1986 г. Ноябрь Том 150, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

АНОМАЛИИ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А. Ю. Морозов

СОДЕРЖАНИЕ

Настоящий обзор посвящен квантовым аномалиям. Впервые аномалии были обнаружены Штейнбергером [1] и Швингером [2], однако широкий интерес к ним появился лишь после работ Адлера, Белла [3] и Джэкива [4] в 1969 г. В последнее время получено много новых результатов, касающихся аномалий [5-47], и интерес к этой области непрерывно растет. Известные приложения пока что не очень разнообразны, но можно думать, что столь глубокое явление займет более заметное место как в структуре будущей фундаментальной теории, так и в динамике конкретных сложных физических систем.

1. ВВЕДЕНИЕ

В первых разделах введения мы хотели бы напомнить некоторые элементарные сведения об аномальных симметриях. Во-первых, будет сказано, что́ такое симметрия в теории поля вообще и почему со всеми глобальными симметриями связываются сохраняющиеся нётеровские токи. Во-вторых, будет показана роль нётеровских токов при переходе к калибровочной теории, инвариантной относительно локальных преобразований, и объяснено, почему ненарушенная калибровочная инвариантность требует (ковариантного) сохранения этих токов. В-третьих, мы выясним, что́ может служить причиной нарушения классических (древесных) симметрий на квантовом (петлевом) уровне и в чем разница между истинным нарушением симметрии (аномалией, несохранением тока) и нарушением спонтанным (при котором нётеровские токи сохраняются). Все эти вопросы обсуждаются в разделах 1.1 и 1.2. В разделе 1.3 мы дадим общую классификацию аномалий. Наконец, в конце введения кратко характеризуется содержание остальных разделов 2—4 обзора, посвященных вычислению аномалий.

1.1. Общие сведения о симметриях

Под аномалиями понимается неспонтанное нарушение классических симметрий квантовыми эффектами. Разъясняя это утверждение, естественно начать с напоминания о том, что́ такое

Симметрии и сохраняющиеся токи

Любая локальная теория поля описывается лагранжианом $L(\phi, \phi_{,\mu})$, зависящим от полей $\phi(x)$ и их производных $\partial_\mu\phi \equiv \phi_{,\mu}$ по координатам и времени. Для большинства содержательных теорий лагранжиан не содержит производных выше первой (в противном случае неизвестно, как обстоит дело с унитарностью), и мы будем заниматься только такими теориями. Полей ϕ всегда бывает несколько, однако индекс i, отличающий различные поля ϕ^i и суммирование по этому индексу, мы будем, как правило, опускать. Фундаментальным является понятие действия $S = \int L(\phi)\,\mathrm{d}^Dx$, получающегося интегрированием лагранжиана по всему D-мерному пространству-времени. Вариацией действия S по полям получаются уравнения движения

$$0 = \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} = -\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\right) + \frac{\partial L}{\partial\phi}. \tag{1.1}$$

Преобразования симметрии $\phi \to \phi + \delta_\varepsilon\phi$ не меняют уравнений движения, а значит, оставляют неизменным действие. Что касается лагранжиана, то инвариантность действия не запрещает ему измениться на полную производную:

$$L(\phi) \to L_\varepsilon(\phi + \delta_\varepsilon\phi) \equiv L(\phi) + \partial_\mu\Lambda_\mu^{(\varepsilon)} + O(\varepsilon^2). \tag{1.2}$$

При этом уравнения движения действительно остаются прежними: линейное по L равенство

$$0 = \frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial\phi} - \frac{\partial^2 L}{\partial\phi\,\partial\phi_{,\mu}}\phi_{,\mu} - \frac{\partial^2 L}{\partial\phi_{,\mu}\,\partial\phi_{,\nu}}\phi_{,\mu\nu}$$

при подстановке $\partial_\nu\Lambda_\nu = (\partial\Lambda_\nu/\partial\phi)\,\phi_{,\nu}$ вместо L превращается в

$$\frac{\partial^2\Lambda_\nu}{\partial\phi^2}\phi_{,\nu} - \frac{\partial^2\Lambda_\nu}{\partial\phi^2}g_{\mu\nu}\phi_{,\mu} \equiv 0.$$

(Мы предположили, что Λ_ν не содержит производных полей ϕ; если это не так, надо использовать уравнения движения с учетом членов $\partial L/\partial\phi_{,\mu\nu}$ и т. д.)

Важно, что изменение лагранжиана (1.2) должно быть полной производной *без использования* уравнений движения. В самом деле, с учетом уравнений движения действие инвариантно относительно любых изменений полей:

$$S\{\phi + \delta\phi\} - S\{\phi\} = \frac{\delta S}{\delta\phi}\delta\phi = 0,$$

а изменение лагранжиана *всегда* равно полной производной:

$$L(\phi + \delta\phi) - L(\phi) = \frac{\partial L}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}(\delta\phi)_{,\mu} =$$

$$= \left(\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\right)\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\partial_\mu\delta\phi = \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi\right). \tag{1.3}$$

Если же мы имеем дело с преобразованием симметрии, то наряду с (1.3) выполнено также и (1.2) и из этих двух соотношений вытекает уравнение

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\phi,_\mu}\,\delta_\varepsilon\phi-\Lambda_\mu^{(\varepsilon)}\right)=0,$$

т. е. с учетом уравнений движения сохраняется ток

$$J_\mu^{(\varepsilon)}=\frac{\partial L}{\partial\phi,_\mu}\,\delta_\varepsilon\phi-\Lambda_\mu^{(\varepsilon)}. \qquad (1.4)$$

Это утверждение известно как первая теорема Нётер: инвариантность действия по отношению к глобальному преобразованию полей равносильна существованию тока, дивергенция которого равна линейной комбинации уравнений движения.

