательными значениями проекции орбитального момента на ось отклоняются сильнее, чем лучи с положительными значениями проекции орбитального момента (п. 7). В сильном поле вращающейся черной дыры зависимость отклонения лучей от ориентации орбитального момента относительно оси приводит к тому, что фотоны, ориентированные по вращению, могут подходить гораздо ближе к дыре, чем фотоны, ориентированные против вращения, и сечения рассеяния и гравитационного захвата оказываются сильно деформированными, в зависимости от угла падения на дыру. Аналогичные результаты имеют место для нерелятивистских частиц (п. 4).

Траектории свободного падения на вращающуюся черную дыру вблизи дыры с необходимостью закручиваются в направлении ее вращения. Радиальное без вращения свободное падение превращается в движение по спирали, навивающейся на коническую поверхность $\vartheta = \vartheta_\infty = \text{const}$. При падении на вращающуюся черную дыру облака слабо взаимодействующих между собой частиц их траектории стремятся собраться на аналогичных конических поверхностях $\vartheta_{1,2} = \pm \arcsin [L_z/a^2 (E^2 - 1)]^{1/4}$ (L_z — проекция углового момента частицы на ось, E — ее энергия) и закрутятся в направлении вращения дыры (п. 5).

В случае связанных орбит влияние эффекта увлечения или спин-орбитального взаимодействия приводит к смещению периастров кеплеровских орбит, а для сферических ($r = \text{const}$) орбит — к увлечению узлов (точек пересечения орбит с экваториальной плоскостью) в направлении вращения. Кроме того, вращение центрального тела меняет период обращения тел по круговым экваториальным орбитам, увеличивая период прямой орбиты (ориентированной по вращению) и уменьшая период обратной орбиты. В итоге точка встречи двух пробных тел, движущихся по орбите одного и того же радиуса навстречу друг другу, будет дрейфовать в направлении, противоположном направлению вращения центрального тела (п. 6).

Особенно интересно проявляется эффект увлечения в гравитационном запаздывании сигналов: для фотонов, идущих в экваториальной плоскости вращающегося объекта по вращению, дополнительное гравитационное запаздывание, обусловленное вращением, оказывается отрицательным, а для фотонов, идущих против вращения, — положительным. Для фотонов, падающих на вращающуюся черную дыру, а также для фотонов, идущих мимо любого вращающегося объекта параллельно оси вращения, дополнительное вращательное гравитационное запаздывание также отрицательно! Таким образом, влияние эффекта увлечения на время распространения сигналов проявляется в том, что соответствующее вращению гравитационное запаздывание чаще оказывается гравитационным ускорением (п. 8).

Наличие дополнительного гравитационного запаздывания разных знаков может приводить к интересным следствиям в таких ситуациях, когда вращающееся массивное тело играет роль гравитационной линзы. В связи с недавними открытиями двойных и тройных квазаров, интерпретируемых как изображения одного и того же объекта, формируемые гравитационными линзами^{22, 92-94}, а также в связи с открытием экстремально быстрой переменности во времени излучения от некоторых космических объектов⁷⁵ эти следствия, возможно, могли бы представить практический интерес. Для вращающейся гравитационной линзы должен иметь место эффект относительного запаздывания лучей, образующих различные изображения одного и того же объекта в линзе. Кроме того, возможна в принципе такая ситуация, когда вращающаяся черная дыра расположена на луче зрения между наблюдателем и протяженным источником излучения и выглядит буквально как черная дыра в изображении источника излучения, ограниченная кривой, не симметричной (из-за вращения) относительно центра и обра-

зованной фотонами, отклоняемыми дырой на углы $\Delta\varphi = \pm 3k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$ В этом случае должно возникать относительное запаздывание фотонов, образующих светящийся ореол, окружающий изображение дыры, что может привести к тому, что при быстром изменении яркости источника излучения яркость вдоль ореола будет меняться неравномерно — эффект «зайчика» (п. 9).

Кроме спин-орбитального взаимодействия, в гравитационном поле вращающегося тела имеет место также спин-спиновое взаимодействие с пробными телами, обладающими собственным вращением. Эти вопросы выходят за рамки статьи, поскольку частица со спином, строго говоря, не движется по геодезической. Однако наиболее интересные эффекты хотелось бы отметить. Первый пример спин-спинового взаимодействия приведен в классической работе Лензе и Тирринга⁷³ и состоит в том, что идеальный гироскоп в поле вращающегося с угловой скоростью ω тела поворачивается относительно далекой инерциальной системы, связанной с неподвижными звездами, со скоростью $\Omega \approx \omega r_+ / r$. Поскольку в ОТО гравитационный потенциал уже не является скаляром, как в ньютоновской теории тяготения (¹⁰, с. 45), гравитационное поле вращающегося тела проявляет себя аналогично электромагнитному полю вращающегося заряженного тела, и соответствующие эффекты первого порядка называют поэтому гравимагнитными эффектами^{19, 101}. Компоненты гравитационного поля, аналогичные магнитному полю вращающегося заряженного тела, приводят к расщеплению спектральных линий, аналогичному эффекту Зеемана. Гравитационный зееман-эффект, предсказанный Зельдовичем¹⁰¹, является универсальным, т. е. расщепление не зависит от конкретных свойств излучающей системы и одинаково во всем диапазоне электромагнитных волн. Линия, испущенная на полюсе с частотой ω_0 , расщепляется на две компоненты с частотами $\omega_0 \pm \Omega$ и с противоположной круговой поляризацией, т. е. фотоны с левой и правой круговой поляризацией испытывают разное красное смещение в гравитационном поле вращающегося тела.

Спин-спиновое взаимодействие, так же как спин-орбитальное, существенно зависит от взаимной ориентации угловых моментов. Если направление спина пробного тела совпадает с направлением оси вращения гравитирующего тела, между ними возникает гравитационная сила отталкивания, в противном случае — притяжения¹¹⁰. На этом эффекте основан предложенный Брагинским, Полнаревым и Торном способ экспериментального определения гравимагнитного поля Земли¹¹¹.

В гравитационном поле вращающегося тела имеет место еще один вид взаимодействия, предсказанный Брагинским и Полнаревым, — спин-квадрупольное взаимодействие⁹⁸. Новый релятивистский спин-квадрупольный эффект состоит в возбуждении колебаний в квадрупольном механическом осцилляторе в поле вращающегося гравитирующего тела: на орбите вокруг Земли относительная амплитуда колебаний может превышать величину 10^{-10} .

В следующем разделе записывается метрика Керра (сигнатура выбрана, как у Ландау и Лифшица¹⁷) и рассматриваются ее наиболее замечательные свойства, обусловленные наличием вращения: эффект увлечения инерциальных систем и возможность извлечения из черной дыры ее вращательной энергии посредством: 1) процесса Пенроуза и 2) сверхизлучательного рассеяния (отражения с усилением) падающих на дыру волн. Остальные разделы содержат детальный обзор геодезических линий метрики Керра. Почти везде используются координаты Бойера — Линдквиста — координаты удаленного наблюдателя, асимптотически совпадающие с обычными сферическими координатами в плоском пространстве, и геометрическая система единиц ($c = G = 1$).

2. МЕТРИКА КЕРРА

Хотя черная дыра заслуженно считается одним из наиболее экзотических объектов, населяющих космос, сам по себе этот объект достаточно прост, поскольку мы можем иметь дело только с его внешними полями, полностью определяемыми всего тремя величинами: массой, зарядом (если он есть; см. обзор ⁸⁰) и угловым моментом. Это свойство черной дыры обычно формулируют как утверждение, что у черной дыры нет «волос». Для вращающейся черной дыры оно впервые было отмечено в работе Дорошкевича, Зельдовича и Новикова ¹⁰⁰, а исследование поведения магнитного поля в процессе коллапса было дано Гинзбургом ⁹⁹. (Обзор более поздних работ содержится в книге ¹⁸, т. 3, с. 84.) Метрика Керра описывает гравитационное поле незаряженной вращающейся черной дыры, а если радиус гравитирующего тела больше радиуса горизонта событий, она во многих случаях описывает гравитационное поле других вращающихся астрофизических объектов — галактик, звезд и нейтронных звезд.

Метрика в заданной геометрии характеризует квадрат расстояния $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) между двумя близкими точками пространства-времени. Рассматривая движение в гравитационном поле вращающегося тела с точки зрения удаленного наблюдателя, удобно пользоваться координатами Бойера — Линдквиста ⁴², совпадающими на бесконечности с обычными сферическими координатами в плоском пространстве. В этих координатах и в геометрической системе единиц ($c = G = 1$) метрика Керра имеет следующий вид:

$$ds^2 = (1 - 2Mr \Sigma^{-1}) dt^2 + 4M^2 ar \sin^2 \vartheta \cdot \Sigma^{-1} dt d\varphi - \Sigma^{-1} dr^2 - \Sigma d\vartheta^2 - \sin^2 \vartheta \cdot (r^2 + a^2 M^2 + 2M^3 a^2 r \sin^2 \vartheta \cdot \Sigma^{-1}) d\varphi^2, \quad (2.1)$$

где

$$\Sigma = (-g)^{1/2} = r^2 + a^2 M^2 \cos^2 \vartheta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 M^2; \quad (2.2)$$

здесь M — масса гравитирующего тела и a — его удельный безразмерный угловой момент, связанный с полным угловым моментом соотношением $J = aGM^2 c^{-1}$.

В метрике Керра существуют две физически выделенные поверхности: поверхность S_m , на которой g_{00} обращается в нуль и которая описывается уравнением

$$r = r_m = M [1 + (1 - a^2 \cos^2 \vartheta)^{1/2}], \quad (2.3)$$

и поверхность S_+ , заключенная внутри S_m и определяемая условием $g_{rr} \rightarrow \infty$ ($\Delta = 0$); она описывается уравнением

$$r = r_+ = M [1 + (1 - a^2)^{1/2}] \quad (2.4)$$

и представляет собой односторонний клапан или внешний горизонт событий вращающейся черной дыры.

Эффект увлечения инерциальных систем состоит в том, что все локально инерциальные системы отсчета в гравитационном поле должны вовлекаться во вращение относительно удаленной инерциальной системы. Так же как и поле, степень увлечения убывает с расстоянием, поэтому возникает дифференциальное вращение инерциальных систем с угловой скоростью, определяемой в приближении слабого поля известной формулой Ландау и Лифшица (¹⁷, т. 2, с. 324):

$$\Omega = \frac{1}{2} g_{00}^{1/2} \text{rot } g, \quad (2.5)$$

где $g_i \equiv -g_{0i} g_{00}^{-1/2}$.

В пределе больших r вектор Ω имеет компоненты⁶⁶

$$\Omega_r = \frac{2M^2 a \cos \vartheta}{r^3}, \quad \Omega_\vartheta = \frac{M^2 a \sin \vartheta}{r^3}, \quad \Omega_\varphi = 0. \quad (2.6)$$

Вблизи экваториальной плоскости единичный вектор e^ϑ антипараллелен вектору углового момента центрального тела J , и поэтому вращение инерциальной системы в экваториальной плоскости вдали от гравитирующего тела удивительным образом происходит в направлении, противоположном направлению его вращения: $\Omega \approx -Jr^{-3}$. Это приводит к упомянутому выше уменьшению смещения перигелия Меркурия и угла отклонения луча, идущего в экваториальной плоскости в направлении вращения.

В общем случае сильного поля все локально инерциальные системы отсчета должны вращаться относительно далекой инерциальной системы отсчета с угловой скоростью

$$\Omega_{\min} = -\frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} - \left(\frac{g_{0\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}^2} - \frac{g_{00}}{g_{\varphi\varphi}} \right)^{1/2} < \Omega < -\frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} + \left(\frac{g_{0\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}^2} - \frac{g_{00}}{g_{\varphi\varphi}} \right)^{1/2} = \Omega_{\max}. \quad (2.7)$$

По мере приближения к поверхности S_m величина Ω_{\min} растет, т. е. эффект увлечения усиливается. При $g_{00} = 0$ величина $\Omega_{\min} = 0$; значит, все локально инерциальные наблюдатели неизбежно вовлекаются во вращение с положительной угловой скоростью. Поэтому поверхность S_m является пределом статичности в метрике Керра: за этой поверхностью уравнение $d\varphi/dt = 0$ не имеет корней, и, следовательно, никакое тело внутри S_m не может иметь $\varphi = \text{const}$; все стационарные наблюдатели (т. е. наблюдатели с $r = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$) обязательно должны вращаться относительно покоящейся на бесконечности системы отсчета с положительной угловой скоростью

$$0 < \Omega < \Omega_{\max}, \quad (2.8)$$

стремящейся при $r \rightarrow r_+$ к величине угловой скорости увлечения на горизонте

$$\Omega_+ = \frac{aM}{r_+^2 + a^2 M^2}, \quad (2.9)$$

называемой угловой скоростью вращения черной дыры⁵³.

Область, заключенная между поверхностями S_m и S_+ , называется эргосферой (от греческого слова *εργον* — работа): здесь могут разыгрываться события, сопровождаемые непосредственным извлечением из черной дыры ее вращательной энергии. При переходе через поверхность S_m величина g_{00} меняет знак и становится отрицательной. Это приводит к тому, что в эргосфере энергия частицы с 4-скоростью u^α , равная $E = \mu (g_{00}u^0 + g_{0k}u^k)$, может оказаться отрицательной. Геодезические линии с отрицательными значениями E целиком заключены внутри эргосферы, поэтому никакая частица, движущаяся свободно, не может попасть на такую геодезическую извне. Однако она может возникнуть в результате распада влетевшего в эргосферу тела, причем другой фрагмент распавшегося тела может уйти на бесконечность (к удаленному наблюдателю) с энергией $E_{\text{кон}} > E_{\text{нач}}$, унося с собой часть вращательной энергии дыры^{26, 52, 78}. Такой механизм извлечения энергии из черной дыры называется процессом Пенроуза. Конкретные примеры реализации процесса Пенроуза и возможные астрофизические приложения рассмотрены в работах^{34, 113–115, 117, 118, 121} и в монографии¹¹².

Волновым аналогом процесса Пенроуза является сверхизлучательное рассеяние волн на вращающейся черной дыре^{11, 28, 76, 81, 82}. Впервые на такую возможность указал Зельдович^{102, 103}, рассматривая рассеяние электромагнитных волн на вращающемся с угловой скоростью Ω проводящем цилиндре; в этом случае волна с орбитальным моментом m и частотой ω будет

испытывать усиление при отражении от цилиндра, если $\omega < m\Omega$, а энергия и угловой момент отражающего тела будут уменьшаться. Зельдович показал, что: 1) аналогичный эффект должен иметь место для рассеяния мультипольных волн на вращающейся черной дыре; 2) при квантовом рассмотрении рассеиваемых волн должно происходить спонтанное излучение энергии и углового момента путем рождения пар фотонов внутри эргосферы с последующим поглощением одного из них дырой и излучением второго на бесконечность, что соответствует радиусу перехода от ближней зоны к волновой зоне $R \gtrsim cm/\omega \sim r_+$.

