

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.86

ЛИНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ В ВАКУУМЕ
ТОЧЕЧНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

С. Г. Арутюнян

Толчком к изучению геометрической структуры поля криволинейно движущегося заряда для автора послужила необходимая для практики задача устойчивости движения частиц интенсивных ультрарелятивистских пучков кольцевых ускорителей и накопителей. Вычисление сил Лоренца между частицами пучка с использованием необозримо широких фурье-разложений поля одного заряда представлялось нецелесообразным. Для первых оценок пространственно-временная картина поля одной криволинейно движущейся частицы была получена с помощью решения уравнения запаздывания в лиенар-вихертовских выражениях поля на расстояниях, сравнимых с радиусом кривизны траекторий^{1,2}. Дальнейшее изучение геометрии поля в этой задаче, возможно, не являлось необходимостью, однако пространственная мозаичность решений уравнения запаздывания, а следовательно, и поля стимулировала попытку «увидеть» поле частицы целиком, в том числе на больших расстояниях.

В данной работе это сделано с помощью линий электрического и магнитного полей, а также поля векторов Пойнтинга. Использована естественная параметризация линий с помощью световых сигналов, испущенных с траектории в запаздывающие моменты времени. Полученная геометрическая информация оказалась полезной в ряде прикладных задач, в частности, дала возможность определить когерентное сложение полей многих зарядов, движущихся по криволинейным траекториям.

1. Напряженность лиенар-вихертовского поля в точке наблюдения определяется характеристиками движения создающего поле заряда в единственной точке траектории. Удобно, поэтому, пользоваться понятием точечных световых сигналов. Совокупность световых сигналов, испущенных в запаздывающий момент времени t' , в момент времени наблюдения t (один и тот же для всех точек пространства) образует сферу с радиусом $D = c(t - t')$ и с центром в точке $\mathbf{r}_0(t')$, где $\mathbf{r}_0(t')$ — радиус-вектор, связанный с зарядом. Система таких вложенных друг в друга сфер, называемых в дальнейшем световыми, заполняет все пространство (рис. 1) и служит удобной для данной задачи системой координат. Точку на световой сфере фиксируем направлением единичного орта \mathbf{n} из центра световой сферы. Величинами (D, \mathbf{n}) определяется единственная точка в пространстве. Обратный переход, т. е. нахождение (D, \mathbf{n}) для заданной точки \mathbf{r} потребовал бы решения уравнения запаздывания $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t - D/c)| = D$, однако, необходимости в таком переходе не возникает, так как лиенар-вихертовские выражения поля естественно записываются через параметры D и $\mathbf{n}(D)$.

Рассмотрим предельные случаи расположения окружностей. Виден переход к равномерному прямолинейному движению ($\dot{\beta} \rightarrow 0$), когда ось пучка уходит на бесконечность в направлении, перпендикулярном скорости частицы (рис. 3, б). Все магнитные линии при этом становятся перпендикулярными β (то же происходит при $D \rightarrow 0$, т. е. на малых расстояниях от заряда).

Ось пучка уходит на бесконечность также в случае, когда к нулю стремится угол между векторами β и $\dot{\beta}$ (прямолинейное движение с ускорением).

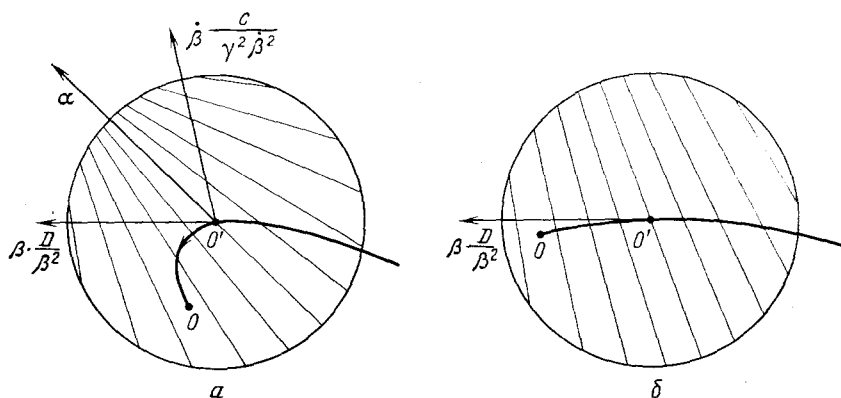


Рис. 3. Магнитные линии имеют характерный вид в двух предельных случаях расположения оси пучка плоскостей.

