

532.5-1.011

ВОЛНЫ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Л. А. Островский, С. А. Рыбак, Л. Ш. Цимринг

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	417
1. Волны отрицательной энергии	418
2. Некоторые примеры волн отрицательной энергии в гидродинамике	421
2.1. Обтекание упругих мембран	421
2.2. Гравитационно-капиллярные волны на поверхности воды	423
2.3. Внутренние волны в слоистой жидкости	424
2.4. Непрерывные профили течения	426
3. Что же такое энергия волны?	428
4. Нелинейные процессы, связанные с волнами отрицательной энергии	430
5. Радиационная неустойчивость осцилляторов в гидродинамике	433
Заключение	436
Список литературы	436

ВВЕДЕНИЕ

Читатели УФН неоднократно имели возможность познакомиться с идеей «поточковой» неустойчивости в электронике и физике плазмы (см., например, ¹). Вместе с тем, на наш взгляд, для физика не менее поучительно знакомство с исследованиями по гидродинамической неустойчивости. Этот обширный круг проблем связан в первую очередь с устойчивостью сдвиговых течений. Хотя первые работы в этой области относятся еще к прошлому веку, в последние 10—15 лет здесь наметились новые тенденции, в ряде отношений сближающие эти задачи с электродинамическими. Вместе с тем гидродинамические задачи сложнее уже потому, что если в электродинамике многое удается выяснить в одномерном приближении (поток — плазма, взаимопроникающие потоки, одномерное описание пучка в замедляющей системе), то в гидродинамике обычно принципиальна хотя бы двумерность, поскольку синхронизм между волной и потоком достигается лишь в ограниченном «слое» течения (критический слой) или на резком скачке скорости (тангенциальном разрыве).

В настоящей статье обсуждаются некоторые аспекты теории гидродинамической устойчивости, связанные с понятием волн отрицательной энергии (ВОЭ). Это понятие было, по-видимому, впервые использовано в 1951 г. применительно к волнам в электронных потоках (см. об этом в ²). На возможность существования ВОЭ в плазме впервые было указано в работе Кадомцева, Михайловского и Тимофеева³. Что же касается гидродинамики, то до сравнительно недавнего времени ВОЭ здесь не уделялось сколько-нибудь значительного внимания, а в физической литературе высказывалось даже мнение о невозможности существования ВОЭ в механике жидкостей. Однако первая работа, в которой рассматривались ВОЭ в гидродинамике, правда, без введения этого термина, была опубликована Бенджамином еще в 1963 г. ⁴, хотя после этого в течение примерно 15 лет такие волны действительно не обсуждались.

1. ВОЛНЫ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Под ВОЭ обычно принимают такую волну, при возбуждении которой полная энергия системы уменьшается (впрочем, ниже мы увидим, что это определение не совсем адекватно тем свойствам, которые характеризуют ВОЭ). Заметим сразу, что отбор энергии у такой волны (за счет диссипации или связи с другой волной, имеющей положительную энергию) приводит к ее нарастанию, т. е. к неустойчивости системы. Действительно, уменьшение энергии волны E ($\dot{E} < 0$) при условии $E < 0$ означает рост модуля E , а значит, и амплитуды волны. Ясно, что такие волны возможны лишь в активных точнее, неравновесных системах, в частности системах «поточковых», содержащих пучки заряженных частиц или сдвиговые течения нейтральной жидкости.

Свойства ВОЭ связаны с дисперсионными свойствами системы. Пожалуй, наиболее наглядно эта связь выявляется при использовании усредненного вариационного принципа, предложенного Уиземом⁵ и относящегося к волнам с медленно меняющимися амплитудой, частотой и волновым числом. Пусть, в частности, волновая переменная ψ (или их набор) имеет вид квазигармонической бегущей волны:

$$\psi = a(x, t) \cos \theta(x, t), \quad (1)$$

где амплитуда a , мгновенная частота $\omega(x, t) = \theta_t$ и волновое число $k(x, t) = -\theta_x$ — медленно меняющиеся функции, т. е. выполняются условия вида

$$\left| \frac{a_x}{a} \right| \ll k, \quad \left| \frac{a_t}{a} \right| \ll \omega.$$

Если данная система описывается лагранжианом $L(\psi, \psi_t, \psi_x)$ (в L может присутствовать и явная, но достаточно медленная зависимость от x и t), то динамика волн вида (1) может быть описана усредненным лагранжианом

$$\mathcal{L}(a, \omega, k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\theta,$$

причем \mathcal{L} можно представить в виде разложения по четным степеням a :

$$\mathcal{L} = Z_0(\omega, k) a^2 + Z_1(\omega, k) a^4 + \dots \quad (2)$$

Уравнения движения получаются вариацией \mathcal{L} по a и θ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 2a(Z_0 + 2Z_1 a^2 + \dots) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) = 0, \quad (4)$$

где под \mathcal{L}_ω и \mathcal{L}_k понимаются величины

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\theta \frac{\partial L}{\partial \psi_t} d\theta, \quad \mathcal{L}_k = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\theta \frac{\partial L}{\partial \psi_x} d\theta.$$

(Это ясно из выражений $\psi_t = \omega \psi_\theta$ и $L_{\theta t} \equiv L_\omega = L_{\psi_t \psi_\theta}$ и аналогично для L_k .) Сюда нужно добавить очевидное соотношение

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Соотношение (3) представляет собой нелинейное дисперсионное уравнение; если же ограничиться квадратичной частью лагранжиана (линейное приближение), то из (3) следует

$$Z_0(\omega, k) = 0, \quad (6)$$

значит,

$$\mathcal{L}(a, \omega, k) = 0. \quad (7)$$

Усредненный гамильтониан, т. е. плотность энергии волны, дается соотношением

$$\bar{H} = \overline{p\dot{q}} - \bar{L} = \omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}, \quad (8)$$

где

$$p = L_{\psi_t}, \quad \dot{q} = \psi_t,$$

а плотность потока энергии

$$S = \dot{q}_x \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_x} = -\omega \mathcal{L}_k.$$

Из уравнения (4) следует, что для любого локализованного в пространстве возмущения (волнового пакета) величина

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_\omega dx$$

сохраняется, т. е. является адиабатическим инвариантом, так что \mathcal{L}_ω представляет собой плотность адиабатического инварианта. Это справедливо и для сред с медленно изменяющимися (по x и t) параметрами. Аналогично сохраняется поток адиабатического инварианта в направлении x :

$$\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_x} dt,$$

плотность которого равна $\partial \mathcal{L} / \partial k_x$.

В линейном случае эти общие соотношения дают

$$E = \omega \frac{\partial Z_0}{\partial \omega} a^2, \quad S = -\omega \frac{\partial Z_0}{\partial k} a^2, \quad (9)$$

причем $S = v_{gr} E$, где $v_{gr} = -Z_{0k}/Z_{0\omega}$ — групповая скорость волны, а плотности адиабатического инварианта и его потока равны соответственно

$$I = \frac{E}{\omega}, \quad \Pi = \frac{S}{\omega} \quad (10)$$

В нашем случае, однако, рассматриваемые движения обычно неоднородны, для них характерна слоистая структура, когда параметры среды зависят от поперечной координаты z . При этом обычно рассматриваются собственные моды (нормальные волны) системы, возмущения сохраняют вид (1), однако амплитуда волны a зависит от z в соответствии со структурой моды. В этом случае все сказанное выше сохраняет смысл, если заменить L на лагранжиан, проинтегрированный по z :

$$L_0 = \int_a^b L dz,$$

где a и b — границы системы по z (которые могут находиться и на бесконечности).

Вернемся теперь к вопросу об отрицательной энергии. Рассмотрим произвольное дисперсионное уравнение (6) в области действительных k и ω . Согласно (9) знак энергии может измениться в тех точках оси k , где меняет знак либо ω , либо $\partial Z_0 / \partial \omega$. Первый случай означает смену знака фазовой скорости относительно знака групповой (волна из «прямой» становится «обратной» или наоборот). Второе же условие в общем случае ($\mathcal{L}_k \neq 0$) соответствует обра-

щению в бесконечность групповой скорости $v_{gr} \equiv d\omega/dk = -\mathcal{L}_k/\mathcal{L}_\omega$. Таким образом, типичный участок ВОЭ на дисперсионной кривой $\omega = \omega(k)$ выглядит так, как на рис. 1. Отметим здесь еще один важный момент: в точке, где $v_{gr} = \infty$, фактически происходит «смыкание» двух ветвей дисперсионной кривой, одна из которых отвечает ВОЭ, а другая — волна положительной энергии. Связь этих волн и приводит к неустойчивости: за точкой ветвления частота становится комплексной. Такая неустойчивость связанных волн хорошо известна в электродинамике (см., например, ⁶); в гидродинамике она, в частности, отвечает неустойчивости Кельвина — Гельмгольца (это еще будет пояснено ниже).