В формулировке этой теоремы впервые указано на различие между *глобальными* и *локальными симметриями*. Они различаются произволом в выборе параметра преобразования ε. Если $\varepsilon=\mathrm{const}$, то преобразование глобальное, а если ε может произвольным образом зависеть от координат x, то говорят о локальном, или калибровочном, преобразовании. Само глобальное преобразование может затрагивать координаты. Так, например, сдвигу $x_\mu\to x_\mu+\varepsilon_\mu$ отвечает преобразование полей $\phi\to\phi+\varepsilon_\mu\partial_\mu\phi$; если здесь $\varepsilon_\mu=\mathrm{const}$, то это глобальный сдвиг, а если $\varepsilon_\mu(x)$ — переменный, то это локальное общекоординатное преобразование. Почему в теореме Нётер упомянуто именно глобальное преобразование? Выделим из $\delta_\varepsilon\phi$ параметр ε: $\delta_\varepsilon\phi=$ $=\varepsilon\delta\phi$. Соответственно $\Lambda_\mu^{(\varepsilon)}=\varepsilon\Lambda_\mu$. Посмотрим теперь, что произойдет, если предположить справедливость равенства (1.2) для любых ε, в том числе произвольно зависящих от координат. Из $\delta_\varepsilon L=\partial_\mu(\varepsilon\Lambda_\mu)$ тогда вытекает

$$\varepsilon\left[\frac{\partial L}{\partial\phi}\,\delta\phi+\frac{\partial L}{\partial\phi,_\mu}\,(\delta\phi),_\mu\right]+\partial_\mu\varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial\phi,_\mu}\,\delta\phi\right)=\varepsilon\partial_\mu\Lambda_\mu+\Lambda_\mu\partial_\mu\varepsilon. \qquad (1.5)$$

Приравнивая друг другу выражения, домножаемые на $\partial_\mu\varepsilon$ в левой и правой частях, видим, что $\Lambda_\mu=\delta\phi\,\partial L/\partial\phi._\mu$. Тогда из сравнения коэффициентов при ε получится

$$\delta\phi\left(\frac{\partial L}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\phi,_\mu}\right)=0.$$

Вспомним теперь, что равенство (1.2) должно выполняться тождественно, без использования уравнений движения. Поэтому мы видим, что если действие инвариантно относительно *локальных* преобразований, то некоторая линейная комбинация лагранжевых производных $(\partial L/\partial\phi)-\partial_\mu(\partial L/\partial\phi,_\mu)$ *тождественно* равна нулю. Что же касается нётеровского тока (1.4), то в этом случае он, как видно из (1.5), отсутствует: равен нулю. Тождественное зануление некоторых лагранжевых производных в калибровочно инвариантной теории составляет содержание второй теоремы Нётер. (В более общем случае, когда $\Lambda_\mu^{(\varepsilon)}=\varepsilon\Lambda_\mu+\partial_\nu\varepsilon\,\Lambda_{\mu\nu}+\ldots$, обращается в нуль линейная комбинация лагранжевых производных и производных от них, $\partial_\alpha[(\partial L/\partial\phi)-$ $-\partial_\mu(\partial L/\partial\phi,_\mu)],\ \ldots$)

Остановимся теперь на *глобальных* симметриях, которым отвечают нётеровские токи (1.4). Важный класс таких симметрий связан с преобразованиями полей, не содержащими производных, т. е. $\delta\phi=f(\phi)$, а $\partial f/\partial\phi,_\mu=0$. Такие преобразования мы назовем внутренними. Появление производных от полей в $\delta\phi$ означало бы, что наряду с полями преобразуются также координаты, как мы видели чуть выше на примере сдвига. Большинство внутренних преобразований оставляет инвариантным не только действие, но и сам лагранжиан, т. е. для них $\Lambda_\mu=0$. В таких случаях нётеровский ток $J_\mu=(\partial L/\partial\phi,_\mu)\,\delta\phi$. Легко видеть, что после квантования интеграл по пространству от временно́й компоненты этого тока является генератором глобального преобразования $\phi\to\phi+\varepsilon\delta\phi$. Сама же компонента $J_0(\mathrm{x})$ генерирует локальные преобразования $\phi \to \phi + \varepsilon(x)\,\delta\phi$. В самом деле, канонический импульс $\pi = \partial L/\partial\phi_{,0}$ коммутирует (в квантовой теории; в классике речь идет о скобках Пуассона) с полем ϕ на δ-функцию: $[\pi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = -i\delta^{(D-1)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ и

$$i\left[\int d^{D-1}\mathbf{x}J_0^{(\varepsilon)}(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})\right] = i\int d^{D-1}\mathbf{x}\,[\pi(\mathbf{x})\,\delta_\varepsilon\phi(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})] = +\delta_\varepsilon\phi(\mathbf{y}).$$

Существуют, однако, внутренние симметрии, изменяющие лагранжиан, для которых $\Lambda_\mu \neq 0$. В таких случаях мы будем говорить, что лагранжиан неявно инвариантен, а те его части, которые изменяются при внутренних преобразованиях, назовем весс-зуминовскими членами *). Например, пусть $L = c_\mu^{ij}\phi^i\partial_\mu\phi^j$, где c_μ^{ij} постоянно и антисимметрично по индексам i, j так, чтобы L не оказался полной производной. Этот лагранжиан изменяется на полную производную при преобразовании $\delta_\varepsilon\phi^i = \varepsilon^i = \mathrm{const}$: $\delta L = c_\mu^{ij}\varepsilon^i\partial_\mu\phi^j = \partial_\mu(c_\mu^{ij}\varepsilon^i\phi_j)$. Нётеровский ток существует и равен $\varepsilon_i J_\mu^i = (\partial L/\partial\phi_{,\mu})\,\delta_\varepsilon\phi - \Lambda_\mu^{(\varepsilon)} = -2c_\mu^{ij}\varepsilon^i\phi^j$. Условие сохранения тока совпадает с уравнением движения, $\partial_\mu c_\mu^{ij}\phi^j = 0$. Более содержательный пример: абелева нечетномерная электродинамика. Ее простейший вариант существует в трех измерениях, $D = 3$: $L = -(1/4)\,F_{\mu\nu}^2 + c\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A_\mu F_{\nu\lambda}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Эта теория инвариантна относительно преобразования $\delta_\varepsilon A_\mu = \varepsilon_\mu = \mathrm{const}$: $\delta L = \partial_\nu(\varepsilon_\mu 2c\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A_\lambda)$, а нётеровский ток $\varepsilon_\nu J_{\mu\nu} = (\partial L/\partial A_{\nu,\mu})\,\delta_\varepsilon A_\nu - \Lambda_\nu^{(\varepsilon)} = \varepsilon_\nu(F_{\mu\nu} + 4c\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A_\lambda)$. Закон сохранения $\partial_\mu J_{\mu\nu} = 0$ снова совпадает с уравнением движения, $\partial_\mu(F_{\mu\nu} + 4c\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A_\lambda) = 0$.

