

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538. 941

**ДИНАМИКА ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА СВЕРХТЕКУЧИХ
ФАЗ ГЕЛИЯ-3****С. С. Рожков****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	325
2. Параметр порядка	328
3. Свободная энергия	330
4. Спиновая динамика	332
4.1. А-фаза. Пространственно однородный случай	332
4.2. В-фаза. Наличие текстур	333
5. Доменные стенки, или солитоны	334
5.1. Рождение солитонов	334
5.2. А-фаза. V-солитоны	336
5.3. В-фаза. n-солитоны	337
5.4. В-фаза. f-солитоны	339
6. Орбитальная динамика при наличии сверхтекучих потоков в $^3\text{He-A}$	339
6.1. Диссипативный режим сверхтекучего движения	340
6.2. Инстантонный механизм проскальзывания фазы	341
6.3. Феноменологические уравнения и траектории системы	343
7. Заключение	344
Список литературы	345

1. ВВЕДЕНИЕ

В природе существуют две жидкости, которые не затвердевают (при нормальном давлении) при понижении температуры вплоть до абсолютного нуля. Это квантовые жидкости — гелий-4 и гелий-3. Квантовое поведение этих жидкостей связано с тем, что в области их существования (при температурах порядка 1 К) длина волны де Бройля теплового движения атомов He^4 и He^3 сравнивается с расстоянием между атомами жидкости. Квантовые свойства гелия-4 и гелия-3 существенно различны: бесспиновые атомы He^4 образуют бозе-жидкость, а атомы He^3 конденсируются в ферми-жидкость, так как обладают спином 1/2.

Характерным свойством бозе-систем является бозе-конденсация: накопление конечной доли частиц в основном состоянии (с импульсом, равным нулю). Со свойством бозе-конденсации связано явление сверхтекучести, открытое в гелии-4 (при температурах ниже 2,17 К) П. Л. Капицей в 1938 г. Сверхтекучесть — свойство жидкости протекать без трения по капиллярам, однако сам термин «сверхтекучесть» объединяет многочисленные свойства квантовых жидкостей при температурах ниже температуры перехода в сверхтекучее состояние, а сами жидкости в этом состоянии называют сверхтекучими.

Другое явление, связанное с бозе-конденсацией, — сверхпроводимость (свойство электрического тока течь по проводнику, не испытывая сопротивления). Здесь квантовую жидкость образуют электроны, частицы со спином 1/2. Для электронов явление конденсации запрещено статистикой Ферми.

Однако при низких температурах создаются условия (между электронами возникает притяжение), при которых система электронов оказывается неустойчивой относительно образования куперовских электронных пар. Так как электрон имеет спин $1/2$, то куперовская пара обладает целым спином и подчиняется статистике Бозе. В сверхпроводнике, таким образом, происходит бозе-конденсация куперовских пар. Объяснение явления сверхпроводимости как сверхтекучести куперовских пар было дано Бардином, Купером и Шриффером (БКШ) в 1957 г.

После того как стал ясен механизм сверхпроводимости, можно было ожидать, что существует и возможность перехода гелия-3 в сверхтекучее состояние, связанная с куперовским спариванием атомов He^3 . Механизм такого спаривания был найден Л. П. Питаевским в 1959 г.¹ Он показал, что за счет ван-дер-ваальсова притяжения атомы He^3 образуют куперовскую пару с отличным от нуля орбитальным моментом l . Вследствие принципа Паули волновая функция пары антисимметрична относительно перестановки частиц, и, следовательно, нечетным l соответствует триплетное спаривание (полный спин $S = 1$), а четным l — синглетное ($S = 0$).

Таким образом, сверхтекучесть гелия-3 была предсказана. С этого момента начались экспериментальные поиски предсказанного явления. Они увенчались успехом, когда низкотемпературная техника позволила достичь температур порядка одной тысячной Кельвина.

В 1972 г. Ошеров, Ричардсон и Ли² обнаружили в гелии-3 при температурах ниже 3 мК два фазовых перехода, которые они назвали явлением А и явлением В. Вскоре выяснилось, что Ошеровым, Ричардсоном и Ли были открыты две сверхтекучие фазы гелия-3 — А и В.

Фазовые переходы нормального He^3 в А-фазу и А-фазы в фазу В были обнаружены на кривой плавления твердого He^3 (при давлении $P = 35$ атм) при температурах $T_c = 2,6$ мК и $T_{AB} = 2,07$ мК соответственно. С понижением давления температура перехода T_c между нормальным состоянием He^3 и сверхтекучим понижается (до $T_c = 0,9$ мК при $P = 0$), а T_{AB} — растет (до $T_{AB} = 2,4$ мК при $P = 20$ атм), т. е. имеет место поликритическая точка. Фазовый переход между нормальным состоянием и сверхтекучим (А- или В-фазой) является переходом второго рода, а АВ-переход (между He^3 -А и He^3 -В) — первого рода. Теоретические и экспериментальные исследования сверхтекучести гелия-3 показали, что в сверхтекучем He^3 происходит триплетное куперовское спаривание ($S = 1$) с орбитальным моментом $l = 1$.

Сверхтекучие состояния ферми-жидкости с $l = 1$ впервые исследовали Андерсон и Морел³ и Бальян и Вертхаммер⁴ в начале 60-х годов. Именно состояния Андерсона — Морела³ и Бальяна — Вертхаммера⁴ — первые два рассмотренных из многочисленных возможных состояний — реализовались в природе соответственно как А- и В-фазы сверхтекучего гелия-3.

Переход гелия-3 в сверхтекучее состояние, как уже отмечалось, был предсказан¹, однако то, что сверхтекучих фаз He^3 оказалось две, явилось неожиданностью. Интересно отметить, что Бальян и Вертхаммер⁴ фактически не ставили перед собой цели описать сверхтекучесть He^3 , а о состоянии Андерсона — Морела писали следующее: «Андерсон и Морел предсказали для состояния с р-волновым притяжением много странных особенностей, таких как энергетический спектр с анизотропной щелью, исчезающей в определенных направлениях, неэкспоненциальную теплоемкость и поверхностные токи. Все вместе делает это состояние физически невероятным и находится в резком противоречии с результатами БКШ и экспериментом»⁴. Эта цитата дает возможность судить о том, что до экспериментов Ошерова, Ричардсона и Ли² какие-либо количественные предсказания относительно сверхтекучих свойств He^3 (температуры фазового перехода, величины орбитального момента и т. д.) были невозможны.

Теории Андерсона — Морела и Бальяна — Вертхаммера — это теории БКШ для потенциала взаимодействия, зависящего от углов между импуль-

сами взаимодействующих частиц. Данное взаимодействие допускает различные состояния конденсата куперовских пар атомов He^3 . Состоянию Андерсона — Морела соответствует спаривание двух спинов, направленных «вверх» или «вниз», а состоянию Бальяна — Вертхамера — еще и спаривание между спинами «вверх» и «вниз», т. е. между всеми компонентами триплета $S_z = +1, 0, -1$. Свойства состояний Андерсона — Морела и Бальяна — Вертхамера определяются структурой амплитуды спаривания или параметра порядка, а также дополнительными взаимодействиями. Свойства сверхтекучих фаз He^3 поражают своим разнообразием и сочетанием свойств сверхпроводников, жидких кристаллов и магнетиков. С теоретической точки зрения привлекательность сверхтекучего He^3 обусловлена возникновением новых фундаментальных проблем в физике конденсированного состояния.

В настоящее время по сверхтекучему гелию-3 имеется несколько обзоров ⁵⁻⁹. Среди них прежде всего следует отметить ранний часто цитируемый обзор Леггетта ⁵, в котором подробно рассмотрены общие вопросы теории ферми-жидкости, теории БКШ и теории Гинзбурга — Ландау в применении к гелию-3. Обзор Бринкмана и Кросса ⁶ посвящен спиновой и орбитальной динамике сверхтекучего He^3 . Довольно сложная структура параметра порядка сверхтекучих фаз He^3 потребовала применения некоторых элементов топологии (теории гомотопий) при исследовании сверхтекучести гелия-3. Об этом, а также об особенностях и текстурах поля параметра порядка в А-фазе He^3 рассказывается в популярном обзоре Воловика и Минеева ⁷. Обзор Минеева ⁸ дает возможность получить представление об основных экспериментальных методах исследования сверхтекучего He^3 и его свойствах. Кроме того, в ⁸ довольно подробно описана структура параметра порядка и свободной энергии сверхтекучих фаз He^3 , а также дана теория спиновой динамики А- и В-фаз He^3 . О разнообразии сверхтекучих свойств А-фазы He^3 можно узнать из обзора Воловика ⁹.

Пожалуй, наиболее интересные свойства сверхтекучих фаз He^3 связаны с пространственно неоднородными конфигурациями полей параметра порядка: дисклинациями, вихрями, солитонами и т. д. Все эти объекты играют существенную роль в спиновой и орбитальной динамике сверхтекучего гелия-3.

Данный обзор дополняет имеющиеся обзорные статьи рассмотрением спиновой и орбитальной динамики в сверхтекучих фазах He^3 при наличии текстур (пространственных неоднородностей) в поле параметра порядка. Основное внимание при исследовании динамики уделено солитонам и инстантонам — неособым конфигурациям полей параметра порядка. Рассмотрению динамики текстур параметра порядка предшествуют некоторые общие сведения о параметре порядка и свободной энергии А- и В-фаз He^3 (разделы 2 и 3). В разделе 4 изложена теория спиновой динамики Леггетта, которая вместе с экспериментами по ядерному магнитному резонансу позволила идентифицировать А- и В-фазы He^3 как состояния Андерсона — Морела и Бальяна — Вертхамера. В разделе 5 исследована динамика доменных стенок или солитонов в полях параметра порядка. С помощью метода обратной задачи рассеяния описано рождение солитонов при выключении магнитного поля. В He^3 -А и He^3 -В рассмотрены солитоны, существование которых связано с диполь-дипольным взаимодействием магнитных моментов ядер He^3 и наличием внешнего магнитного поля. Дано качественное описание экспериментов с А- и В-фазами He^3 на языке дипольных и магнитных солитонов. В разделе 6 рассмотрено незатухающее орбитальное движение в А-фазе He^3 , являющееся результатом диссипативного течения сверхтекучей жидкости, поддержание которого происходит за счет образования решетки инстантонов — пространственно-временных осцилляций орбитальной части параметра порядка А-фазы He^3 . Дано феноменологическое описание такого движения.