Более строгое рассмотрение показывает, что волновые решения уравнений ОТО, описывающие возмущения на фоне метрики Керра, ведут себя на бесконечности как $\exp[-i\omega(t \pm r_*)]$; знак плюс соответствует падающим, а знак минус — уходящим волнам. Координата r_* связана с обычной радиальной координатой r уравнением

$$\frac{dr_*}{dr} = (r^2 + a^2 M^2) \Delta^{-1}$$

и изменяется в пределах $-\infty < r_* < \infty$ при $r_+ \leq r < \infty$, за что получила название «черепаший координаты». При $r_* \rightarrow -\infty$ волна асимптотически описывается функцией, пропорциональной $\exp[\pm i(\omega - m\Omega_+)r_*]$, где m — азимутальное квантовое число волны. Физически разумное граничное условие на поверхности горизонта событий требует, чтобы волна была падающей для всех локальных наблюдателей, дрейфующих вокруг дыры под действием эффекта увлечения. Поскольку такие наблюдатели вблизи горизонта должны иметь угловую скорость $\Omega \approx \Omega_+$, они будут считать падающей волну, пропорциональную $\exp[-i(\omega - m\Omega_+)r_*]$ и имеющую групповую и фазовую скорости $v_{gr} = -1$; $v_{ph} = -1 + (m\Omega_+/\omega)$. Отсюда следует, что локально поток энергии всегда направлен в дыру. Фазовая скорость, определяющая ту картину, которую видит удаленный наблюдатель, может при определенных значениях m и ω быть направлена от дыры. Волна, падающая на черную дыру из бесконечности, встречает на своем пути «радиальный барьер», который определяется равенством нулю в волновом уравнении величины $k^2(r)$. Волна частично отражается от радиального барьера, а частично поглощается дырой. Если в падающей волне $m > 0$, а частота заключена в диапазоне $0 < \omega < m\Omega_+$, то для бесконечно удаленного наблюдателя эта падающая волна становится уходящей и усиливает соответствующую отраженную волновую моду: волна испытывает сверхизлучательное рассеяние на кривизне пространства-времени в сильном гравитационном поле вблизи вращающейся черной дыры. Для невращающейся дыры эффект отсутствует. С точки зрения наблюдателя, дрейфующего вокруг дыры, энергия идет только в дыру, а с точки зрения удаленного наблюдателя имеется эффект отражения с усилением: поток энергии, направленной в дыру, определяется для падающих на дыру скалярных волн выражением¹⁶

$$\frac{dE}{dt} \sim \omega(\omega - m\Omega_+) \frac{2Mr_+}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_{lm}^2(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi_0$$

где ${}_0S_{lm}(\vartheta; a\omega)$ — угловые функции, соответствующие симметрии задачи, — сфероидальные волновые гармоники (см., например,^{6, 32} и приведенные там ссылки). При $0 < \omega < m\Omega_+$ величина dE/dt становится отрицательной, т. е. энергия отбирается от дыры и уносится на бесконечность. Аналогичные, но более сложные выражения можно записать для электромагнитных и гравитационных волн²⁸. Коэффициент отражения электромагнитных волн на несколько процентов превышает единицу и достигает максимума при $\omega \rightarrow m\Omega_+$. Характерные частоты $\omega \sim 0,5 c^3 (GM)^{-1}$ в случае черных дыр звездной массы и больше попадают в радиодиапазон. Гравитационная волна может быть усилена более чем вдвое: коэффициент отражения $R_{gr} = 2,38$ при $a \rightarrow 1$, $l = m = 2$ и $\omega \rightarrow m\Omega_+$ ^{28, 32}.

Эффект усиления гравитационных волн при отражении в сильном гравитационном поле вращающейся черной дыры приводит к возможности существования в ее окрестности так называемых плавающих орбит, на которых энергетические потери на излучение гравитационных волн полностью компенсируются энергией, извлекаемой из дыры за счет сверхизлучательного рассеяния ^{76, 81}.

На эффекте сверхизлучательного рассеяния электромагнитных волн основана идея «black hole bomb» ⁸¹, действие которой использует возможность, впервые указанную в работе Зельдовича ¹⁰³, многократного усиления излучения с помощью введения положительной обратной связи, осуществляемой оптимально расположенным вокруг вращающейся черной дыры сферическим зеркалом, отражающим низкочастотные радиоволны.

3. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения, которым подчиняется движение пробных частиц в метрике Керра, можно получить из уравнений Гамильтона — Якоби:

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} - \mu^2 = 0 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3),$$

записывая действие в виде

$$S = -Et + L_z\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta).$$

В результате получаются уравнения движения ⁵⁰, которые представляют собой первые интегралы уравнений геодезических линий:

$$\Sigma^2 \dot{r}^2 = R(r) \equiv [E(r^2 + a^2) - aL_z]^2 - \Delta [\mu^2 r^2 + Q + (L_z - aE)^2], \quad (3.1)$$

$$\Sigma^2 \dot{\theta}^2 = Q - H(\theta) \equiv Q - \cos^2 \theta \left[a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right], \quad (3.2)$$

$$\Sigma \dot{\varphi} = \frac{L_z}{\sin^2 \theta} - aE + \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_z], \quad (3.3)$$

$$\Sigma \dot{t} = a(L_z - aE \sin^2 \theta) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_z]; \quad (3.4)$$

здесь μ — масса покоя частицы, точка означает дифференцирование по аффинному параметру λ , связанному с собственным временем соотношением $\tau = \mu\lambda$; для фотона $\mu = 0$. Координаты r и t измеряются удаленным наблюдателем в единицах GMc^{-2} и GMc^{-3} . Величины Q , E и L_z являются интегралами движения, смысл которых можно выяснить с помощью предельного перехода $r \rightarrow \infty$:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)_\infty^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_\infty^2 + r^2 \sin^2 \theta_\infty \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_\infty^2 = \frac{E^2 - \mu^2}{E^2} = v_0^2, \quad (3.5)$$

$$Er^2 \sin^2 \theta_\infty \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_\infty = L_z, \quad (3.6)$$

$$Q + L_z^2 = L^2 - a^2 (E^2 - \mu^2) \cos^2 \theta_\infty. \quad (3.7)$$

В случае невращающегося тела метрика Керра переходит в метрику Шварцшильда, и величина $Q + L_z^2$ определяет квадрат полного сохраняющегося углового момента пробного тела. При этом интеграл Q связан с вектором Лапласа, который возникает при переходе к задаче Кеплера в ньютоновской теории тяготения.

Таким образом, E — сохраняющаяся энергия пробной частицы, L_z — сохраняющаяся проекция момента импульса на ось вращения; L — полный начальный момент импульса, v_0 — начальная скорость частицы.

Величины μ , E и L_z представляют собой три очевидных интеграла движения в метрике Керра. Наличие четвертого интеграла Q явилось вначале некоторой неожиданностью (см., например, ¹⁸, т. 3, с. 110). Однако вскоре появились работы, в которых его существование было оправдано с математической точки зрения *). Дело заключается в том, что на языке дифференциальной геометрии существование интегралов движения связано с существованием в данной геометрии векторов Киллинга, описывающих бесконечно малые трансляции в пространстве-времени, сохраняющие длину кривой (см., например, ¹⁸, т. 2, с. 318). Если метрика $g^{\alpha\beta}$ не зависит от некоторой координаты x^α , то вектор Киллинга $\xi = d/dx^\alpha$, удовлетворяющий уравнению Киллинга $\xi_{\beta;\nu} + \xi_{\nu;\beta} = 0$, описывает симметрию пространства-времени относительно координатного сдвига $x^\nu \rightarrow x^\nu + \varepsilon \delta^\nu_\alpha = x^\nu + \varepsilon \xi^\nu_\alpha$ вдоль циклической координаты x^α . При таком преобразовании, сохраняющем длину кривой, сохраняются расстояния между точками пространства-времени, т. е. геометрия не меняется. Каждому вектору Киллинга соответствует сохраняющаяся при свободном движении, т. е. при движении вдоль геодезической, величина $\xi^\nu t_\nu$, где $t_\nu = dx_\nu/d\lambda$ — касательный к геодезической вектор, нормированный так, что $t^\alpha t_\alpha = -\mu^2$. В метрике Керра циклическими являются координаты t и ϕ и имеются два вектора Киллинга $\xi^\alpha = \delta^\alpha_t$ и $\zeta^\alpha = \delta^\alpha_\phi$, которым соответствуют сохраняющиеся величины $E = -\xi^\nu t_\nu$ и $L_z = \zeta^\nu t_\nu$. Они отождествляются с энергией и проекцией углового момента на ось вращения, поскольку асимптотически при $r \rightarrow \infty$ вектор Киллинга ξ^α соответствует генератору сдвигов по времени, а ζ^α — генератору вращений относительно оси симметрии. Оба эти интеграла движения линейны по компонентам касательного вектора и тем самым по компонентам импульса и углового момента.

Оказалось, что в метрике Керра, кроме векторов Киллинга, существует еще тензор Киллинга $K_{\alpha\nu}$ ^{56, 68, 69, 91} — симметричный тензор второго ранга, связанный с угловым моментом источника поля и удовлетворяющий уравнению $K_{\alpha\nu;\sigma} + K_{\sigma\nu;\alpha} = 0$. Вследствие этого существует квадратичный интеграл движения $K = K_{\alpha\nu} t^\alpha t^\nu$, сохраняющийся при свободном движении и связанный с интересующим нас интегралом движения Q тождественным преобразованием $Q + (L_z - aE)^2 \equiv K$. При переходе к метрике Шварцшильда величина K переходит в квадрат полного углового момента пробной частицы, сохраняющийся при движении в сферически симметричной геометрии. При движении в экваториальной плоскости вращающегося тела величина $Q + L_z^2$ формально также имеет смысл квадрата полного углового момента, но, как следует из уравнений (3.3) и (3.4), в этом случае $Q \equiv 0$. Можно было бы ожидать, что эта величина будет стремиться к квадрату полного углового момента частицы при $r \rightarrow \infty$, поскольку метрика Керра является асимптотически плоской. Но, как следует из (3.7), этого не происходит, и это можно интерпретировать как координатный эффект ⁶⁴, т. е. как результат описания пространства-времени координатами, которые приводят к дополнительному члену в (2.7), зависящему от a^2 и описывающему на бесконечности фиктивный вклад в угловой момент частицы, обусловленный неинерциальным характером системы координат или, эквивалентно, угловым моментом самого гравитационного поля.

Таким образом, геодезическая линия частицы в метрике Керра полностью определяется ее интегралами движения E , L_z и Q . Некоторые общие свойства геодезических следуют из анализа первых интегралов (3.1)–(3.4) методом эффективных потенциалов ^{50, 14, 95}. Записывая выражение для правой

*) Сам факт наличия дополнительной константы движения имеет аналогии в механике, например сохранение при движении в поле бесконечного однородного цилиндра величин L_z и P_z (17, т. 1, с. 33).

части уравнения (3.1) $R(r)$ в виде, не зависящем от массы частицы μ , т. е. рассматривая E и L_z как удельные величины, получим

$$R(r) = (E^2 - 1)r^4 + 2r^3 + 2[a^2(E^2 - 1) - L_z^2 - Q]r^2 + 2[Q + (L_z - aE)^2]r - a^2Q. \quad (3.8)$$

Из вида коэффициента при r^4 следует очевидное условие, что никакая геодезическая не может уходить на бесконечность, если соответствующая энергия удовлетворяет неравенству $E^2 < 1$. В этом случае движение является связанным, или финитным, т. е. частица движется в ограниченной по r области, не уходя на бесконечность и не пересекая горизонта событий (если

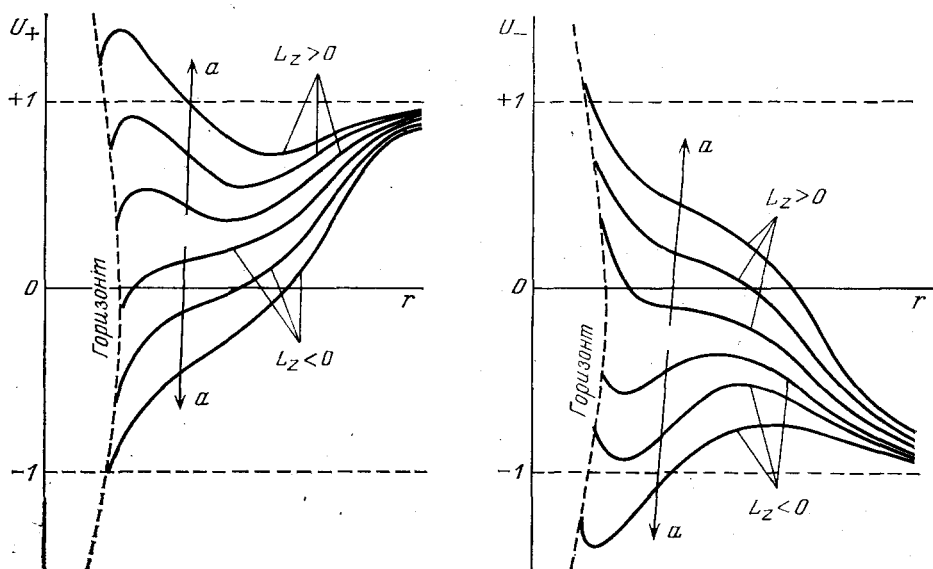


Рис. 1. Эффективные радиальные потенциалы $U_{\pm}(r, L_z, Q)$

учесть гравитационное излучение, то картина изменится: частица, излучая гравитационные волны, будет постепенно приближаться к горизонту событий, переходя на все более близкие орбиты, пока не захватится дырой).

Эффективные потенциалы определяются как решения уравнения

$$R(r) = [r^4 + a^2(r^2 + 2r)]E^2 - 4arL_zE + L_z^2a^2 - (r^2 + Q - L_z^2)\Delta = 0. \quad (3.9)$$

Они имеют вид

$$U_{\pm}(r, L_z, Q) = \frac{4aL_zr \pm D^{1/2}}{2[r^4 + a^2(r^2 + 2r)]} \quad (3.10)$$

где D — дискриминант уравнения (3.9), и изображены на рис. 1¹⁴ для случая экстремально вращающейся ($a = 1$) черной дыры. Асимптотическое поведение U_{\pm} и их производных определяется формулами¹⁴

$$U_{\pm} \xrightarrow{r \rightarrow r_+} \frac{aL_z}{2r_+}, \quad U_{\pm} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \pm 1, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial U_{\pm}}{\partial r} \xrightarrow{r \rightarrow r_+} \pm \infty, \quad \frac{\partial U_{\pm}}{\partial r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Для вещественности радиальной скорости \dot{r} требуется неотрицательность функции $R(r)$, т. е. выполнение условий

$$E \geq U_+(r, L_z, Q), \quad (3.12a)$$

$$E \leq U_-(r, L_z, Q), \quad (3.12b)$$

которые связаны между собой взаимнооднозначным соответствием $E, L_z, Q \leftrightarrow -E, -L_z, Q$, как это видно на рис. 1. Связанные состояния возникают в такой области энергий, где существует не менее трех точек пересечения кривой $U_+(r, L_z, Q)$ с прямой линией $E = \text{const}$ (точек поворота траектории частицы). Как показывает анализ числа перемен знака в выражении (3.9), в области энергий $E^2 \geq 1$ может существовать не больше двух точек поворота, а в области энергий $E^2 < 1$ — не больше трех (рис. 2¹⁴).

Условие связанности движения $E^2 < 1$ сразу накладывает на величину интеграла движения Q ограничения, которые можно получить, записывая правую часть уравнения (3.2) — широтный потенциал $Q - H(\vartheta)$ в виде⁹⁵

$$Q - H(\vartheta) = a^2 \cos^2 \vartheta (E^2 - V^2(\vartheta)),$$

где

$$V^2(\vartheta) = 1 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{L_z^2}{\sin^2 \vartheta} - \frac{Q}{\cos^2 \vartheta} \right).$$

Условие $E^2 - V^2(\vartheta) \geq 0$ для всех значений L_z в области значений $E^2 < 1$ предполагает положительность величины Q . Действительно, если $Q < 0$, то $V^2(\vartheta) > 1$ и $E^2 > 1$. Таким образом, связанные состояния возможны только при $Q \geq 0$ и $E^2 < 1$, причем орбита характеризуется значением $Q = 0$, если и только если она ограничена экваториальной плоскостью. Это легко увидеть, рассматривая поведение широтного потенциала $H(\vartheta)$ при $E^2 < 1$ (рис. 3¹⁴). Любые финитные движения с $Q < 0$ запрещены уравнением (3.2), поскольку $Q < 0$ означало бы отрицательность величины $\dot{\vartheta}^2$.

Единственная точка на кривой $H(\vartheta)$, характеризующая движение с $\dot{\vartheta} = \text{const}$, соответствует значению $\vartheta = \pi/2$, т. е. финитным орбитам в экваториальной плоскости. Неэкваториальных финитных орбит с $\dot{\vartheta} = \text{const}$ в метрике Керра не существует^{14, 62}; финитные круговые ($r = \text{const}$) орбиты на поверхности $\vartheta = \text{const}$ могли бы существовать в поле заряженной вращающейся черной дыры, где равновесие частицы на орбите обеспечивается конкурирующим действием электромагнитных и гравитационных сил (см., например, ^{46, 63} и обзор ⁸⁰).

Условие $Q \geq 0$ является необходимым, но не достаточным условием связанности движения. При $Q \geq 0$ существуют как финитные, так и инфинитные траектории свободного движения. При $Q < 0$ все допустимые геодезические являются траекториями падения, если частица первоначально движется по направлению к дыре, причем по мере приближения к ней частица с неизбежностью вовлекается во вращение вокруг оси в направлении вращения дыры (см. п. 5).