Добавки к нётеровским токам, связанные с весс-зуминовскими членами, в многомерной теории поля пропорциональны антисимметричным ε-символам, поэтому 0-компоненты Λ_0 не содержат производных от полей по времени, а следовательно, и канонических импульсов. Из-за этого добавление $-\Lambda_0^{(\varepsilon)}$ к $\pi\delta_\varepsilon\phi$ в 0-компоненте тока $J_0^{(\varepsilon)}$ не меняет коммутационных соотношений $J_0^{(\varepsilon)}$ с ϕ, и $\int d^{D-1}xJ_0^{(\varepsilon)}$ по-прежнему является генератором преобразования. Отметим, что $\int d^{D-1}xJ_0^{(\varepsilon)}$ остается генератором этого преобразования, даже если оно *не является* преобразованием симметрии. При этом, однако, вариации лагранжиана и действия отличны от нуля и ничем не замечательны.

Прежде чем переходить к калибровочно инвариантным теориям, скажем несколько слов о *глобальных преобразованиях, содержащих производные полей*. Как уже говорилось, соответствующие симметрии связаны с заменами координат, поэтому они называются пространственно-временными. Здесь наиболее существенны сдвиговое преобразование $\delta_\varepsilon\phi = \varepsilon_\mu\partial_\mu\phi$, $\delta_\varepsilon L = \varepsilon_\mu\partial_\mu L$ $\Lambda_\mu^{(\varepsilon)} = \varepsilon_\mu L$, и дилатация $\delta_\varepsilon\phi = \varepsilon(x_\mu\partial_\mu + d_{(\phi)})\,\phi$, $\delta_\varepsilon L = \varepsilon(x_\mu\partial_\mu + D)\,L = \varepsilon\partial_\mu(x_\mu L)$; здесь $d_{(\phi)}$ — число, называемое конформной размерностью поля ϕ, в классической теории поля обычно совпадающее с его физической размерностью. (В квантовой области поля приобретают аномальные размерности и $d_{(\phi)}$ изменяется — представляется в виде ряда по степеням константы связи и постоянной Планка.)

Нётеровским током, соответствующим сдвигам, является тензор энергии-импульса:

$$\varepsilon_\alpha T_{\mu\alpha}^{\mathrm{C}} = \varepsilon_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\phi_{,\alpha} - g_{\alpha\mu}L\right). \tag{1.6}$$

Буква С в $T_{\mu\alpha}^{\mathrm{C}}$ означает канонический (canonical). Здесь настало время напомнить, что сохранение любого тока J_μ не нарушится, если к J_μ добавить

---

*) Название это связано с работой Весса и Зумино 1971 г.[7], в которой впервые высказана мысль о неявно симметричных лагранжианах (калибровочная вариация которых воспроизводит аномалию). В 80-х годах такие лагранжианы были явно введены и исследованы в работах Виттена[29], Шёнфельда[38], Дезера, Джэкива и Темпльтона[40], Новикова[28], а впоследствии и многих других авторов.

произвольное выражение вида $\partial_\nu C_{\mu\nu}$ с антисимметричным $C_{\mu\nu} = -C_{\nu\mu}$. Используя этот произвол, можно всегда превратить канонический тензор энергии-импульса $T^{\mathrm{C}}_{\mu\alpha}$ в симметричный: $T^{\mathrm{S}}_{\mu\alpha} = T^{\mathrm{S}}_{\alpha\mu}$. Среди достоинств $T^{\mathrm{S}}_{\mu\alpha}$ — простая связь с генератором вращений: $M_{\mu\alpha\beta} = T^{\mathrm{S}}_{\mu\alpha} x_\beta - T^{\mathrm{S}}_{\mu\beta} x_\alpha$. Кроме того, именно симметричный тензор энергии-импульса связан с гравитоном в (классической) общей теории относительности, и именно он получается из лагранжиана варьированием по метрике:

$$T^{\mathrm{S}}_{\mu\nu} = \frac{2}{|g|^{1/2}} \left(\frac{\partial\, |g|^{1/2} L}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial\, |g|^{1/2} L}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right). \tag{1.7}$$

Что касается дилатационного нётеровского тока, то он равен

$$\mathrm{D}^{\mathrm{C}}_\mu = \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} (x_\alpha \partial_\alpha \phi + d_{(\phi)} \phi) - x_\mu L =$$

$$= x_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \partial_\alpha \phi - g_{\mu\alpha} L \right) + d_{(\phi)} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \phi = x_\alpha T^{\mathrm{C}}_{\mu\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \mathrm{d}_{(\phi)} \phi. \tag{1.8}$$

Оказывается, что, используя произвол в выборе сохраняющегося тока, можно выбрать дилатационный ток в виде $D^{\mathrm{conf}}_\mu = x_\alpha T^{\mathrm{conf}}_{\mu\alpha}$; здесь $T^{\mathrm{conf}}_{\mu\alpha}$ — так называемый конформный тензор энергии-импульса. В четырехмерных теориях векторного и спинорного полей он совпадает с метрическим (1.7), и разница между T^{S} и T^{C} полностью «поглощает» вклад с конформной размерностью $d_{(\phi)}$ в D^{C}_μ. В пространствах других размерностей и для скалярных полей это уже не так. Например, для скаляров $T^{\mathrm{S}}_{\mu\nu} = T^{\mathrm{C}}_{\mu\nu}$, а

$$T^{\mathrm{conf}}_{\mu\nu} = T^{\mathrm{C}}_{\mu\nu} - \frac{D-2}{4(D-1)} (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \partial^2)\, \phi^2\, {}^{*}). \tag{1.9}$$

(Возможно, стоит отметить, что $(\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu}\partial^2)\, \phi^2 = \partial_\alpha (g_{\alpha\nu}\partial_\mu - g_{\mu\nu}\partial_\alpha)\, \phi^2$ и такое изменение тензора энергии-импульса не нарушает его сохранения. Что касается добавки к дилатационному току, то она составляет $\frac{D-2}{4(D-1)} x_\mu \times$ $\times (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu}\partial^2)\, \phi^2 = \frac{D-2}{4(D-1)} \partial_\mu (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, \phi^2 - \frac{D-2}{2} (\partial_\mu \phi)\, \phi$. Первое слагаемое в правой части несущественно, а второе полностью сокращает вклад

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \mathrm{d}_{(\phi)} \phi = \phi_{,\mu} \frac{D-2}{2} \phi$$

в $\mathrm{D}^{\mathrm{C}}_\mu$ (1.8).)

Производившиеся выше переопределения нётеровских токов не влияют не только на их сохранение, но и на коммутационные соотношения интегралов от 0-компонент. В самом деле, пусть $J_0 \to J_0 + \partial_\nu C_{0\nu}$. Индекс ν здесь не может принимать нулевое значение из-за антисимметрии $C_{\mu\nu}$. Поэтому интеграл $\int J_0 \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}$ не изменяется при таком переопределении. (Однако локальный коммутатор $[J_0(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})]$ меняется на полную пространственную производную.)