Здесь нас, однако, интересует в первую очередь диапазон, где существуют нейтрально устойчивые ВОЭ. Как уже упоминалось, в этой области возможна диссипативная неустойчивость: введение потерь приводит к нарастанию ВОЭ во времени. Это видно из дисперсионного соотношения, в котором теперь возникает малая мнимая часть:

$$Z_0(\omega, k) + i\nu(\omega, k) = 0.$$

Отсюда сразу находится малая мнимая добавка к невозмущенной частоте волны

$$\omega'' = \frac{\nu(\omega, k)}{Z_{0\omega}} = -\frac{\omega\nu|a|^2}{E}. \quad (11)$$

Рис. 1. Область волн с отрицательной энергией ограничена точками $\omega = 0$ и $v_{gr} = \infty$

Разумеется, знак энергии волны зависит от системы отсчета; при галилеевом преобразовании энергия волны преобразуется одновременно с доплеровским сдвигом ее частоты. Однако $\mathcal{L}_\omega = Z_{0\omega} a^2$ инвариантно относительно галилеева преобразования, поэтому сдвигается лишь одна граница диапазона волновых чисел, соответствующих ВОЭ (где $\omega = 0$), другая же граница (где $\mathcal{L}_\omega = 0$) остается неизменной. Вместе с тем столь же ясно, что сам факт устойчивости или неустойчивости не меняется и соответствующий временной декремент (инкремент) инвариантен. Таким образом, в соответствии с формулой (11) диссипативная функция $\omega'' a^2$ с необходимостью меняет знак вместе с частотой волны. Конечно, для неустойчивости ВОЭ нужна «истинная» диссипация, т. е. положительные потери в местной для ВОЭ системе отсчета; при движении системы отсчета знаки энергии и потерь изменяются одновременно. Различие знаков энергии двух связанных волн также сохраняется в любой системе отсчета.

Возможна и другая постановка задачи: гармонический источник, неподвижный относительно данной системы отсчета, возбуждает в среде волну с частотой ω . Здесь речь может идти о пространственном усилении волны. Для нахождения пространственного инкремента волны k'' проще всего воспользоваться соотношением

$$\frac{\partial Z_0}{\partial \omega} \omega'' + \frac{\partial Z_0}{\partial k} k'' = 0,$$

из которого следует

$$k'' = -\omega'' \frac{Z_{0k}}{Z_{0\omega}} = \frac{\omega''}{v_{gr}},$$

т. е. пространственный инкремент связан с временным через групповую скорость. Заметим, что изменение знака k'' в области, где $\omega'' < 0$, не приводит к усилению, поскольку при этом одновременно с k'' меняется знак v_{gr} и, следовательно, направление потока энергии волны, т. е. волна затухает в направлении распространения энергии. Пространственной же неустойчивости отвечает изменение знака k'' одновременно с изменением знака ω''

(при неизменном знаке v_{gr}). В окрестности точки, где $\mathcal{L}_k = 0$, нужно учесть следующий член разложения $Z_0(\omega, k)$ по k , тогда

$$k'' = \left(-\frac{2Z_0\omega\omega''}{Z_0kh} \right)^{1/2}$$

и здесь пространственный (ин-) декремент k'' оказывается пропорциональным корню из временного ω'' .

Рассмотрим теперь некоторые примеры ВОЭ и связанной с ними диссипативной неустойчивости.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ВОЛН ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В ГИДРОДИНАМИКЕ

2.1. Обтекание упругих мембран

Первое рассмотрение ВОЭ в гидродинамике, проведенное Бенджамином⁴, было проиллюстрировано на примере упругой мембраны, движущейся со скоростью U относительно соприкасающейся с ней однородной и несжимаемой жидкости, занимающей полупространство $Z < 0$. Мы несколько обобщим эту постановку задачи, предположив, что другое полупространство занимает сжимаемая среда с плотностью $\rho_2 \ll \rho_1$ (ρ_1 — плотность несжимаемой жидкости) и учетом потери в мембране. Это позволит нам продемонстрировать влияние диссипации и излучения акустических волн на развитие ВОЭ.

Уравнение для отклонения мембраны ξ от равновесного положения имеет вид

$$m \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \xi - T \xi_{xx} + \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi = p_1 - p_2, \quad (12)$$

где m , T , β — плотность, упругость и вязкость мембраны, p_1 и p_2 — давление на мембрану со стороны несжимаемой жидкости и сжимаемого газа соответственно.

Уравнения движения жидкости в обоих полупространствах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{I. } \Delta \varphi_1 &= 0, & \rho &= \rho_1. \\ \text{II. } \Delta \varphi_2 &= \frac{1}{c^2} \varphi_{2tt}, & \rho &= \rho_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Записывая потенциал бегущей волны в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{10} \exp(-i\omega t + ikx + kz), \\ \varphi_2 &= \varphi_{20} \exp(-i\omega t + ikx + iqz), \end{aligned} \quad (14)$$

где $q^2 = \omega^2/c^2 - k^2$, а также пользуясь соотношениями

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= -\rho_{1,2} \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t}, \\ \varphi_{10} &= -\frac{i\omega}{k} \xi, \\ \varphi_{20} &= -\frac{\omega}{q} \xi, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

получим дисперсионное соотношение для волн в мембране:

$$Z(\omega, k) \equiv \frac{1}{2} \left[m(\omega - Uk)^2 - Tk^2 + \frac{\rho_1}{k} \omega^2 - \frac{\rho_2}{iq} \omega^2 + i\beta(\omega - Uk) \right] = 0. \quad (16)$$

Ввиду малости поглощения в мембране β и плотности сжимаемой среды ρ_2 последние два слагаемых в левой части (16) малы по сравнению с остальными. Обозначим:

$$Z_0(\omega, k) \equiv \frac{1}{2} \left[m(\omega - Uk)^2 + \frac{\rho_1 \omega^2}{k} - Tk^2 \right] = 0 \quad (17)$$

— дисперсионное уравнение для консервативной модели (без потерь и излучения). Соответствующие дисперсионные кривые изображены на рис. 2. Из них видно, что при $U > c_0$, где $c_0 = (T/m)^{1/2}$ — скорость упругой волны в свободной мембране, существует точка ветвления $k = k_m$, где $v_{gr} \rightarrow \infty$, так что при $k < k_m$ система неустойчива, а при $k > k_m$ одна из ветвей дисперсионного уравнения, а именно нижняя, отвечает ВОЭ. Из (17) легко видеть, что для этой ветви

$$\frac{\partial Z_0}{\partial \omega} = m (\omega - Uk) + \frac{\rho_1 \omega}{k} < 0$$

при $\omega > 0$. Критическое значение k_m и соответствующая частота ω_m равны

$$k_m = \frac{\rho_1}{m} \left[\left(\frac{U}{c_0} \right)^2 - 1 \right], \quad \omega_m = \frac{\rho_1}{mU} \frac{(U^2 - c_0^2)^2}{c_0^2}. \quad (18)$$

Теперь учтем излучение волн и вязкое трение в мембране. При учете малых мнимых слагаемых в (17) к частоте ω в диапазоне $k > k_m$ добавляется малая мнимая поправка ω'' , которая может быть найдена методом возмущений:

$$\omega'' = - \frac{\beta (\omega - Uk) + (\rho_2 \omega^2 / q)}{2 \partial Z_0 / \partial \omega}, \quad (19)$$

$$\frac{\omega''}{\omega} = - \frac{\rho_2}{\rho_1 q} \left[\frac{mk}{\rho_1} \left(1 - \frac{U}{c} \right) + 1 \right]^{-1} - \left(1 - \frac{U}{c} \right) \frac{\beta k}{2\rho_1} \left[\frac{mk}{\rho_1} \left(1 - \frac{U}{c} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (19')$$

где $c = \omega/k$.

Обсудим сначала эффект излучения акустических волн (первое слагаемое в (19')). Нетрудно видеть, что неустойчивость ($\omega'' > 0$) возникает при $\partial Z_0 / \partial \omega < 0$ или $U/c > 1 + (\rho_1/mk)$,

т. е. во всей области волн с отрицательной энергией, поскольку излучаются волны с положительной энергией. Подчеркнем, что энергия отрицательна в системе отсчета относительно полупространства II, куда и излучается звук. При $\partial Z_0 / \partial \omega > 0$ (19') дает затухание, что соответствует «убегающим волнам» (leaky waves), известным в электродинамике; при этом, впрочем, рассмотрение собственных мод не имеет прямого физического смысла, поскольку поле волны не спадает, а растет как $\exp(\text{Im } qz)$ по нормали к мембране, и мода не локализована. В случае же ВОЭ волна локализуется около мембраны ($\text{Im } q < 0$) и согласно (19) нарастает по амплитуде.

С подобной «излучательной» неустойчивостью мы еще встретимся ниже при рассмотрении

внутренних волн в стратифицированной жидкости. Она, в сущности, может рассматриваться как неустойчивость связанных волн, одна из которых — «мембранная» — имеет отрицательную, а другая — излучаемая в среду — положительную энергию. Иначе эту неустойчивость можно трактовать как аналог анамального эффекта Дошлера, т. е. излучения

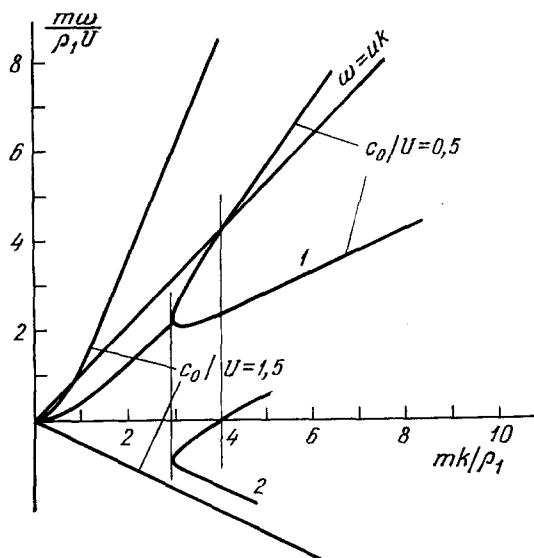


Рис. 2. Дисперсионные кривые для волн в мембране, движущейся относительно неподвижной жидкости (1), и в окрестности точки бифуркации в системе координат, связанной с мембраной (2)

осциллятора в область черенковского конуса. Этот вопрос специально обсуждается ниже.