2. ПАРАМЕТР ПОРЯДКА

Сверхтекучие фазы He^3 , как и другие упорядоченные системы (сверхпроводники, жидкие кристаллы, магнетики), удобно описывать на языке параметра порядка. В сверхтекучих жидкостях параметр порядка имеет смысл волновой функции конденсата. Так, например, в случае He^4 ниже λ -точки и для сверхпроводников параметр порядка имеет форму

$$\theta(\mathbf{r}, t) = |\theta(\mathbf{r}, t)| e^{i\Phi(\mathbf{r}, t)}, \quad (1)$$

где $|\theta(\mathbf{r}, t)|^2 = \rho_s(\mathbf{r}, t)$ — сверхтекучая плотность, Φ — фаза волновой функции. Отметим, что волновая функция конденсата является макроскопической величиной, причем наиболее существенным параметром является фаза, с изменением которой в пространстве и времени связано сверхтекучее движение жидкости. Плотность сверхтекучего потока равна

$$\mathbf{j}_s = \frac{i\hbar}{2m} (\theta \nabla \theta^* - \theta^* \nabla \theta) = \frac{\hbar}{m} \rho_s \nabla \Phi \quad (2)$$

(m — масса частицы), откуда

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \Phi, \quad (3)$$

так как $\mathbf{j}_s \equiv \rho_s \mathbf{v}_s$. Из формулы (3) следует, что фаза волновой функции с точностью до постоянного множителя совпадает с потенциалом скорости макроскопического сверхтекучего движения. Здесь можно еще заметить, что для сверхтекучих жидкостей и вообще для упорядоченных систем важным понятием является пространство параметра порядка или область вырождения состояний системы^{7,8,10,11}. Пространством параметра порядка называют подпространство области значений параметра порядка, которому отвечают различные равновесные состояния системы с одинаковой свободной энергией. В рассмотренном примере область значений параметра порядка $\theta(\mathbf{r}, t)$ — комплексная плоскость, а пространство вырождения — окружность радиуса $|\theta| = \text{const}$ на комплексной плоскости. Фаза Φ является параметром вырождения: свободная энергия не зависит от фазы, но каждому значению Φ соответствует свое равновесное состояние системы.

Обратимся теперь к He^3 . В сверхтекучем He^3 параметром порядка является волновая функция пары или аномальная функция Грина

$$\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \langle a_{\alpha}(\mathbf{k}) a_{\beta}(\mathbf{k}) \rangle. \quad (4)$$

Из (4) видно, что

$$\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -\Psi_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}). \quad (5)$$

При спаривании с нечетным l $\Psi_{\alpha\beta}$ — нечетная функция \mathbf{k} и является симметричным спинором второго ранга, описывающим частицу со спином $S = 1$. Считая параметр порядка $\Psi_{\alpha\beta}$ зависящим только от направления в импульсном пространстве $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ (что является хорошим приближением), можно представить $\Psi_{\alpha\beta}$ в виде линейной комбинации сферических функций с заданным l . Для $l = 1$ в качестве этих функций можно выбрать компоненты вектора \mathbf{n} . Как известно, симметричному спинору можно поставить в соответствие комплексный вектор, для которого примем обозначение $\mathbf{d}(\mathbf{n})$. Приведем прямое и обратное соотношения для величин $\Psi_{\alpha\beta}$ и \mathbf{d} :

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) &= i \mathbf{d}(\mathbf{n}) (\hat{\sigma} \hat{\sigma}^y)_{\alpha\beta}, \\ \mathbf{d}(\mathbf{n}) &= -\frac{i}{2} (\hat{\sigma}^y \hat{\sigma})_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{n}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}^x, \hat{\sigma}^y, \hat{\sigma}^z\}$ — матрицы Паули. Величины $(\hat{\sigma} \hat{\sigma}^y)_{\alpha\beta}$ представляют базис разложения спинора $\Psi_{\alpha\beta}$ в спинорном пространстве, а собственно пара-

метром порядка является величина $d(n)^*$. Другая форма параметра порядка получается после указанного выше разложения величины $d(n)$ по сферическим функциям. В случае когда $l = 1$, это разложение имеет вид

$$d_i(n) = A_{ij} n_j, \quad (7)$$

где A_{ij} — комплексная (3×3) -матрица, которая и представляет собой параметр порядка в форме, используемой в дальнейшем. Таким образом, в случае триплетного спаривания пространство параметра порядка 18-мерное или, другими словами, имеется 9 комплексных или 18 вещественных параметров вырождения. Это, очевидно, значительно усложняет исследование He^3 , но одновременно приводит к большому разнообразию свойств сверхтекучих фаз He^3 .

Бартон и Мур¹² с помощью минимизации функционала свободной энергии Гинзбурга — Ландау нашли 11 фаз или 11 типов параметра порядка. Каждая из найденных фаз устойчива в определенной области параметров функционала. Среди этих фаз имеются и состояния Андерсона — Морела и Бальяна — Вертхамера, описывающие А- и В-фазы сверхтекучего He^3 .

Как видно, существует произвол в выборе параметров порядка для обнаруженных экспериментально двух сверхтекучих фаз He^3 . А если еще учесть, что не исключаются и другие типы спаривания, например в d -состоянии ($l = 2, S = 0$), то сделать этот выбор невозможно без анализа наблюдаемых экспериментально свойств сверхтекучих фаз. Так, например, некоторые из теоретически найденных фаз обладали спонтанным магнитным моментом¹², что не наблюдается экспериментально. Поэтому такие фазы (параметры порядка) должны быть отброшены и т. д. Таким образом, не сразу стало очевидным, что первые два из всех рассмотренных состояний с $l \geq 1$ и оказались единственными подходящими состояниями, обладающими всеми свойствами двух сверхтекучих фаз He^3 . Этими состояниями, как уже отмечалось, являются состояния Андерсона — Морела и Бальяна — Вертхамера.

Состояние пары атомов He^3 характеризуется проекциями орбитального момента и спина на некоторые оси. В состоянии Андерсона — Морела все пары имеют проекцию $l = 1$ на некоторую ось, направление которой обозначим единичным вектором l , и проекцию спина, равную нулю, на некоторую ось V , причем направления V и $-V$ — эквивалентны ($V^2 = 1$). Направления осей l и V , а также их взаимная ориентация не фиксированы, т. е. имеют место вырождение относительно направлений осей квантования спина и орбитального момента.

Орбитальную часть волновой функции пары в А-фазе можно представить в виде $\Psi(r) = R(r) \sin \vartheta \cdot \exp(i\varphi)$, где $|r|$ — расстояние между атомами пары, ϑ — угол между l и r , а φ — азимутальный угол в плоскости, перпендикулярной l , отсчитанный от произвольного направления Δ' . Из такого рассмотрения видно, что к вырождению по направлениям l и V добавляется вырождение по фазе φ . Иначе это можно представить как вырождение по ориентациям тройки взаимно перпендикулярных векторов l, Δ' и Δ'' и направлениям спиновой оси V ^{7,9}.

Де Жен¹³ ввел следующую форму параметра порядка в А-фазе:

$$A_{ij}^A = \Delta_A(T) V_i \Delta_j, \quad (8)$$

где

$$\Delta = \Delta' + i\Delta'', \quad l = [\Delta' \Delta'']$$

*) Параметр порядка пропорционален величине $\Delta(T)$ (T — температура), имеющей смысл щели в спектре квазичастиц. Величину $\Delta(T)$ можно считать феноменологическим параметром теории. Вблизи температуры фазового перехода T_c $\Delta(T) \propto (T_c - T)^{1/2}$, а при $T \rightarrow 0$ $\Delta \rightarrow \text{const}$. Подробная интерпретация величины $d(n)$ а также выбор нормировки даны в⁵ (см. также⁸).

Здесь следует отметить, что выражение для сверхтекучей скорости имеет форму (3) только в случае, когда вектор \mathbf{l} постоянен в пространстве. В общем случае, когда \mathbf{l} зависит от координат, выражение для \mathbf{v}_s дается формулой (см., например, ⁹⁾)

$$\mathbf{v}_s^i = \frac{\hbar}{2m} \Delta' \nabla^i \Delta'',$$

где m — масса атома He^3 .

В состоянии Бальяна — Вертхамера проекции спина и орбитального момента на любую ось равновероятны и спиновые координаты произвольным образом вращаются относительно орбитальных. В этом случае параметр порядка пропорционален вещественной ортогональной матрице и равен ¹⁴

$$A_{ik}^B = \Delta_B(T) e^{i\varphi} R_{ik}(\mathbf{n}, \vartheta), \quad (9)$$

где R_{ik} — матрица поворота вокруг некоторого направления \mathbf{n} на некоторый угол ϑ . Здесь параметрами вырождения являются \mathbf{n} , ϑ и фаза φ . В формулах (8) и (9) Δ_A и Δ_B — феноменологические параметры щели в спектре квази-частиц.

3. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ

Свободная энергия упорядоченных систем вблизи температуры фазового перехода строится как разложение по степеням параметра порядка. Она должна быть вещественной и обладать определенными свойствами симметрии, связанными с вырождением системы. В сверхтекучих фазах He^3 в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия магнитных моментов ядер He^3 направления и взаимная ориентация осей квантования спина и орбитального момента произвольны, поэтому в равновесии свободная энергия должна быть инвариантной относительно независимых вращений спинового и координатного пространств *). Свободная энергия Гинзбурга — Ландау, удовлетворяющая этим требованиям и составленная из инвариантов второго и четвертого порядка, имеет вид

$$F_c = -\alpha \text{Sp}(AA^+) + \beta_1 |\text{Sp}(A\tilde{A})|^2 + \beta_2 [\text{Sp}(AA^+)]^2 + \\ + \beta_3 \text{Sp}[(A^+A)(A^+A)^*] + \beta_4 \text{Sp}[(AA^+)^2] + \beta_5 \text{Sp}[(AA^+)(AA^+)^*], \quad (10)$$

где α и β_i — феноменологические параметры теории, которые можно вычислить микроскопически в так называемом приближении слабой связи: $\Delta \ll \epsilon_F$ (ϵ_F — энергия Ферми). Конденсатная энергия (10), а также дополнительные взаимодействия (см. ниже) описывают пространственно однородные состояния А- и В-фаз сверхтекучего He^3 , для которых матрица A определена соответственно формулами (8) и (9).

Если параметр порядка A зависит от координат, то необходимо учесть градиентные члены в разложении свободной энергии Гинзбурга — Ландау ¹³. Наиболее общий вид градиентной энергии есть ⁵

$$F_{\text{grad}} = K_1 \partial_i A_{\mu i} \partial_j A_{\mu j}^* + K_2 \partial_i A_{\mu j} \partial_i A_{\mu j}^* + K_3 \partial_i A_{\mu j} \partial_j A_{\mu i}^*. \quad (11)$$

Для простой модели БКШ со слабой связью $K_1 = K_2 = K_3 \equiv K/2$, а величина K равна

$$K = \frac{3}{5} \frac{7\zeta(3) \hbar^2}{(2\pi k_B T_c)^2} \frac{N}{m^*} \equiv \frac{3}{5} N_F \xi_0^2, \\ N = \frac{k_F^3}{3\pi^2}, \quad N_F = \frac{m^* k_F}{\pi^2 \hbar^2}, \quad \xi_0^2 = \frac{7\zeta(3)}{48\pi^2} \frac{\hbar^2 v_F^2}{k_B^2 T_c^2},$$

*) Матричные элементы параметра порядка A_{ij} столбца j и строки i преобразуются соответственно как вектор при вращении координатного или орбитального пространства и как вектор при вращении спинового пространства.

где N — плотность He^3 , m^* — эффективная масса, ξ_0 — радиус пары, N_F — плотность состояний на поверхности Ферми.

Пространство параметра порядка для состояний Андерсона — Морела и Бальяна — Вертхамера соответственно пяти- и четырехмерное (как это следует из формул (8) и (9)). Вырождение частично снимается при учете спин-орбитального взаимодействия, граничных условий и при наличии магнитного поля. Роль спин-орбитального взаимодействия играет диполь-дипольное взаимодействие магнитных моментов ядер атомов гелия, образующих пару. Выпишем дипольные и магнитные энергии для А- и В-фаз⁵:

$$F_{\text{dip}}^A = -\frac{3}{5} g_D (\text{IV})^2, \quad (12)$$

$$F_{\text{dip}}^B = \frac{8}{5} g_D \left(\cos \vartheta + \frac{1}{4} \right)^2, \quad (13)$$

$$F_{\text{magn}}^A = \lambda (\text{HV})^2, \quad \lambda \sim \chi_A - \chi_B > 0, \quad (14)$$

$$F_{\text{magn}}^B = -a (\text{Hn})^2, \quad a \sim g_D \left(\frac{\mu_0}{\Delta} \right)^2. \quad (15)$$

В формулах (12) — (15) g_D — константа диполь-дипольного взаимодействия, χ_A и χ_B — восприимчивости А- и В-фаз He^3 , μ_0 — магнитный момент ядра атома He^3 , Δ — щель в спектре квазичастиц.

Если не рассматривать граничные условия, то плотность свободной энергии складывается из перечисленных выше энергий:

$$F = F_c + F_{\text{grad}} + F_{\text{dip}} + F_{\text{magn}}. \quad (16)$$

Энергии, входящие в (16), имеют следующий порядок:

$$\begin{aligned} F_c &\sim \alpha \Delta^2, \quad F_{\text{grad}} \sim K \frac{\Delta^2}{r^2}, \quad F_{\text{dip}} \sim g_D, \\ F_{\text{magn}}^A &\sim \lambda H^2, \quad F_{\text{magn}}^B \sim g_D \left(\frac{\mu_0 H}{\Delta} \right)^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где r — некоторая характерная длина, на которой градиентная энергия сравнивается с энергиями F_c , F_{dip} и F_{magn} . Таким образом из равенств $F_{\text{grad}} = F_c$, $F_{\text{grad}} = F_{\text{dip}}$ и $F_{\text{grad}} = F_{\text{magn}}$ находим корреляционную, дипольную и магнитные длины:

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\frac{K}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad \xi_{\text{dip}} = \Delta \left(\frac{K}{g_D} \right)^{1/2}, \quad \xi_{\text{magn}}^A = \left(\frac{K \Delta^2}{\lambda H^2} \right)^{1/2}, \\ \xi_{\text{magn}}^B &= \xi_{\text{dip}} \frac{\Delta}{\mu_0 H}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для этих масштабов длин выполняются неравенства

$$\xi \ll \xi_{\text{dip}}, \quad \xi_{\text{magn}}^A, \quad \xi \ll \xi_{\text{dip}} \ll \xi_{\text{magn}}^B, \quad (19)$$

где $\xi_{\text{dip}} \sim \xi_{\text{magn}}^A$ в магнитных полях $H \sim 20$ Гс.

Дипольная и магнитная длины указывают, на каких расстояниях в сверхтекучих фазах He^3 происходит нарушение спин-орбитальной симметрии. Так, например, из формулы (12) видно, что в А-фазе на расстояниях $r > \xi_{\text{dip}}$ векторы \mathbf{I} и \mathbf{V} , определяющие оси квантования орбитального момента и спина, ориентируются параллельно друг другу, т. е. дипольная энергия устраняет произвол в относительной ориентации осей \mathbf{I} и \mathbf{V} . Магнитная энергия (14) на расстояниях $r > \xi_{\text{magn}}^B$ устанавливает вектор \mathbf{V} перпендикулярно магнитному полю. В случае В-фазы минимум дипольной энергии достигается при $\cos \vartheta_0 = -1/4$, однако направление \mathbf{n} остается произвольным. Это направление можно фиксировать магнитным полем. Как видно из (15), на

расстояниях $r > \xi_{\text{magn}}^B n \parallel \pm H$. И, наконец, на малых расстояниях описание А- и В-фаз с помощью параметров порядка (8) и (9) ограничено корреляционной длиной ξ . Данное рассмотрение показывает, что на разных расстояниях параметр порядка в сверхтекучих фазах He^3 различен^{8,10,11}.

4. СПИНОВАЯ ДИНАМИКА

4.1. А-фаза. Пространственно однородный случай

Вслед за экспериментами Ошерова, Ричардсона и Ли², в которых при измерении давления на кривой плавления были обнаружены сверхтекучие фазы He^3 , появилась работа той же группы¹⁵, где He^3 исследовался методом ЯМР. Было найдено, что в нормальном He^3 , как обычно, имеется сигнал на ларморовой частоте ω_L , однако при понижении температуры ниже T_c оказалось, что резонансная частота непрерывно сдвигается в сторону высоких частот вплоть до перехода из А-фазы в В-фазу, при котором частота резонанса скачком возвращается к значению ω_L . Именно эти эксперименты и теория Леггетта¹⁶, объяснившая их в терминах триплетного спаривания, позволили идентифицировать А- и В-фазы как состояния Андерсона — Морела и Бальяна — Вертхамера.

Эксперимент¹⁵ показал, что сдвиг резонансной частоты в А-фазе описывается формулой

$$\omega^2 = \omega_A^2(T) + \omega_L^2, \quad (20)$$

где $\omega_A^2 \propto 1 - \frac{T}{T_c}$. Этот сдвиг, согласно теории спиновой динамики Леггетта¹⁶, обусловлен ядерным диполь-дипольным взаимодействием.

Исходя из феноменологического гамильтониана Леггетта¹⁶,

$$H = \frac{\gamma_0}{2\chi} S^2 - \gamma_0 \mathbf{S} \mathbf{H} + F_{\text{dip}}, \quad (21)$$

выведем уравнения движения для спина системы \mathbf{S} и параметра порядка. В (21) γ_0 — гидромагнитное отношение ядер атомов He^3 , χ — восприимчивость, \mathbf{H} — магнитное поле.

Рассмотрим гейзенберговские уравнения движения для спина \mathbf{S} и параметра порядка $A_{\mu i}$:

$$i\hbar \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = [\mathbf{S}, H], \quad (22)$$

$$i\hbar \frac{\partial A_{\mu i}}{\partial t} = [A_{\mu i}, H], \quad (23)$$

в которых для \mathbf{S} и $A_{\mu i}$ выполняются следующие коммутационные соотношения^{16 *}:

$$[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k, \quad (24)$$

$$[A_{\mu i}, S_j] = i\hbar \varepsilon_{\mu jk} A_{k i}. \quad (25)$$

*) Коммутационные соотношения (24) и (25) можно получить разными способами. Величины \mathbf{S} и $A_{\mu i}$ можно считать квантовомеханическими операторами и вычислять соответствующие коммутаторы, записав \mathbf{S} и $A_{\mu i}$ в терминах операторов рождения и уничтожения теории БКШ¹⁶. Кроме того, следует помнить, что величины \mathbf{S} и $A_{\mu i}$ макроскопические, и для них можно вычислять скобки Пуассона и писать классические уравнения движения либо перейти от скобок Пуассона к коммутаторам по правилу

$$\{X, Y\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{X}, \hat{Y}].$$

Однако проще всего рассматривать компоненты оператора спина \mathbf{S} как генераторы групп

Следуя Леггетту¹⁶, будем считать, что орбитальное движение более медленное, чем спиновое, и вместо уравнения для $A_{\mu i}$ будем рассматривать уравнение для V , полагая вектор l заданным. Тогда после вычисления коммутаторов находим систему уравнений для S и V ¹⁷:

$$\frac{dS}{dt} = \gamma_0 [SH] + \frac{6}{5} g_D [VI] (VI), \quad (26)$$

$$\frac{dV}{dt} = \gamma_0 [V(H - \gamma_0 \chi_A^{-1} S)]. \quad (27)$$

Далее, линеаризуя (26) и (27) по малым отклонениям величин S и V от их равновесных значений $S_0 = \chi_A \gamma_0^{-1} H_0$ и $V_0 \parallel l$ (H_0 — постоянное магнитное поле), а также по внешнему переменному магнитному полю δH , находим уравнения для $\delta S = S - S_0$ и $\delta V = V - V_0$:

$$\delta \dot{S} = [\chi_A \gamma_0^{-1} \omega_L (\delta H - \gamma_0 \chi_A^{-1} \delta S)] + \Omega_A^2 [\delta V V_0] \chi_A \gamma_0^{-2}, \quad (28)$$

$$\delta \dot{V} = [\gamma_0 V_0 (\delta H - \gamma_0 \chi_A^{-1} \delta S)], \quad (29)$$

где $\omega_L = \gamma_0 H_0$, $\Omega_A^2 = \frac{6}{5} g_D \gamma_0^2 \chi_A^{-1}$.