Нулевые компоненты $T_{0\alpha}$ и D_0, разумеется, генерируют преобразования трансляции и растяжения. В этих случаях наличие Λ_0 в определении тока $J_0 = \pi\delta\phi - \Lambda_0$ оказывается существенным. Например, для скалярного поля $L = (1/2)\, (\partial_\mu \phi)^2$, и тензор энергии импульса равен $T^{\mathrm{C}}_{\mu\alpha} = T^{\mathrm{S}}_{\mu\alpha} = \partial_\mu \phi \partial_\alpha \phi -$ $- g_{\mu\alpha} \cdot (1/2)\, (\partial\phi)^2$. Для $\alpha \neq 0$ $i\, [T^{\mathrm{C}}_{0\alpha}(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})] = i\, [\pi \partial_\alpha \phi(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})] =$ $= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \partial_\alpha \phi(\mathbf{x})$. Если же $\alpha = 0$, то $(\partial L / \partial \phi_{,0})\, \phi_{,0} = \pi^2$ и коммутатор ока-

---

*) Такое различие между $T^{\mathrm{conf}}_{\mu\nu}$ и $T^{\mathrm{C}}_{\mu\nu}$ связано на самом деле с конформной инвариантностью теории

$$g^{1/2} L = g^{1/2} \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{D-2}{8(D-1)} R \phi^2 \right].$$

зался бы вдвое более нужного, если бы не член $-\Lambda_0 = -g_{00} \cdot (1/2)(\partial\phi)^2$, содержащий $-(1/2)\,\pi^2$. С учетом этого вклада $i\,[T^{\mathrm{C}}_{00}(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})] = i\,[(1/2)\,\pi^2(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\pi(\mathbf{x})$. Аналогично можно разобраться и с коммутаторами дилатационного тока:

$$i\int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\,[D^{\mathrm{C}}_0(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})] = i\int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\left\{x_i\,[T^{\mathrm{C}}_{0i},\ \phi] + {}\right.$$

$$\left. + x_0\,[T^{\mathrm{C}}_{00},\ \phi] + \left[\pi\frac{D-2}{2}\phi,\ \phi\right]\right\} = \left(y_\mu\partial_\mu + \frac{D-2}{2}\right)\phi(\mathbf{y}).$$

(Речь идет об одновременных коммутаторах, поэтому $x_0 = y_0$.) Точно так же

$$i\int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\,[D^{\mathrm{conf}}_0(\mathbf{x}),\ \phi(\mathbf{y})] = i\int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\,\{x_i\,[T^{\mathrm{conf}}_{0i},\ \phi] + x_0\,[T^{\mathrm{conf}}_{00},\ \phi]\} =$$

$$= \int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\left[x_i\partial_i\phi + \frac{D-2}{2(D-1)}(D-1)\,\phi + x_0\pi\right](\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) =$$

$$= \left(y_\mu\partial_\mu + \frac{D-2}{2}\right)\phi(\mathbf{y}).$$

Разобравшись с глобальными симметриями, можно перейти к обсуждению локальных. Прежде чем вплотную заняться калибровочными преобразованиями, отметим следующее важное обстоятельство. Если теория обладает *глобальной* симметрией, то изменение ее действия при соответствующем *локальном* преобразовании с параметром ε, зависящим от x, *без учета* уравнений движения равно

$$\delta_\varepsilon S = \int \mathrm{d}^D x\left[\varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}(\delta\phi)_{,\mu} + \frac{\partial L}{\partial\phi}\partial\phi\right) + \partial_\mu\varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi\right)\right]. \tag{1.10}$$

Первая скобка под интегралом ничего «не знает» про зависимость ε от x, поэтому она равна $\varepsilon\,\partial_\mu\Lambda_\mu$, как и для постоянного ε. В результате

$$\delta_\varepsilon S = \int \mathrm{d}^D x\left[\varepsilon\partial_\mu\Lambda_\mu + \partial_\mu\varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi\right)\right] =$$

$$= -\int \mathrm{d}^D x\varepsilon\partial_\mu J_\mu + \oint \mathrm{d}^{D-1}x\varepsilon\,\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\,\delta\phi. \tag{1.11}$$

С учетом уравнений движения $\partial_\mu J_\mu = 0$, и действие оказывается инвариантным (с точностью до поверхностных вкладов) также и по отношению к *локальным преобразованиям*. Подчеркнем, что, в отличие от *локальной инвариантности*, при этом $\delta_\varepsilon S = 0$ выполняется не тождественно, а только на уравнениях движения (или, как часто говорят, на массовой поверхности).

Калибровочным симметриям, как уже говорилось, не отвечает никаких нётеровских токов. Тем не менее хорошо известно, что калибровочная инвариантность требует ковариантного сохранения токов материи. Откуда возникает это требование? И почему необходимо не обычное, как для нётеровских токов, а именно ковариантное сохранение? Мы будем для определенности говорить о теориях Янга — Миллса, хотя все аргументы справедливы и для антисимметричных тензорных полей, и для гравитации.

Лагранжиан свободной теории Янга — Миллса $L = \mathrm{Tr}\,(1/4)\,F^2_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu A_\nu]$ *), инвариантен относительно локальных преобразований полей $\delta A_\mu = \partial_\mu\varepsilon + [A_\mu\varepsilon] \equiv \mathrm{D}_\mu\varepsilon$, поэтому $\Lambda_\mu \equiv 0$. Формула (1.5) для вариации лагранжиана в данном случае неприменима, так как преобразование $\delta_\varepsilon A_\mu$ содержит производную от ε. Но нетривиального нёте-

---

*) Поля A_μ — антиэрмитовы матрицы из алгебры Ли G, отвечающей калибровочной группе G. Они связаны с часто используемыми полями $\widetilde{A}^a_\mu$, для которых $\widetilde{F}^a_{\mu\nu} = \partial_\mu\widetilde{A}^a_\nu - \partial_\nu\widetilde{A}^a_\mu + f^{abc}\,\widetilde{A}^b_\mu\widetilde{A}^c_\nu$, соотношениями $A_\mu = i\widetilde{A}^a_\mu t^a$, $F^a_{\mu\nu} = i\widetilde{F}^a_{\mu\nu}\,t^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu A_\nu]$; t^a — эрмитовы генераторы алгебры $\hat{G}$, $[t^a,\ t^b] = if^{abc}\,t^c$, f^{abc} — структурные константы алгебры, $\mathrm{Tr}\,t^a t^b = \delta^{ab}/2$.