Второе слагаемое в (19') дает поправку к частоте «мембранной» волны, обусловленную вязким трением в мембране. Неустойчивость возможна в сравнительно узком диапазоне U : $1 < U/c < 1 + (\rho_1/mk)$, в котором знаки энергии и потерь противоположны (при $\rho_1 \rightarrow 0$ неустойчивость исчезает, поскольку знак потерь меняется одновременно со знаком энергии волны). Именно в этом диапазоне U энергия волны отрицательна в системе координат, неподвижной относительно мембраны (рис. 2, б). Рассмотренный пример иллюстрирует то положение, что диссипация энергии волны в некотором слое приводит к неустойчивости, если знак энергии волны отрицателен в системе отсчета, связанной с указанным слоем.

При отражении волны от рассматриваемого слоя (движущегося с некоторой скоростью U относительно остальной среды) возможно возникновение явления «сверхотражения», когда коэффициент отражения становится больше единицы. Это происходит при условии, что скорость слоя превышает фазовую скорость волны и в слое имеется диссипация. В случае плазменных волн подобный эффект рассмотрен в ³⁸.

Аналогичное усиление волны возможно при отражении плоской волны от вращающегося цилиндра для тех гармоник разложения плоской волны по цилиндрическим волнам, у которых угловая фазовая скорость меньше угловой скорости вращения цилиндра, в котором также имеется диссипация. Этот эффект исследован Я. Б. Зельдовичем для электромагнитных и гравитационных волн ^{39,40}, подробная библиография содержится в ⁴¹ (с. 171). Усиление звука при отражении от вращающегося вихря рассмотрено в ⁴².

2.2. Гравитационно-капиллярные волны на поверхности воды ⁸

Пусть приповерхностный слой жидкости толщины h движется со скоростью U относительно покоящегося полупространства той же жидкости. В отсутствие потерь поверхностные волны на таком потоке описываются дисперсионным уравнением

$$Z_0(\omega, k) = (\omega_1^2 - \omega_0^2)(\omega_1^2 + \omega_0^2) - e^{-2kh}(\omega_1^2 + \omega_0^2)(\omega_1^2 - \omega^2) = 0, \quad (20)$$

где $\omega_1 = \omega - Uk$, $\omega_0 = gk + \alpha k^3$, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения. Дисперсионная кривая, отвечающая уравнению (20), показана на рис. 3. Заметим, что учет движения верхнего слоя повышает порядок дисперсионного уравнения и ему в общем случае отвечают четыре нормальные ветви, в отличие от двух в случае $U = 0$. Волнам отрицательной энергии соответствуют заштрихованные участки кривых. Точки 1 и 2 являются точками бифуркаций, отделяющими области неустойчивости типа Кельвина — Гельмгольца от устойчивого диапазона.

Учтем теперь диссипацию. Во-первых, введем мнимую добавку к поверхностному натяжению:

$$\alpha = \alpha_0 - i\alpha_1(\omega - Uk)$$

Эта добавка описывает поглощение в поверхностной пленке, вызванное механизмами релаксации, сопровождающими ее изгиб ⁹; здесь снова добавлен

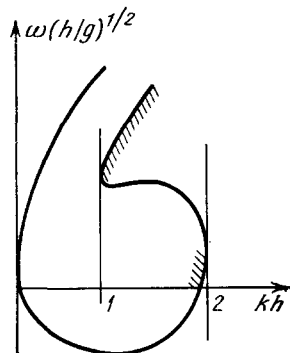


Рис. 3. Дисперсионная кривая для гравитационно-капиллярных волн на тонком движущемся слое ⁸

сдвиг частоты из-за движения жидкости. Во-вторых, учтем вязкость в нижнем полупространстве. В случае малых потерь дисперсионное уравнение (20) сохраняет свой вид, если в нем заменить ω^2 на $\omega_2^2 = \omega^2 + 4iv\omega k^2$. Мнимая добавка к частоте в данном случае равна

$$\text{Im } \omega = -i \frac{Z_v v + Z_\alpha \alpha_1 (\omega - Uk)}{Z_\omega}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} Z_v &= (\omega - Uk) k^3 [\omega_1^2 (1 + e^{-2kh}) + \omega^2 (1 - e^{-2kh})], \\ Z_\alpha &= 8\omega\omega_1 k^2 (\omega_1^2 + \omega_0^2) e^{-2kh} (\omega_1^2 + \omega^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если $Z_\omega > 0$, то знак вклада каждого из слагаемых в (21) определяется знаком частоты (энергии) в местной для данного слоя системе отсчета. Это вполне соответствует высказанным выше соображениям. На участках отрицательной энергии неустойчивость может возникнуть из-за вязких потерь в жидком полупространстве, а при положительной энергии — с поверхностной диссипацией. Заметим, что при переходе в систему отсчета, связанную с верхним слоем, знак энергии волны, вообще говоря, изменяется на противоположный.

2.3. Внутренние волны в слоистой жидкости

Под внутренними волнами (ВВ) понимают волновые движения в жидкости с плотностью, возрастающей в направлении действия силы тяжести (устойчивая стратификация). Такая стратификация повсеместно существует в океане. О ВВ говорят и в случае двух слоев однородной жидкости различных плотностей ρ_1 и ρ_2 , в частности, поверхностные волны на воде могут рассматриваться как ВВ при $\rho_1 = 0$. Если отдельные слои жидкости находятся в относительном движении, то создается возможность неустойчивости (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца — КГ), а в устойчивых областях могут существовать ВОЭ.

Начнем с классического примера — две жидкости различной плотности, из которых нижняя, более плотная жидкость, занимающая область $z < 0$, неподвижна, а верхняя движется со скоростью U . В случае идеальной жидкости дисперсионное уравнение для такой системы хорошо известно:

$$\omega^2 + s(\omega - Uk)^2 - gk(1 - s) = 0, \quad (22)$$

где $s = \rho_1/\rho_2 < 1$. Известно ¹⁰, что в такой системе существует область неустойчивости КГ. Более внимательное рассмотрение показывает, что эта область, согласно общим соображениям, высказанным выше, граничит с областью ВОЭ ¹¹, расположенной между обычными критическими точками $\omega = 0$ и $v_{gr} = \infty$ (рис. 4). Заметим, что при близких ρ_1 и ρ_2 $k_1 \approx k_2/2$. Предположим теперь, что нижняя, неподвижная жидкость обладает вязкостью с коэффициентом ν . При малом ν , когда потери на длине волны малы, в правой части (22) появляется член $-4iv\omega k^2$. Соответствующие дисперсионные кривые изображены на рис. 4 штрихованными линиями. В области КГ вязкость лишь ослабляет неустойчивость, в частности, при $k \rightarrow \infty$ теперь $\text{Im } \omega$ стремится к конечному значению $sU^2/2\nu$ ¹². Вместе с тем в области ВОЭ теперь тоже возникает неустойчивость: $\text{Im } \omega > 0$ при $k > k_1$. Для области ВОЭ характерны сравнительно малые значения инкремента в большей ее части (не слишком близко к точке $k = k_2$, где приведенная ниже формула несправедлива):

$$\text{Im } \omega_{1,2} \approx \mp 4\nu k^2 \frac{1}{1+s} \frac{\omega_{1,2}}{\omega_1 - \omega_2}; \quad (23)$$

здесь $\omega_{1,2}$ — значения ω при $\nu = 0$ для верхней и нижней ветвей дисперсионной кривой при данном k . Знак «—» в этом выражении отвечает верхней

ветви кривых на рис. 4, а, «+» — нижней ветви, т. е. ВОЭ. Для этой области нетрудно получить уравнение баланса энергии $\dot{W} = F$, где W — полная средняя энергия, F — диссипативная функция, причем в данном случае ¹³

$$W = \pm \omega_{1,2} |\omega_1 - \omega_2| \frac{\rho_1 + \rho_2}{k} |A|^2, \\ F = -4\nu\rho_2 k \omega_{1,2}, \quad (24)$$

где A — амплитуда смещения границы. Отсюда, конечно, получается то же самое значение $\text{Im}\omega$, но видно еще и то, что и W , и F пропорциональны ω . Именно поэтому переход к новой галилеевой системе отсчета изменяет лишь ω на $\omega + Uk$ и не меняет значения инкремента. Одновременно с энергией волны меняется величина и знак диссипации, поскольку вязкой становится

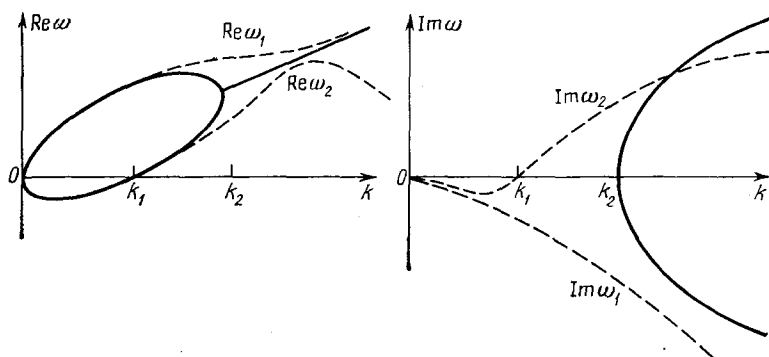


Рис. 4. Дисперсионные кривые для волн в модели Кельвина — Гельмгольца. Сплошная кривая — обе жидкости идеальны, штриховая — нижняя жидкость вязкая

движущаяся среда. Аналогично решается подобная задача для слоев конечной толщины, находящихся между жесткими стенками ¹⁴.