Рис. а соответствует расстоянию оси пучка до точки O' порядка радиуса световой сферы (так же, как рис. 2), а на рис. б это расстояние много больше D , так что световая сфера «нарезается» системой плоскостей, почти перпендикулярных направлению движения. Поле рис. а существенно отличается от прямолинейного предела в случае рис. б

Неопределенность здесь возникает, когда $\beta = \gamma^2 D \dot{\beta} / c$, однако, можно показать, что в этом исключительном случае магнитное поле зануляется на всей световой сфере.

Картина линий существенно отличается от прямолинейного предела, когда расстояние оси от центра световой сферы порядка ее радиуса (рис. 3, а). Для равномерного движения по окружности радиуса R это соответствует условию $D \gg R (\beta\gamma)^{-2}$. В ультрарелятивистском случае величина $R (\beta\gamma)^{-2} \sim \sim R\gamma^{-2}$ может стать малой по сравнению со средним расстоянием l между частицами пучков современных электронных ускорителей и накопителей. Так, для накопителя PETRA $l \sim 10^{-4}$ см, а $R\gamma^{-2} \sim 10^{-5}$ см. В этом случае при вычислении эффектов влияния собственного поля пучка на его устойчивость приближение прямолинейности траекторий может оказаться неприемлемым².

3. В качестве векторного поля \mathbf{F} выберем полное электрическое поле, включающее кулоновский член, без учета которого была бы нарушена топология искомых линий.

Скалярное произведение \mathbf{nE} никогда не обращается в нуль, т. е. вектор электрического поля всегда «протыкает» световую сферу, поэтому в качестве параметра линии σ можно выбрать запаздывающее время.

После замены *)

$$n = \frac{\beta (1 + (\beta v (1 - \gamma^{-1}) / \beta^2)) + v \gamma^{-1}}{1 + \beta v} \quad (1)$$

*) Замена представляет лоренц-преобразование скорости светового сигнала из лабораторной системы отсчета в сопутствующую инерциальную систему отсчета, связанную с траекторией в запаздывающей точке $\mathbf{r}_0(t')$.

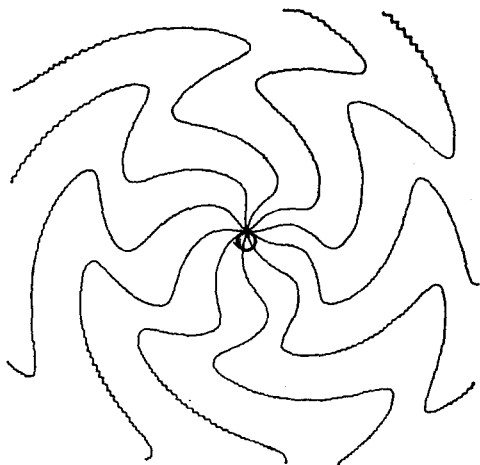


Рис. 4. Изображенный «паучок» — электрические линии поля заряда с лоренц-фактором $\gamma = 1,08$.

Заряд движется по окружности в направлении, указанном стрелкой. Изгибы линий лежат на спирали, однако характерного для релятивистского движения пространственного перераспределения поля синхротронного излучения еще нет

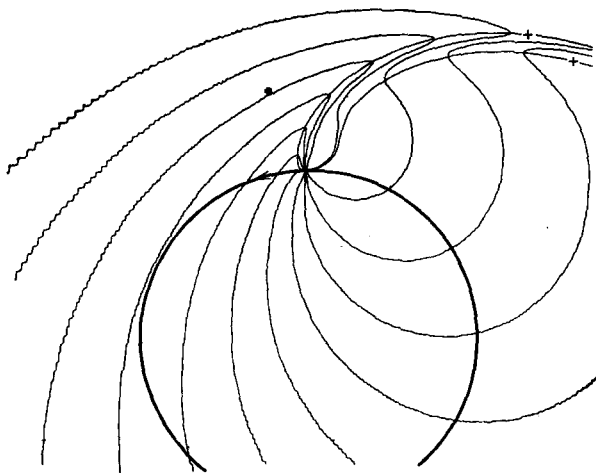


Рис. 5. Электрическое поле синхротронного излучения заряда с лоренц-фактором $\gamma = 2,5$.