ровского тока, конечно, все равно нет. В самом деле, на уравнениях движения сохраняется величина

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\mu}}\,\delta A_\alpha=\mathrm{Tr}\,F_{\alpha\mu}\mathrm{D}_\alpha\varepsilon.$$

Чтобы получить отсюда ток, надо перебросить производную с ε на $F_{\alpha\mu}$: $\mathrm{Tr}F_{\alpha\mu}\mathrm{D}_\alpha\varepsilon = +\mathrm{Tr}\varepsilon\mathrm{D}_\alpha F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha\,(\mathrm{Tr}F_{\alpha\mu}\varepsilon)$. Полная дивергенция может быть опущена, поскольку из-за антисимметрии $F_{\alpha\mu}$ она не сказывается на сохранении тока. Однако получившийся «нётеровский ток» $\mathrm{D}_\alpha F_{\mu\alpha}$ является ничем иным, как уравнением движения, т. е. с учетом уравнений движения он не просто сохраняется, но равен нулю, в полном соответствии со второй теоремой Нётер. Этот вывод не зависит от конкретного вида лагранжиана. Действительно, тождественное условие

$$\begin{aligned}0\equiv\delta L=\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial L}{\partial A_\alpha}\,\mathrm{D}_\alpha\varepsilon+\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\beta}}\,(\partial_\beta\mathrm{D}_\alpha\varepsilon)\right]&=\\=\mathrm{Tr}\,\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\beta}}\,\partial^2_{\alpha\beta}\varepsilon+\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial L}{\partial A_\beta}+\left[\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\beta}}\,,\,A_\alpha\right]\right)\partial_\beta\varepsilon&+\\+\mathrm{Tr}\left(\left[\frac{\partial L}{\partial A_\alpha}\,,\,A_\alpha\right]+\left[\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\beta}}\,,\,A_{\alpha,\,\beta}\right]\right)\varepsilon&\end{aligned}$$

предполагает, во-первых, антисимметрию производной $\partial L/\partial A_{\alpha,\,\beta}$ по индексам α, β и, во-вторых, два тождественных соотношения для матричных коммутаторов:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\beta}\equiv\left[\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\beta}}\,,\,A_\alpha\right],\qquad\left[\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\beta}}\,,\,A_{\alpha,\,\beta}\right]+\left[\frac{\partial L}{\partial A_\alpha}\,,\,A_\alpha\right]\equiv0.\tag{1.12}$$

Вместе они означают, что

$$\left[\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\beta}}\,,\,F_{\alpha\beta}\right]=0,$$

т. е. лагранжиан может зависеть от производной $A_{\alpha,\,\beta}$ только через $F_{\alpha\beta}$. Что касается «нётеровского тока», то он получается так:

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\mu}}\,\delta A_\alpha=\mathrm{Tr}\,\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\mu}}\,\mathrm{D}_\alpha\varepsilon=\mathrm{Tr}\,\varepsilon\mathrm{D}_\alpha\,\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\,\alpha}}+\partial_\alpha\left(\mathrm{Tr}\,\varepsilon\,\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha,\,\mu}}\right).$$

Полная производная несущественна из-за антисимметрии $\partial L/\partial A_{\alpha,\,\mu}$, а

$$\mathrm{D}_\alpha\,\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\,\alpha}}=\partial_\alpha\,\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\,\alpha}}+\left[A_\alpha,\ \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\,\alpha}}\right],$$

что в соответствии с первым из равенств (1.12) равно лагранжевой производной

$$\partial_\alpha\,\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\,\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial A_\mu}\,.$$

Поэтому нётеровский ток исчезает на уравнениях движения.

Калибровочная инвариантность в теориях Янга — Миллса необходима для того, чтобы они имели физический смысл: неизвестны другие способы обеспечить унитарность (а при $D = 4$ также и перенормируемость) теорий с векторными полями (см. [48]). Поэтому калибровочной инвариантностью должна обладать и теория Янга — Миллса, взаимодействующая со скалярными и спинорными полями (вместе они называются полями материи). Взаимодействие калибровочных полей со спинорными *) устроено так:

$$L\,(A,\ \psi)=L_0\,(A)+L_0\,(\psi)+\mathrm{Tr}\,A_\mu J_\mu\,(\psi).\tag{1.13}$$

---

*) Мы не будем специально обсуждать *скалярные* поля материи. Во-первых, все основные утверждения, касающиеся ненарушенных, локальных, симметрий, одинаковы в скалярном и спинорном случаях, однако выводы для скаляров более громоздкие. Это связано с тем, что в скалярном случае появляется лишний член взаимодействия по сравнению с (1.13): $\mathrm{Tr}\,A_\mu J_\mu\,(\phi)+\mathrm{Tr}\,A_\mu J_{\mu\nu}\,(\phi)\,A_\nu$. (Например, $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{D}\phi)^2=\mathrm{Tr}\,(\partial\phi)^2+2\mathrm{Tr}\,A\phi\partial\phi+\mathrm{Tr}\,A\phi A\phi$.) Во-вторых, скалярные поля материи некиральны и не могут приводить к аномалиям (см. ниже).

Нас интересует инвариантность по отношению к преобразованиям $A_\mu \to A_\mu + \mathrm{D}_\mu \varepsilon (x)$, $\psi \to \psi$, при которых действие Янга — Миллса $L_0 (A)$ и спинорное действие $L_0 (\psi)$ не меняются, а $\delta \mathrm{Tr} A_\mu J_\mu (\psi) = \mathrm{Tr} (\mathrm{D}_\mu \varepsilon) J_\mu (\psi) = \partial_\mu (\mathrm{Tr} \varepsilon J_\mu (\psi)) - \mathrm{Tr} \varepsilon \mathrm{D}_\mu J_\mu (\psi)$. Другими словами, теория векторных (калибровочных) полей будет осмысленной лишь при условии $\mathrm{D}_\mu J_\mu (\psi) = 0$. Достаточно, чтобы это равенство выполнялось на уравнениях движения полей материи. Необходимость ковариантного сохранения тока материи в калибровочной теории видна уже из уравнений движения поля Янга — Миллса $\mathrm{D}_\mu F_{\mu\nu} = J_\nu$. Действуя на это уравнение ковариантной производной D_ν, получим в левой части $\mathrm{D}_\nu \mathrm{D}_\mu F_{\mu\nu} = -(1/2) [F_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}] = 0$, а справа $\mathrm{D}_\nu J_\nu$.