Таким образом, все траектории свободного движения можно разделить на два класса в зависимости от знака Q ^{14, 46, 48}. Геодезические первого класса имеют $Q \geq 0$. Они пересекают экваториальную плоскость или целиком располагаются в ней (при $Q = 0$) и называются геодезическими орбитального типа⁴⁶. Геодезические второго класса имеют $Q < 0$ и никогда не

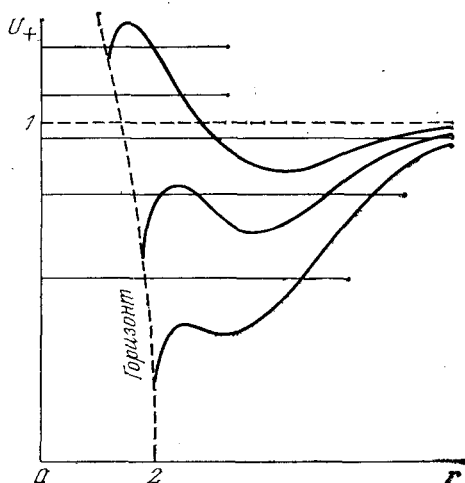


Рис. 2. Радиальное движение не связано при $E^2 \geq 1$

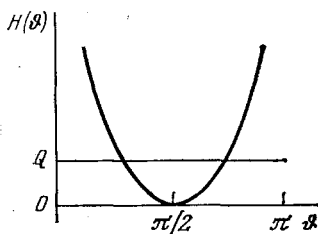


Рис. 3. Широтный потенциал $H(\vartheta)$ для случая $E^2 < 1$.

пересекают экваториальную плоскость; при

$$\begin{aligned} K &> -2aL_z[E - (E^2 - 1)^{1/2}] + a^2 \quad \text{для } L_z > 0, \\ K &> -2aL_z[E + (E^2 - 1)^{1/2}] + a^2 \quad \text{для } L_z < 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

частицы движутся между двумя гиперboloидами $\vartheta = \text{const} < \pi/2$ ^{46, 61} в гигантских вихрях, поскольку вблизи дыры невозможно $\vartheta = \text{const}$. Эти геодезические называются геодезическими вихревого типа⁴⁶. В частном случае, когда

$$\begin{aligned} K &= -2aL_z[E - (E^2 - 1)^{1/2}] + a^2 \quad \text{для } 0 < L_z < a(E^2 - 1)^{1/2}, \\ K &= -2aL_z[E + (E^2 - 1)^{1/2}] + a^2 \quad \text{для } -a(E^2 - 1)^{1/2} < L_z < 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

движение происходит вдоль поверхности гиперboloида $\vartheta_{1,2} = \text{const}$, где $\vartheta_{1,2} = \pm \arcsin [L_z^2/a^2(E^2 - 1)]^{1/4}$, и является устойчивым относительно ϑ -возмущений^{14, 61}. Разделение геодезических на два указанных типа для

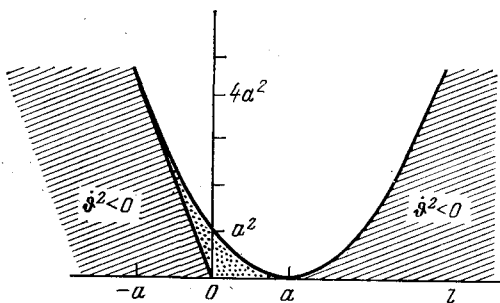


Рис. 4. Разделение геодезического движения на орбитальное и вихревое в зависимости от интегралов движения K и L_z .

работе $K = (L_z - aE)^2$, описывают движение в экваториальной плоскости^{14, 45}.

Интеграл движения L_z отвечает за возможность достигнуть при свободном движении полюсов и оси вращения. При $L_z \neq 0$, как следует из уравнения (3.2), геодезическая линия частицы никогда не достигает полюсов; это возможно только при $L_z = 0$. Вдоль оси частица может двигаться, только если⁴⁹

$$L_z = 0, \quad Q = -a^2(E^2 - 1). \quad (3.16)$$

Движение вдоль оси оказывается всегда не связанным в радиальном направлении, поскольку точки поворота в уравнении $R(r) = 0$ появляются только при отрицательных значениях r :

$$r_t = -1 + [1 - a^2(E^2 - 1)]^{1/2}.$$

Условие $L_z = 0$ является лишь необходимым условием достижения полюсов или оси вращения. В общем случае при $L_z = 0$ существуют геодезические с полярным углом ϑ , не равным 0 или π . Характерной особенностью таких геодезических является монотонное изменение азимутального угла $\varphi(\tau)$ вдоль траектории, согласно уравнению

$$\dot{\varphi} = \frac{2aEr}{\Delta(r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)}, \quad (3.17)$$

в полном соответствии с эффектом увлечения инерциальных систем гравитационным полем вращающегося тела. Другая особенность заключается в том, что область изменения полярного угла ϑ ограничена одним из полушариев (см. п. 5).

4. РАССЕЯНИЕ И ГРАВИТАЦИОННЫЙ ЗАХВАТ

4.1. Прицельные параметры

Рассеяние на вращающемся центре характеризуется двумя прицельными параметрами (рис. 5), которые связаны с интегралами движения, начальным значением полярного угла ϑ_0 и начальной скоростью частицы v_0 соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} &= \frac{1}{v_0} r^2 \sin^2 \vartheta_0 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\infty} = \frac{L_z}{E v_0 \sin \vartheta_0}, \\ \rho_{\parallel} &= \frac{1}{v_0} r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)_{\infty} = \pm \frac{1}{E v_0} (Q + a^2 E^2 v_0^2 \cos^2 \vartheta_0 - L_z^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Они могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательность прицельного параметра ρ_{\perp} означает, что составляющая орбитального углового момента частицы L_z противоположна по направлению угловому моменту дыры. Знак ρ_{\parallel} определяется начальным изменением полярного угла ϑ . Компоненты момента частицы L_z и Q и полный угловой момент L в свою очередь выражаются через ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} формулами

$$\begin{aligned} Q + L_z^2 &= E^2 v_0^2 \rho^2 - a^2 (E^2 - \mu^2) \cos^2 \vartheta_0, \\ L_z &= \rho_{\perp} v_0 E \sin \vartheta_0, \\ L &= E v_0 \rho = E v_0 (\rho_{\perp}^2 + \rho_{\parallel}^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Координата точки поворота траектории определяется как корень уравнения (3.1), описывающего радиальное движение. В случае рассеяния на черной дыре возможен гравитационный захват падающей частицы дырой, и поэтому все инфинитные, начинающиеся вдали от черной дыры орбиты делятся на орбиты захвата или погружения и орбиты ухода. Существуют, кроме того, промежуточные орбиты, соответствующие захвату на нестабильные орбиты в окрестности дыры; они не являются орбитами захвата с формальной точки зрения, но могут стать таковыми при учете диссипативных процессов.

При радиальном падении на дыру, когда угловой момент и оба прицельных параметра равны нулю, захват неизбежен, причем вращающаяся черная дыра, прежде чем проглотить падающую частицу, заставит ее покрутиться в направлении своего вращения (см. п. 5). В этом случае уравнение $R(r) = 0$ не имеет вещественных корней при $r \geq r_+$. При увеличении углового момента падающей частицы до некоторого критического значения появляется первый корень (двойной), который определяет положение экстремума функции $R(r)$ и радиус нестабильной сферической орбиты, разделяющей орбиты погружения и орбиты ухода. При дальнейшем увеличении углового момента частицы у функции $R(r)$ появляются два вещественных корня, по крайней мере один из которых лежит в области значений $r > r_+$, что соответствует появлению орбит ухода. Предельной нестабильной сферической орбите соответствуют критические значения прицельных параметров; частица с прицельными параметрами, близкими к критическим, много раз обернется вокруг дыры, прежде чем уйдет на бесконечность либо упадет в дыру (для ситуации имеются аналогии как в классической теории рассеяния — эффект орбитирования при падении на ньютоновский сингулярный потенциал $\sim r^{-3}$, так и в квантовой механике — резонансное рассеяние).

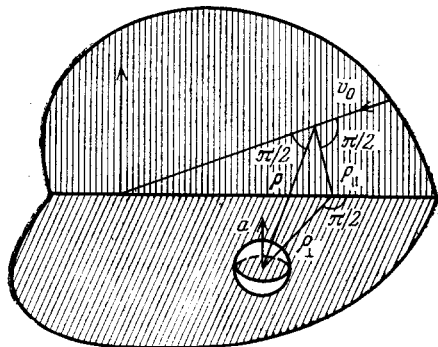


Рис. 5. Прицельные параметры рассеяния на вращающемся центре

4.2. Нерелятивистские частицы

Для нерелятивистских ($v_0 \ll 1$) частиц координата точки поворота определяется как решение уравнения

$$r^3 - \frac{1}{2} v_0^2 (\rho^2 - a^2 \cos^2 \vartheta_0) r^2 + (v_0^2 r^2 + a^2 - 2\rho_{\perp} v_0 a \sin \vartheta_0) r - \frac{1}{2} v_0^2 a^2 (\rho^2 - a^2 - \rho_{\perp}^2 \sin^2 \vartheta_0) \equiv f(r) = 0. \quad (4.3)$$

У частиц, падающих в экваториальной плоскости, $Q = 0$ и $\rho_{\parallel} = 0$, а критические значения прицельного параметра ρ_{\perp} , соответствующие падению с положительным и отрицательным угловым моментом L_z , равны ^{4, 84, 26}

$$\rho_{\perp}^{(+)} = \frac{2}{v_0} [1 - (1 - a)^{1/2}], \quad \rho_{\perp}^{(-)} = -\frac{2}{v_0} [1 + (1 - a)^{1/2}]. \quad (4.4)$$

Минимальное значение расстояния ближайшего подхода r_{\min}

$$r_0 = 2 \mp a + 2(1 \mp a)^{1/2} \quad (4.5)$$

является одновременно радиусом предельной нестабильной круговой экваториальной орбиты и минимальным периастром орбит ухода. Для экстремальной ($a = 1$) керровской черной дыры $r_0 = 1$ для $\rho_{\perp}^{(+)}$ и $r_0 = 5,83$ для $\rho_{\perp}^{(-)}$ ^{34, 35}. Частица, падающая на дыру с отрицательным прицельным параметром ρ_{\perp} , может вначале встретить точку поворота по φ ⁷⁴: $r_{\varphi} = 2[1 - (aE/L_z)]$, и тогда она изменит направление своего орбитального движения до захвата.

Частицы, падающие в плоскости экватора с прицельными параметрами $\rho > \rho_{\text{crit}}$, огибают черную дыру и уходят на бесконечность по параболическим (при $v_0 \ll 1$ с хорошей точностью $E = \mu$) орбитам с периастром ⁸⁷

$$r_p = \frac{\rho_{\perp}^2}{4} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{16(\rho_{\perp} - a)^2}{\rho_{\perp}^4} \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.6)$$

Угол отклонения частиц в экваториальной плоскости вращающегося тела в приближении слабого поля ($r_p \gg r_+$) определяется выражением ⁴¹ (здесь учтена зависимость угла отклонения от знака орбитального углового момента частицы, не рассмотренная в ⁴¹)

$$\Theta \equiv \Delta\varphi - \pi = 2 \frac{(2\gamma^2 - 1)}{|\rho_{\perp}| (\gamma^2 - 1)^{1/2}} + \left[\frac{3\pi}{4} (5\gamma^2 - 1) - 4\gamma a (\gamma^2 - 1)^{1/2} \frac{\rho_{\perp}}{|\rho_{\perp}|} \right] \frac{1}{\rho_{\perp}^2},$$

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v_0^2)^{1/2}},$$

а дифференциальное сечение рассеяния в малоугловом приближении, с учетом знака ρ_{\perp} (L_z), имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{2(2\gamma^2 - 1)}{4\theta^2 (\gamma^2 - 1)} \right]^2 + \frac{3\pi(5\gamma^2 - 1)}{4\theta^3 (\gamma^2 - 1)} - \frac{4\gamma a}{\theta^3 (\gamma^2 - 1)^{1/2}} \frac{\rho_{\perp}}{|\rho_{\perp}|}.$$

Первый член соответствует формуле Резерфорда для рассеяния на гравитационном потенциале $\sim 1/r$, второй дает поправку ОТО, не зависящую от вращения (см. также ⁵⁵), а третий член описывает влияние вращения рассеивающего центра, которое делает картину рассеяния существенно несимметричной.

Для частиц, падающих параллельно оси вращения, $L_z = 0$, $\rho_{\perp} = 0$, и функция $f(r)$ принимает вид

$$f(r) = r^3 - q \frac{r^2}{2} + (q + a^2)r - q \frac{a^2}{2},$$

где $q \equiv v_0^2 (\rho_{||}^2 - a^2)$. Положение точки поворота траектории определяется как

$$r_{\min} = \frac{1}{6} [q + (q^2 - 12q - 12a^2)^{1/2}]$$

для всех значений $q \geq q_0$, где q_0 удовлетворяет уравнению

$$(1 - a^2) q_0^4 + 4(5a^2 - 4) q_0^3 - 8a^2(6 + a^2) q_0^2 - 48a^4 q_0 - 16a^6 = 0$$

и соответствует прицельному параметру захвата и радиусу предельной неустойчивой сферической орбиты. При $a = 1$ рассеяние характеризуется следующими значениями критического прицельного параметра, минимального периастра и сечения гравитационного захвата:

$$\rho_{||}^{\text{crit}} = 3,85 \frac{c}{v_0}, \quad r_0 = 3,37M, \quad \sigma_{||} = 14,8\pi \left(\frac{c}{v_0} \right)^2. \quad (4.7)$$

Эти формулы справедливы и при произвольных углах падения ϑ_0 , при условии, что значения проекции углового момента частицы на ось не слишком велики; соответствующие ограничения имеют вид

$$\sin^2 \vartheta_0 \ll 1 + \frac{\rho_{||}^2}{\rho_{\perp}^2}, \quad a\rho_{\perp} \sin \vartheta_0 \ll \rho_{\perp}^2 \frac{v_0^2}{2}$$

и не выполняются только для больших значений ρ_{\perp} в случае падения под углами ϑ_0 , близкими к $\pi/2$. Сечения гравитационного захвата перпендикулярного к оси и изотропного потоков равны ⁹⁷

$$\sigma_{\perp} = 14,2\pi \left(\frac{c}{v_0} \right)^2, \quad \sigma_{\text{is}} = 14,4\pi \left(\frac{c}{v_0} \right)^2. \quad (4.8)$$

Сравнение сечений (4.7) и (4.8) показывает, что гравитационный захват нерелятивистских частиц происходит наиболее эффективно при падении параллельно оси вращения.

4.3. Фотоны и ультрарелятивистские частицы

Рассеяние ультрарелятивистских частиц и фотонов, длина волны которых намного меньше радиуса горизонта событий, описывается уравнениями (3.1)–(3.4), в которых $v_0 \rightarrow 1$ и $E \rightarrow \infty$. При этом интегралы движения Q и L_z неограниченно возрастают, но величины L_z/E и Q/E^2 остаются конечными и имеют смысл прицельных параметров, введенных выше. Условие наличия точки поворота траектории фотона имеет вид

$$(r^2 + a^2 - a\rho_{\perp} \sin \vartheta_0)^2 - \Delta [\rho_{||}^2 + (\rho_{\perp} - a \sin \vartheta_0)^2] = 0. \quad (4.9)$$

При падении в плоскости экватора $\rho_{||} = 0$, а критические значения прицельного параметра ρ_{\perp} определяются из уравнения ⁶⁶

$$(\rho_{\perp} + a)^3 - 27(\rho_{\perp} - a) = 0,$$

решения которого записываются в виде ¹⁰

$$\rho_{\perp}^{(+)} = a + 8 \cos^3 \left[\frac{1}{3} (\pi - \arccos |a|) \right] \quad (4.10)$$

при падении с положительным угловым моментом L_z и в виде

$$\rho_{\perp}^{(-)} = a - 8 \cos^3 \left(\frac{1}{3} \arccos |a| \right) \quad (4.11)$$

при падении с отрицательным угловым моментом L_z . Соответствующая неустойчивая круговая орбита фотона имеет радиус ³⁵

$$r_{\text{ph}} = 2 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos (\mp a) \right] \right\} \quad (4.12)$$

и угловой момент на орбите

$$\frac{L_z}{E} = \pm \frac{1}{2} r_{ph}^{1/2} (r_{ph} + 3). \quad (4.13)$$

Верхний знак соответствует прямой орбите (направление орбитального момента совпадает с направлением вращения дыры), а нижний — обратной

орбите (указанные направления противоположны). При $a = 1$ для прямой орбиты $r_{ph} = 1$ и $\rho_{\perp} = 2$, для обратной орбиты $r_{ph} = 4$ и $\rho_{\perp} = -7$ ³⁵.