Картина потребовала большего по сравнению с рис. 4 масштаба, так как поперечные размеры γ -области характерных изгибов линий уменьшились согласно формуле $R\gamma^{-3}$, где R — радиус орбиты. В γ -области поле достигает максимальных значений и имеет «излучательный» характер (компоненты поля, действующие на неподвижного наблюдателя, на длине волны $R\gamma^{-3}$ меняют знак). Крестиками отмечена нейтральная линия магнитного поля, очерчивающая, как видно из рисунка, γ -область

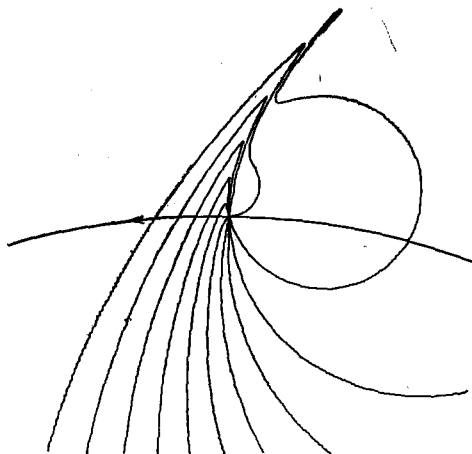


Рис. 6. В окрестности произвольно движущегося заряда можно определить область кулоновского поля, в которой электрические линии близки к исходящим из заряда прямым.

Передний по ходу движения фронт кулоновской области поля синхротронного излучения расположен на расстоянии $\sim R\gamma^{-3}$ от частицы. Позади поле кулоновское на больших расстояниях $\sim R\gamma^{-2}$. Иллюстрация поля заряда с лоренц-фактором $\gamma = 6$ наглядно показывает, где можно пользоваться приближением прямолинейного движения частицы

для вектора \mathbf{v} получится уравнение вида *)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt'} = \frac{\gamma-1}{\beta^2} [\mathbf{v} [\beta \dot{\beta}]]. \quad (2)$$

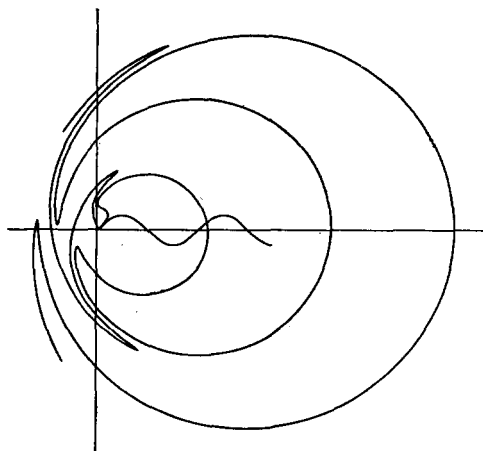
Формально уравнение (2) описывает вращение вектора \mathbf{v} с мгновенной угловой скоростью $\Omega = (\gamma - 1) [\beta \dot{\beta}] / \beta^2$.

Явное решение уравнения (2) в ^{3,4} получено, когда вдоль траектории постоянна величина $b = \tau/\kappa\gamma$, где τ и κ — кручение и кривизна траектории движения.

Приведем несколько иллюстраций линий электрического поля для самого «простого» криволинейного движения — равномерного движения по

Рис. 7. Нейтральная линия магнитного поля заряда ($\gamma=2$), движущегося по синусоиде

Угол поворота по дуге с кривизной определенного знака выбран достаточно большим, чтобы сформировался кусок γ -области. Сшивка таких кусков с переверотом знака компонент поля происходит вблизи точек перегиба. Фактически, представление об областях экстремальных значений поля произвольно движущегося заряда можно получить, строя только линию нулей магнитного поля