Итак, ток $J_\mu (\psi)$, определяющий взаимодействие в лагранжиане (1.13), обязан ковариантно сохраняться. Важно, что в качестве этого тока часто можно выбрать нётеровский ток, отвечающий *глобальной* симметрии действия материи $L_0 (\psi)$. Эта симметрия должна, разумеется, описываться той же группой, что и калибровочная симметрия поля Янга — Миллса. В теории $L_0 (\psi)$ полей материи без янг-миллсовских векторных бозонов нётеровский ток сохраняется, однако, нековариантно: $\partial_\mu J_\mu (\psi) = 0$. Но это равенство справедливо лишь с учетом уравнений движения. При переходе к теории (1.13) уравнения движения фермионов меняются и приводят к ковариантному закону сохранения $\mathrm{D}_\mu J_\mu (\psi) = 0$. В этом можно убедиться в самом общем виде, с помощью простых, но сравнительно длинных выкладок. Ток $J_\mu (\psi)$ определяется по лагранжиану материи $L_0 (\psi)$: $J^a_\mu = \partial L_0 / \partial \psi^b_{,\mu} \delta_a \psi^b$. Инвариантность лагранжиана L_0 относительно глобальных преобразований $\psi^b \to \psi^b + \varepsilon^a \delta_a \psi^b$ означает, что

$$\frac{\partial L_0}{\partial \psi^b} \delta_a \psi^b + \frac{\partial L_0}{\partial \psi^b_{,\mu}} (\delta_a \psi^b)_{,\mu} = 0.$$

Дивергенция тока J^a_μ во взаимодействующей с векторным полем A_μ теории (1.13) с учетом этого соотношения и уравнения движения

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \psi^b_{,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial \psi^b} + A^c_\mu \frac{\partial J^c_\mu}{\partial \psi^b}$$

равна

$$\partial_\mu J^a_\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \psi^b_{,\mu}} \delta_a \psi^b \right) = \frac{\partial L_0}{\partial \psi^b_{,\mu}} (\delta_a \psi^b)_{,\mu} + \left(\partial_\mu \frac{\partial L_0}{\partial \psi^b_{,\mu}} \right) \delta_a \psi^b = A^c_\mu \frac{\partial J^c_\mu}{\partial \psi^b} \delta_a \psi^b.$$

Сейчас мы покажем, что эта комбинация равна $-if^{abc} A^b_\mu J^c_\mu$, откуда и будет следовать ковариантное сохранение J_μ: $\mathrm{D}_\mu J^a_\mu = \partial_\mu J^a_\mu + [A_\mu J_\mu]^a = \partial_\mu J^a_\mu + if^{abc} A^b_\mu J^c_\mu = 0$. Для этого необходимо воспользоваться групповой структурой преобразований $\delta_\varepsilon \psi^b = \varepsilon^a \delta_a \psi^b$. Вспомним прежде всего, что вариация лагранжиана L_0 при преобразовании с переменным параметром ε равна (см. (1.11), $\Lambda = 0$) $\delta_\varepsilon L_0 = \partial_\mu \varepsilon^c J^c_\mu$. Теперь напишем групповой закон $(\delta_{\varepsilon_1} \delta_{\varepsilon_2} - \delta_{\varepsilon_2} \delta_{\varepsilon_1}) L_0 = -\delta_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]} L_0$, или, в терминах токов,

$$(\partial_\mu \varepsilon^c_2)\, \varepsilon^a_1 \frac{\partial J^c_\mu}{\partial \psi^b} \delta_a \psi^b - (1 \leftrightarrow 2) = -[\partial_\mu (if^{abc} \varepsilon^a_1 \varepsilon^b_2)]\, J^c_\mu = +(\partial_\mu \varepsilon^c_2)\, \varepsilon^a_1 if^{abc} J^b_\mu - (1 \leftrightarrow 2).$$

Отсюда, используя произвольность параметров ε_1 и ε_2, получим нужное соотношение

$$\frac{\partial J^c_\mu}{\partial \psi^b} \delta_a \psi^b = if^{abc} J^b_\mu.$$

Таким образом, мы убедились, что симметрии теории однозначно связаны с сохранением токов. Глобальным симметриям отвечают сохраняющиеся нётеровские токи. Локальная инвариантность требует ковариантного сохранения токов материи, описывающих взаимодействие с калибровочными полями. Токи эти в свою очередь могут по теореме Нётер соответствовать некоторой глобальной симметрии лагранжиана полей материи.

Отметим, что есть интересные классы ковариантно сохраняющихся токов, *не связанных* ни с глобальной, ни с локальной инвариантностью. Примером является неабелева теория Янга — Миллса с безмассовыми фермионами:

$$L(\psi, A) = L_0(A) + \bar{\psi}\hat{\mathrm{D}}\psi. \tag{1.14}$$

В ней ковариантно сохраняется цветной аксиальный ток $J^{a5}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5 t^a\psi$. Лагранжиан теории *неинвариантен* по отношению к глобальному преобразованию $\psi \to e^{i\varepsilon^a t^a \gamma^5}\psi$ из-за того, что при этом возникает коммутаторное слагаемое $\bar{\psi}\,[\hat{A}\varepsilon]\,\gamma^5\psi$, которое не может быть устранено преобразованием поля $A_\mu = -iA^a_\mu t^a$, поскольку A^a_μ связано только с векторным (цветным) током $\bar{\psi}\gamma_\mu t^a\psi$. (Эта теория обладает обычной γ^5-инвариантностью, при которой ψ умножается на синглетный по цвету множитель $e^{i\alpha\gamma^5}$.) Тем не менее легко убедиться, что на уравнениях движения $\mathrm{D}_\mu J^{5a}_\mu = 0$. С точки зрения аномалий этот ток не менее интересен, чем нётеровский, и мы будем обсуждать его на тех же основаниях.

1.2. Квантовые аномалии

Занимаясь обсуждением симметрий, мы пока не делали различия между классической и квантовой физикой. Это не случайно: квантовые операторы удовлетворяют тем же уравнениям движения, что и классические переменные, и симметриям теории отвечают сохраняющиеся токи как в классической, так и в квантовой механике.