Как уже отмечалось при разборе примера с движущейся мембраной, неустойчивость ВОЭ может быть связана не только с поглощением в среде, но и с излучением волн положительной энергии.

Характерный пример дает следующая постановка задачи ^{15, 16}, имеющая отношение к возбуждению внутренних волн в океане. При $z > 0$ жидкость однородна и увлекается со скоростью U относительно нижней области, где жидкость неподвижна и стратифицирована по плотности, т. е.

$$\rho = \rho_1, \quad z > 0, \\ \rho = \rho_2 (1 - \alpha z) \approx \rho_2 e^{-\alpha z}, \quad z < 0,$$

где $\rho_2 > \rho_1$, $\alpha > 0$, при $z = 0$ имеется скачок плотности. Решение этой задачи можно искать в форме бегущей по x волны $\exp[i(kx + mz - \omega t)]$, где при $z > 0$ $m = ik$ (экспоненциальное убывание), а при $z < 0$ $m = k[(N^2/\omega^2) - 1]^{1/2}$ ($N = (g\alpha/\rho_2)^{1/2}$ — частота Брента — Вайсяля в нижнем полупространстве); в общем случае эта величина комплексна. Дисперсионное уравнение задачи имеет вид

$$\rho_1 (\omega - Uk)^2 + \rho_2 \omega (\omega^2 - N^2)^{1/2} - gk (\rho_2 - \rho_1) = 0. \quad (25)$$

Сюда необходимо добавить условие излучения: вертикальная компонента потока энергии S_z в нижней области должна быть направлена вниз и равна нулю при $\omega > N$. Можно показать, что это требование эквивалентно неравенству $\text{Re} m \equiv \text{Re}(N^2 - \omega^2)^{1/2} k > 0$. Решение (25) в общем случае комплексно (рис. 5), причем, кроме неустойчивости КГ (при $k > k_0$), существует излучательная неустойчивость в некоторой части области ВОЭ ($k_1 < k < k_2$) — там, где $\omega < N$, и появляется излучение энергии вниз. Эта область

отделена от области КГ устойчивым интервалом, где $\omega > N$, т. е. внутренние волны распространяться вниз не могут и механизм отбора энергии отсутствует. В области длинных волн ($k < k_1$) волна затухает из-за излучения. Заметим, однако, что в этой области оказывается $\text{Im } m < 0$, т. е. амплитуда

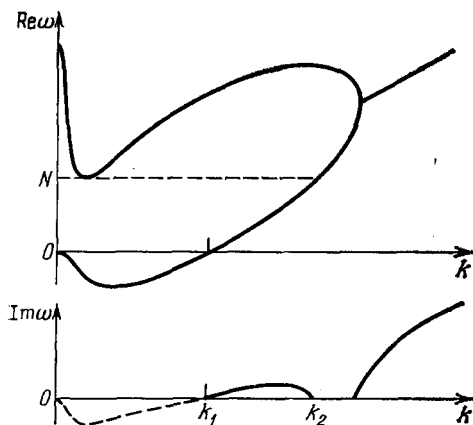


Рис. 5. Дисперсионные кривые для излучательной неустойчивости в модели Кельвина — Гельмгольца с плавно стратифицированным нижним слоем

связана с наличием так называемого критического слоя, т. е. уровня, на котором скорость течения совпадает с фазовой скоростью возмущений. Общая теория неустойчивости таких потоков в идеальной жидкости сейчас

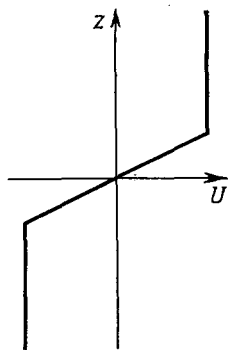


Рис. 6. Аппроксимация сдвигового профиля скорости потока ломаной кривой

хорошо развита «на уровне» теорем, формулирующих достаточные условия устойчивости¹⁷. Так, теорема Майлса¹⁷⁻¹⁹ требует выполнения условия $Ri < 1/4$, где $Ri = N^2/U_z'^2$ — число Ричардсона для потока стратифицированной жидкости, как необходимого условия устойчивости. Эта теорема в действительности описывает условия, необходимые для возникновения отрицательной энергии. Это видно уже из свойств критического слоя: по одну его сторону фазовая скорость волны больше скорости течения, а по другую — меньше. Поэтому знак частоты, а значит, и энергии волны определяется ее локализацией выше или ниже критического слоя. Связь ВОЭ и ВПЭ (волн положительной энергии) — смыкание дисперсионных ветвей — и дает точку бифуркации, по одну сторону от которой находится область неустойчивости. Это рассуждение можно конкретизировать, аппроксимируя плавный профиль ломаной²⁰. При такой аппроксимации, как на рис. 6,

$$W = (U'_2 - U'_1) c |\eta|^2,$$

где U'_2, U'_1 — производные скорости течения под и над изломом, c — скорость возмущения, η — отклонение уровня излома от горизонта. Отсюда видно, что волны, локализованные около нижнего излома, обладают положительной энергией, а вблизи верхнего — отрицательной. Друг с другом эти возмущения (при достаточно большом разнесении уровней) не взаимодействуют, и их дисперсионные кривые не пересекаются. Увеличивая же число изломов про-

волны нарастает (а не убывает!) в глубь жидкости и поле не локализовано по z . Как отмечалось выше, эти волны не являются собственными решениями уравнений поля (т. е. в отсутствие источников), и для их корректного анализа необходимо задать граничные и начальные условия. В области же ВОЭ ($k > k_1$) везде существует локализованная по z мода.

Отметим, что явление излучательной неустойчивости применительно к потоковым системам в плазме изучалось раньше, чем в гидродинамике³⁷.

2.4. Непрерывные профили течения

В случае плавного профиля скорости возможность неустойчивости

филя, мы переходим в пределе к исходному плавному профилю, в котором содержится континуум мод с положительными и отрицательными энергиями; сходимость такого подхода может быть доказана ²².

Такой подход был использован, в частности, в работе ²⁰ для интерпретации ветровой неустойчивости поверхностных волн на воде. При аппроксимации профиля ветра кусочно-линейной зависимостью в воздушном потоке возникает семейство волн с отрицательной энергией. При учете капиллярности неустойчивость начинается с критической скоростью ветра 23 см/с, когда впервые происходит пересечение дисперсионных кривых, соответствующих волнам положительной и отрицательной энергии.

Интересно отметить, что указанные теоремы можно вывести, учитывая сделанное выше утверждение о том, что область неустойчивости должна граничить с областью ВОЭ в точке, где $Z_{0\omega} = 0$ ⁴³. Действительно, задача об устойчивости слоя стратифицированной жидкости со сдвиговым течением сводится к нахождению собственных значений уравнения Тейлора — Гольдштейна ¹⁷

$$\frac{d}{dz} \left[\rho \left(U - \frac{\omega}{k} \right)^2 F_z \right] + \bar{\rho} \left[\frac{\rho'}{\rho} g - k^2 \left(U - \frac{\omega}{k} \right)^2 \right] F = 0, \quad (26)$$

где $\eta = F(z) \exp(-i\omega t + ikx)$ — вертикальное отклонение линии постоянной плотности. Пусть, для простоты, слой жидкости толщины H ограничен твердыми стенками, т. е. $F(0) = F(-H) = 0$. Тогда, делая замену $G = [U - (\omega/k)]^{1/2} F$, умножая (26) на G^* и интегрируя по z , можно получить интегральное дисперсионное соотношение в форме ¹⁹

$$Z_0(\omega, k) = \int_{-H}^0 \left[\bar{\rho} \left(U - \frac{\omega}{k} \right) [|G'|^2 + k^2 |G|^2] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\bar{\rho} U') |G|^2 + \bar{\rho} \left(\frac{1}{4} U'^2 - g \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{|G|^2}{U - (\omega/k)} \right] dz = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим для этого уравнения точку бифуркации, где $Z_{0\omega} = 0$. Заметим, что в случае комплексных частот $\omega = \omega_0 + i\delta$ величина δ может входить в выражения для $|G|^2$ и $|G'|^2$ лишь в четных степенях ⁴³, поэтому мнимая часть $Z_0(\omega, k)$, равная при малых δ величине $i\delta Z_{0\omega}$, не создает производных по ω от величин $|G|^2$ и $|G'|^2$. С учетом этого находим

$$Z_{0\omega} = \int_{-H}^0 \bar{\rho} (|G'|^2 + k^2 |G|^2) dz + \int_{-H}^0 \bar{\rho} \left(g \frac{\rho'}{\rho} - \frac{1}{4} U'^2 \right) dz = 0.$$

Поскольку первое слагаемое здесь всегда положительно, это равенство возможно лишь при условии, что $U'^2 > 4g \frac{\rho'}{\rho}$, т. е. при выполнении критерия Майлса. Заметим, что при отсутствии статификации ($\rho' = 0$) из (26) следует известное уравнение Рэля, а выражение (27) приобретает вид

$$Z_0(\omega, k) = \int_{-H}^0 \left\{ -|W'|^2 + 2 \left[\frac{U''}{(\omega/k) - U} - k^2 \right] |W|^2 \right\} dz, \quad (28)$$

где $W = (\omega - kU) F$. Точке бифуркации соответствует условие

$$Z_{0\omega} = \frac{2}{k} \int_{-H}^0 \frac{U'' |W|^2}{[(\omega/k) - U]^2} dz = 0.$$

Отсюда возникает требование $U'' = 0$ для какой-либо точки слоя, необходимо для неустойчивости. Это известная теорема Рэля.