окружности радиуса R . Изображенные линии (рис. 4—6) лежат в плоскости орбиты (обозначена стрелкой). Поле при $\gamma = 1,08$ (рис. 4) имеет дипольный характер — концентрация линий в среднем равномерна, нет выделенных направлений. Для двух других значений $\gamma = 2,5$ и $\gamma = 6$ (рис. 5 и 6) эти свойства пропадают. Характерными изгибами линии заполняют тянущуюся от заряда область. В этой, так называемой γ -области ² поле зависит от γ и существенно больше значений в соседних участках, где поле от γ вообще не зависит. Решение уравнения запаздывания ¹ дает для модуля поля величину $E \sim 2 \sqrt{2} e \gamma^4 R^{-2} \delta^{-1/2}$, где δR — расстояние вдоль γ -области. Размеры γ -области $\sim R \gamma^{-3}$ в плоскости орбиты и $\sim R \sqrt{\delta} \gamma^{-1}$ в перпендикулярном направлении. На рис. 5 изображена также нейтральная линия магнитного поля, отмечающая в релятивистском случае γ -область. Построение ее с этой точки зрения полезно и для более сложных траекторий, например, со знакопеременной кривизной ³ (рис. 7).

Поле γ -области, падающее на неподвижного наблюдателя, дважды меняет знак — это собственно и есть синхротронное излучение, точнее его жесткая часть (поперечный размер γ -области $R \gamma^{-3}$ порядка предельной дли-

*) Выразив $\dot{\beta}$ в (2) через внешние, задающие траекторию движения, поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 , перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt'} = -\frac{e}{mc} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] + \frac{\gamma}{\gamma+1} [\beta \mathbf{v}] (\beta \mathbf{H}_0) + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma+1} [\mathbf{v} [\mathbf{E}_0 \beta]] \right\}. \quad (2')$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения спина во внешних полях \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 ⁵, если положить для значения собственного магнитного момента $\mu = 0$ и аномального магнитного момента $\mu' = -e\hbar/(2mc)$. Возможно, такое совпадение объясняется одними и теми же соображениями лоренц-инвариантности уравнения на 4-вектор a^μ , компоненты которого в сопутствующей системе отсчета равны $(0, \mathbf{v})$: линейностью и однородностью по тензору внешнего поля и зависимостью от 4-скорости заряда. Лоренц-инвариантность системы линий электрического поля будет обсуждена ниже.

ны волны синхротронного излучения). Детали линий поля в γ -области хорошо видны на рис. 6 ($\gamma = 6$). На этом же рисунке видна область кулоновского поля, передний фронт которой расположен на расстоянии $\sim R\gamma^{-3}$ от частицы, а размеры области $\sim R\gamma^{-2}$.

4. Математический аппарат, с помощью которого была построена система электрических и магнитных линий, дает некоторые новые характеристики поля. Одной из таких величин является фаза линий электрического поля

$$\Phi = c(1+b^2)^{1/2} \int_{t'}^t \beta \kappa \gamma dt'' \quad (3)$$

В случае $b = \text{const}$ направляющие косинусы вектора \mathbf{n} выражаются через тригонометрические функции фазы, т. е. периодичны по Φ . Для равномерного движения заряда по окружности прохождению электрической линии через γ -область соответствует изменение t'' на величину $Rc^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}$. Соответствующая длина траектории $R\gamma^{-1}$ совпадает с вводимой по порядку величины длиной зоны формирования синхротронного излучения (см., например, ⁶). При плавном изменении траектории движения эта величина продолжает сохранять смысл, что дает основание ввести формально точное определение длины зоны формирования, как длины траектории, соответствующей изменению фазы ровно на 2π .

Для грубой характеристики поля частицы, движущейся по траектории со знакоопределенной кривизной, достаточно оценить интеграл фазы

$$\Phi_0 = \int_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} d\Phi \quad (4)$$

(момент времени наблюдения выбирается при $t = +\infty$). В случае $\Phi_0 \gg 2\pi$ излучение обладает свойствами синхротронного (в определенных пространственных объемах поле такое же, как и поле синхротронного излучения). Все электрические линии совершают много ($\sim \Phi_0/2\pi$) оборотов вокруг частицы. При $2\pi \gg \Phi_0 \gg \gamma^{-1}$ почти полный оборот вокруг частицы совершают некоторые электрические линии, причем их число много больше единицы — эта ситуация соответствует режиму тормозного излучения. В случае $\gamma^{-1} \gg \Phi_0$ ни одна линия электрического поля после рассеяния частицы не меняет существенно своего направления и картина поля остается кулоновской.