Другая ситуация — в квантовой теории поля. В случае бесконечного числа степеней свободы возникает необходимость в регуляризации. Интерпретировать эту операцию можно разными (эквивалентными) способами. Здесь нам будет особенно удобен следующий. При квантовании теории поля может потребоваться введение новых — регуляторных — полей и соответственно изменение классического действия и уравнений движения. Мы будем говорить ниже только об ультрафиолетовой регуляризации, при этом правило введения регуляторных полей формулируется очень просто. Для каждого физического поля вводится некоторое число регуляторных полей. Это число зависит от размерности пространства и номера квантовой поправки (т. е. от числа петель соответствующей фейнмановской диаграммы; если число необходимых регуляторов не растет с номером петли, теория является перенормируемой). Взаимодействие регуляторов друг с другом и с исходными полями устроено точно так же, как взаимодействие соответствующих физических полей, за одним исключением: регуляторы имеют большую массу M_{reg}. Кроме того, каждой регуляторной петле приписывается дополнительный знак минус. Такая регуляризация называется паули-вилларсовской. Замечательно, что симметрия получившегося в результате действия может оказаться более узкой, чем симметрия исходного. Симметрии, характерные для безмассовых частиц,— конформная, аксиальная, калибровочная, суперсимметрия — могут не обобщаться на случай массивных регуляторных полей. За счет квантовых поправок неинвариантность регуляторной части действия может сказываться на взаимодействиях физических полей, и, более того, неинвариантность может остаться и в пределе $M_{\mathrm{reg}} \to \infty$ при «снятии» регуляризации. В этом случае говорят о квантовой аномалии, нарушающей классическую симметрию. Аномалия в глобальной симметрии проявляется в несохранении регуляризованного нётеровского тока $J^{\mathrm{reg}}_\mu = J_\mu(\psi) - J_\mu(\Psi)$ (Ψ — регуляторные поля): $\partial_\mu J^{\mathrm{reg}}_\mu = -\partial_\mu J_\mu(\Psi) = \hbar A\,\{\phi\}$, а аномалия в локальной симметрии связана с отличием от нуля ковариантной дивергенции регуляризованного тока материи, взаимодействующего с калибровочными бозонами. В обоих случаях дивергенции токов выражаются через физические поля за счет квантовых эффектов, поэтому они пропорциональны постоянной Планка, а на диаграммном языке связаны с однопетлевыми графиками. Несколько позднее мы разберем простейший пример, показывающий механизм возникновения аномалии.

Лучше всего в теории элементарных частиц изучена аномалия в киральной симметрии. Этой инвариантностью обладает классический лагранжиан безмассовых фермионов в любом четномерном пространстве-времени, где возможно выделение левых и правых спинорных полей с помощью проекторов $(1 \pm \gamma^5)/2$ *). Общие киральные преобразования вращают независимо фазы левых и правых фермионов: $\psi_L = (1/2)(1 - \gamma^5)\psi_L \to e^{i\alpha}\psi_L$, $\psi_R = (1/2) \times (1 + \gamma^5)\psi_R \to e^{i\beta}\psi_R$. В случае $\alpha = \beta$ мы будем называть эти преобразования векторными, при этом весь биспинор

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{pmatrix}$$

вращается как единое целое: $\psi \to e^{i\alpha}\psi$. В случае $\alpha = -\beta$ преобразования будут называться аксиальными, при этом $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$. Наконец, условия $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ выделяют собственно правые и левые киральные преобразования

$$\psi \to \exp\left(i\alpha\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi, \quad \psi \to \exp\left(i\beta\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi.$$

Простейший пример, который мы собираемся разобрать,— это аномалия в аксиальной симметрии двумерной теории $L(\psi) = \bar{\psi}\hat{D}\psi = \bar{\psi}(\hat{\partial} + \hat{A})\psi$. Она регуляризуется добавлением поля Паули — Вилларса $L(\Psi) = \Psi\hat{D}\Psi + M\bar{\Psi}\Psi$. Регуляризованный аксиальный ток, отвечающий преобразованию $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$, $\Psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\Psi$, равен $J_\mu^{5\mathrm{reg}} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi - \Psi\gamma_\mu\gamma^5\Psi$, а его дивергенция $\partial_\mu J_\mu^{5\mathrm{reg}} = -\partial_\mu J_\mu^5(\Psi) = -2M\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$. Наконец, произведение $M\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$ связано с полем A_μ за счет диаграммы рис. 1, выражение для которой равно

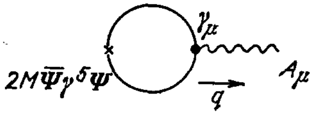

Рис. 1. Дивергенция аксиального тока во внешнем поле.

В петле распространяются регуляторные фермионы

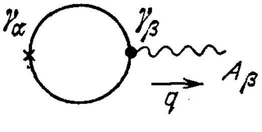

Рис. 2. Коррелятор двух векторных фермионных токов.

Благодаря соотношению $J_\alpha^5 = \varepsilon_{\alpha\beta}J_\beta$ в двух измерениях эта же диаграмма изображает аксиальный ток во внешнем поле. В петле распространяются физические фермионы

$$M\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5 \int \frac{1}{\hat{p}+iM}\hat{A}\frac{1}{\hat{p}-\hat{q}+iM}\frac{d^2p}{(2\pi)^2} = \frac{1}{\pi}\varepsilon_{\mu\nu}q_\mu A_\nu\ ^{**}). \tag{1.15}$$

---

*) В $(D = 2n)$-мерном пространстве мы понимаем под γ^5 матрицу, пропорциональную произведению $\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_{2n-1}$ и удовлетворяющую условиям $\overset{+}{\gamma^5} = +\gamma^5$, $(\gamma^5)^2 = +1$.

**) Постоянную Планка будем далее считать равной единице. Напомним, что каждой петле отвечает одна степень $\hbar$. В самом деле, в континуальном интеграле действие делится на $\hbar$, а значит, каждой вершине V соответствует $1/\hbar$, а каждому пропагатору P отвечает $\hbar$. Поскольку $P - V = L - 1$, то эффективное действие, возникающее из диаграммы с L петлями, пропорционально $\hbar\hbar^P/\hbar^V = \hbar^{1+P-V} = \hbar^L$.

Но коль скоро аномалия оказалась связанной с регуляризацией теории, должно возникнуть естественное подозрение в неоднозначности ответа. Нельзя ли выбором регуляризации от аномалии избавиться? Мы уже отмечали, что симметричной регуляризации может и не существовать. Однако это лишь часть ответа. Чтобы прийти к более четким выводам, найдем выражение не для дивергенции $\partial_\mu J^5_\mu$, а для самого тока J^5_μ. В двух измерениях $J^5_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha} J_\alpha$, и можно ограничиться вычислением диаграммы рис. 2 для векторного тока $J_\alpha = \overline{\psi}\gamma_\alpha\psi$:

$$\langle J_\alpha\rangle = \int \frac{d^2p}{(2\zeta)^2} \operatorname{Tr}\left(\gamma_\alpha \frac{1}{\hat{p}}\gamma_\beta \frac{1}{\hat{p}-\hat{q}} - \gamma_\alpha \frac{1}{\hat{p}+iM}\gamma_\beta \frac{1}{\hat{p}-\hat{q}+iM}\right) A_\beta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^1 \mathrm{d}\xi \frac{\xi(1-\xi)}{\xi(1-\xi)q^2}(2q_\alpha q_\beta - g_{\alpha\beta}q^2) - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \mathrm{d}\xi \frac{\xi(1-\xi)(2q_\alpha q_\beta - g_{\alpha\beta}q^2) - g_{\alpha\beta}M^2}{\xi(1-\xi)q^2 + M^2}\right] A_\beta. \qquad (1.16)$$