Заметим еще, что в недавней работе ²³ показана возможность появления неустойчивости в устойчивом сдвиговом потоке при введении устойчивой же

стратификации. Этот эффект связан с появлением внутренних волн положительной энергии, отбирающих энергию от ВОЭ в потоке.

Таким образом, известные теоремы о неустойчивости связаны, по существу, с наличием ВОЭ, которые появляются на границе области «идеальной» неустойчивости типа КГ. Поэтому введение в систему диссипации или излучения, как правило, всегда расширяет область неустойчивости.

Что касается конкретных моделей с плавным профилем, то ВОЭ в них изучались мало. Заметим лишь, что расчет на ЭВМ диаграмм устойчивости для профиля типа $\text{th}(z/L)$ ²⁴ выявляет и ветвь ВОЭ (см.¹⁵).

3. ЧТО ЖЕ ТАКОЕ ЭНЕРГИЯ ВОЛНЫ?

Выше много говорилось об энергии волны. Теперь же мы покажем, что это, собственно, не есть «истинная» энергия волны, а лишь некоторая ее часть, хотя и существенно выделенная в указанном выше смысле.

Итак, что понимать под волновой энергией для слабых волн? Чаше всего исходят из линеаризованных уравнений гидродинамики, умножая их на комплексно сопряженные величины и приводя к дивергентной форме:

$$\frac{\partial E_{\pi}}{\partial t} + \text{div } S_{\pi} = 0. \quad (29)$$

Если величины E_{π} и S_{π} имеют соответственно размерность энергии и ее потока, то их и будем считать таковыми (мы не касаемся здесь «калибровочных» неоднозначностей выбора E_{π} и S_{π} , поскольку это не имеет прямого отношения к данному вопросу). Например, для акустических волн отсюда можно получить известные выражения

$$E_{\pi} = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p'}{2\rho_0 c^2}, \quad S_{\pi} = p'v,$$

связанные уравнением (29).

Именно так получается и равенство $E = \omega \mathcal{L}_{\omega}$, поскольку в нем использовано соотношение $\mathcal{L} = 0$, которое выполняется лишь при учете дисперсионного уравнения $Z(\omega, k) = 0$, следующего из линеаризованных уравнений движения.

Однако в физическом отношении такой подход, строго говоря, некорректен, E_{π} не есть вся энергия, связанная с волной. Действительно, энергетические величины имеют второй порядок по амплитуде волны, и отброшенные при линеаризации квадратичные члены при наличии течений могут дать квадратичный же вклад в энергию, импульс и т. д. (заметим, что для сжимаемой среды это утверждение справедливо и в отсутствие течения^{25, 26}). Для поверхностных и внутренних волн в жидкости ситуация несколько сложнее ввиду принципиальной неоднородности движения.

Дадим сначала элементарное пояснение. Пусть в жидкости существует некоторое периодическое волновое движение, распространяющееся вдоль оси x присутствием постоянного сдвигового течения $U(z)$. Если амплитуда волны достаточно мала, общее поле скоростей u можно представить в виде ряда

$$u = U(z) + A \{f_1(z) \exp[i(\omega t - kx)] + k.c.\} +$$

$$+ A^2 \{f_0(z) + f_2(z) \exp[2i(\omega t - kx)] + k.c.\} + \dots, \quad (30)$$

где A — амплитуда волны, $A^2 f_0$ описывает квадратичную поправку к средней скорости течения. Запишем среднюю плотность кинетической энергии, связанную с волной. Это, по определению*),

$$E_k = \frac{\rho}{2} (\bar{U}^2 - U^2) = \rho |A|^2 (f_1^2 + U f_0). \quad (31)$$

*) Здесь считается для простоты, что в окрестности данной точки $\rho = \text{const}$, иначе могут появиться и другие нелинейные слагаемые.

Таким образом, энергия состоит из двух слагаемых: $E_{\text{л}} \sim f_1^2$ и $E_{\text{нл}} \sim U f_0$, имеющих один и тот же порядок $|A|^2$. Ясно, что $E_{\text{нл}}$ «не содержится» в предельно линеаризованных уравнениях. При наличии свободных границ полная кинетическая энергия волны $E_k = \int E_k(z) dz$ может зависеть еще от нелинейных поправок к смещению границы.

Таким образом, для вычисления «истинной» энергии волны необходимо знать нелинейное решение с точностью до членов второго порядка включительно. Заметим, что это решение не универсально — оно зависит не только от «вынуждающей силы», т. е. от амплитуды и конфигурации основной волны, но и от граничных и начальных условий, т. е. от способа возбуждения поля.

Важный частный класс составляют волны, возбуждаемые без передачи системе дополнительного импульса. Именно такая ситуация реализуется при возбуждении волны неподвижным в среднем волнопродуктором, при нарастании однородного в пространстве возмущения в результате неустойчивости и др. В этих случаях полный перенос массы, связанный с волной, тоже равен нулю, поскольку он равен полному импульсу. Этого условия уже достаточно для однозначного определения средней энергии. Более того, в подобных безимпульсных системах полная энергия волны инвариантна по отношению к выбору движущейся системы отсчета, не меняющей потенциальной энергии системы (например, при горизонтальном движении вертикально стратифицированной среды). Действительно, перенос с постоянной скоростью U приведет к добавлению $\rho |A|^2 U f_{0x}$ в выражение для энергии (31), и отсутствие переноса массы означает как раз $\int f_{0x} dz = 0$ (напомним, что это утверждение относится к области с $\rho = \text{const}$, хотя нетрудно обобщить его на случай жидкости переменной плотности). Разумеется, это относится лишь к суммарной энергии $E_{\text{л}} + E_{\text{нл}}$, поскольку «линейная» энергия $E = \omega \mathcal{U}_{\omega}$, очевидно, зависит от движения системы — вот наглядная демонстрация «равноправия» «линейной» и «нелинейной» энергии.

Итак, уравнение сохранения энергии (29) должно выполняться как для «линейной», так и для полной энергии одновременно.

Аналогичные соображения применимы и к диссипативной функции F , так что уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div } S = F \quad (32)$$

также справедливо для различных величин $E_{\text{л}}$ и $F_{\text{нл}}$. Поскольку все эти величины пропорциональны $|A|^2$, то для однородных плоских волн, амплитуда которых не зависит от координат, $F_{\text{нл}}/F_{\text{л}} = E_{\text{нл}}/E_{\text{л}}$ в любой системе отсчета²⁶.

Теперь ясно, что когда мы говорим об отрицательной энергии, то мы имеем в виду лишь ее «линейную» часть $E_{\text{л}}$, связанную с линеаризованными уравнениями, полная же волновая энергия, вообще говоря, может иметь другую величину и даже знак. Заметим, в частности, что в модели безграничной двухслойной жидкости с вязким нижним слоем на участке ВОЭ, где поле нарастает, растет и среднее течение, равное

$$U_{\text{ср}} = -4k^2 |A|^2 (\kappa\omega)^{-1} \exp(2 \text{Im } \omega t + \kappa z),$$

где $\kappa^2 = 2\nu^{-1} \text{Im } \omega$, ν — вязкость, A — амплитуда смещения границы. Это течение, очевидно, экспоненциально спадает с глубиной в вязкой жидкости, но, вообще говоря, гораздо медленнее, чем колебательная часть поля. Оно в точности компенсирует средний импульс волны, связанный с колебаниями границы раздела (известное стоковое течение). Полная энергия волны равна

$$E = \pm \omega |\omega_1 - \omega_2| \frac{\rho_1 + \rho_2}{k} |A|^2, \quad (33)$$

где $\omega_{1,2}$ и знаки « \pm » снова отвечают различным ветвям дисперсионной кривой при данном k . Это значение не зависит от системы отсчета, тогда как E_{\pm} , которое отличается от (33) лишь заменой ω на $\omega - kU$, может менять как величину, так и знак.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВОЛНАМИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

4.1. Перейдем теперь к обсуждению конкретных эффектов, связанных с нелинейностью ВОЭ. Эти эффекты могут иметь различный характер: так, известно, что если в резонансном триплете, связанном условиями $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, $k_1 + k_2 = k_3$, одна из волн с наибольшей частотой имеет отрицательную энергию, то это может привести к нарастанию амплитуд всех трех волн, причем такая неустойчивость имеет взрывной характер: за конечное время амплитуда в данном приближении растет неограниченно. Для слоистой жидкости такая задача была впервые рассмотрена в работе²⁷ применительно к течению вида

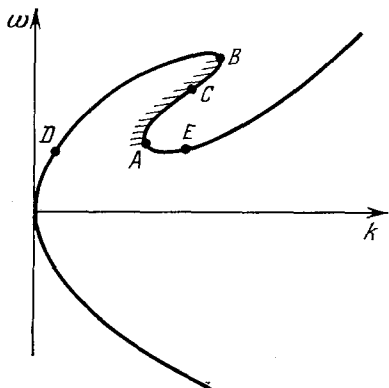


Рис. 7. Дисперсионная кривая для прямоугольной струи.