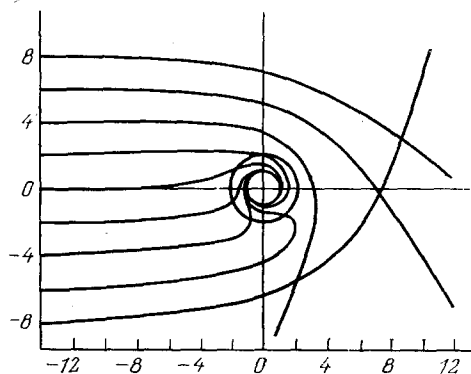


Рис. 6. Фотонные геодезические в экваториальной плоскости

Примеры фотонных геодезических в экваториальной плоскости приведены на рис. 6⁵⁴. Хорошо видно, как вращение дыры нарушает симметрию между орбитами с положительными и отрицательными параметрами: фотон с прицельным параметром $\rho_{\perp} = -8$ отклоняется заметно сильнее, чем фотон с $\rho_{\perp} = +8$. Все захваченные фотоны с отрицательными прицельными параметрами меняют в процессе захвата направление своего орбитального движения под действием увлечения гравитационным полем вращающейся черной дыры.

При падении с произвольным начальным углом ϑ_0 область значений прицельных параметров фотонов, захватываемых дырой, ограничена в случае $a = 1$ кривой⁸

$$\rho_{\parallel}^2 + (\rho_{\perp} - \sin \vartheta_0)^2 - 4 [\rho_{\parallel}^2 + (\rho_{\perp} - \sin \vartheta_0)^2]^{1/2} + 4 (\rho_{\perp} \sin \vartheta_0 - 1) = 0. \quad (4.14)$$

Фотоны, попадающие внутрь этой кривой, захватываются в точках

$$r_0 = \frac{1}{2} [\rho_{\parallel}^2 + (\rho_{\perp} - \sin \vartheta_0)^2]^{1/2} \equiv \frac{\tilde{\rho}}{2}; \quad (4.15)$$

остальные фотоны отклоняются в точках

$$r_{\min} = \frac{1}{2} \{ \tilde{\rho} + [\tilde{\rho}^2 - 4\rho + 4(\rho_{\perp} \sin \vartheta_0 - 1)]^{1/2} \}. \quad (4.16)$$

Для фотонов, падающих параллельно оси вращения,

$$r_{\min} = \frac{1}{2} [\rho_{\parallel}^2 + (\rho_{\parallel}^2 - 4\rho_{\parallel} - 4)^{1/2}], \quad \rho_{\parallel}^{\text{crit}} = 2(1 + \sqrt{2}), \quad (4.17)$$

$$r_0 = 1 + \sqrt{2}, \quad \sigma_{\parallel} = 23,31 \pi$$

Сечения гравитационного захвата, перпендикулярного к оси и изотропного потоков фотонов равны⁹⁷

$$\sigma_{\perp} = 24,27\pi, \quad \sigma_{\text{is}} = 23,90\pi. \quad (4.18)$$

Сравнение (4.17) и (4.18) показывает, что, в отличие от нерелятивистских частиц, фотоны и ультрарелятивистские частицы наиболее эффективно захватываются вращающейся черной дырой при падении перпендикулярно к оси вращения.

Величина сечения захвата фотонов, так же как и частиц, слабо зависит от угла падения. Однако форма сечения захвата существенно зависит от угла.

При падении под углом $\vartheta_0 \neq 0$ частицы и фотоны с положительными значениями L_z могут подходить гораздо ближе к дыре, чем фотоны и частицы с отрицательными L_z , поэтому с увеличением угла падения сечение захвата становится все более несимметричным. На рис. 7 показано, как зависит форма сечения гравитационного захвата фотонов от угла падения. Сечение максимально несимметрично в случае перпендикулярного к оси падения ^{35, 97, 7}. В этом случае фотоны с прицельными параметрами

$$|\rho_{\parallel}| \leq 3\sqrt{3}, \quad -7 \leq \rho_{\perp} \leq 2 \quad (4.19)$$

захватываются в точках

$$r_0 = \frac{1}{2} [\rho_{\parallel}^2 + (\rho_{\perp} - 1)^2]^{1/2}. \quad (4.20)$$

Для углов падения, заключенных в интервале

$$\arcsin(\sqrt{3}-1) \leq \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

сечения захвата имеют прямолинейный участок, изображающий захват фотонов с прицельными параметрами

$$\rho_{\perp} = \frac{2}{\sin \vartheta_0}, \quad \rho_{\parallel} \leq \left[4 - \left(\frac{2}{\sin \vartheta_0} - \sin \vartheta_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

непосредственно в точке $r_0 = r_+$.

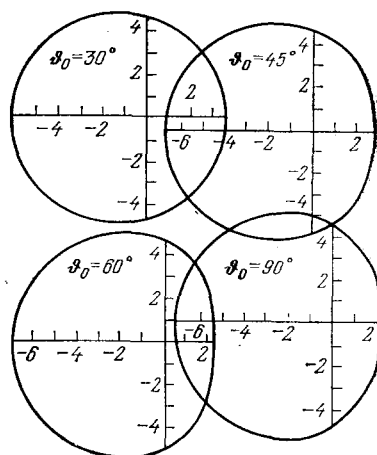


Рис. 7. Зависимость формы сечения гравитационного захвата от угла падения для случая экстремальной черной дыры

Таблица I

Характеристики рассеяния частиц и фотонов экстремально вращающейся черной дырой

Угол падения	Прицельные параметры захвата	Расстояние ближайшего подхода	Сечение гравитационного захвата
Частицы			
$\sin^2 \vartheta_0 \ll 1 + \frac{\rho_{\parallel}^2}{\rho_{\perp}^2}$	$3,85 \frac{c}{v_0}$	3,37	$14,8\pi \left(\frac{c}{v_0} \right)^2$
90°	$ \rho_{\parallel} \leq 3,85 \frac{c}{v_0},$ $-4,8 \frac{c}{v_0} \leq \rho_{\perp} \leq 2 \frac{c}{v_0}$	$1 \leq d \leq 5,83$	$14,2\pi \left(\frac{c}{v_0} \right)^2$
Изотропный поток			$14,4\pi \left(\frac{c}{v_0} \right)^2$
Фотоны			
0°	$2(1 + \sqrt{2})$	$1 + \sqrt{2}$	23,31π
30°	$ \rho_{\parallel} \leq 4,94, -6 \leq \rho_{\perp} \leq 3,5$	$1,5 \leq d \leq 3,23$	23,56π
45°	$ \rho_{\parallel} \leq 5,04,$ $-6,4 \leq \rho_{\perp} \leq 2,8$	$1,06 \leq d \leq 3,55$	23,66π
60°	$ \rho_{\parallel} \leq 5,12,$ $-6,73 \leq \rho_{\perp} \leq 2,31$	$1 \leq d \leq 3,80$	23,80π
90°	$ \rho_{\parallel} \leq 3\sqrt{3} - 7 \leq \rho_{\perp} \leq 2$	$1 \leq d \leq 4$	24,27π
Изотропный поток			23,90π

Характеристики рассеяния частиц и фотонов экстремальной черной дырой приведены в табл. I. Любопытные особенности поведения сечения захвата с ростом угла падения (рост для фотонов и уменьшение для частиц; см. табл. I) можно объяснить действием эффекта увлечения инерциальных систем. Вне вращающегося тела угловая скорость инерциальной системы (2.5), записанная в данной точке в локальном базисе единичных векторов вдоль dr , $d\vartheta$, $d\varphi$, имеет вид

$$\Omega = -\frac{1}{g_{00}^{1/2}} \frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \left(\cos \vartheta \cdot \mathbf{e}^r + \frac{1}{2g_{00}^{1/2}} \sin \vartheta \cdot \mathbf{e}^\vartheta \right). \quad (4.21)$$

Область гравитационного захвата нерелятивистских частиц расположена далеко от дыры ($\rho \sim c/v_0$). В этой области «кориолисово» ускорение, обусловленное вращением со скоростью (4.21), при падении параллельно оси равно

$$\mathbf{w}_{\parallel} = \frac{4M^2 a}{r^3} \frac{\rho_{\parallel}^3 v_0^2}{r^2} \mathbf{e}^\varphi$$

и приводит к закручиванию траектории в направлении вращения дыры, а при падении в экваториальной плоскости равно

$$\mathbf{w}_{\perp} = \frac{2M^2 a v_0}{r^3} \left(\frac{\rho_{\perp}}{r} \mathbf{e}^r + \mathbf{e}^\varphi \right)$$

и соответствует наличию эффективного отталкивания частицы, движущейся в направлении вращения, которое возрастает с уменьшением ее начальной скорости. Поэтому частицы легче захватываются дырой при падении параллельно оси. Область захвата фотонов расположена гораздо ближе к дыре, в области сильного поля. Угловая скорость, приобретаемая пробным телом, падающим параллельно оси, равна

$$\frac{d\varphi}{dt_{\parallel}} = \frac{2ar}{(r^2 + a^2)^2}.$$

При падении в плоскости экватора она равна

$$\frac{d\varphi}{dt_{\perp}} = \frac{\rho_{\perp} v_0 (r - r_{\varphi})}{r (r^2 + a^2) - 2a (\rho_{\perp} v_0 - a)},$$

где $r_{\varphi} = 2 [1 - (a/\rho_{\perp} v_0)]$ — точка поворота по углу φ . Поскольку фотоны в экваториальной плоскости испытывают более сильное закручивающее действие со стороны дыры, они легче захватываются дырой при падении перпендикулярно к оси вращения.

5. ТРАЕКТОРИИ ПАДЕНИЯ

Траектории частиц и фотонов, падающих на черную дыру с произвольным начальным углом ϑ_0 , существенно зависят от величины проекции орбитального углового момента частицы на ось вращения. Нерелятивистские частицы, падающие из бесконечности на вращающуюся черную дыру чисто радиально ($\rho_{\perp} = \rho_{\parallel} = L_z = Q = 0$), приходят в некоторую точку $r \gg r_+$ в момент времени ³⁹

$$t \approx -\frac{4}{3} \left(\frac{r}{2} \right)^{3/2} - 4 \left(\frac{r}{2} \right)^{1/2} + \left[4 + a^2 \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \vartheta_0 \right) \right] \left(\frac{2}{r} \right)^{1/2}.$$

Зависимость от ϑ_0 , появляющаяся в третьем члене, означает, что частицы, движущиеся в экваториальной плоскости, падают быстрее, чем частицы, движущиеся вдоль оси симметрии. Поэтому в терминах координатного вре-

мени t , т. е. с точки зрения удаленного наблюдателя, сферический на бесконечности поток частиц при падении вытягивается вдоль оси симметрии, как это изображено на рис. 8³⁹.

Для малых значений проекции орбитального углового момента частиц, заключенных в интервале

$$0 < L_z^2 < a^2 (E^2 - 1), \quad (5.1)$$

область изменения полярного угла ϑ и характер траектории определяется поведением широтного потенциала $H(\vartheta)$, изображенного на рис. 9¹⁴, при $E^2 \geq 1$. Допустимые значения полярного угла падающей частицы заключены в пределах $\vartheta_{\min} \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}$, причем при $Q < 0$ область изменения ϑ

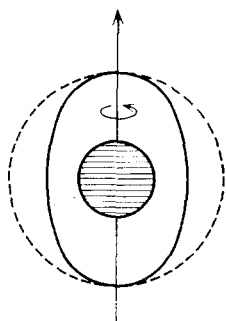


Рис. 8. Деформация сферической оболочки частиц в процессе падения на вращающуюся черную дыру.

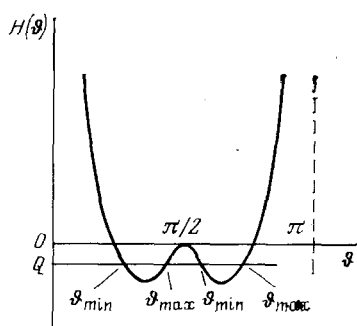


Рис. 9. Широтный потенциал $H(\vartheta)$ при $E^2 \geq 1$ и $L_z^2 < a^2 (E^2 - 1)$

ограничена одним из полушариев^{14, 61, 62}, т. е. траектория частицы располагается между двумя гиперboloидами $\vartheta = \vartheta_{\min}$ и $\vartheta = \vartheta_{\max}$. Условие попадания на такую траекторию имеет в терминах прицельных параметров вид³²

$$\rho_{\parallel}^2 + \rho_{\perp}^2 \cos^2 \vartheta_0 < a^2 \cos^2 \vartheta_0. \quad (5.2)$$

Анализ уравнений (3.1), (3.3), (3.4) показывает³², что для геодезических этого типа радиус траектории r монотонно уменьшается; для достижений поверхности горизонта событий частице требуется конечное собственное время и бесконечное время по часам удаленного наблюдателя, измеряющего временную координату t ; азимутальный угол φ при $\rho_{\perp} \geq 0$ монотонно растет; при $\rho_{\perp} < 0$ вдали от черной дыры убывает, а, начиная с расстояний

$$r < 1 - \frac{a \sin^2 \vartheta}{v_0 \rho_{\perp} \sin \vartheta_0} + \left[\left(1 - \frac{a \sin^2 \vartheta}{v_0 \rho_{\perp} \sin \vartheta_0} \right)^2 - a^2 \cos^2 \vartheta \right]^{1/2},$$

угол φ растет, т. е. по мере приближения к дыре все траектории закручиваются в направлении ее вращения. При $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ эти квазирadiaльные геодезические стремятся к экваториальным геодезическим с $\rho_{\perp}^2 < a^2$. В пределе $a \rightarrow 0$ все траектории падения, определяемые условием (5.2), переходят в траектории радиального падения.

Наиболее простыми квазирadiaльными траекториями падения являются геодезические, на которых значение полярного угла остается при движении постоянным и равным ϑ_0 . Они располагаются в минимумах широтного потенциала $H(\vartheta)$ (рис. 9). Им соответствуют интегралы движения

$$Q = -a^2 (E^2 - 1) \cos^4 \vartheta_0, \quad L_z^2 = a^2 (E^2 - 1) \sin^4 \vartheta_0$$

и прицельные параметры $\rho_{\perp} = a \sin \vartheta_0$, $\rho_{\parallel} = 0$. Траектории падения $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$ при $v_0 \ll 1$ выражаются через эллиптические интегралы⁶,

а при $v_0 \rightarrow 1$ описываются в явном виде формулами ³²

$$\left. \begin{aligned} r &= -Ev_0\tau \text{ при любом значении } a \\ -tv_0 &= r + \ln \Delta + \frac{1}{(1-a^2)^{1/2}} \ln \frac{r-1-(1-a^2)^{1/2}}{r-1+(1-a^2)^{1/2}}, \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{a}{2(1-a^2)^{1/2}} \ln \frac{r-1+(1-a^2)^{1/2}}{r-1-(1-a^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} a \neq 1, \quad (5.3)$$

$$-tv_0 = r + 2 \ln(r-1) - \frac{2}{r-1}, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{r-1} \text{ при } a = 1.$$

Фотонные геодезические этого класса являются в метрике Керра физически выделенными траекториями. Они определяются значениями

$$L_z = aE \sin^2 \vartheta_0, \quad Q = -a^2 E^2 \cos^4 \vartheta_0$$

и образуют специальное семейство, называемое главной нулевой конгруэнцией (конгруэнция — семейство линий, заполняющих пространство не пересекаясь, или линейчатая поверхность). Радиальная компонента волнового вектора фотона главной нулевой конгруэнции равна

$$k_r = -E. \quad (5.4)$$

В метрике Керра имеются две главных нулевых конгруэнции. Вторая характеризуется значением радиальной компоненты волнового вектора

$$k_r = +E \quad (5.5)$$

и описывает выходящие фотоны, мировые линии которых являются нулевыми «генераторами» горизонта: именно эти и только эти фотоны могут вечно оставаться на горизонте. Их угловая скорость

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a}{r^2 + a^2}$$

совпадает с угловой скоростью вращения дыры (2.5). Мировые линии фотонных главных нулевых конгруэнций изображены на диаграмме Керра (рис. 10¹⁸) для экваториального сечения экстремальной черной дыры. Мировые линии выходящих фотонов изображены в виде штриховых спиральных линий. Физический смысл главной нулевой конгруэнции (5.4) становится ясным при переходе к координатам Керра, связанным с координатами Бойера — Линдквиста преобразованием

$$d\tilde{V} = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\tilde{\varphi} = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (5.6)$$

Они представляют собой обобщение на случай вращения координат Эддингтона — Финкельштейна метрики Шварцшильда и образованы мировыми линиями свободно падающих фотонов: «радиальная» геодезическая фотона имеет координаты $(\tilde{V}, \vartheta, \tilde{\varphi}) = \text{const}$. Мировые линии фотонов главной нулевой конгруэнции, направленной внутрь, образуют на диаграмме Керра коническую поверхность $\tilde{V} = \text{const}$. Координата $\tilde{\varphi}$ является раскрученной азимутальной координатой, и поэтому на диаграмме не показан наклон световых конусов, обусловленный эффектом увлечения инерциальных систем в направлении увеличения $\tilde{\varphi}$, который имеет место в координатах $(r, t, \vartheta, \varphi)$. На горизонте событий световые конусы целиком наклонены внутрь, за исключением линии касания.