Для случаев $\delta H \parallel H_0$ и $\delta H \perp H_0$ уравнения (28) и (29) легко решаются. Так, для $\delta H \parallel H_0 \parallel Oz$ ($V_0 \parallel Ox$) имеем

$$\delta S_z = \frac{\gamma_0^{-1} \chi_A \Omega_A^2}{\Omega_A^2 - \omega^2} \delta H_z \equiv \chi_z(\omega) \delta H_z. \quad (30)$$

Из (30) видно, что имеет место продольный резонанс на частоте Ω_A .

В случае поперечного резонанса дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = \Omega_A^2 + \omega_L^2, \quad (31)$$

что согласуется с экспериментальной формулой (20) для частоты поперечного резонанса. Экспериментально продольный резонанс был обнаружен Ошеровым и Бринкманом¹⁸, ими же была установлена связь между частотами продольного и поперечного резонансов (31).

Следует подчеркнуть, что продольный резонанс не имеет ничего общего с обычным резонансом на частоте ларморовой прецессии. Он должен существовать и в нулевом магнитном поле. В этом случае уравнение для δS выглядит особенно просто:

$$\delta \ddot{S} + \Omega_A^2 \delta S = 0, \quad (32)$$

т. е. спин колеблется вблизи положения равновесия за счет спин-орбитального взаимодействия. То же самое происходит и в случае поперечного резонанса, только на фоне обычной классической прецессии.

4.2. В-фаза. Наличие текстур

Для исследования магнитного резонанса в В-фазе воспользуемся уравнениями Леггетта для переменных S , n и ϕ , которые были получены Бринкманом¹⁹. Ограничимся случаем $n = \text{const}$; тогда линеаризованные по малым

пы $SO(3)$ трехмерных спиновых вращений (или генераторы присоединенного представления группы $SU(2)$). Тогда соотношения (24) есть просто коммутационные соотношения для генераторов группы $SO(3)$, а соотношения (25) следуют из (24), если учесть, что спиновый индекс матрицы $A_{\mu i}$ нумерует компоненты вектора, принимающего значения в алгебре Ли группы $SO(3)$ (генераторы S_i образуют базис этой алгебры).

отклонениям от равновесия уравнения для S и ϑ есть

$$\delta \dot{S} = [\chi_B \gamma_0^{-1} \omega_L (\delta H - \chi_B^{-1} \gamma_0 \delta S)] - n \chi_B \gamma_0^{-2} \Omega_B^2 \delta \vartheta, \quad (33)$$

$$\delta \dot{\vartheta} = \gamma_0 n (\delta H - \chi_B^{-1} \gamma_0 \delta S), \quad (34)$$

где $\Omega_B^2 = 3g_D \gamma_0^2 \chi_B^{-1}$.

Из уравнений (33) и (34) следует, что здесь, как и в А-фазе, должен наблюдаться продольный резонанс на частоте $\omega = \Omega_B$. Однако в случае поперечного резонанса имеется одна интересная особенность. Сдвиг частоты резонанса зависит от угла α между n и H_0 :

$$\omega^2 = \omega_L^2 + \Omega_B^2 \sin^2 \alpha. \quad (35)$$

Как отмечалось выше, минимум магнитной энергии (15) достигается при $n \parallel H$, а значит, в пространственно однородном случае сдвиг поперечного резонанса в В-фазе отсутствует, что и наблюдалось в ¹⁵. Таким образом, из формулы (35) следует, что сдвиг частоты поперечного резонанса должен свидетельствовать о наличии пространственно неоднородных конфигураций или текстур поля вектора n .

В некоторых ЯМР-экспериментах с В-фазой на профиле поглощения обнаруживался «провал» (см., например, ²⁰). Этот «провал» легко объяснить, если предположить, что в поле вектора n есть доменная стенка, внутри которой параллельная ориентация вектора n относительно H меняется на антипараллельную ²⁰. Такие доменные стенки или солитоны аналогичны стенкам в нематических жидких кристаллах ^{21, 22}.

В рассмотренном примере n -текстура присутствует неявно. В дальнейшем будем изучать непосредственно текстуры параметра порядка в сверхтекучих фазах He^3 .

5. ДОМЕННЫЕ СТЕНКИ, ИЛИ СОЛИТОНЫ

С топологической точки зрения солитоны представляют собой неособые устойчивые конфигурации полей параметра порядка. Возможность образования таких конфигураций связана с тем, что параметр порядка на разных расстояниях может быть различным. Характерные масштабы длин, определяющие структуру параметра порядка на разных расстояниях, связаны с диполь-дипольным взаимодействием и наличием магнитного поля. Эти же длины определяют и размеры солитонов. В данном разделе будут рассмотрены дипольные и магнитные планарные солитоны в тех простейших случаях, когда солитоны описываются уравнениями типа синус-Гордона. Решения этих уравнений соответствуют доменным стенкам в полях V , I , n и ϑ , образующих параметры порядка сверхтекучих фаз He^3 . Основные вопросы этого раздела — рождение и динамика солитонов.

5.1. Рождение солитонов

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, обсудим вопросы рождения солитонов и нахождения их параметров в ситуациях, описываемых уравнением синус-Гордона ($\psi = \psi(\xi, \tau)$)

$$\psi_{\tau\tau} - \psi_{\xi\xi} + \sin \psi = 0 \quad (36)$$

с начальными условиями

$$\tau = 0: \quad \psi = 0, \quad \psi_\tau = 2\omega(\xi). \quad (37)$$

Так, например, в случае А-фазы He^3 $\psi/2$ — угол между I и V , а начальные условия соответствуют выключению неоднородного магнитного поля ²³.

К (36) и (37) применим метод обратной задачи рассеяния, развитый для уравнения синус-Гордона Абловицем и др.²⁴ (см. также²⁵). Идея этого метода состоит в следующем. Вводится вспомогательная система уравнений

$$\varphi_{\xi} = U(\lambda, \psi) \varphi, \quad (38)$$

$$\varphi_{\tau} = V(\lambda, \psi) \varphi, \quad (39)$$

где $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, а матрицы U и V зависят от параметра λ и искомой функции ψ . Матрицы U и V выбираются таким образом, чтобы из условия совместности системы (38) и (39),

$$U_{\tau} - V_{\xi} + [U, V] = 0, \quad (40)$$

следовало уравнение (36).

Далее, рассматривая задачу на собственные значения для уравнения (38) как задачу рассеяния, в которой потенциал дан в терминах ψ и ψ_{τ} при $\tau = 0$, можно найти данные рассеяния: φ_N и λ_N при $\tau = 0$. Эволюцию данных рассеяния во времени определяет уравнение (39). А применение метода обратной задачи рассеяния позволяет по данным рассеяния найти рассеивающий потенциал, т. е. функцию ψ , удовлетворяющую уравнению (36).

Для целей данного раздела достаточно решить задачу на собственные значения, что даст возможность определить, например, скорость N -го солитона.

Уравнение (38) — это система уравнений для φ_1 и φ_2 . Эта система в случае начальных условий (37) имеет форму²³

$$\varphi_{1\xi} = -\frac{1}{2} ik\varphi_1 - \frac{1}{2} \omega(\xi) \varphi_2, \quad (41)$$

$$\varphi_{2\xi} = \frac{1}{2} \omega(\xi) \varphi_1 + \frac{1}{2} ik\varphi_2, \quad (42)$$

где $k = \lambda - 1/4\lambda$.

Маки и Кумар показали²³, что для Π -образной функции

$$\omega(\xi) = \omega_0(l^2 - \xi^2) \quad (43)$$

задача нахождения собственных значений λ_N сводится к решению уравнения

$$\sin(lp + q) = 0, \quad (44)$$

где $p^2 = \omega^2 - \kappa^2$, $\sin q = \frac{p}{\omega}$, $\cos q = \frac{\kappa}{\omega}$, $\kappa = -ik$.

Чисто мнимым значениям λ соответствуют солитоны, а комплексно-сопряженным парам $(\lambda, -\lambda^*)$ — пульсирующие (breather) моды или дублетные солитоны²⁴.

Из решения уравнения (44) следует, что для образования пар солитонов или пульсирующих мод необходимо выполнение неравенства²³

$$I > I_N; \quad (45)$$

здесь $I = l\omega$, $I_N = \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)$, $N = 1, 2, \dots$. Пары солитонов создаются при условии²³

$$\omega > \omega_N \quad (46)$$

(обратное неравенство отвечает пульсирующим модам). В²³ зависимость ω_N от I найдена численно, однако при $|\kappa/\omega|$, не очень близких к единице, для ω_N легко получить следующее выражение²⁶:

$$\omega_N = \frac{1 + I^2}{I(1 + I^2 - I_N^2) - I_N}. \quad (47)$$

Эта формула качественно верна и при $|\kappa/\omega| \rightarrow 1$. Скорость N -го солитона и частота N -й пульсирующей моды равны соответственно

$$v_N = \left(1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2}\right)^{1/2}, \quad (48)$$

$$\Omega_N = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}\right)^{1/2}. \quad (49)$$

Полученные здесь результаты позволяют описать эксперименты с выключением магнитного поля в терминах обратной задачи рассеяния (величина ω пропорциональна выключаемому полю).