Точки A, B ограничивают область ВОЭ; точки C, D, E соответствуют резонансному триплету волн, растущих по взрывному закону

$$U(z) = \begin{cases} 0, & |z| > h, \\ U, & |z| < h, \end{cases}$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1, & z > 0, \\ \rho_2, & z < 0, \end{cases}$$

представляющему собой два тангенциальных разрыва, разделенные скачком плотности, находящимся посередине между ними. Соответствующая дисперсионная кривая приведена на рис. 7. Заштрихованный участок AB отвечает ВОЭ. Точки A и B являются точками бифуркации, граничащими с областями неустойчивости КГ.

В таком течении возможно выполнение упомянутых резонансных соотношений, на рис. 7 такой триплет составляют волны, отвечающие точкам C, D и E. При этом наибольшей частотой обладает именно ВОЭ (вектор \vec{OC}), что и требуется для взрывной неустойчивости²⁸. В данном случае время «взрыва» имеет порядок $h/A_0\omega$, где A_0 — начальная амплитуда, ω — частота волн, h — расстояние между тангенциальными разрывами. Подчеркнем, что, несмотря на нелинейный рост поля, соотношение между «линейной» и «нелинейной» частями энергии каждой из волн в этом приближении (т. е. когда учитывается лишь квадратичная нелинейность) остается неизменным в процессе усиления. Заметим, впрочем, что суммарная «линейная» энергия триплета здесь, как известно, равна нулю.

Следует отметить, что важным частным случаем волн отрицательной энергии являются волны нулевой энергии, существующие в окрестности порога линейно неустойчивых систем. Нелинейные процессы, связанные с ними, также носят взрывной характер, причем время «взрыва» является в этом случае минимальным сравнительно с другими «взрывными» временами. Эти процессы для стратифицированных течений с разрывными, а также с непрерывными профилями скорости течений рассмотрены в³⁶.

4.2. Другой класс задач связан с нелинейной стадией диссипативной неустойчивости ВОЭ. Ясно, что в области неустойчивости только нелинейные эффекты приводят к ограничению роста волны (они же, впрочем, могут и ускорить его, как мы только что видели). В случае неустойчивости Кельвина — Гельмгольца обычно, как считают, этот рост ограничивается «обруше-

нием», т. е. турбулизацией гребней волн. Однако в случае «слабой» диссипативной неустойчивости, связанной с ВОЭ, основную роль может играть проявление нелинейных эффектов еще на ламинарной стадии. Чаще всего это связано с зависимостью скорости волны от ее амплитуды, что приводит к нарушению синхронной подкачки энергии в волну от течения. При этом в области слабой дисперсии неустойчивость может сопровождаться эффективным ростом гармоник волны вплоть до демпфирования существенно нелинейных волн, в частности солитонов. Простейшая техника получения таких решений сводится к следующему¹⁵. При достаточно большом значении сдвига скоростей в области достаточно длинных волн дисперсионное уравнение волн можно представить в виде

$$\omega = Vk + \omega'(k), \quad (34)$$

где V — постоянная скорость, а ω' — малая комплексная добавка. Это означает малость эффектов дисперсии, диссипации и усиления. Что же касается нелинейности, то в этом приближении она имеет локальный характер в том же смысле, что, например, в газодинамике: скорость волны зависит от мгновенного значения возмущения. Это позволяет с помощью известных методов нелинейной теории волн получить эволюционное уравнение для одной переменной Φ , характеризующей волну:

$$\phi_t + V\phi_x + \alpha\phi\phi_x + \beta\phi_{xxx} = L'(\phi), \quad (35)$$

где L' — линейный характер, соответствующий ω' , в уравнении (34). Способ получения линейных членов в (35), грубо говоря, сводится к замене ω на $-i\partial/\partial t$, а k на $i\partial/\partial x$ и т. д.; правда, в зависимости от вида $\omega'(k)$ в (35) могут появиться и интегральные операторы, например, член вида ik , описывающий, очевидно, затухание или нарастание волны, не может быть записан в простой действительной дифференциальной форме, а отвечает в (35) члену вида

$$\int \frac{\phi d\xi}{x-\xi}.$$

Если правая часть уравнения (35) достаточно мала, то его решение можно искать в квазистационарной форме, т. е. считать близким к одному из стационарных решений уравнения КдВ — кноидальных волн или солитонов — с медленно меняющимися параметрами. Асимптотические методы, позволяющие найти такие решения, сейчас достаточно хорошо разработаны (см. например, ^{29, 31}). В первом приближении они эквивалентны использованию уравнения баланса энергии, полученного путем умножения (35) на ϕ и последующего интегрирования по пространственному периоду волны (для солитона — в бесконечных пределах):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi^2 \rangle = \langle \phi L'(\phi) \rangle, \quad (36)$$

где $\langle \dots \rangle$ обозначает указанное интегрирование. Таким образом, мы приходим к уравнению в обычных производных для параметров волны. Обсуждение этого вопроса можно найти в ³¹.

В последнее время было рассмотрено несколько примеров такого описания, относящихся к ВОЭ в гидродинамике слоистой жидкости и основанных на дисперсионных уравнениях типа рассмотренных в разделе 2. Один из них относится к рассмотренной выше излучательной неустойчивости^{15, 30} в модели, когда слой однородной жидкости толщины h движется со скоростью U над бесконечным стратифицированным полупространством с частотой Вйясяля N . Учтем еще вязкость ν_T в верхнем слое, считая нижний слой идеальным. Эти предположения, качественно отражающие реальную структуру верхнего слоя океана, приводят к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} s(\omega - kU)^2 + \omega(\omega^2 - N^2)^{1/2} \operatorname{th} kh - (1 - s)gk \operatorname{th} kh = \\ = -4i\nu_T k^2 (\omega - kU) \operatorname{th} kh, \end{aligned} \quad (37)$$

где $k_v^2 = k^2 - i[(\omega - kU)/v_T]$, $s = \rho_1/\rho_2$. При $v_T \rightarrow 0$, $h \rightarrow \infty$ отсюда, конечно, получается формула (25).

Дисперсионные кривые (37) при $U > U_c = [(1-s)gh/s]^{1/2}$ приведены на рис. 8. В этом случае неустойчивость — длинноволновая, она охватывает интервал $0 < k < k_N$, где $\text{Re } \omega < N$, и волны излучаются вниз. Для малых k справедливо разложение (34):

$$\omega = \varphi k + \psi k^3 - 2iv_T k^2,$$

где

$$\varphi = U_c(c-1) - i \frac{Nh}{2}(c-1),$$

$$\psi = U_c h^2 \left[\frac{1}{6} + \frac{(c-1)^2}{2} - \frac{(c-1)^3}{4} \right] - i \frac{U_c^2 h}{2N}(c-1)^3.$$

Отсюда следует эволюционное уравнение типа (35):

$$\eta_t + v\eta_x + \frac{3}{2} \frac{U_c}{h} \eta\eta_x - \beta\eta_{xxx} =$$

$$= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{x'} \frac{dx'}{x-x'} + 2v_T \eta_{xx} + \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{x'x'x'} \frac{dx'}{x-x'}, \quad (38)$$

где $v = \text{Re } \varphi$, $\beta = \text{Re } \psi$, $\mu = \text{Im } \varphi$, $v = \text{Im } \psi$, а интегралы берутся в смысле главного значения. Если правая часть (38) мала, то (38) близко к уравнению Кортевега-де-Вриза (КдВ), и его решение можно искать в виде, близком к виду стационарных решений последнего. В частности, представляя солитон в обычном виде

$$\eta = A \text{sech}^2 \frac{x - v_s t}{\Delta}, \quad \Delta = \left(\frac{12\beta}{\alpha A} \right)^{1/2},$$

$$v_s = v \left(1 + \frac{\alpha A}{3} \right), \quad (39)$$

и считая A переменным, получим, следующее уравнение для амплитуды солитона:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2,92}{\pi} \mu \left(\frac{\alpha}{12\beta} \right)^{1/2} A^{3/2} - \frac{16}{15} \frac{\alpha v_T}{12\beta} \times$$

$$\times A^2 - \frac{5,11}{\pi} v \left(\frac{\alpha}{12\beta} \right)^{3/2} A^{5/2}. \quad (40)$$

Рис. 8. Дисперсионные кривые для излучательной неустойчивости в модели с тонким движущимся верхним слоем и бесконечным плавно стратифицированным неподвижным нижним слоем

Качественный анализ этого уравнения не составляет труда. Если в начальный момент амплитуда солитона A_0 мала, то основную роль играет первый член в правой части (40) (низшая степень A), и тогда решение имеет вид

$$A = \frac{A_0}{[1 - (t/T_{\text{взр}})]^2}, \quad (41)$$

где

$$T_{\text{взр}} = \frac{\pi}{1,46\mu(12\beta/\alpha A_0)},$$

т. е. имеет место взрывной рост амплитуды солитона — за время $T_{\text{взр}}$ его амплитуда обращается в бесконечность. Физическое объяснение этого эффекта в данном случае связано с уменьшением длины солитона с ростом A ,

что приводит к ускоренному росту амплитуды. Однако по мере роста A вступают в игру другие члены в уравнении (40), и решение стремится к стационарному уровню $A_{ст}$ (рис. 9). Если же $A_0 > A_{ст}$, то солитон монотонно затухает до стационарного уровня.