При увеличении орбитального углового момента падающих частиц уменьшается вероятность их попадания на траектории, соответствующие потенциальным ямам на кривой широтного потенциала $H(\vartheta)$. Поведение потенциальных кривых $H(\vartheta)$ с ростом величины

$$\omega = L_z^2 [a^2 (E^2 - 1)]^{-1} \quad (5.7)$$

изображено на рис. 11¹⁴. При увеличении ω глубина минимумов потенциальных кривых быстро уменьшается. При $\omega \rightarrow 1$ минимумы практически сглаживаются и при $\omega = 1$ остается один минимум при $\vartheta = \pi/2$. В случае $\omega > 1$ характер движения определяется потенциальными кривыми, изображенными в верхней половине рис. 11. С увеличением ω эти кривые становятся все более узкими, т. е. траектории падения все более приближаются к экваториальной плоскости.

Квазирадиальные геодезические $\vartheta = \text{const} = \vartheta_0$ оказываются физически выделенными и для нерелятивистских частиц. Ансамбль слабозаимо-

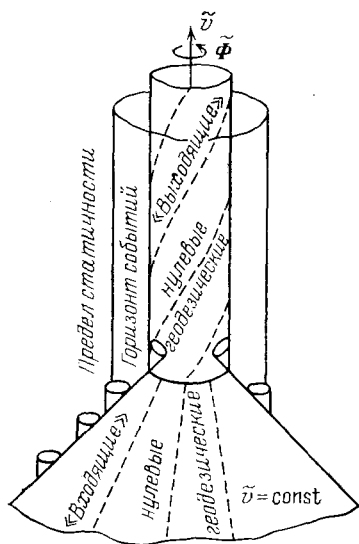


Рис. 10. Диаграмма Керра для экваториального сечения экстремальной черной дыры

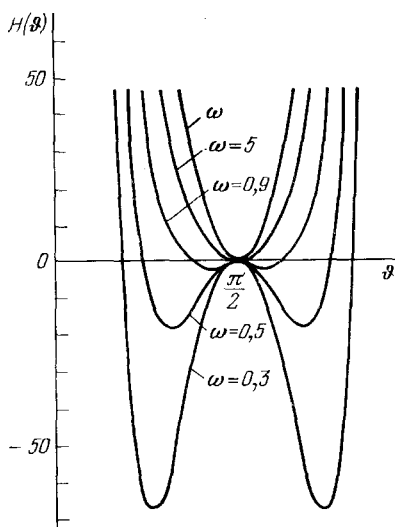


Рис. 11. Эволюция широтного потенциала $H(\vartheta)$ с увеличением отношения L^2/a^2 ($E^2 - 1$) (самое большое $\omega = 10$).

действующих пробных частиц, падающих на вращающуюся черную дыру, в первом приближении описывается движением в заданном потенциале под действием стохастической силы, в качестве которой можно выбрать случайную гауссовскую δ -коррелированную по собственному времени силу⁹. Распределение вероятности возникающих орбит по полярному углу ϑ обладает следующими замечательными свойствами⁹: 1) при $\omega \geq 1$ максимум плотности вероятности достигается в экваториальной плоскости; 2) при $0 < \omega < 1$ максимум плотности вероятности расщепляется на два максимума, которым соответствуют значения полярного угла

$$\vartheta_{1,2} = \pm \arcsin \omega^{1/4},$$

характеризующие положения минимумов кривой $H(\vartheta)$ (см. рис. 9), т. е. орбиты частиц стремятся собраться на поверхностях $\vartheta_1 = \text{const}$ и $\vartheta_2 = \text{const}$.

6. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

6.1. Сферические орбиты

Наиболее простым и хорошо изученным случаем связанного движения являются сферические ($r = \text{const}$) орбиты^{95, 67, 12}. Стабильные сферические орбиты фотонов могут существовать только под внутренним ($r_- = 1 - (1 - a^2)^{1/2}$, $\Delta(r_-) = 0$) горизонтом событий⁸⁹, однако, ввиду неустойчивости, присущей внутренней области вращающейся черной дыры, эти орбиты имеют, по-видимому, лишь формальный смысл. Сферические орбиты частиц (вре-

мениподобные связанные геодезические) определяются совместным решением уравнений

$$R(r_0) = 0 \quad (\text{сферическая орбита}), \quad (6.1)$$

$$\left. \frac{\partial R}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \quad (\text{экстремум потенциала, гарантирующий сохранение условия } r_0 = \text{const}), \quad (6.2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right|_{r_0} > 0 \quad (\text{условия устойчивости}). \quad (6.3)$$

Замена знака в (6.3) определяет семейство нестабильных сферических орбит. К уравнениям (6.1)–(6.3) добавляется условие связанности движения $Q \geq 0$, и тогда значения r_0 , E , L_z и Q определяются полностью. Семейство стабильных сферических орбит в окрестности экстремальной Керровской дыры изображено на рис. 12⁹⁵ в виде двумерной поверхности в (r, L_z, Q) -пространстве. Пересечения этой поверхности с плоскостью $Q = 0$ представляют круговые орбиты в плоскости экватора. Для радиусов орбит $r_0 \geq 9$

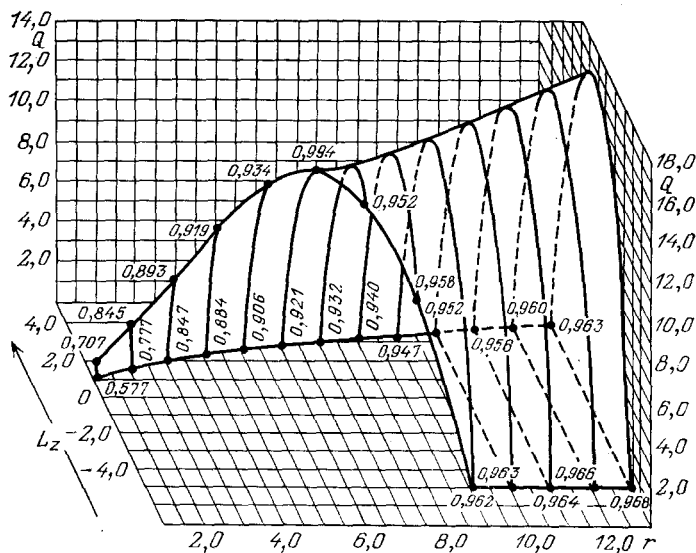


Рис. 12. Часть поверхности сферических орбит в поле экстремальной черной дыры

имеется две линии пересечения, соответствующие прямым и обратным орбитам. Характер орбиты определяется знаком проекции орбитального углового момента на ось вращения L_z . Прямые стабильные круговые орбиты в плоскости экватора существуют вплоть до $r_0 = r_+$. Обратные круговые орбиты становятся нестабильными, начиная с радиуса орбиты $r_0 = 9$.

Для фиксированного радиуса орбиты энергия на орбите монотонно меняется вдоль поверхности, изображенной на рис. 12. Прямые круговые экваториальные орбиты имеют наибольшую энергию связи $W = 1 - E$, а обратные орбиты при $r_0 \geq 9$ — наименьшую. При $r_0 < 9$ наименьшей энергией связи обладают орбиты, переходные от стабильных к нестабильным, расположенные в точках перегиба радиального потенциала, где $\partial^2 R / \partial r^2 = 0$. Эти орбиты образуют край отверстия в рассматриваемой поверхности. Величина энергии связи характеризует ту энергию, которую может излучить в виде гравитационных волн тело, падающее на черную дыру с начальной энергией $E \geq 1$, при захвате на соответствующую орбиту.

В общем случае неэкваториального движения сферическая орбита называется прямой, если смещение асимута частицы на орбите $\Delta\phi$ за время одного оборота по широте является положительной величиной. Азимуталь-

ное смещение за один оборот определяется выражением ⁹⁵

$$\Delta\varphi = \frac{4}{[z_+(1-E^2)]^{1/2}} \left\{ L_z \Pi \left(-z_-, \left(\frac{z_-}{z_+} \right)^{1/2} \right) + \left[\frac{E(r^2 + a^2) - aL_z - E}{\Delta} - E \right] K \left(\frac{z_-}{z_+} \right)^{1/2} \right\}; \quad (6.4)$$

здесь $z \equiv \cos^2 \vartheta$ и z_- , z_+ — точки поворота по углу ϑ (корни уравнения (3.2)); Π и K — эллиптические интегралы первого и третьего рода. Первый член в правой части имеет знак L_z , а второй всегда положителен для сферических орбит, удовлетворяющих условию (3.12а). При отрицательных значениях L_z первый член всегда остается преобладающим, поскольку при уменьшении L_z интеграл $\Pi(-z_-, (z_-/z_+)^{1/2})$ резко возрастает.

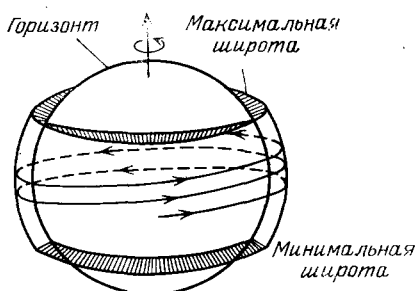


Рис. 13. Предельные сферические орбиты в поле экстремальной черной дыры

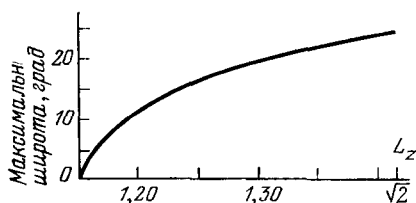


Рис. 14. Зависимость максимальной широты предельных сферических орбит от углового момента на орбите

Стабильные сферические прямые орбиты существуют вплоть до поверхности горизонта событий. Однопараметрическое семейство орбит, скользящих вдоль горизонта, характеризуется значением L_z в интервале

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq L_z \leq 2 \quad (a=1). \quad (6.5)$$

Нижний предел получается из условия связанности движения $Q \geq 0$, а верхний — из условия устойчивости (6.3). Значения интегралов движения Q и E однозначно выражаются через L_z :

$$E = \frac{L_z}{2} \quad Q = \frac{3}{4} L_z^2 - 1. \quad (6.6)$$

Предельные прямые сферические орбиты изображены на рис. 13 ⁹⁵. Частица движется по спирали, лежащей на поверхности сферы, между линиями максимальной и минимальной широты, расположенными симметрично по обе стороны от экватора. Значения предельного полярного угла $|\vartheta_{\max}|$ меняются от 0° для орбиты с $L_z = 2/\sqrt{3}$, лежащей в экваториальной плоскости, до 25° для сферической орбиты с $L_z = \sqrt{2}$, $E = 1/\sqrt{2}$ и $Q = 1/2$. Зависимость $|\vartheta_{\max}|$ от L_z приведена на рис. 14 ⁹⁵.

Линия пересечения поверхности сферических орбит с плоскостью $L_z = 0$ определяет полярные круговые орбиты, проходящие попеременно над северным и южным полюсом. Устойчивые полярные орбиты существуют для значений $Q > a^2(1 - E^2)$ вплоть до минимального радиуса $r_{0 \min}$, определяемого из уравнения ¹⁶

$$2E^2 r (r^2 + a^2) - E^2 (r - 1)(r^2 + a^2) \Delta^{-1} - r \Delta = 0$$

и условия (6.3). Для экстремально вращающейся черной дыры $r_{0 \min} = 2,53$. Минимальный радиус нестабильной круговой полярной орбиты удовлетворяет уравнению

$$r_{ph}^3 - 3r_{ph}^2 + a^2 r_{ph} + a^2 = 0.$$

При $r \rightarrow r_{ph}$ величина энергии на орбите неограниченно возрастает, т. е. предельной нестабильной полярной орбитой является орбита фотона. Ее радиус заключен в интервале от $r_0 = 3$ при $a = 0$ до $r_0 = 1 + \sqrt{2}$ при $a = 1$.

6.2. Круговые экваториальные орбиты

Эти орбиты, представляющие особый астрофизический интерес, например при изучении процессов дисковой аккреции, в метрике Керра исследованы наиболее подробно ^{34, 35, 42, 60, 71, 84}. Эффективный радиальный потенциал $U_{\pm}(r)$ в плоскости экватора имеет вид ³⁴

$$U_{\pm} = \frac{\Delta^{1/2} \{r^2 L_z^2 + [r(r^2 + a^2) + 2a^2] r\}^{1/2} + 2a L_z}{r(r^2 + a^2) + 2a^2}. \quad (6.7)$$

Стабильные круговые орбиты расположены в минимуме кривой $U_{+}(r)$, а нестабильные — в максимуме. Для нулевых (фотонных) орбит уравнение (6.7) приводится к виду

$$U_{\pm} = \pm \frac{L_z (r \Delta^{1/2} \pm 2a)}{r(r^2 + a^2) + 2a^2},$$

из которого следует, что все круговые экваториальные орбиты фотонов неустойчивы: эффективный потенциал $U_{+}(r)$ для фотонов имеет в области $r_{+} \leq r < \infty$ только максимум, все нулевые геодезические имеют самое большое одну точку поворота и, следовательно, неустойчивы при любом знаке L_z .

Совместное решение уравнений $R = 0$ и $\partial R / \partial r = 0$ относительно E и L_z дает значения интегралов движения в зависимости от радиуса орбиты ^{34, 35}:

$$\begin{aligned} E &= \frac{r^{3/2} - 2r^{1/2} \pm a}{r^{3/4} (r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a)^{1/2}}, \\ L_z &= \frac{r^2 \mp 2ar^{1/2} + a^2}{r^{3/4} (r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Верхний знак соответствует прямым орбитам, а нижний — обратным. Угловая скорость на орбите с точки зрения удаленного наблюдателя равна

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \frac{1}{r^{3/2} \pm a}, \quad (6.9)$$

а физическая скорость вращения

$$v_{\phi} = \pm \frac{r^2 \mp 2ar^{1/2} + a^2}{\Delta^{1/2} (r^{3/2} \pm a)}.$$

На больших расстояниях от центра энергии связи прямых и обратных орбит почти равны. По мере уменьшения r усиливается спин-орбитальное взаимодействие, которое увеличивает энергию связи прямых и уменьшает энергию связи обратных орбит по сравнению с шварцшильдовскими орбитами. Максимальная энергия связи минимальное значение углового момента соответствует предельной стабильной орбите, радиус которой определяется из уравнений ³⁴

$$\left. \begin{aligned} r_{ms} &= 3 + z_2 \mp [(3 - z_1)(3 + z_1 + 2z_2)]^{1/2}, \\ z_1 &= 1 + (1 - a^2)^{1/3} [(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3}], \\ z_2 &= (3a^2 + z_1^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Параметры предельных круговых орбит в плоскости экватора экстремально вращающейся черной дыры приведены в табл. II ⁸⁴, где они сравниваются

Таблица II

Предельные устойчивые круговые орбиты в гравитационном поле
массивного тела (черной дыры)

	Ньютоновские орбиты	Шварцшильдовские орбиты	Керровские орбиты ($a = 1$)	
r_0	0	6	1	9
E	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{3\sqrt{3}}$
$W = 1 - E$	$+\infty$	5,72%	42,35%	3,77%
L_z	0	$2\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{22}{3\sqrt{3}}$

с соответствующими характеристиками для ньютоновского и шварцшильдовского случаев.