5.2. А-фаза. V-солитоны

Рассмотрим солитоны в А-фазе He^3 , существование которых связано с дипольной энергией (12). Запишем сначала необходимые энергии, входящие в функцию Лагранжа, с учетом вида параметра порядка в А-фазе (8). Градиентная часть потенциальной энергии (в отсутствие поверхностных слагаемых) есть ²⁷

$$F_{\text{grad}} = \frac{K\Delta_A^2}{2} \int d^3r [3|\text{div } \Delta|^2 + |\text{rot } \Delta|^2 + 2|(\Delta \nabla) V|^2 + (\text{div } V)^2 + (\text{rot } V)^2]. \quad (50)$$

Кинетическая энергия, описывающая вращение вектора V , равна ²⁸

$$T = \frac{\chi_A}{2\gamma_0^2} \int d^3r [(\omega - \omega_L)^2 - \omega_L^2], \quad (51)$$

где ω выражается через углы Эйлера α , β и γ :

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\beta_t \sin \gamma + \alpha_t \cos \delta \sin \beta, \\ \omega_y &= \beta_t \cos \gamma + \alpha_t \sin \delta \sin \beta, \\ \omega_z &= \gamma_t + \alpha_t \cos \beta. \end{aligned} \quad (52)$$

Направим постоянное магнитное поле H вдоль оси z ; тогда в равновесии векторы V и I находятся в плоскости xOy , и будем считать, что распределение I однородно, а V -текстура меняется только в направлении z . В этом случае лагранжиан имеет простой вид:

$$\mathcal{L} = \frac{\chi_A}{2\gamma_0^2} (\gamma_t^2 - 2\omega_L \gamma_t - c_\perp^2 \gamma_z^2 + \Omega_A^2 \cos^2 \gamma), \quad (53)$$

где γ — угол между I и V , $c_\perp = \gamma_0 (K\Delta_A^2/\chi_A)^{1/2}$ — скорость спиновых волн, распространяющихся перпендикулярно I , последний член в (53) — дипольная энергия (12).

Из (53) легко находим уравнение для угла между векторами I и V :

$$\gamma_{tt} - c_\perp^2 \gamma_{zz} + \Omega_A^2 \sin \gamma \cos \gamma = 0. \quad (54)$$

Это уравнение имеет солитонное решение

$$\gamma = 2 \arctg \exp \left[\pm \frac{z - ut}{\xi_{\text{dip}} (1 - v^2)^{1/2}} \right], \quad (55)$$

описывающее возмущение, движущееся со скоростью $u = v c_\perp$ и имеющее размер $\xi_{\text{dip}} = c_\perp / \Omega_A$ (при $v = 0$). Параметр v определяется начальными условиями.

Маки и Кумар ²³ рассмотрели экспериментальную ситуацию с выключением неоднородного магнитного поля $H_0(z)$. В этом случае к уравнению (54) надо добавить следующие начальные условия:

$$t = 0: \quad \gamma = 0, \quad \gamma_t = \delta \gamma_0 H_0(z), \quad (56)$$

где δ — постоянная, определяемая из эксперимента (в ²³ $\delta = 1$).

Делая замену $2\gamma = \psi$ и переходя к безразмерным переменным $\tau = \Omega_A t$ и $\xi = \Omega_A z / c_\perp$, приходим к стандартному уравнению синус-Гордона (36) с начальными условиями (37), где в случае II-образного импульса (43) $l = L/\xi_{\text{dip}}$, $\omega = \delta\gamma_0 H_0/\Omega_A$, $2L$ — «длина» импульса, H_0 — напряженность выключаемого поля, а скорость N -го солитона $u_N = v_{\text{NC}\perp}$. Если считать, согласно ²³, что $\delta = 1$, то при $\omega \sim 1$ солитоны рождаются сотнями ²⁹.

Отметим, что V-солитон представляет собой доменную стенку между двумя ориентациями вектора \mathbf{V} — параллельной и антипараллельной вектору \mathbf{l} . V-солитон может наблюдаться в том случае, если однородное распределение \mathbf{l} задается, например, граничными условиями. В открытой системе однородное распределение \mathbf{l} неустойчиво, и образуется смешанная структура, в которой векторы \mathbf{l} и \mathbf{V} вращаются в плоскости, перпендикулярной магнитному полю ^{27,29}.

Недавние эксперименты ³⁰, в которых He^3 -А исследовался методом импульсного ЯМР, продемонстрировали эффекты, обусловленные доменными стенками в поле вектора \mathbf{V} . В этих экспериментах V-солитоны (по-видимому, *splay*-типа ^{21,22,29}) рождались под действием радиочастотного импульса, отклоняющего намагниченность на большой угол ($>140^\circ$). Теоретическое объяснение рождения солитонов в таких экспериментах предложено Фоминым ³¹ на основе того, что пространственно однородная прецессия намагниченности, отклоненной на конечный угол, является неустойчивой ³². В ³¹ показано, что в А-фазе He^3 невозможно образование периодических структур, в которых вектор \mathbf{V} может поворачиваться на 2π относительно \mathbf{l} , образуя доменную стенку. Такая доменная стенка неустойчива, она должна либо исчезнуть, либо распасться на две. Распадом доменных стенок можно объяснить изменение со временем сдвига частоты ЯМР, наблюдавшееся в ³⁰. Кроме того, переход от однородной прецессии к солитонной ³¹ качественно объясняет наличие двух частот прецессии намагниченности, отклоненной на большой угол ³⁰.

5.3. В-фаза. n-солитоны

Как уже говорилось, наличие магнитного поля приводит в В-фазе He^3 к образованию n-текстур, аналогичных магнитным стенкам в нематиках ²¹. В этом разделе рассмотрим рождение и распространение n-солитонов при выключении неоднородного магнитного поля. В подобной ситуации Вебб, Сагер и Уитли ³³ наблюдали в He^3 -В распространение медленных магнитных возмущений, скорость которых сложным образом зависела от возбуждающего магнитного поля. Для отождествления обнаруженных в ³³ магнитных возмущений с n-солитонами необходимо провести более детальные измерения зависимости скорости волны от магнитных полей, однако качественно результаты работы ³³ можно объяснить на языке n-солитонов ²⁶.

Потенциальная энергия в В-фазе He^3 , находящегося в магнитном поле, складывается из ориентационной энергии в магнитном поле (15) ³⁴, дипольной энергии (13) и градиентной (11), которая в переменных \mathbf{n} и ϑ записывается в форме ³⁵

$$F_{\text{grad}} = \frac{K\Delta_B^2}{2} \int d^3r \left\{ (\nabla\vartheta)^2 + 2(1 - \cos\vartheta) [(\text{div } \mathbf{n})^2 + (\text{rot } \mathbf{n})^2] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [(\mathbf{n}\nabla)\vartheta + \sin\vartheta \text{div } \mathbf{n} + (1 - \cos\vartheta) (\mathbf{n} \text{rot } \mathbf{n})^2] \right\}. \quad (57)$$

Кинетическая энергия дается формулой (51), в которой χ_A надо заменить на χ_B , а ω удобно выразить через \mathbf{n} и ϑ ³⁵:

$$\omega = n\dot{\vartheta} - (1 - \cos\vartheta) [\mathbf{n}\mathbf{n}_t] + \sin\vartheta \dot{\mathbf{n}}_t. \quad (58)$$

Теперь нетрудно получить уравнение движения для вектора \mathbf{n} , считая, что реализуется конфигурация Леггетта ($\cos \vartheta_0 = -1/4$), так как для широкого интервала магнитных полей дипольная энергия значительно превосходит магнитную. Кроме того, ограничимся рассмотрением планарных структур, пренебрегая выходом вектора \mathbf{n} из плоскости за счет того, что bend-и twist-деформации²² смешиваются³⁵. С учетом сказанного полагаем, что магнитное поле направлено вдоль оси x , а $\mathbf{n} = \{\cos \varphi(x), \sin \varphi(x), 0\}$. Этот случай относится к splay-bend-деформациям и описывается уравнением²⁶

$$\varphi_{tt} - c_3^2 \varphi_{xx} + \frac{c_3^2}{2\xi_{\text{H}3}\varphi_x} \frac{\partial}{\partial x} [\sin^2 \varphi (1 + \alpha^2 \xi_{\text{H}3}^2 \varphi_x^2)] = 0; \quad (59)$$

здесь

$$c_i^2 = \frac{4}{5} \frac{\gamma_0^2}{\chi_{\text{B}}} K_i, \quad \xi_{\text{H}i} = \frac{1}{H} \left(\frac{K_i}{a} \right)^{1/2}, \quad K_i = \frac{5}{64} b_i K \Delta_{\text{B}}^2, \quad \alpha^2 = 1 - \frac{b_1}{b_3},$$

где $b_1 = 13$, $b_2 = 11$, $b_3 = 16$, K_i — «константы Франка»²², а выражение для a дается формулой (6) из работы³⁶ ($a \sim g_{\text{D}} (\mu_0/\Delta_{\text{B}})^2$).

Отметим, что если $K_1 = K_3$ ($\alpha^2 = 0$), статическое решение (59) представляет собой стенку, перпендикулярную магнитному полю²¹. Анизотропия ($K_1 \neq K_3$) приводит к тому, что стенка становится несимметричной относительно плоскости $x = 0$.