Интегральная фаза, фактически, определяется углом поворота θ траектории: $\Phi \sim \gamma\theta$. Диапазон углов поворота делится критическими значениями $\theta_1 \sim \gamma^{-1}$, $\theta_2 \sim \gamma^{-2}$, причем при $\theta \ll \theta_2$ изгиб траектории не меняет кулоновский характер поля (переход через значение θ_1 , когда возникает режим тормозного излучения, известен).

Геометрией поля одного заряда определяется возможность нахождения интерференционных максимумов полей многих частиц. Речь идет о когерентном сложении полей частиц в ограниченных пространственных объемах в течение конечного промежутка времени для специальных, или определенных образом расположенных траекторий движения. В ⁷, например, такое сложение изучено для полей синхротронного излучения.

5. Рассмотрим линии поля векторов Пойнтинга (для краткости ЛПВП), определяющие локальные потоки энергии электромагнитного поля. ЛПВП ортогональны электрическим и магнитным линиям.

Для построения ЛПВП может быть применена та же методика, что и выше, однако, уравнения для (D, \mathbf{n}) получаются сложными, поэтому ограничимся лишь комментарием к качественной картине ЛПВП синхротронного излучения.

Особенной для ЛПВП является нейтральная линия магнитного поля — здесь расположены полюсы ЛПВП. Для равномерного прямолинейного движения заряда линии, выходящие из одного полюса, ложатся на сферу с центром в точке $r_0(t)$ (t момент времени наблюдения). Для синхротронного излучения это не так. На малых расстояниях от заряда, там, где нейтральная линия магнитного поля практически прямая, в плоскости орбиты ЛПВП по спирали наматываются на заряд, причем шаг намотки стремится к нулю

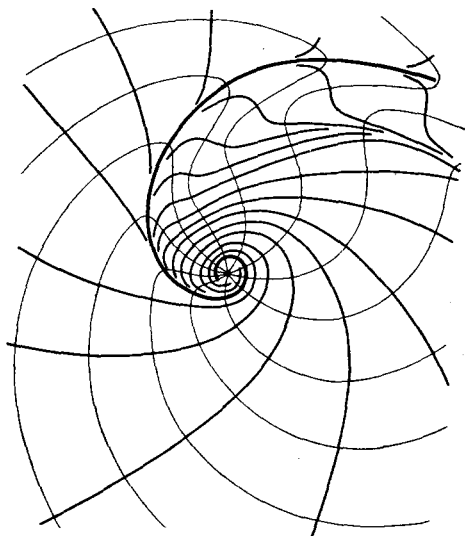


Рис. 8. Взаимоортогональная сетка линий электрического поля и поля векторов Пойнтинга синхротронного излучения заряда с лоренц-фактором $\gamma = 2$.

Рисунок дает представление о поведении линий поля векторов Пойнтинга (ЛПВП) на малых расстояниях от заряда. Жирной линией отмечена неустойчивая ЛПВП. На рисунке не указаны направления ЛПВП

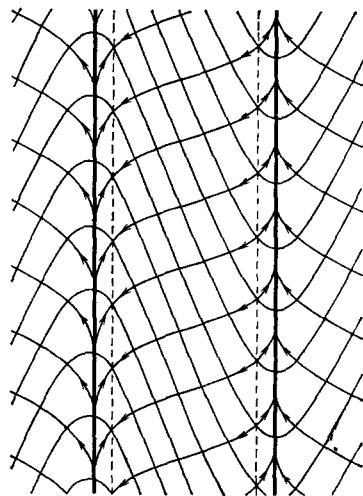


Рис. 9. Заполнение γ -области линиями поля векторов Пойнтинга на больших расстояниях от орбиты.

Значение γ не конкретизируется. Штрихами отмечены ветви нейтральной линии магнитного поля. Жирными линиями отмечена неустойчивая ЛПВП, ответвлениями от которой формируется γ -область

(имеется в виду линия, гладко сшитая из кусков ЛПВП различных направлений, кончающихся на полюсах). Начиная с некоторых, достаточно больших, расстояний каждая ЛПВП перестает пересекать нейтральную линию, разматываясь вблизи нее по близкой к архимедовой спирали кривой. Выделяется неустойчивая ЛПВП, от которой на сколь угодно больших расстояниях отходят ЛПВП, заполняющие γ -область.