При дальнейшем уменьшении радиуса нестабильных орбит значение E , определяемое из уравнения (6.7), начиная с некоторого радиуса орбиты r_{mb} , становится больше единицы и орбиты становятся не связанными. Радиус предельной связанной орбиты является минимальным перигентром параболической ($E \approx 1$) орбиты ³⁵

$$r_{mb} = 2 \mp a + 2(1 \mp a)^{1/2}.$$

При дальнейшем стремлении r к r_+ наступает такой момент, когда знаменатель выражения (6.8) обращается в нуль и значения E и L_z становятся бесконечно большими. Здесь располагается предельная нестабильная орбита фотона, радиус которой

$$r_{ph} = 2 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos(\mp a) \right] \right\}$$

соответствует значению прицельного параметра

$$\frac{L_z}{E} = \pm \frac{1}{2} r_{ph}^{1/2} (r_{ph} + 3).$$

На рис. 15 ³⁵ показано, как зависят от удельного углового момента дыры радиусы предельной стабильной (r_{ms}), предельной связанной самой внутренней орбиты (r_{mb}) и предельной фотонной орбиты (r_{ph}) в экваториальной плоскости черной дыры. Сплошной линией обозначена зависимость радиуса горизонта событий r_+ от a . Прямая линия r_m — экваториальная граница эргосферы. С точки зрения удаленного наблюдателя, измеряющего радиальную координату r , радиусы трех прямых предельных орбит оказываются при $a \rightarrow 1$ совпадающими с радиусом горизонта событий $r_+ \rightarrow 1$. Это совпадение возникает потому, что при $r \rightarrow r_+$ бесконечно малому изменению радиальной координаты r соответствует бесконечно большое изменение собственного радиального расстояния R . Согласно (2.1) или (1.1),

$$R = \int \frac{r}{\Delta^{1/2}} dr \rightarrow r + \ln(r-1) \text{ при } a \rightarrow 1.$$

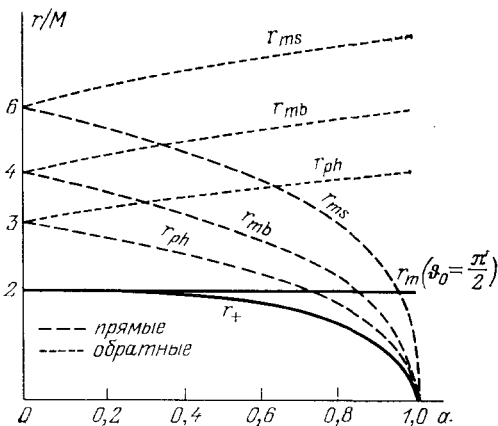


Рис. 15. Предельные круговые орбиты в экваториальной плоскости

Если удельный угловой момент a очень мало отличается от единицы: $a = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, то ³⁵

$$r_+ \approx 1 + (2\varepsilon)^{1/2}, \quad r_{ph} \approx 1 + 2 \left(\frac{2\varepsilon}{3} \right)^{1/2},$$

$$r_{mb} \approx 1 + 2\varepsilon^{1/2}, \quad r_{ms} \approx 1 + (4\varepsilon)^{1/3},$$

а собственные радиальные расстояния между предельными орбитами и горизонтом равны

$$R_{+ph} \approx \frac{1}{2} \ln 3, \quad R_{+mb} \approx \ln(1 + \sqrt{2}), \quad R_{+ms} \approx \ln(2^{7/6} \varepsilon^{-1/6}) \rightarrow \infty.$$

При этом

$$E \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad v_\varphi \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{для } r \rightarrow r_{ms},$$

$$E = 1, \quad v_\varphi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{для } r \rightarrow r_{mb}.$$

Интересно отметить, что угловая скорость v_φ на орбите $r = r_{ms}$ в случае $a = 1$ такая же, как в случае $a = 0$, хотя при $a = 1$ орбита располагается в более сильном гравитационном поле. Это обстоятельство, так же как связанное с вращением отставание перигелия Меркурия, обусловлено эффектом увлечения инерциальных систем.

6.3. Влияние эффекта увлечения на орбитальное движение

Классические результаты, описывающие влияние вращения источника на орбитальное движение в приближении слабого поля, принадлежат Лензе и Тиррингу ⁷³. Они показали, что для некруговых орбит в плоскости экватора эффект увлечения инерциальных систем гравитационным полем вращающегося тела приводит к дополнительному смещению периастра орбиты: азимутальный угол φ за каждый поворот по орбите изменяется на величину ^{66, 73}

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(1 + \frac{3}{L_z^2} - \frac{4a}{L_z^3} \right). \quad (6.11)$$

Влияние вращения на сферические орбиты приводит к увлечению их узлов (точек пересечения орбит с экваториальной плоскостью) в направлении вращения центрального тела. В приближении слабого поля после каждого оборота по орбите узел смещается в направлении вращения на угол

$$\Delta\Omega = \frac{2a}{r_0^{3/2}}. \quad (6.12)$$

Величина $\Delta\Omega$ в общем случае зависит от соотношения частот колебаний в широтном v_φ и азимутальном v_φ направлениях. Если бы эти частоты были равны, то за время одного оборота по широте угол φ менялся бы на 2π . Следовательно, отношение частот в общем случае имеет вид

$$\frac{v_\varphi}{v_\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}. \quad (6.13)$$

Как показывают численные расчеты ⁹⁵,

$$\begin{aligned} \frac{v_\varphi}{v_\varphi} &< 1 \quad \text{для } L_z < 0, \\ \frac{v_\varphi}{v_\varphi} &> 1 \quad \text{для } L_z > 0, \end{aligned} \quad (6.14)$$

т. е. узлы сферических орбит всегда увлекаются в направлении вращения. Угол увлечения за один оборот

$$\Delta\Omega = 2\pi \left| \frac{v_\Phi}{v_\Theta} - 1 \right|. \quad (6.15)$$

Зависимость $\Delta\Omega$ от радиуса орбиты для случая $a = 1$ представлена на рис. 16⁹⁵. При $r_0 \gg r_+$ угол $\Delta\Omega$ убывает как $r^{-3/2}$, что соответствует формуле Лензе — Тирринга. При $r_0 \rightarrow r_+$ угол $\Delta\Omega$ возрастает по закону

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi\alpha}{r_0 - r_+}, \quad (6.16)$$

где численный коэффициент α изменяется в пределах от 0,817 до 0,835 при изменении углового момента на орбите в пределах (6.5). В области сильного поля угол увлечения $\Delta\Omega$ зависит не только от радиуса орбиты, как в приближении Лензе-Тирринга, но и от значения L_z (спин-орбитальное взаимодействие). Например, для орбит с радиусом $r_0 = 9$, близких к плоскости экватора, величина $\Delta\Omega/(2\pi)$ меняется от 0,0814 для орбиты с $L_z < 0$, до 0,0607 для орбиты с $L_z > 0$.

Смещение периастра некруговых экваториальных орбит в более общем случае получено¹³ в аналитическом виде, с точностью до членов порядка $(M/r)^3$. В терминах фокального параметра p и эксцентриситета орбиты e , которые связаны с E и L_z соотношениями

$$\begin{aligned} E^2 &= 1 - \frac{M(1-e^2)}{p} + \frac{(1-e^2)^2 M^2}{p^2}, \\ L_z^2 &= Mp \left[1 + \frac{M(3+e^2)}{p} - \frac{2M^3/2a(3+e^2)}{p^3/2} \right], \end{aligned} \quad (6.17)$$

смещение периастра орбиты определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Phi}{\pi} &= \frac{3M}{p} - \frac{4M^{3/2}a}{p^{3/2}} \left(1 + \frac{9M}{p} \right) + \\ &+ \frac{3M^2}{2p^2} \left(9 + a^2 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{3M^3}{2p^3} \left(45 + 25a^2 - 3a^2e^2 + \frac{15e^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

В области сильного поля смещение периастра рассчитано численно для отдельных орбит^{67, 96}. Из расчетов следует, что дополнительное смещение $\Delta\Phi$, обусловленное вращением, возрастает с увеличением энергии частицы на орбите. Пример некруговой экваториальной орбиты приведен на рис. 17⁶⁷. При положительном L_z орбита состоит из двух геометрически различных частей: эллиптической и спиральной. Начиная из точки апоафра, частица движется вдоль эллиптической части орбиты, затем вблизи горизонта делает несколько витков вокруг центра вдоль спирального участка, достигает периафра и снова возвращается на эллиптический участок, где достигает следующей точки апоафра. Чем ближе E к величине энергии на первой нестабильной орбите E_{\max} , тем больше витков на спиральном участке. При $E_{\max} - E \rightarrow 0$ частица в периастре достигает нестабильной орбиты, где может в принципе оставаться сколь угодно долго. Для орбит с отрицательным L_z спиральный участок выражен гораздо менее заметно.

В самом общем случае неэкваториальных и несферических орбит численный расчет движения облака частиц с энергиями $E = 1$ ($L_z = 0$) в окрестности экстремальной черной дыры (рис. 18⁹⁶) показывает, что все

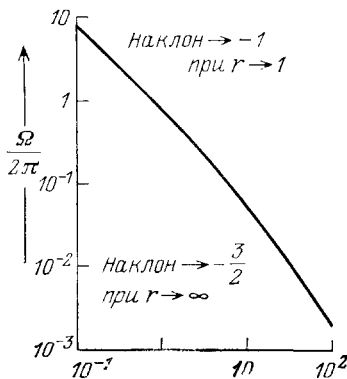


Рис. 16. Увлечение узлов сферических орбит в поле вращающейся черной дыры

частицы в облаке, обладавшие вначале нулевым угловым моментом L_z , приобретают в конце концов угловую скорость, равную угловой скорости дыры¹⁸.

Эффект увлечения проявляется не только в различных деформациях орбит, описанных выше. Различие периодов обращения двух пробных тел по одной и той же круговой экваториальной орбите навстречу друг другу приводит к релятивистскому дрейфу точки встречи этих тел. Этот эффект, названный авторами (Мицкевич и Пулидо Гарсия¹⁹) планетарным гравитационным эффектом Зеемана, не зависит ни от радиуса орбиты, ни от массы центрального тела, ни даже от гравитационной постоянной, а только от удельного углового момента гравитирующего тела. Период обращения пробного тела по круговой экваториальной орбите, согласно (6.9), равен

$$T_{\pm} = 2\pi (r_0^{3/2} \pm a) = T_N + \Delta T. \quad (6.19)$$

Рис. 17. Некруговая экваториальная орбита в поле экстремальной черной дыры.

$L_z = 2$, $E = 0,9$ число витков вдоль спирального участка $n = 3$

Первое слагаемое следует из теории Ньютона, а второе представляет собой релятивистскую поправку, зависящую только от величины a . Условие встречи

двух тел, движущихся по круговым экваториальным орбитам одного

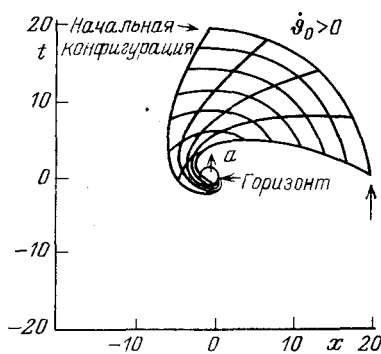
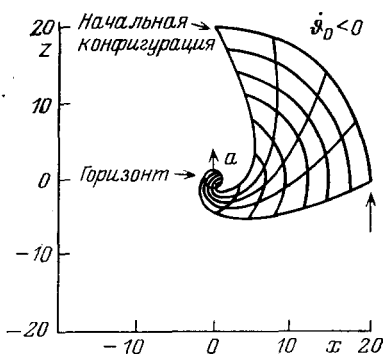


Рис. 18. Движение облака частиц с $E = 1$, $L_z = 0$, и $Q = 10$ в поле экстремальной черной дыры

и того же радиуса навстречу друг другу, имеет вид

$$\Delta t (\dot{\varphi}_+ - \dot{\varphi}_-) = 2\pi n, \quad n = 0, 2, 4, \dots$$

Дрейф места встречи за один оборот равен

$$\delta = \frac{4\pi \dot{\varphi}_+}{\dot{\varphi}_+ - \dot{\varphi}_-} - 2\pi = \frac{2\pi (\dot{\varphi}_+ + \dot{\varphi}_-)}{\dot{\varphi}_+ - \dot{\varphi}_-}.$$

Эффективная величина дрейфа за единицу времени (в радианах) определяется как

$$\left| \frac{\delta}{T_N} \right| \approx \frac{\dot{\varphi}_+ + \dot{\varphi}_-}{2}$$

и равна $4'', 4/100$ лет для Земли, $280''/100$ лет для Юпитера и $600''/100$ лет для Солнца¹⁹.

7. ОТКЛОНЕНИЕ ЛУЧЕЙ

Уравнения, описывающие распространение излучения в гравитационном поле вращающегося тела, при условии, что длина волны гораздо меньше характерного масштаба изменения поля, получаются в результате интегрирования уравнений (3.1)–(3.4) и имеют следующий вид (см., например, ¹⁸, т. 3):

$$\int \frac{d\vartheta}{[Q-H(\vartheta)]^{1/2}} = \int \frac{dr}{[R(r)]^{1/2}}, \quad (7.1)$$

$$\varphi = - \int \frac{aE \sin^2 \vartheta - L_z}{\sin^2 \vartheta [Q-H(\vartheta)]^{1/2}} d\vartheta + a \int \frac{E(r^2+a^2) - aL_z}{\Delta [R(r)]^{1/2}} dr, \quad (7.2)$$

$$t = -a \int \frac{aE \sin^2 \vartheta - L_z}{[Q-H(\vartheta)]^{1/2}} d\vartheta + \int \frac{(r^2+a^2)[E(r^2+a^2) - aL_z]}{\Delta [R(r)]^{1/2}} dr. \quad (7.3)$$

Азимутальное отклонение луча, идущего из бесконечности в экваториальной плоскости, определяется выражением

$$\Delta\varphi = -2 \int_{\infty}^d \frac{\rho_{\perp} r^2 - 2r(\rho_{\perp} - a)}{\Delta [r^4 - r^2(\rho_{\perp}^2 - a^2) + 2r(\rho_{\perp} - a)]^{1/2}} dr, \quad (7.4)$$

где буквой d принято обозначать безразмерное расстояние наибольшего сближения фотона и отклоняющего тела.

В приближении слабого поля ($d \gg r_+$) отклонение луча в экваториальной плоскости получается из (7.4) в явном виде:

$$\Delta\varphi = \frac{4}{d} + \frac{15\pi - 16}{4d^2} - \frac{4a}{d^2} \frac{\rho_{\perp}}{|\rho_{\perp}|}. \quad (7.5)$$

Первый член описывает знаменитый эффект отклонения лучей в гравитационном поле массивного тела, предсказанный Эйнштейном и составляющий для луча, проходящего мимо края Солнца, величину $\delta\varphi = 1''.75$. Поправка, зависящая от вращения ^{7, 27, 42, 79}, имеет разные знаки в зависимости от того, в сторону вращения или против движется фотон. В результате лучи с отрицательными прицельными параметрами отклоняются сильнее, чем лучи с положительными прицельными параметрами (см. рис. 6). Комбинируя выражения $\Delta\varphi$ для двух лучей с одинаковыми по величине, но разными по знаку прицельными параметрами, можно в принципе определить значение углового момента отклоняющего тела.

Широтное отклонение и азимутальное закручивание луча, распространяющегося параллельно оси вращения, описывается формулами ^{7, 27}

$$\Delta\vartheta = \pi + \frac{4}{\rho_{\parallel}} + \frac{15\pi}{4\rho_{\parallel}^2}, \quad \Delta\varphi = \frac{4a}{\rho_{\parallel}^2}. \quad (7.6)$$

В случае произвольно ориентированной траектории луча она характеризуется тремя параметрами (рис. 19): радиусом ближайшего подхода d , значением координаты ϑ при $r = d$ (ϑ_d) и углом η_d между касательной к пространственной траектории и вектором Киллинга ξ_{φ} . Через эти три параметра выражаются константы движения и экстремальное значение координаты ϑ , равное ϑ_e ²⁰:

$$\sin \vartheta_e = \sin \vartheta_d \cos \eta_d \left(1 - \frac{2a}{d} \frac{\sin \vartheta_d \sin^2 \eta_d}{\cos \eta_d} \right).$$

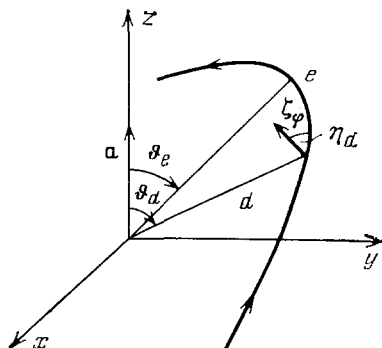


Рис. 19. Отклонение луча в общем случае.

η_d — угол между касательной к пространственной траектории и вектором Киллинга ξ_{φ} ; ϑ_e — экстремальное значение полярного угла ϑ

В общем случае полное отклонение луча определяется выражением²⁰

$$\delta\Phi = \frac{4}{d} \left(1 + \frac{15\pi - 16}{16d} - \frac{ae}{d} \right), \quad (7.7)$$

где e — единичный вектор, перпендикулярный плоскости орбиты.