Если искать решение (59) в виде бегущей волны: $\varphi = \varphi(x - ut)$, то получим условие²⁶

$$\frac{u^2}{c_3^2} \ll \frac{b_1}{b_3} \approx 1, \quad (60)$$

при выполнении которого различием между K_1 и K_3 можно пренебречь и вместо уравнения (59) решать уравнение

$$\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx} + \Omega_{\text{H}}^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0, \quad (61)$$

где

$$c_1 = c_3 = c, \quad \Omega_{\text{H}}^2 = \gamma^2 H, \quad \gamma^2 = \frac{4}{5} \frac{a\gamma_0^2}{\chi_{\text{B}}}.$$

Ситуация с выключением магнитного поля описывается теперь точно так же, как и в предыдущем параграфе, только здесь

$$l = \frac{L}{\xi_{\text{H}}}, \quad \omega = \frac{\delta\gamma_0 H_0}{\gamma H},$$

а скорость N -го солитона равна

$$u_N = c \left(1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2} \right)^{1/2}. \quad (62)$$

Обсудим кратко зависимость скорости солитона от температуры T и полей H_0 и H . Температурная зависимость предельной скорости солитона $c \propto \Delta_{\text{B}} \propto [1 - (T/T_c)]^{1/2}$ (здесь не учитывается зависимость χ_{B} от температуры) совпадает с температурной зависимостью скорости магнитных возмущений, обнаруженных в³³. Величина этой скорости была примерно в три-четыре раза меньше c , причем скорость магнитных возмущений возрастала при уменьшении магнитного поля H_{M} и увеличении поля H_{R} ³³. Скорость \mathbf{n} -солитона, согласно формуле (62), имеет подобные зависимости от полей H и H_0 , которым соответствуют H_{M} и H_{R} . Это легко видеть, когда $\omega_N \sim 1$ и зависимость u_N от H и H_0 определяется в основном величиной $\omega \propto H_0/H$. Следует еще отметить, что температурная зависимость скорости солитона, данная формулой (62), оказывается более сильной, чем наблюдавшаяся в работе³³, если учесть, согласно³⁶, «экспериментальную» зависимость величины a от температуры.

5.4. В-фаза. Φ -солитоны

Φ -солитоны в В-фазе He^3 , как и V-солитоны в А-фазе, обусловлены диполь-дипольным взаимодействием. Необходимые энергии — (13), (51) и (57) — уже записаны, поэтому, считая, что поле вектора \mathbf{n} постоянно и $\mathbf{n} \parallel \mathbf{H} \parallel \text{Oz}$, сразу приведем уравнение для $\Phi = \Phi(t, z)$ ^{37,23}:

$$\Phi_{tt} - c_{\parallel}^2 \Phi_{zz} = \frac{16}{15} \Omega_B^2 \left(\cos \Phi + \frac{1}{4} \right) \sin \Phi, \quad (63)$$

где $c_{\parallel} = \gamma_0 (K \Delta_B^2 / 2\chi_B)^{1/2}$ — скорость спиновых волн вдоль направления \mathbf{n} . Имеется два типа солитонных решений уравнения (63) ³⁷:

$$\text{tg} \frac{\Phi}{2} = \pm \left(\frac{5}{3} \right)^{1/2} \text{cth} \frac{z - ut}{2\xi_{\text{dip}}(1 - v^2)^{1/2}}, \quad (64)$$

$$\text{tg} \frac{\Phi}{2} = \pm \left(\frac{5}{3} \right)^{1/2} \text{th} \frac{z - ut}{2\xi_{\text{dip}}(1 - v^2)^{1/2}}, \quad (65)$$

где $\xi_{\text{dip}} = c_{\parallel} / \Omega_B$ — дипольная длина, $u = v c_{\parallel}$ — скорость солитона, v — параметр.

В солитоне 1-го типа (64) угол Φ меняется от Φ_0 до $2\pi - \Phi_0$, во втором типе доменной стенки (65) Φ изменяется от $-\Phi_0$ до Φ_0 , где $\cos \Phi_0 = -1/4$. В работе ¹¹ показано, что солитон 2-го типа непрерывно превращается в \mathbf{n} -солитон с уменьшением энергии.

Решения (64) и (65) являются частными решениями уравнения (63). В отличие от случая уравнения синус-Гордона найти аналитически N -солитонные решения не удастся. Здесь отметим только, что, как и в случае уравнения синус-Гордона, для уравнения (63) численным интегрированием найдены состояния, аналогичные пульсирующим модам ³⁸.

6. ОРБИТАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ПРИ НАЛИЧИИ СВЕРХТЕКУЧИХ ПОТОКОВ В He^3 -А

До сих пор речь шла в основном о спиновой подсистеме сверхтекучих фаз He^3 . Лишь кратко упоминалось о том, что в А-фазе He^3 возможно образование смешанных спин-орбитальных текстур вследствие диполь-дипольного взаимодействия ^{27,29}. Есть еще один важный случай, когда появляется стенка между двумя противоположными ориентациями \mathbf{l} . Эта стенка возникает в том случае, когда в жидкости имеется сверхтекучий поток. Такую ситуацию исследовали Холл и Хук ^{39,40}, предложившие объяснение экспериментов Полсона, Крузиуса и Уитли ⁴¹⁻⁴², открывших незатухающее орбитальное движение в He^3 -А. Полсон, Крузиус и Уитли наблюдали незатухающие колебания интенсивности проходящего через А-фазу звука после предварительных изменений направления и величины магнитного поля. Колебания могли продолжаться часами, и воспроизводились мельчайшие детали формы колебаний ⁴³.

Хук и Холл ⁴⁰ показали, что описанные осцилляции можно объяснить прецессией доменной стенки в поле вектора \mathbf{l} , к ориентации которого очень чувствительно поглощение звука. Период осцилляций, согласно ⁴⁰, равен $3\mu_l / \rho_s v_s^2$ (где μ_l — коэффициент орбитальной вязкости, ρ_s — сверхтекучая плотность вдоль \mathbf{l}), что довольно хорошо описывает период и температурную зависимость колебаний интенсивности звука в экспериментах Полсона, Крузиуса и Уитли ⁴¹.

Другое объяснение этих экспериментов предложили Воловик ⁴⁴ и Холл ⁴⁵. Согласно ^{44,45} прецессия вектора \mathbf{l} происходит в диссипативном режиме, аналогичном нестационарному эффекту Джозефсона в обычных сверхтекучих жидкостях. Этот эффект обусловлен так называемым механизмом проскальзыва-

вания фазы ⁴⁶. Прежде чем перейти к описанию механизма проскальзывания фазы в He³-А, названного инстантонным ⁴⁷, рассмотрим диссипативный режим сверхтекучего движения и механизм проскальзывания фазы в сверхтекучем He⁴ и сверхпроводнике.

6.1. Диссипативный режим сверхтекучего движения

Как уже отмечалось, явление сверхтекучести связано с упорядочением в системе или когерентным поведением макроскопической доли частиц сверхтекучей жидкости. С топологической точки зрения это явление обусловлено вырождением по фазе волновой функции конденсата или параметра порядка. Не менее интересным следствием топологических свойств пространства параметра порядка является другой режим сверхтекучего движения — диссипативный. В этом режиме происходит периодическое скачкообразное изменение фазы («проскальзывание фазы») параметра порядка за счет образования вихрей в потоке жидкости, когда скорость сверхтекучего потока превышает некоторую критическую. Это режим нестационарного эффекта Джозефсона ^{48,7,9}. В сверхпроводнике этот процесс сопровождается электромагнитным излучением.

Вихрь в сверхтекучем He⁴ или сверхпроводнике представляет собой особую линию, при обходе которой по замкнутому контуру фаза параметра порядка (1) меняется на $2\pi n$ (где n — целое число), а на самой линии фаза не определена. Вдали от линии вихря параметр порядка дается формулой

$$\theta(r) = \theta_\infty \exp(in\varphi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\theta_\infty = |\text{const}|$, φ — полярный угол цилиндрической системы координат $\{z, \rho, \varphi\}$, а линия вихря направлена вдоль оси z . Вид параметра порядка находится из соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа. На больших расстояниях от оси вихря уравнение для фазы $\Phi = \Phi(\varphi)$ имеет простой вид:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0,$$

откуда следует, что $\Phi = C\varphi$, где C — постоянная. Из требования непрерывности параметра порядка $\theta(r)$ при изменении угла φ на 2π следует, что постоянная C должна быть равна целому числу n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Наглядно распределение поля параметра порядка можно представить как распределение двумерного вектора (длины θ_∞), который можно ввести вместо величины $\theta_\infty \exp(in\varphi)$. Например, для $n = 1$ вихрь можно изобразить полем таких векторов, касательных к концентрическим окружностям. Центр окружностей соответствует линии вихря и является особой точкой векторного поля (в этой точке направление векторного поля не определено). Заметим, что на самом деле на линии вихря $|\theta|$ (а значит, сверхтекучая плотность) обращается в нуль, что соответствует разрушению конденсата и переходу жидкости в нормальное состояние. Последнее означает, что для образования вихря требуются затраты энергии, так как упорядоченное состояние соответствует минимуму энергии (при температурах ниже T_c).

Вернемся к рассмотрению диссипативного режима сверхтекучего движения, связанного с образованием вихрей в сверхтекучем потоке. Запишем уравнение движения обычной сверхтекучей жидкости

$$\frac{dv_s}{dt} = -\nabla\mu^0, \quad (66)$$

где μ^0 — химический потенциал в системе отсчета, в которой скорость нормального движения $\mathbf{v}_n = 0$ (здесь и далее полагаем, что $\mathbf{v}_n \equiv 0$) ⁶. Уравне-

ние (66) описывает ускорение сверхтекучей жидкости под действием внешней силы.