Приведем некоторые оценки для условий океана. Если $\Delta\rho/\rho = 10^{-3}$, $N = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $U (\Delta\rho/\rho gh)^{-1/2} = 1,1$, то излучательная неустойчивость наиболее эффективно проявляется при $h = 10$ — 50 м для волн с длинами 10^2 — 10^3 м и временными масштабами 20—200 мин. При $h = 25$ м стационарная амплитуда солитона составляет 7 м, а ширина $\Delta = 600$ м. Приведенные параметры типичны для верхнего слоя океана, где находится слой «скачка» плотности (сезонный термоклин).

Другой пример построения слабонелинейной теории гидродинамической неустойчивости ВОЭ отнесится к случаю относительного движения двух тонких вязких слоев жидкости ¹⁴.

Необходимо отметить, что применимость таких моделей обусловлена рядом ограничений (так, для «подавления» более сильной коротковолновой неустойчивости типа КГ нужно учитывать конечность толщины слоя скачка плотности или принять гипотезу о быстрой турбулизации тонкого переходного слоя без изменения течения вне его и т. п.). Вместе с тем они, с одной стороны, дают возможность построить чисто динамическую теорию гидродинамической неустойчивости в области ВОЭ, а с другой — по-видимому, применимы к описанию ряда реальных океанических ситуаций.

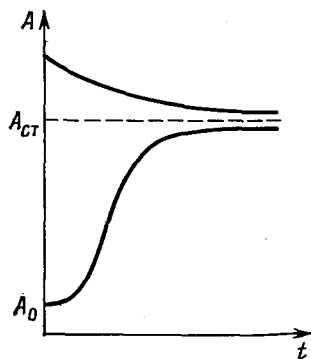


Рис. 9. Зависимости амплитуд солитонов внутренних волн от времени при различных начальных условиях

5. РАДИАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Мы уже упоминали о связи понятия ВОЭ с так называемым аномальным эффектом Доплера, т. е. фактически эффектом изменения знака частоты поля, излучаемого внутрь черенковского конуса, по сравнению с полем, излучаемым вне этого конуса; этот вопрос специально рассматривался в ¹. Для обсуждавшихся выше одномерных (точнее, плоских двумерных) волн и ВОЭ, и аномальный доплер-эффект отвечают просто волнам, фазовая скорость которых меньше скорости потока, а волновой вектор направлен в ту же сторону.

До сих пор мы рассматривали «поточковые» неустойчивости, связанные с соответствующей фазировкой для коллективного отклика частиц среды. Другой класс волновых неустойчивостей, хорошо известный в электродинамике, но мало изученный в гидродинамике, связан с раскачкой колебаний движущихся осцилляторов, обусловленной излучением ими ВОЭ в область аномального эффекта Доплера, т. е. внутри угла θ , удовлетворяющего черенковскому условию $\cos \theta = v_\phi/v$, где v — скорость движения осциллятора, v_ϕ — фазовая скорость волны на данной частоте. Это также вариант излучательной неустойчивости: излучение ВОЭ дает раскачку, и если ее вклад преобладает над потерями на излучение волн с положительной энергией, то колебания будут нарастать. Подобные эффекты сравнительно давно известны в электродинамике ³².

Для гидродинамики такая задача была недавно рассмотрена в работе ³³ на примере простой модели: малая сфера протягивается с помощью упругой пружины параллельно границе раздела двух несжимаемых жидкостей разной плотности на расстоянии h от границы (рис. 10). Скорость протяжки постоянна, и движение сферы состоит из поступательного со ско-

ростью U и колебательного вдоль оси движения с некоторой собственной частотой Ω . При этом на границе раздела возбуждаются волны, создающие силу радиационного сопротивления F . Эта сила имеет как постоянную составляющую F_0 (уравновешиваемую натяжением пружин), так и колебательную компоненту \tilde{F} , так что уравнение колебаний тела имеет вид

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{\tilde{F}}{m}, \quad (42)$$

где m — масса тела (включая присоединенную массу среды, ω_0 — резонансная частота, ξ — колебательная часть смещения.

Если радиационная сила достаточно мала, то частота колебаний близка к ω_0 , а функция \tilde{F} для малых колебаний близка к гармонической, причем

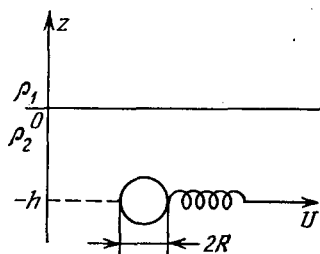


Рис. 10. Осциллятор, движущийся под границей раздела двух жидкостей различной плотности

ее амплитуда имеет вид $iG(\omega_0, U)a$, где a — амплитуда колебаний осциллятора. Тогда неустойчивость возникает при $G > 0$ (ее инкремент равен $G/(2m\Omega)$, знак же G обусловлен интегральным действием излучения на всех доплеровских частотах (ясно, что частота излучения зависит от направления из-за движения осциллятора). Весьма прост и нагляден здесь случай низкочастотных колебаний, когда ω_0 настолько мала, что радиационная сила в каждый момент такая же, как при движении

с постоянной скоростью, т. е. равна $F_0(U - \dot{\xi})$, а осцилляторная часть силы описывается вариацией этого выражения, т. е. $\tilde{F} = -(\partial F_0 / \partial U)a$,

где a — амплитуда колебаний. Отсюда видно, что раскачка возникает при $F_{0U} < 0$, т. е. на падающем участке на квазистатической кривой $F_0(U)$.

В общем же случае задачу необходимо решать последовательно, записывая поле излучения и определяя силу его реакции на тело. Эта сила имеет, кроме постоянной составляющей F_0 (обычного волнового сопротивления), колебательную компоненту с амплитудой $\tilde{F}_0 = \tilde{F}_+ + \tilde{F}_-$, где ³³

$$\tilde{F}_{\pm} = \mp \frac{R^3 \rho_2^2 a}{U^3 (\rho_1 + \rho_2)} \int \frac{\omega^3 (\omega \mp \omega_0)^2 \exp(-2\omega^2 h/g)}{\{\omega^2 - (g'^2/U^2) [1 \mp (\omega_0/\omega)^2]\}^{1/2}} d\omega. \quad (43)$$

($g' = g \Delta\rho/2\rho$), причем интеграл берется по областям частот, удовлетворяющих условию $\omega^2 \geq (g'^2/U^2) (1 \mp \omega_0/\omega)^2$, $\omega > 0$. Очевидно, здесь \tilde{F}_+ отвечает «нормальным» волнам положительной энергии, излучаемым вне черенковского конуса, а \tilde{F}_- — «аномальным» ВОЭ, распространяющимся внутри этого конуса. Суммарный эффект зависит от скорости движения и частоты колебаний.

На рис. 11 показана зависимость \tilde{F} от числа Фруда $Fr = U/(g'h)^{1/2}$ для двух значений параметра $S = 4\omega_0 U/g'$. В случае $S = 0,2$ (низкая частота) результат близок к «квазистатическому», а при $S = 4,0$ (высокая частота) эффект раскачки выражен гораздо сильнее и появляется даже на участке, где $F_{0U} > 0$.

Влияние вязкости жидкости опять приводит к эффектам противоположного знака для «нормальных» и «аномальных» волн. В работах ^{33,34} для задач типа рассмотренной выше учитывалась вязкость ν верхней жидкости. Результат оказывается зависящим от трех параметров: $\beta = U^3/g'\nu$, Fr и $\gamma = \rho_2/\rho_1$. Если, в частности, $\beta \gg 1$ (малая вязкость), то влиянием вяз-

кости можно пренебречь при условии $[\beta(\gamma + 1)]^{-1} \ll Fr^2 \ll \beta$. Вне этого интервала неустойчивость исчезает. Следовательно, неустойчивость проявляется в конечном интервале глубин h и исчезает как при очень малых, так и при очень больших h . В случае сильной вязкости ($\beta \ll 1$) колебания всегда затухают.

Наконец, весьма интересен вопрос о нелинейной стадии такой неустойчивости, когда сила сопротивления уже не пропорциональна a . При этом, конечно, в \tilde{F} становятся существенными высшие гармоники, однако, если она по-прежнему мала по сравнению с остальными членами уравнения (40), колебания осциллятора останутся близкими к гармоническим, и для их анализа применимо квазилинейное приближение. При этом теперь $\tilde{F} = iG(\omega_0, U, a)$ вычислить относительно просто удастся в квазистатическом случае. Этот случай подробно обсуждался в^{33,34} применительно к двумерному варианту данной задачи (движение бесконечного цилиндра по нормали к его оси). Нелинейные добавки возникают как в амплитуде колебательной силы \tilde{F} , так и в выражении для средней силы (самовоздействие). Выражение для комплексной частоты колебаний имеет вид

$$\Omega = \omega_0 + \frac{i}{2m} \left(F'_{0U} + \frac{F''_{0U} U_m^2}{8} \right), \quad (44)$$

где U_m — амплитуда колебательной скорости, F_0 — волновое сопротивление без учета нелинейности. Производные берутся в точке $U = U_0$, где U_0 — скорость «протяжки». Отсюда видно, что при $F''' < 0$ (что в данном случае выполняется) существует равновесное значение амплитуды $U_m = (8F'/|F'''|)^{1/2}$. Эта величина максимальна в точке перегиба кривой $F(U)$ и достигает значений, сравнимых с U_0 (рис. 12).