Азимутальное отклонение луча, идущего в экваториальной плоскости в непосредственной близости к области захвата, характеризуется логарифмической зависимостью $\Delta\Phi$ от величины $\delta = d - r_0 \ll 1$:

$$\Delta\Phi = \frac{2a}{3-d} \left[A^\Phi \left(-\ln \delta + \ln \frac{3d}{1 + (\sqrt{3}/2)} \right) + \sum_{r_-, r_+} \frac{B_\pm^\Phi}{[r_\pm (2d + r_\pm)]^{1/2}} \ln \frac{d \{ [3r_\pm (2d + r_\pm)]^{1/2} + 2r_\pm + d \}}{(d - r_\pm) \{ [r_\pm (2d + r_\pm)]^{1/2} + r_\pm + d \}} \right], \quad (7.8)$$

где A^Φ и B^Φ равны

$$A^\Phi = \frac{d^2(d-1)}{\sqrt{3} d \Delta(d)},$$

$$B_\pm^\Phi = \frac{1}{2\Delta(d)} \left[a^2(3+d) - 2d(3-d) \pm \frac{a^2(3+d^2) - 2d(3-d)}{(1-a^2)^{1/2}} \right]. \quad (7.9)$$

Эффекты вращения наиболее существенны в случае экстремальной черной дыры, когда фотон, идущий с положительным прицельным парамет-

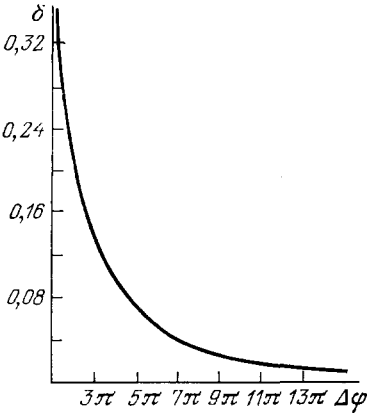


Рис. 20. Зависимость угла отклонения фотонов, идущих вблизи области захвата в экваториальной плоскости экстремальной черной дыры, от значения $\delta = d - r_+$

ром, должен захватиться непосредственно в точке $r_0 = r_+$. При точном равенстве $a = 1$ азимутальное отклонение луча, идущего вблизи области захвата, пропорционально $1/\delta$. Астрофизические вращающиеся черные дыры, скорее всего, обладают удельным угловым моментом, слегка отличным от единицы, $a = 0,998$ (см., например, ^{29, 33}). Незначительное отличие величины a от единицы приводит к качественному изменению асимптотического поведения азимутального отклонения $\Delta\Phi$ вблизи r_0 , поскольку при $a \rightarrow 1$ точка $r_0 \rightarrow r_+ = r_-$. Поэтому азимутальное отклонение луча при $d \rightarrow r_0 \rightarrow r_+$ описывается в терминах двух малых параметров ε и δ :

$$\Delta\Phi = \frac{4a}{3\sqrt{3}} \left(-\ln \delta + \ln \frac{3}{1 + (\sqrt{3}/2)} \right) + \frac{a}{2\sqrt{3} [2\delta + (\varepsilon/6)^{1/2}]} \times$$

$$\times \sum_{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}} \ln \left[1 + (2 \pm \sqrt{3}) \frac{(2\varepsilon/3)^{1/2}}{\delta} \right] \left[1 + \frac{1 \pm 4\sqrt{3}}{2} \frac{\delta}{(2\varepsilon/3)^{1/2}} \right]. \quad (7.10)$$

Зависимость $\Delta\Phi$ от δ при $a = 0,998$ изображена на рис. 20. Для лучей с отрицательными прицельными параметрами ($r_0 = 4$ при $d = 1$) $\Delta\Phi$ вблизи обла-

сти захвата логарифмически зависит от δ :

$$\Delta\varphi = \frac{8}{3\sqrt{3}} \ln \delta - \frac{8}{3\sqrt{3}} \ln 12 + \left(\frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{10}{9} \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (7.11)$$

Близкие к области захвата лучи, отклоняемые дырой на углы

$$\Delta\varphi \approx \pm 3k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.12)$$

образуют «видимый край дыры» в такой ситуации, когда она расположена на луче зрения между наблюдателем и источником излучения. Форма границы светящегося ореола, окружающего изображение дыры в картинной плоскости источника излучения, сильно зависит от угла между лучом зрения и осью вращения дыры, поскольку с увеличением угла форма сечения рассеяния фотонов становится все более несимметричной относительно центра (см. рис. 7).

8. ГРАВИТАЦИОННОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ СИГНАЛОВ

До недавнего времени в качестве тестов, подтверждающих общую теорию относительности, рассматривались три классических эффекта: смещение перигелия Меркурия, отклонение луча в гравитационном поле массивного тела и гравитационное красное смещение. В 1964 г. Шапиро предложил 4-й тест, состоящий в измерении времени, которое должен затратить посылаемый с Земли сигнал на то, чтобы достичь какой-либо внутренней планеты, отразиться от нее и вернуться на Землю (см. ² и приведенные там ссылки). Как показали эксперименты группы Шапиро, гравитационное запаздывание сигнала, отражаемого Меркурием, в поле Солнца составляет величину 240 мкс при точности измерений $1,5 \cdot 10^{-6}$ с.

Теоретически время распространения сигнала, измеряемое удаленным (от гравитирующего тела) наблюдателем, получается интегрированием по всей траектории распространения с учетом изменения гравитационного поля от точки к точке. В экваториальной плоскости вращающегося тела время распространения сигнала от точки R до точки наибольшего сближения d , полученное интегрированием (7.3), в приближении слабого поля ($d \gg r_+$) имеет вид ^{7,8,13}

$$t_{\perp} = (R^2 - d^2)^{1/2} + 2 \ln \frac{R + (R^2 - d^2)^{1/2}}{d} + \left(\frac{R-d}{R+d} \right)^{1/2} + \frac{15\pi-8}{4d} - \frac{4a}{d} \frac{\rho_{\perp}}{|\rho_{\perp}|} \quad (R \gg d) \quad (8.1)$$

Главный член соответствует распространению сигнала в плоском пространстве, второй и третий описывают гравитационное запаздывание, которое измерялось в экспериментах Шапиро. Дополнительная поправка к гравитационному запаздыванию радарного сигнала, обусловленная вращением Солнца, характеризуется величиной $2,1 \cdot 10^{-10}$ с ¹³, лежащей пока за пределами точности измерений.

Однако учет влияния вращения на время распространения сигналов оказывается принципиально важным физически, поскольку дополнительное гравитационное запаздывание в гравитационном поле вращающегося тела может быть не только запаздыванием, но и ускорением. Для сигналов, распространяющихся в экваториальной плоскости, знак дополнительного запаздывания, обусловленного вращением, зависит от того, в сторону вращения или против идет сигнал. Время распространения сигнала, идущего параллельно оси вращения ^{7,8},

$$t_{\parallel} = (R^2 - d^2)^{1/2} + 2 \ln \frac{R + (R^2 - d^2)^{1/2}}{d} + \left(\frac{R-d}{R+d} \right)^{1/2} + \frac{15\pi-8}{4d} + \frac{120-23\pi-4a^2}{4d^2} \quad (R \gg d \gg r_+) \quad (8.2)$$

зависит от вращения в более высоком, по сравнению с (8.1), порядке малости по r_+/d , причем дополнительное гравитационное запаздывание, обусловленное вращением, оказывается отрицательным. Квадратичная зависимость $t_{||}$ от a/d в некотором смысле аналогична поперечному эффекту Доплера специальной теории относительности и означает, что при распространении излучения параллельно оси действие эффекта увлечения не так существенно, как в экваториальной плоскости, однако дополнительное гравитационное запаздывание оказывается ускорением.

Фотон, падающий на вращающуюся черную дыру из некоторой точки R вдоль квазирадимальной траектории (5.3), обладает положительным значением проекции углового момента на ось $L_z = aE \sin^2 \vartheta_0$. Для достижения горизонта событий ему требуется время ³²

$$t = \left[r + \ln(r^2 - 2r) + \ln \left(1 + \frac{a^2}{r^2 - 2r} \right) + \frac{1}{(1 - a^2)^{1/2}} \ln \frac{r - 1 - (1 - a^2)^{1/2}}{r - 1 + (1 - a^2)^{1/2}} \right] \Big|_R^{r_+}, \quad (8.3)$$

меньшее, чем время падения фотона в невращающуюся черную дыру, определяемое первыми двумя слагаемыми в (8.3).

Таким образом, влияние эффекта увлечения инерциальных систем гравитационным полем вращающегося тела приводит к тому, что дополнительное «вращательное» гравитационное запаздывание может быть не только

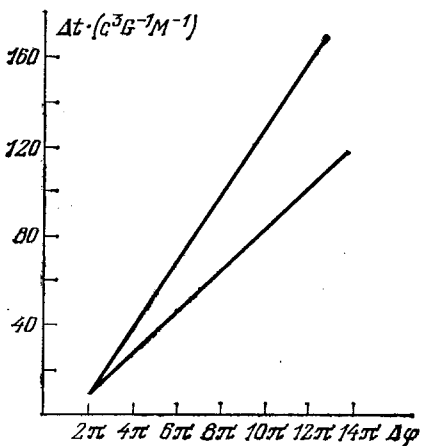


Рис. 21. Относительное запаздывание фотонов, идущих в экваториальной плоскости экстремальной черной дыры по разные стороны от оси (нижняя кривая для Δt_{geom}). Δt_{geom} — чисто геометрическое запаздывание, обусловленное только геометрической разностью путей

запаздыванием, но и ускорением. Время распространения сигнала в гравитационном поле вращающегося тела существенно зависит от ориентации направления распространения сигнала относительно оси вращения. Эта зависимость усиливается для сигналов, распространяющихся в непосредственной близости к области гравитационного захвата вращающейся черной дыры. Аналитические выражения, описывающие в этом случае время распространения сигнала, являются достаточно громоздкими ⁷, а качественно поведение Δt в зависимости от δ и от знака прицельного параметра похоже на поведение азимутального отклонения $\Delta\varphi$ (см. предыдущий раздел). Разность во времени распространения фотонов, идущих в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры вблизи области захвата по разные стороны от дыры, изображена на рис. 21 ⁷. Для углов отклонения (7.13) она описывает относительное гравитационное запаздывание сигналов, проходящих в той области, где «видимый край дыры» (см. рис. 7) пересекает экваториальную плоскость, т. е. максимальное относительное запаздывание фотонов, образующих светящийся ореол, который является границей дыры в изображении освещающего ее источника излучения.

9. ВРАЩАЮЩАЯСЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ЛИНЗА

Эффект гравитационной линзы, предсказанный Эйнштейном в 1936 г., в последнее время приобрел практическую актуальность. Сейчас известно несколько *) астрофизических объектов — двойных и тройных квазаров, которые интерпретируются как изображения одного и того же объекта, формируемые гравитационными линзами, лежащими на луче зрения между квазарами и наблюдателем^{20, 22, 92-94}. В роли гравитационных линз могут выступать звезды, галактики, скопления галактик, а также черные дыры.

Гравитационными линзами в строгом смысле этого слова являются протяженные объекты, в которых распределение плотности (и тем самым показатель преломления) зависит от координат, хотя эффект фокусирования имеет место и для точечной гравитирующей массы, и именно для такого случая он был впервые предсказан⁽²²⁾ и приведенные там ссылки). По гравитационным линзам существует обширная литература. Этот раздел будет посвящен одному единственному аспекту теории гравитационных линз — возможным следствием вращения массивного тела, играющего роль линзы^{3, 7, 8, 20, 21, 72}, которые получены для точечных линз, но, по-видимому, носят общий характер. Они состоят в следующем.

Во-первых, установлено смещение фокуса вращающейся линзы по сравнению с невращающейся^{3, 21}; в первом приближении фокус керровской линзы сдвигается относительно оси, проходящей через центр источника параллельно падающему пучку света, на величину, численно равную удельному угловому моменту линзы a , независимо от прицельного параметра и массы линзы.

Во-вторых, оказывается, что зависимость времени распространения фотона от ориентации его орбитального момента относительно оси вращения приводит к эффекту относительного запаздывания лучей, фокусируемых вращающимся массивным телом. Действие гравитационной линзы приводит к появлению кратных изображений одиночного источника излучения, образованных лучами, проходящими различные оптические пути. В том случае, когда источник излучения, точечная невращающаяся масса в роли линзы и наблюдатель расположены на одной прямой, возникающие изображения являются одновременными, т. е. сигналы распространяются из одной и той же точки источника по различным оптическим путям, соответствующим различным изображениям, за одно и то же время. В случае протяженной гравитационной линзы со сферически симметричным распределением плотности, если наблюдатель находится на прямой, соединяющей источник излучения и центр линзы, все приходящие к нему лучи приходят одновременно (это утверждение можно проверить, используя, например,¹⁷, т. 2, с. 324).

Вращение гравитационной линзы приводит к неодновременности возникающих изображений уже в самом простом случае, когда источник излучения, линза и наблюдатель находятся на одной прямой. Относительное запаздывание между лучами, приходящими в одну и ту же точку наблюдения по различным оптическим путям, максимально в экваториальной плоскости фокусирующего тела. Условие того, что источник излучения, линза и наблюдатель располагаются на одной прямой, имеет вид⁸

$$\frac{d}{b} + \frac{d}{f} = \frac{4}{a} - \frac{4a}{d^2} \left| \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}} \right| + \frac{15\pi - 32}{4d^2}, \quad (9.1)$$

где b — расстояние от линзы до точки испускания, а f — до точки наблюдения (рис. 22). Из этого соотношения следует, что лучи, исходящие из одной и той же точки источника с положительными и отрицательными прицельными

*) К апрелю 1984 г. известно 5 гравитационных линз (Sky and Telescope, April 1984).

параметрами, могут приходить в одну и ту же точку наблюдения только в том случае, если для них выполняется условие

$$d_- = d_+ + a. \quad (9.2)$$

В результате возникает относительное запаздывание во времени, связанное с разностью оптических путей, между лучами, приходящими в одну и ту же точку наблюдения, и определяемое как

$$\Delta t = t_- - t_+ = \frac{8a}{d} GMc^{-3}. \quad (9.3)$$

Величина относительного запаздывания зависит от типа фокусирующего объекта и от взаимного расположения источника, линзы и наблюдателя. Ее можно оценить в пределах

$$\begin{aligned} \Delta t &= 2 \cdot 10^{-6} \text{с} \cdot \left(\frac{M}{5M_{\odot}} \right) \left(\frac{a}{1} \right) \left(\frac{100}{d} \right) = \\ &= 200 \text{с} \cdot \left(\frac{M}{5 \cdot 10^6 M_{\odot}} \right) \left(\frac{a}{1} \right) \left(\frac{100}{d} \right). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Рис. 22. Отклонение лучей, идущих из точки источника S в экваториальной плоскости вращающегося тела M в точку наблюдения O .

d_+ , d_- и $\Delta\varphi_+$, $\Delta\varphi_-$ — расстояния ближайшего подхода и углы отклонения лучей, идущих с положительным и отрицательным прицельными параметрами

В общем случае, когда источник излучения не попадает в экваториальную плоскость линзы, выражение для относительного запаздывания имеет более сложный вид ²⁰:

$$\begin{aligned} \Delta T &= f \left(1 + \frac{f}{b} \right) \left\{ \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 \alpha_2 \left[4\rho \operatorname{tg} \vartheta_d \cos \eta_d + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4} \left(1 + \frac{f}{b} \right) \left(\frac{15\pi}{8} - 1 \right) \right] - 4 \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Ход лучей в этом случае изображен на рис. 23, где α_1 , α_2 — отрезки угловой величины

$$\alpha_{1,2} = \frac{d_{1,2}}{f} \left(1 + \frac{1}{d_{1,2}} \pm \frac{ae}{d_{1,2}} \right),$$

соединяющие изображения с линзой и образующие между собой угол

$$\rho = \frac{a |\cos \vartheta_d|}{f} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right).$$

В качестве ϑ_d можно взять ϑ_1 или ϑ_2 , что не влияет на точность расчета ²⁰.

Вращение линзы может приводить к любопытным следствиям в такой ситуации, когда роль линзы играет вращающаяся черная дыра, расположенная на луче зрения между наблюдателем и источником излучения, угловые размеры которого больше угловых размеров линзы. В этом случае, как уже говорилось, черная дыра должна выглядеть буквально как черная дыра в изображении источника, окруженная несимметричным светящимся ореолом, образованным фотонами, отклоняемыми дырой на углы (7.13). В результате асимметрии рассеяния должно возникать относительное запаздывание во времени распространения фотонов, образующих границу изображения дыры. Относительное запаздывание фотонов, идущих в экваториальной плоскости с мак-

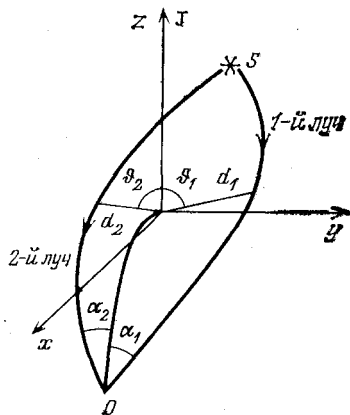


Рис. 23. Ход лучей в керовской гравитационной линзе в общем случае.