Так как $\dot{v}_s = (\hbar/m) \Delta \Phi$, то (66) можно проинтегрировать вдоль некоторого пути, соединяющего точки 1 и 2:

$$\frac{d}{dt} (\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{m}{\hbar} (\mu_2^0 - \mu_1^0), \quad (67)$$

где m — масса частицы (атома He^4 или куперовской пары). Согласно уравнению (67) разность фаз между некоторыми точками линейно растет со временем. Андерсон ⁴⁶ показал, что неограниченному ускорению сверхтекучей жидкости препятствует образование вихрей, которые, пересекая линию, соединяющую точки 1 и 2, уменьшают разность фаз на 2π (для $n = 1$). В результате устанавливается стационарное состояние, которое можно описать, усредняя уравнение (67) по большому промежутку времени τ . Тогда число вихрей, которые пересекают линию, соединяющую точки 1 и 2, в единицу времени, равно ⁴⁶

$$\left\langle \frac{dN_V}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\tau \frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dt} dt = -\frac{m}{2\pi\hbar} (\mu_2^0 - \mu_1^0). \quad (68)$$

Уравнение (68) и определяет стационарное диссипативное течение сверхтекучей жидкости, являющееся результатом «проскальзывания фазы», т. е. изменения разности фаз между некоторыми точками вследствие образования вихрей.

6.2. Инстантонный механизм проскальзывания фазы

В А-фазе сверхтекучего He^3 , как показали Андерсон и Тулуз ⁴⁸, проскальзывание фазы может осуществляться за счет движения несингулярных вихрей (на линии которых поля параметра порядка непрерывны или, другими словами, конденсат не разрушается ^{7,9}). Однако в He^3 -А, по-видимому, реализуется инстантонный механизм проскальзывания фазы, предложенный Воловиком ^{44,7,9} и Холлом ⁴⁵. Остановимся на этом механизме подробнее.

В случае А-фазы He^3 вместо уравнения (66) имеем ⁶ ($v_n = 0$):

$$\frac{\partial v_s^i}{\partial t} = -\frac{\partial \mu^0}{\partial x_i} - \frac{\hbar}{2m} \mathbf{l} \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right]. \quad (69)$$

Рассмотрим одномерное движение, считая, что все переменные зависят от одной координаты z вдоль потока ($v_s \equiv v_s^z$), и перепишем (69) в форме

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\frac{\partial \mu^0}{\partial z} - n, \quad (70)$$

где

$$n = \frac{\hbar}{2m} \mathbf{l} \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right]. \quad (71)$$

Легко видеть, что в системе достигается стационарный режим, если ⁴⁴

$$-\left\langle \frac{\partial \mu^0}{\partial z} \right\rangle = \langle n \rangle \neq 0,$$

т. е. средний по времени ненулевой градиент химпотенциала поддерживается осцилляциями вектора \mathbf{l} .

Величина n имеет смысл плотности инстантонного заряда. Интеграл от величины n по некоторой пространственно-временной области ΔS (в рассматриваемом случае размеры ΔS определены периодами осцилляций по z и t) с однородным распределением l на границе ΔS является топологическим инвариантом (зарядом), т. е. величиной, не зависящей от непрерывных деформаций поля l . А именно, целое число ^{44,9}

$$N = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S} dz dt l \left[\frac{\partial l}{\partial z} \frac{\partial l}{\partial t} \right]$$

есть степень отображения области ΔS на единичную сферу $l^2 = 1$. Степень отображения равна числу обходов сферы вектором l при движении по области ΔS . Конфигурации поля l с $N \neq 0$ называют инстантонами (см., например, ⁴⁹).

На рис. 1 приведен пример конфигурации поля l с $N = 1$. Из рисунка видно, что неоднородное распределение поля l имеет конечные размеры как в пространстве, так и во времени, откуда и возникло название инстантон (от слова *instant* (англ.) — мгновение). Впервые такие конфигурации были, по-видимому, найдены для поля директора n ($n^2 = 1$, а направления n и $-n$ эквивалентны) в нематическом жидком кристалле ²². На рис. 2 показано распределение поля n , сечение которого в плоскости y, z имеет конфигурацию, изображенную на рис. 1 (с заменой времени t на вторую пространственную координату y). Такое распределение единичного векторного поля называют

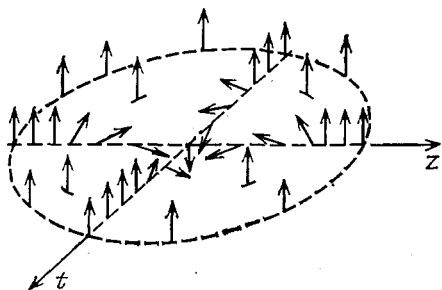


Рис. 1

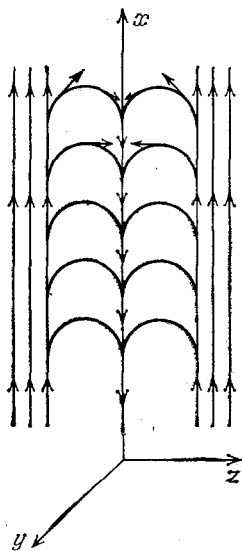


Рис. 2

еще неособым вихрем или линейным солитоном ^{51,11}. Именно такие вихри в поле вектора l рассмотрели Андерсон и Тулуз ⁴⁸ в предложенном ими механизме проскальзывания фазы. Следует отметить еще то, что общую значимость полевые конфигурации, характеризующиеся степенью отображения сферы в сферу (инстантоны, или неособые вихри, или линейные солитоны), приобрели после появления работы Белафина и Полякова ⁵⁰, посвященной исследованию планарного гейзенберговского магнетика, который является одновременно представителем широкого класса моделей теории поля с геометрическим типом взаимодействия. Белафин и Поляков ⁵⁰ нашли точные мультиинстантонные решения уравнений в рассмотренной ими модели. Один из многих примеров применения понятия инстантона описан выше: пространственно-временные осцилляции вектора l в виде решетки инстантонов в пространстве z, t осуществляют проскальзывание фазы в $\text{He}^3\text{-A}$. Вопросы, связанные с инстантонами Белафина — Полякова, подробно исследованы в обзоре Переломова ⁴⁹.

Обратимся теперь к гидродинамике А-фазы He^3 .

6.3. Феноменологические уравнения и траектории системы

Режим незатухающего орбитального движения в $\text{He}^3\text{-A}$ реализуется при создании специальных начальных условий, к тому же действительно незатухающее движение не наблюдается при давлениях, меньших давления плавления⁴³. Имеющиеся численные решения сложного нелинейного уравнения для вектора \mathbf{l} ⁴⁰ не позволяют судить о том, какие режимы возможны в сверхтекучей жидкости и какой из них жидкость выберет при тех или иных условиях. Чтобы иметь представление о возможных режимах поведения $\text{He}^3\text{-A}$ при наличии в нем сверхтекучих потоков, Воловик⁴⁷ предложил феноменологическое описание гидродинамики $\text{He}^3\text{-A}$, основанное на инстантонном механизме проскальзывания фазы^{7,9,44,45}. Рассмотрим эту модель.

Добавим к уравнению (70) для \mathbf{v}_s уравнение для \mathbf{l} ^{47,6}:

$$\mu_l \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{l}} + \mathbf{l} \left(\mathbf{l} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{l}} \right) + \frac{\hbar}{2m} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{v}_s} \left[\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z} \right], \quad (72)$$

в котором

$$E = \frac{\rho_s v_s^2}{2} + \varepsilon(\mathbf{l}), \quad (73)$$

где $\rho_s \sim K \Delta_A^2 m^2 / \hbar^2$ — сверхтекучая плотность, $\varepsilon(\mathbf{l})$ — орбитальная часть градиентной энергии (50)⁴⁷.

Совершим теперь переход к «грубой» модели Воловика⁴⁷, в которой система гидродинамических уравнений (70) и (72) для \mathbf{v}_s и \mathbf{l} сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для переменных, усредненных по областям, превышающим характерную область $z_0 t_0$ пространственно-временных изменений вектора \mathbf{l} плотности градиентной энергии ε , плотности сверхтекучего потока v_s и плотности инстантонного заряда n . Формально этот переход производится путем замены производных $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial t$ величинами $1/z_0$ и $1/t_0$ соответственно, где z_0 и t_0 определяются соотношениями⁴⁷

$$n \sim \frac{\hbar}{m} \frac{1}{t_0 z_0}, \quad (74)$$

$$\varepsilon \sim \frac{K \Delta_A^2}{z_0^2} \sim \rho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1}{z_0^2}. \quad (75)$$

Так, например, уравнение для ε получается из уравнения (72), домноженного на $\partial \mathbf{l} / \partial t$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\delta \varepsilon}{\delta \mathbf{l}} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = -\mu_l \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right)^2 + \rho_s v_s n, \quad (76)$$

с использованием оценки

$$\left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right)^2 \sim \frac{1}{t_0^2} \sim \rho_s \frac{n^2}{\varepsilon}. \quad (77)$$

Подставляя (77) в (76), находим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \rho_s v_s n - a_1 \rho_s \mu_l \frac{n^2}{\varepsilon}. \quad (78)$$

где $a_1 > 0$ — параметр модели порядка единицы. Уравнение для n выводится аналогичным образом и содержит четыре феноменологических параметра⁴⁷.

Уравнение для v_s получается заменой величин, входящих в (70), их средними значениями. Градиент химического потенциала либо задается, либо, в режиме заданного тока, определяется из (70).

Таким образом, имеется система уравнений для крупномасштабных переменных v_s , ε и n . Эта система содержит пять безразмерных параметров, один из которых можно устранить масштабным преобразованием. В случае

заданного тока ($\partial v_s / \partial t = 0$) остается два уравнения, которые в системе единиц $v_s = \rho_s = \mu_l = 1$ имеют вид ⁴⁷

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\alpha_1} = n - \frac{n^2}{\varepsilon}, \quad \alpha_1 > 0, \quad (79)$$

$$\dot{n} = n\varepsilon - \frac{n^3}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha_2 n^2}{\varepsilon} - \alpha_3 n, \quad (80)$$

где α_1 , α_2 и α_3 — параметры модели.

Исследование зависимости траекторий системы (79) и (80) от параметров α_i позволяет получить представление о состояниях А-фазы при наличии сверхтекучих потоков, а также о переходах системы из одного состояния в другое под действием температуры и внешних полей. Таким переходам соответствуют изменения топологии траекторий (79) и (80) или бифуркации.