Выражение для средней тормозящей силы при таком установившемся движении имеет вид

$$\bar{F} = F_0 - \frac{2F'F''}{F'''} \quad (45)$$

В последнее время рассматривались и другие модели, включая движение осциллятора в непрерывно стратифицированной жидкости³⁵. По нашему мнению, проблема аномальной доплеровской неустойчивости осцилляторов в гидродинамике заслуживает дальнейшего изучения.

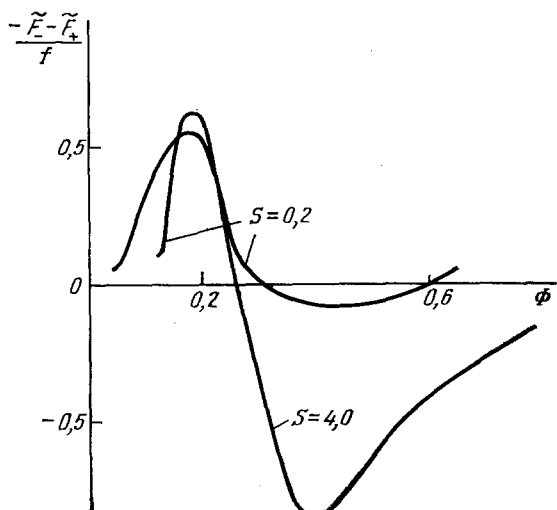


Рис. 11. Зависимость амплитуды осцилляторной силы сопротивления \tilde{F} (нормированной на величину $f = (2\pi R^2)^2 \rho_2^2 ag^2/2\pi h^4 (\rho_1 + \rho_2)$) от числа труда Fr

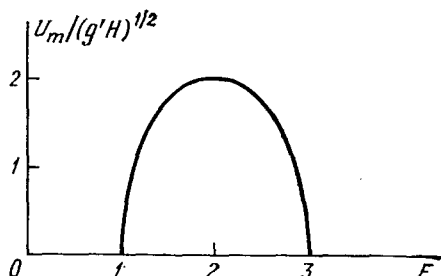


Рис. 12. Зависимость амплитуды колебательной скорости от силы волнового сопротивления

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы убедились, концепция ВОЭ, несмотря на ее относительный характер (в смысле зависимости знака энергии от системы отсчета), может оказаться весьма полезной, поскольку она позволяет прогнозировать довольно широкий класс неустойчивостей. При этом ВОЭ в гидродинамике — вовсе не экзотический объект. Всюду, где возможна сдвиговая неустойчивость, можно ожидать существования ВОЭ, которое обычно приводит к расширению диапазона неустойчивости, а иногда и является ее единственным фактором.

К сожалению, диссипативная неустойчивость, связанная с ВОЭ, специально в экспериментах не изучалась. Однако можно указать по меньшей мере один эксперимент²¹, где эта связь легко прослеживается. В этом эксперименте с двухслойной жидкостью, в которой верхний слой двигался относительно нижнего, были зафиксированы неустойчивости по отношению к возмущениям с различными волновыми числами. На рис. 13 участок 2 отвечает неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, а участок 3 — волнам отрицательной энергии. Между тем оценки свидетельствуют о том, что неустойчивости такого рода могут играть существенную роль, например, в условиях океана. Так, рассмотренная выше структура течений и плотностной стратификации (резкий сдвиг скорости и скачок плотности, разделяющий

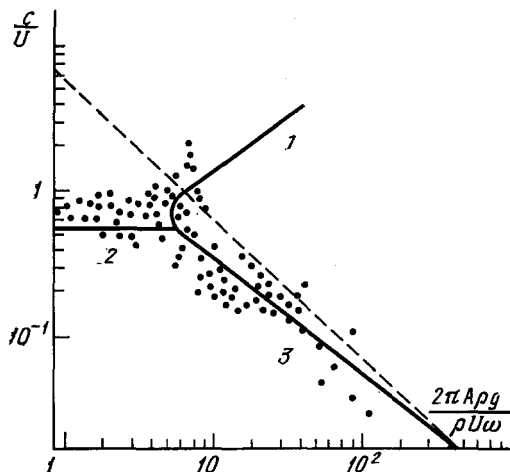


Рис. 13. Дисперсионная зависимость для волн на границе раздела двух слоев, движущихся относительно друг друга, и соответствующие экспериментальные точки²¹ ($\Delta\rho/\rho \equiv \Delta\rho/\bar{\rho}$). Штриховая линия ограничивает диапазон волн отрицательной энергии

верхний однородный слой и нижнюю плавно стратифицированную жидкость) типична для верхнего слоя океана, причем стратификация нижнего слоя создает возможность для излучательной неустойчивости. Если принять вполне реальные значения $\Delta\rho/\rho = 10^{-3}$, $N = 5 \cdot 10^{-3}$ рад/с, $U = 1,1 (g \Delta\rho h / 2\rho)^{1/2}$ (обозначения здесь те же, что и в разделе 4), то излучательная неустойчивость наиболее эффективно проявляется при $h = 10\text{--}50$ м для волн с длинами $10^2\text{--}10^3$ м и периодами $20\text{--}200$ мин. Как следует из решения нелинейной задачи (см. раздел 4), при $h = 25$ м амплитуда возникающих при этом уединенных внутренних волн в стационарном режиме — около 7 м, а длина — около 600 м. Это дает основания предположить, что излучательная неустойчивость может быть причиной формирования солитоноподобных внутренних волн, неоднократно наблюдавшихся в различных районах Мирового океана. В целом сложность и богатство задач здесь, по-видимому, не меньше, чем в электродинамике, и можно думать, что эта проблема еще будет интенсивно изучаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Незлин М. В. // УФН. 1974. Т. 120. С. 481.
2. Пирс Дж. Почти все о волнах. — М.: Мир, 1976. — С. 176.
3. Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. // ЖЭТФ, 1964. Т. 47. С. 2266.
4. Benjamin T. B. // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. P. 436.
5. Унзем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.

6. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979. С. 335.
7. Рыбак С. А. //Нелинейная акустика/Под ред. В. А. Зверева, Л. А. Островского.— Горький: ИПФ АН СССР, 1980.— С. 176; Акуст. ж. 1980. Т. 26. С. 248.
8. Воронovich А. Г., Лобанов Е. В., Рыбак С. А. //Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана», 1980. Т. 16. С. 329.
9. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях.— М.: Мир, 1981.— С. 598.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.
11. Cairns R. Q. //J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 1.
12. Кикина Н. Г. //Акуст. ж., 1967. Т. 13. С. 213.
13. Езерский А. Б., Островский Л. А., Степанянц Ю. А. //Изв. АН СССР, Сер. «Физика атмосферы и океана». 1981. Т. 17. С. 1201.
14. Островский Л. А., Степанянц Ю. А. //Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа», 1982. № 4. с. 63.
15. Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш. //Нелинейные волны. Самоорганизация/Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича.— М.: Наука, 1983.— С. 204.
16. Островский Л. А., Цимринг Л. Ш. //Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана», 1981. Т. 17, С. 766.
17. Ии Чиа-Шун //Нелинейные волны/Под ред. С. Лейбовича, А. Сиббаса.— М.: Мир, 1977.
18. Miles J. W. //J. Fluid Mech. 1961. V. 10. P. 496.
19. Howard L. N. //Ibidem. P. 509.
20. Езерский А. Б., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш. Препринт ИПФ АН СССР № 16.— Горький, 1981.
21. Камацу Т., Имасака М., Цубаки Г. //Кюдай ногаку сюко (япон.). 1979. Т. 52. С. 25.
22. Герценштейн С. Я. //ДАН СССР. 1969. Т. 187. С. 1012.
23. Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А. //Ibidem. 1985. Т. 284. С. 1054.
24. Gritts D. C. //J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. P. 1642.
25. Андреев Н. Н. //Акуст. журн. 1955. Т. 1. С. 3.
26. Островский Л. А. Ibidem. 1968. Т. 14. С. 82.
27. Воронovich А. Г., Рыбак С. А. //ДАН СССР. 1978. Т. 239. С. 1457.
28. Захаров В. Е. //Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1974. Т. 17. С. 431.
29. Островский Л. А. //Ibidem. С. 454.
30. Ostrovsky L. A., Stepanyants Yu. A., Tsimring L. Sh. //Intern. J. Non Linear Mech. 1984. V. 19. P. 151.
31. Ostrovsky L. A. //Nonlinear Deformation Waves.— Tallin, 1982.
32. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М., Наука, 1975.
33. Гапонов-Грехов А. В., Долина И. С., Островский Л. А. //ДАН СССР. 1983. Т. 268. С. 827.
34. Долина И. С. //Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа». 1984. № 4. С. 87.
35. Абрамович Б. С., Мареев Е. А., Немцов Б. Е. //Ibidem. 1986. № 1. С. 168.
36. Моисеев С. С., Пунгин В. Т., Суязов Н. С., Эткин В. С. //Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1984. Т. 20. С. 842.
37. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. //ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 431.
38. Островский Л. А. //ЖЭТФ. 1971. Т. 61, С. 551.
39. Зельдович Я. Б. //Письма ЖЭТФ. 1971. Т. 14. С. 270.
40. Зельдович Я. Б. //ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 2076.
41. Зельдович Я. Б. //Избранные труды.— М.: Наука, 1975.— Т. 2. С. 171.
42. Фабрикант А. Л. //Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по физике акустогидродинамических явлений.— М.: Наука, 1982.— С. 194.
43. Наугольных К. А., Рыбак С. А., Третьякова С. Ю. //Проблемы нелинейной акустодиагностики/Под ред. Н. Д. Векслера.— Таллин: Валгус, 1986.— С. 27.