S — источник излучения; O — наблюдатель; J — угловой момент линзы

симальным и минимальным прицельными параметрами, описывается формулой⁸

$$\Delta t \approx 3 |\Delta \varphi| G M c^{-3}. \quad (9.6)$$

В случае переменного источника излучения оно может привести к тому, что при изменении яркости источника излучения яркость граничной кривой будет меняться неравномерно: по ней побегит «зайчик», из точки, соответствующей минимальному значению прицельного параметра ρ_{\perp} , со скоростью $v_z \approx (c/6) R_S/R_H$ (для экстремальной черной дыры), где R_H — расстояние от наблюдателя до черной дыры, R_S — от наблюдателя до источника излучения.

Относительное запаздывание сигналов, фокусируемых вращающейся гравитационной линзой, в случае, если в роли линзы выступает массивная черная дыра, характеризуется величиной, которая является вполне измеримой, однако сейчас трудно привести конкретный пример реализации такой ситуации. Не так давно появились сообщения о наблюдении экстремально быстрой переменности во времени интенсивности излучения от некоторых космических объектов. В частности, у квазара 1525 + 227 обнаружено изменение интенсивности излучения с характерным временем $\tau \approx 200$ с⁷⁵. Для объекта масштаба квазара этот промежуток времени настолько мал, что его трудно объяснить процессами, происходящими в самом квазаре. Можно предположить, что быстрая переменность интенсивности излучения в некоторых случаях могла бы оказаться результатом действия вращающейся гравитационной линзы, расположенной между квазаром и наблюдателем. В принципе такая возможность не кажется неправдоподобной.

Автор пользуется возможностью поблагодарить Л. П. Грищука, А. З. Долгинова, Я. Б. Зельдовича, А. Д. Каминкера, Н. Н. Костюковича, Ю. Э. Любарского, И. Д. Новикова и Я. А. Смородинского за полезные обсуждения и критические замечания.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
АН СССР, Ленинград

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богородский А. Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1962.
2. Вайнберг С. Гравитация и космология — М.: Мир, 1975.
3. Гупта Салил. — В кн.: Проблемы статистической и квантовой физики. — М.: УДН, 1980, с. 82.
4. Дорошкевич А. Г. — АЖ, 1966, т. 43, с. 105.
5. Дымникова И. Г. — В кн.: Тезисы Всесоюзной гравитационной конференции. — Минск, 1976, с. 126.
6. Дымникова И. Г. — ЯФ, 1980, т. 31, с. 679.
7. Дымникова И. Г. Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР № 795. — Ленинград, 1982.
8. Дымникова И. Г. — ЖЭТФ, 1984, т. 86, с. 385.
9. Жук И. Т., Пирагас К. А. — Изв. вузов. Сер. «Физика», 1982, т. 4, с. 77.
10. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971.
11. Зельдович Я. Б. — Письма ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 270.
12. Измайлов С. В., Левин Е. С. — Изв. вузов. Сер. «Физика», 1979, т. 5, с. 17; 1980, т. 8, с. 3.
13. Костюкович Н. Н., Митянок В. В. — Acta Phys. Pol. Ser. B, 1979, v. 10, p. 279.
14. Кривенко О. П., Пирагас К. А. Препринт ИТФ-73-38Р. — Киев, 1973.
15. Лайтман А., Сюняев Р. А., Шакура Н. А. — УФН, 1978, т. 126, с. 515.
16. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Теукольский С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. — М.: Мир, 1979.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. — М.: Наука, т. 1, Механика, 1971; т. 2, Теория поля, 1973.
18. Мизнер Ч., Торн К. С., Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, 1977.

19. Мицкевич Н. В. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. — М.: Атомиздат, 1976, вып. 7, с. 15.
- Мицкевич Н. В., Гарсия П. — ДАН СССР, 1970, т. 192, с. 1263.
20. Мицкевич Н. В., Ульдин А. В. Эффект гравитационной линзы в поле Керра. — Рукопись деп. в ВИНТИ АН СССР, 1983, № 2654-83.
- Ульдин А. В., Вайвод А. В. Квазигиперболические траектории луча света в поле Керра. — Рукопись деп. в ВИНТИ АН СССР, 1983, № 847-83.
21. Минаков А. А. — Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1981, т. 3, с. 388.
22. Муханов В. Ф. — УФН, 1981, т. 133, с. 729.
23. Новиков И. Д., Полнарев А. Г. — Природа, 1980, т. 7, с. 12.
24. Оппенгеймер Ю., Снайдер Г. — а) В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М.: Мир, 1979, с. 353; б) Phys. Rev., 1939, v. 56, p. 455.
25. Polnarev A. G., Turchaninov V. I. — Acta Phys. Pol., 1979, v. 29, p. 81.
26. Рис М., Руффини Р., Уилер Дж. Черные дыры, гравитационные волны и космология. — М.: Мир, 1977.
27. Скроцкий Г. В. — ДАН СССР, 1957, т. 114, с. 73.
28. Старобинский А. А. — ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 48.
- Старобинский А. А., Чурилов С. М. — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 3.
29. Торн К. С. — УФН, 1976, т. 118, с. 453.
30. Фролов В. П. — Ibidem, с. 473.
31. Хокинг С. — В кн. ^{24a}, с. 479.
32. Яковлев Д. Г. — ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 369.
33. Bardeen J. M. — Nature, 1970, v. 226, p. 64.
34. Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A. — Astrophys. J., 1972, v. 178, p. 347.
35. Bardeen J. M. — In: Black Holes/Eds C. De Witt, B. S. De Witt, — N.Y.: Gordon and Breach, 1973.
36. Bardeen J. M. — In: Gravitational Radiation and Gravitational Collapse: IAU Symposium 64/Ed. C. DeWitt-Morette. — Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1974.
37. Bardeen J. M., Petterson J. A. — Astrophys. J., 1975, v. 195, L65.
38. Bičák J., Stuchlík Z. — Bull. Astrophys. Inst. Czech., 1976, v. 27, p. 129.
39. Bičák J., Stuchlík Z. — Mon. Not. RAS, 1976, v. 175, p. 381.
40. Blandford R. D., Thorne K. S. — In: General Relativity: An Einstein Centenary Survey/Eds S. W. Hawking, W. Israel. — Cambridge, London; New York; Melbourne: University Press, 1979; перевод: Общая теория относительности/Под ред. С. Хокинга, У. Израэля. — М.: Мир, 1983.
41. Bose S. K., Wang M. Y. — J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 957.
42. Boyer L. H., Lindquist R. W. — J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 531; 1967, v. 8, p. 265.
43. Boyer R. H., Price T. G. — Proc. Cambr. Phil. Soc., 1965, v. 61, p. 531.
44. Calvani M., de Felice F. — Gen. Relat. and Grav., 1978, v. 9, p. 889.
45. Calvani M., de Felice F., Nobili L. — J. Phys. Ser. A, 1980, v. 13, p. 3213.
46. Calvani M., de Felice F., Fabbri R., Turolla R. — Nuovo Cimento. Ser. B, 1982, v. 67, p. 1.
47. Calvani M., Stuchlík Z. — Ibidem, v. 70, p. 128.
48. Calvani M., Turolla R. J. — J. Phys. Ser. A, 1981, v. 14, p. 1931.
49. Carter B. — Phys. Rev., 1966, v. 141, p. 1242.
50. Carter B. — Ibidem, 1968, v. 174, p. 1559.
51. Chandrasekhar S. — In ⁴⁰, p. 370.
52. Christodoulou D. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1596.
53. Christodoulou D., Ruffini R. — Phys. Rev. Ser. D, 1971, v. 4, p. 3552.
54. Cohn H. — Am. J. Phys., 1977, v. 45, p. 239.
55. Collins P. A., Delbourgo R., Williams R. M. — J. Phys. Ser. A, 1973, v. 6, p. 161.
56. Collinson C. D., Smith P. N. — Commun. Math. Phys., 1977, v. 56, p. 277.
57. Cunningham C. T., Bardeen J. M. — Astrophys. J., 1973, v. 183, p. 237.
58. Cunningham C. T. — Ibidem, 1975, v. 202, p. 788; 1976, v. 208, p. 534.
59. Dadhich N., Kale P. P. — J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 1727; Pramana, 1977, v. 9, p. 71.
60. De Felice F. — Nuovo Cimento. Ser. B, 1968, v. 57, p. 351.
61. De Felice F., Calvani M. — Ibidem, 1972, v. 40, p. 447.
62. De Felice F. — Phys. Lett. Ser. A, 1969, v. 69, p. 307.
63. De Felice F. — Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 19, p. 451.
64. De Felice F. — J. Phys. Ser. A, 1980, v. 13, p. 1701.
65. De Felice F., Nobili L., Calvani M. — Ibidem, p. 2401, 3635.
66. Godfrey B. B. — Phys. Rev. Ser. D, 1970, v. 1, p. 2721.
67. Goldstein H. — Zs. Phys., 1974, Bd 271, S. 275.
68. Hughston L., Penrose R., Sommers P., Walker M. — Commun. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 303.
69. Hughston L., Sommers P. — Ibidem, 1973, v. 33, p. 129.
70. Kerr R. P. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 11, p. 237.

71. Kumar M. M.— *Lett. Nuovo Cimento*. Ser. 2, 1980, v. 28, p. 269.
72. Lawrence J. K.— *Astrophys. J.*, 1980, v. 239, p. 305.
73. Lense J., Thirring H.— *Phys. Zs.*, 1918, Bd 19, S. 156.
74. Mashhoon B.— *Astrophys. J.*, 1977, v. 216, p. 591.
75. Matilsky T., Shraeder C., Tananbaum H.— *Ibidem*, 1982, v. 258, p. LI.
76. Misner C. W.— *Bull. Am. Phys. Soc.*, 1972, v. 17, p. 472.
77. Novikov I. D., Thorne K. S.— *In*³⁵, p. 343.
78. Penrose R.— *Riv. Nuovo Cimento*, 1969, v. 1, spec. issue, p. 252.
79. Plebanski J.— *Phys. Rev.*, 1960, v. 118, p. 1396.
80. Prasanna A. R.— *Riv. Nuovo Cimento*, 1980, v. 3, p. 11.
81. Press W. H., Teukolsky S. A.— *Nature*, 1972, v. 238, p. 211.
82. Press W. H., Teukolsky S. A.— *Astrophys. J.*, 1974, v. 141, p. 443.
83. Rees M. J.— *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1979, v. 368, p. 27.
84. Ruffini R., Wheeler J. A. *Relativistic Cosmology and Space Platforms.— In: Proc. of Conference on Space Physics.— Paris: Europ. Space Organ.*, 1971.
85. Sharp N. A.— *Gen. Rel. and Grav.*, 1979, v. 10, p. 659.
86. Sharp N. A.— *J. Comp. Phys.*, 1981, v. 41, p. 295.
87. Sikora M.— *Acta Astron. Pol.*, 1979, v. 29, p. 87.
88. Stewart J. M., Walker M. *Black Holes: The Outside Story.— Berlin: Springer-Verlag*, 1973.
89. Stuchlik Z.— *Bull. Astron. Inst. Czech.*, 1980, v. 31, p. 129; 1981, v. 32, p. 40.
90. Teukolsky S. A.— *Phys. Rev. Lett.*, 1972, v. 29, p. 1414.
91. Walker M., Penrose R.— *Commun. Math. Phys.*, 1970, v. 18, p. 265.
92. Walsh D., Carswell R. F., Weymann R. J.— *Nature*, 1979, v. 279, p. 381.
93. Weymann R. J., Latham D., Angel J. R. P., Green R. F., Liebert J. W., Turnshek D. A., Turnshek D. E., Tyson J. A.— *Nature*, 1980, v. 285, p. 641.
94. Weedman D. W., Weymann R. J., Green R. F., Heckman T. M.— *Astrophys. J.*, 1982, v. 255, p. L5.
95. Wilkins D.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1972, v. 5, p. 814.
96. Yohnston M., Ruffini R.— *Ibidem*, 1974, v. 10, p. 2324.
97. Young P. J.— *Ibidem*, 1976, v. 14, p. 3281.
98. Брагинский В. Б., Полнарев А. Г.— *Письма ЖЭТФ*, 1980, т. 31, с. 444.
99. Гинзбург В. Л.— *ДАН СССР*, 1964, т. 156, с. 43.
100. Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.— *ЖЭТФ*, 1965, т. 49, с. 170.
101. Зельдович Я. Б.— *Письма ЖЭТФ*, 1965, т. 1, с. 40.
102. Зельдович Я. Б.— *Ibidem*, 1971, т. 14, с. 270.
103. Зельдович Я. Б.— *ЖЭТФ*, 1972, т. 62, с. 2076.
104. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.— *АЖ*, 1966, т. 43, с. 758.
105. Зельдович Я. Б., Подурец М. А.— *АЖ*. 1965, т. 42, с. 963.
106. Кардашев Н. С., Новиков И. Д., Полнарев А. Г., Штерн Б. Е.— *АЖ*, 1983, т. 60, с. 209.
107. Полнарев А. Г., Хлопов М. Ю.— *УФН*, 1985, т. 145, с. 369.
108. Blandford R. D., Znajek R. L.— *Mon. Not. RAS*, 1977, v. 179, p. 433.
109. Blandford R. D.— *In: Proc. of AIP Conference: The Galactic Center/Eds G. R. Reigler, R. D. Blandford.— N.Y.: Calif. Inst. Techn.*, 1982, p. 177; перевод в кн.: Центр Галактики/Под ред. Дж. Рейглера, Р. Блэндфорда.— М.: Мир, 1984, с. 224.
110. Braginsky V. B., Caves C. M., Thorne K. S.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1977, v. 15, p. 2047.
111. Braginsky V. B., Polnarjev A. G., Thorne K. S.— *Phys. Rev. Lett.*, 1984, v. 53, p. 863.
112. Chandrasekhar S. *The Mathematical Theory of Black Holes.— Oxford: Clarendon Press*, 1983.
113. Ford L. H.— *J. Phys. Ser. A*, 1982, v. 15, p. 825.
114. Kafatos M.— *Astrophys. J.*, 1980, v. 236, p. 99.
115. Kovetz A.— *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, v. 12, p. 39.
116. Kovetz A., Piran Z.— *Ibidem*, p. 560.
116. Laplace P. C. *Allgemeine geographische Ephemeriden, verfasst von einer Gesellschaft Gelehrter. Bd I.— Weimar: F.X. von Zach*, 1799; перевод в кн.: Хоккинг С., Эллис Дж. *Крупномасштабная структура пространства — времени.— М.: Мир*, 1977, с. 406.
117. Leiter D., Kafatos M.— *Astrophys. J.*, 1978, v. 226, p. 32; 1979, v. 229, p. 46.
118. Piran T., Shaham J., Katz J.— *Ibidem*, 1975, v. 196, p. L107.
118. Piran T., Shahan J.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1977, v. 16, p. 1615.
119. Rees M. J.— *Contemp. Phys.*, 1980, v. 21, p. 99.
120. Rees M. J.— *In*¹⁰⁹, p. 166; перевод как в¹⁰⁹, с. 209.
121. Will C. M.— *Astrophys. J.*, 1975, v. 196, p. 41.

122. Price R. H., Thorne K. S. Caltech preprint GRP-038.— 1985.
Znajek R. L.— Mon. Not. RAS, 1978, v. 185, p. 833.
Damour T.— Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 18, p. 3598.
Thorne K. S., Macdonald D. A.— Mon. Not. RAS, 1982, v. 198, p. 339.
Macdonald D. A., Thorne K. S.— Ibidem, p. 345.
123. Manasse F. K.— J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 746.
Demianski M., Grishchuk L. P.— Gen. Relat. and Gravit., 1974, v. 5, p. 673.
Death P.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 2183.
Thorne K. S., Hartle J. B.— Ibidem, 1985, v. 31, p. 1815.
Damour T.— In: Gravitational Radiation/Eds N. Deruelle, T. Piran.— Amsterdam: North-Holland, 1983, p. 59.
Grishchuk L. P., Kopejkin S. M.— In: Proc. of Symposium IAU No. 114.— Leningrad, 1985 (in press).