Из уравнений (79) и (80) видно, что возможны два стационарных режима.

1) Без диссипации, т. е. в отсутствие инстантонов:

$$n = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad (81)$$

где ε_0 — произвольно.

2) Осцилляционный диссипативный режим:

$$\varepsilon = (1 + \alpha_3 - \alpha_2) \rho_s v_s^2, \quad n = \frac{\varepsilon v_s}{\mu_l}, \quad (82)$$

при условии, что

$$1 + \alpha_3 > \alpha_2. \quad (83)$$

В случае бездиссипативного режима, когда $\varepsilon_0 \neq 0$, имеется сверхтекучий поток с неоднородным распределением l .

В диссипативном режиме, как следует из (74), (75) и (82), для временного и пространственного масштабов осцилляций имеем ⁴⁷

$$t_0 \sim \frac{\mu_l}{\rho_s v_s^2}, \quad z_0 \sim \frac{\hbar}{m v_s}, \quad (84)$$

т. е. реализуется осцилляционный режим, наблюдавшийся экспериментально в работах ^{41,42}. Этот режим устойчив, когда

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 2. \quad (85)$$

Кроме перечисленных выше режимов в системе может существовать токовое состояние без диссипации ⁴⁷. Одна из возможных областей, где такое состояние устойчиво, есть ⁴⁷

$$\alpha_1 > 1, \quad \alpha_3 > 0. \quad (86)$$

Легко видеть, что области изменения параметров α_i , определенные неравенствами (83), (85) и (86), перекрываются, а значит, в зависимости от начальных условий может реализоваться либо однородное, либо диссипативное состояние, что, по-видимому, и наблюдалось экспериментально ⁴¹ (см. выше).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ】

Солитоны и инстантоны встречаются во многих физических системах. Ряд таких систем был описан выше. Приведем еще несколько близких примеров: в магнетиках могут существовать доменные стенки, или солитоны, во вращающемся He^3 -А образуются неособые вихри ⁵²⁻⁵⁴, в тонких сверхпроводниках имеет место механизм проскальзывания фазы, аналогичный рассмотренному в предыдущем разделе ⁵⁵. Число примеров можно легко увеличить, но вместо этого сделаем несколько общих замечаний.

Сверхтекучий гелий-3 интересен во многих отношениях. С одной стороны, сверхтекучие фазы He^3 представляют собой довольно экзотические физические объекты, существующие при низких температурах; с другой стороны, они сочетают в себе свойства многих физических систем, таких, как магнетики, жидкие кристаллы и сверхпроводники, а также являются реальным воплощением некоторых теоретико-полевых моделей. Кроме того, реализация в He^3 триплетного спаривания делает весьма вероятным предположение о том, что сверхтекучие фазы He^3 являются не единственными в природе объектами, бозе-конденсат которых обладает анизотропными свойствами. Так, например, триплетное спаривание может иметь место в нейтронных звездах и сверхпроводниках⁹.

Еще одним важным моментом в исследовании сверхтекучего гелия-3 является то, что описание свойств сверхтекучих фаз гелия-3 потребовало привлечения топологических методов. Это связано с тем, что пространства параметра порядка сверхтекучих фаз He^3 обладают нетривиальной топологией, которая допускает существование в поле параметра порядка разнообразных топологически устойчивых протяженных объектов, таких, как вихри, дисклинация, солитоны, инстантоны и др. К тому же, как отмечалось выше, пространства параметра порядка на разных масштабах длин различны, поэтому конфигурации полей, топологически устойчивые на малых расстояниях, могут оказаться неустойчивыми на больших. Все это делает неэффективными обычные методы, которые используются, например, при исследовании дисклинаций в жидких кристаллах²². Применение методов теории гомотопий¹⁰ позволило дать классификацию протяженных объектов в сверхтекучих фазах гелия-3.

И, наконец, важно отметить еще то, что топология дает не только методы исследования сверхтекучести гелия-3 (и других физических систем), но и язык для описания физических явлений, происходящих с участием протяженных объектов, или, другими словами, топологические следствия теории оказываются доступными непосредственному экспериментальному наблюдению.

В заключение я выражаю благодарность Г. Е. Воловику, прочитавшему первоначальный вариант статьи, за ряд замечаний.

Институт физики АН УССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Питаевский Л. П. — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1794.
2. Osheroff D. D., Richardson R. C., Lee D. M. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 885.
3. Anderson P. W., Morel P. — Phys. Rev., 1961, v. 123, p. 1911.
4. Balian R., Werthamer N. R. — Ibidem, 1963, v. 131, p. 1553.
5. Leggett A. J. — Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 331.
6. Brinkman W. F., Cross M. C. — In: Progress in Low Temperature Physics/Ed. D. F. Brewer. — Amsterdam: North-Holland, 1978, v. VII A, p. 105.
7. Воловик Г. Е., Минеев В. П. Физика и топология. — М.: Знание, 1980.
8. Минеев В. П. — УФН, 1983, т. 139, с. 303.
9. Воловик Г. Е. — УФН, 1984, т. 143, с. 73.
10. Воловик Г. Е., Минеев В. П. — ЖЭТФ, 1977, т. 72, p. 2256.
11. Mineyev V. P., Volovik G. E. — Phys. Rev. Ser. B, 1978, v. 18, p. 3197.
12. Barton G., Moore M. A. — J. Phys. Ser. C, 1974, v. 7, p. 4220.
13. De Gennes P. G. — Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 44, p. 271.
14. Brinkman W. F., Smith H., Osheroff D. D., Blount E. I. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 624.
15. Osheroff D. D., Gully W. J., Richardson R. C., Lee D. M. — Ibidem, 1972, v. 29, p. 920.
16. Leggett A. J. — Ann. Phys., 1974, v. 85, p. 11.
17. Brinkman W. F., Smith H. — Phys. Lett. Ser. A, 1975, v. 51, p. 449.
18. Osheroff D. D., Brinkman W. F. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 584.
19. Brinkman W. F. — Phys. Lett. Ser. A, 1974, v. 49, p. 411.

20. Osheroff D. D.— In: *Quantum Fluids and Solids*/Eds S. B. Trickey, E. D. Adams, J. W. Dufty.— N.Y.; Lnd.: Plenum Press, 1978, p. 161; перевод в кн.: *Квантовые жидкости и кристаллы*.— М.: Мир, 1979, с. 164.
21. Helffrich W.— *Phys. Rev. Lett.*, 1968, v. 21, p. 1518.
22. Де Жен П. *Физика жидких кристаллов*.— М.: Мир, 1977.
23. Maki K., Kumar P.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1976, v. 14, p. 3920.
24. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.— *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 30, p. 1262.
25. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи*.— М.: Наука, 1980.
26. Рожков С. С.— *Письма ЖЭТФ*, 1981, т. 33, с. 44.
27. Maki K., Kumar P.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1977, v. 16, p. 182.
28. Maki K.— *Ibidem*, 1975, v. 11, p. 4264.
29. Maki K.— *In*²⁰, p. 65; перевод как в²⁰, с. 56.
30. Gould C. M., Bartolac T. J., Bozler H. M.— *J. Low Temp. Phys.*, 1980, v. 39, p. 291.
31. Фомин И. А.— *Письма ЖЭТФ*, 1981, т. 33, с. 317.
32. Фомин И. А.— *Ibidem*, 1979, т. 30, с. 179.
33. Webb R. A., Sager R. E., Wheatley J. C.— *Phys. Lett. Ser. A*, 1975, v. 54, p. 243.
34. Engelsberg S., Brinkman W. F., Anderson P. W.— *Phys. Rev. Ser. A*, 1974, v. 9, p. 2592.
35. Maki K., Kumar P.— *Ibidem. Ser. B*, 1977, v. 16, p. 4805.
36. Smith H., Brinkman W. F., Engelsberg S.— *Ibidem*, v. 15, p. 199.
37. Maki K., Kumar P.— *Ibidem*, 1976, v. 14, p. 118.
38. Kitchenside P. W., Caudrey P. J., Bullough R. K.— *Phys. Scripta*, 1979, v. 20, p. 673.
39. Hall H. E., Hook J. R.— *J. Phys. Ser. C*, 1977, v. 10, p. L91.
40. Hook J. R., Hall H. E.— *Ibidem*, 1979, v. 12, p. 783.
41. Paulson D. N., Krusius M., Wheatley J. C.— *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 1322.
42. Krusius M., Paulson D. N., Wheatley J. C.— *J. Low Temp. Phys.*, 1978, v. 33, p. 255.
43. Wheatley J. C.— *In*²⁰, p. 85; перевод как в²⁰, с. 109.
44. Воловик Г. Е.— *Письма ЖЭТФ*, 1978, т. 27, с. 605.
45. Hall H. E.— *J. de Phys. (Fr.)*, 1978, t. 39, Nr. 8, Colloq. Nr. 6/1, p. 15.
46. Anderson P. W.— *Rev. Mod. Phys.*, 1966, v. 38, p. 298.
47. Воловик Г. Е.— *ЖЭТФ*, 1980, т. 79, с. 309.
48. Anderson P. W., Toulouse G.— *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v. 38, p. 508.
49. Переломов А. М.— *УФН*, 1981, т. 134, с. 577.
50. Белавин А. А., Поляков А. М.— *Письма ЖЭТФ*, 1975, т. 22, с. 503.
51. Чечеткин В. Р.— *ЖЭТФ*, 1976, т. 71, с. 1463.
52. Воловик Г. Е., Копнин Н. Б.— *Письма ЖЭТФ*, 1977, т. 25, с. 26.
53. Volovik G. E., Naponen P. J.— *J. Low Temp. Phys.*, 1981, v. 42, p. 503.
54. Фомин И. А., Каменский В. Г.— *Письма ЖЭТФ*, 1982, т. 35, с. 241.
55. Ивлев Б. И., Копнин Н. Б.— *Ibidem*, 1978, т. 28, с. 640.