Незамкнутость ЛПВП в плоскости орбиты соответствует неограниченности поверхности, «сотканной» из выходящих из одного полюса ЛПВП. Интегральный поток энергии через любую окружающую заряд замкнутую поверхность не равен нулю, т. е. есть излучение.

Схематично структура ЛПВП для заряда с лоренц-фактором $\gamma = 2$ изображена на рис. 8. Рис. 9 иллюстрирует схему заполнения γ -области на больших расстояниях.

6. Взаимоортогональная система линий электрического и магнитного полей, а также поля векторов Пойнтинга рассматривалась в один фиксированный момент времени наблюдения. Для данной траектории нетрудно получить «фотографию» поля в любой другой момент времени (например, для синхротронного излучения вся картина поля равномерно вращается вместе с зарядом). Линии на разных «фотографиях» можно метить, приписывая им движение (считая, что одинаково помеченные линии переходят друг в друга). Для синхротронного излучения, например, так, чтобы друг

в друга переходили линии, определенным образом расположенные относительно орбиты. Однако тогда, начиная с некоторых расстояний линии будут двигаться со сверхсветовыми скоростями.

В⁸ обсужден следующий способ приписывания движения линиям электрических и магнитных полей, когда они ортогональны (лиенар-вихертовское поле, очевидно, относится к этому классу). Считается, что каждый элемент линии движется вдоль вектора Пойнтинга с определенной «дрейфовой» скоростью. Для электрического поля эта скорость равна $W_E = c [EH]/E^2$ (для лиенар-вихертовского поля всегда меньше c), для магнитного поля $W_H = c [EH]/H^2$ ($W_H > c$). Доказывается, что такое локальное движение сохраняет смысл линий в целом и что после такой процедуры система линий, движущихся с досветовыми скоростями, становится лоренц-инвариантной (уравнения, определяющие элемент $dx^h = (dt, dr)$ магнитной и электрической линии, записываются в виде $F_{ik} dx^h = 0$ и $F_{ik}^* dx^h = 0$, где F_{ik} — тензор электромагнитного поля, F_{ik}^* — тензор, дуальный к F_{ik}).

В приложении к лиенар-вихертовскому полю это значит, что, если к движущимся электрическим линиям применить лоренц-преобразования как к материальным объектам, то в новой системе отсчета они снова будут касательны к преобразованному электрическому полю. Возможно, такая «материализация» найденных линий электрического поля произвольно движущегося заряда удовлетворит «струнной» концепции развития электродинамики (см., например, ⁹).

Автор искренне благодарен А. Ц. Амагуни и Г. А. Нагорскому за внимание к работе, поддержку и многочисленные полезные замечания, а также участникам семинара В. Л. Гинзбурга за стимулирующее обсуждение.

Ереванский физический институт

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А р у т ю н я н С. Г. Одновременная картина поля вблизи движущейся по кругу ультрарелятивистской заряженной частицы: Препринт ЕФИ 387-(45)-79. — Ереван, 1979.
2. А р у т ю н я н С. Г., Н а г о р с к и й Г. А. Эффекты интенсивности в ускорителях и накопителях, связанные с лиенар-вихертовскими полями частиц: Препринт ЕФИ 477-(20)-81. — Ереван, 1981.
3. A g i n i a n M. A., A r u t u n i a n S. G. Force Lines of Electric and Magnetic fields of Arbitrary Moving Charge. Preprint ЕФИ 684-(74)-83. — Yerevan, 1983.
4. А р у т ю н я н С. Г. // Изв. ВУЗов. Сер. «Радиофизика». 1985. Т. 28. С. 896.
5. Б е р е с т е ц к и й В. Б., Л и ф ш и ц Е. М., П и т а е в с к и й Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. — М.: Наука, 1968. — § 41.
6. Б о л о т о в с к и й Б. М. // Тр. ФИАН СССР. 1982. Т. 140. С. 95.
7. А р у т ю н я н С. Г., Н а г о р с к и й Г. А. // ЖТФ. 1985. Т. 55. С. 1494.
8. Л е о н т о в и ч М. А. // УФН. 1964. Т. 84. С. 715.
9. Д и р а к П. Эволюция физической картины природы // Элементарные частицы / Под ред. Б. В. Медведева. — М.: Наука, 1965. — С. 123.