Отсюда, устремляя массу регулятора M к бесконечности, найдем

$$\langle J_\alpha\rangle = \frac{1}{\pi}\left(\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} - g_{\alpha\beta}\right) A_\beta. \qquad (1.17)$$

(При умножении на $q_\mu \varepsilon_{\mu\alpha}$, т. е. при взятии дивергенции аксиального тока, из этого выражения получится (1.16).) Глядя на эту формулу, легко понять, что изменением регуляризации (например, воспользовавшись раздвижкой точек вместо процедуры Паули — Вилларса) можно произвольным образом изменить коэффициент при $g_{\alpha\beta}$, но коэффициент при $q_\alpha q_\beta$ сингулярен по q^2, поэтому универсален и от выбора регуляризации не зависит. Существование структуры $q_\alpha q_\beta/q^2$ совершенно объективно: она связана с нетривиальной *мнимой частью* диаграммы рис. 2. Вычисление диаграммы по мнимой части связывает ее в силу соотношения унитарности

$$\operatorname{Im}\int y_{ii} \sim \sum_k \left|\int y_{ik}\right|^2$$

с амплитудами рождения реальных частиц. При вычислении диаграммы рис. 2 по мнимой части необходима *инфракрасная* регуляризация, которую можно задать, например, введением малой массы m физического фермиона. Тогда

$$\operatorname{Im}\langle J_\alpha\rangle = \frac{1}{2}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \cdot 2\pi i\delta(p^2 -- m^2)\cdot 2\pi i\delta((p-q)^2 - m^2) \times$$

$$\times \operatorname{Tr}\gamma_\alpha(\hat{p}+m)\gamma_\beta(\hat{p}-\hat{q}+m) A_\beta =$$

$$= \left\{2\frac{m^2}{q^4}\frac{\theta(q^2-4m^2)}{[1-(4m^2/q^2)]^{1/2}} q_\alpha q_\beta - 2\frac{m^2}{q^2}\frac{\theta(q^2-4m^2)}{[1-(4m^2/q^2)]^{1/2}} g_{\alpha\beta}\right\} A_\beta. \qquad (1.18)$$

Для снятия регуляризации необходимо устремить m к нулю. Правая часть (1.18) при этом в нуль не обращается. В самом деле,

$$\lim_{m\to 0}\frac{2m^2}{q^4}\frac{\theta(q^2-4m^2)}{[1-(4m^2/q^2)]^{1/2}} = \delta(q^2),$$

в чем можно убедиться, взяв интеграл по $\mathrm{d}q^2$ от этого выражения. Что касается коэффициента при $g_{\alpha\beta}$ в (1.18), то он менее сингулярен при малых q^2 и исчезает при $m \to 0$. Таким образом, для безмассового фермиона в двух измерениях

$$\operatorname{Im} J_\alpha = \delta(q^2)\, q_\alpha q_\beta A_\beta. \qquad (1.19)$$

Действительная часть поляризационного оператора восстанавливается по мнимой части неоднозначно. Коэффициент при структуре $q_\alpha q_\beta$ равен

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{\delta(s')\,ds'}{q^2-s}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{q^2}.$$

Произвольная константа, которую можно сюда добавить, особого интереса не представляет, так как она размерная. Коэффициент при структуре $g_{\alpha\beta}$, имеющий нулевую мнимую часть, может быть произвольной постоянной c. Поэтому

$$\operatorname{Re}J_\alpha=\frac{1}{\pi}\left(\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}+cg_{\alpha\beta}\right)A_\beta. \tag{1.20}$$

Для аксиального тока получится

$$\operatorname{Re}J^5_\alpha=\varepsilon_{\alpha\mu}\operatorname{Re}J_\mu=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_{\alpha\mu}q_\mu q_\beta}{q^2}+c\varepsilon_{\alpha\beta}\right)A_\beta. \tag{1.21}$$

Произвола в единственном параметре c недостаточно для того, чтобы обеспечить сохранение одновременно и векторного, и аксиального токов:

$$\begin{aligned} q_\alpha J_\alpha&=\frac{1}{\pi}(c+1)\,q_\alpha A_\alpha,\\ q_\alpha J^5_\alpha&=\frac{1}{\pi}c\varepsilon_{\alpha\beta}q_\alpha A_\beta. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Регуляризация Паули — Вилларса гарантирует сохранение векторного тока, поэтому для нее вместо произвольного c получается совершенно определенное значение $c=-1$.

Для нас существенны три вывода из изложенного.

а) Аномалия обычно связана с парой симметрий и содержит определенный произвол, позволяющий нарушить любую из этих двух симметрий и не затронуть другую.

б) Если эти симметрии непрерывны (т. е. существуют инфинитезимальные преобразования), то «объективность» аномалии связана с ненулевой *мнимой частью* некоторого коррелятора: аномалия в самом деле неустранима.

в) Регуляризация Паули — Вилларса всегда сохраняет инвариантность относительно «векторных» преобразований, в частности, обеспечивает сохранение всех векторных токов.

Эти три пункта нуждаются в дополнительном комментарии, к которому мы теперь и переходим.

1.2.1. *Аномальные симметрии*

Известны пять пар аномальных симметрий.

1) Векторные фазовые преобразования фермионов $\psi\to\exp(i\varepsilon)\psi$ — аксиальные $\psi\to\exp(i\varepsilon\gamma^5)\psi$ или киральные $\psi\to\exp[i\varepsilon(1-\gamma^5)/2]\psi$ преобразования; здесь ε может быть как числом (абелевы преобразования), так и матрицей (неабелевы, цветные преобразования). К этому типу принадлежит разобранный выше пример γ^5-аномалии.

2) Калибровочная инвариантность (ковариантное сохранение тока материи в калибровочной теории) — бозе-симметрия. Эта аномалия возникает, если поля Янга — Миллса взаимодействуют не с векторным, а с киральным (левым или правым) током фермионов. В таком случае ряд однопетлевых фермионных диаграмм, в вершинах которых

стоят эти токи (рис. 3), нарушает сохранение. Точнее, если потребовать симметричности коррелятора $\langle J^L_\alpha J^L_\beta J^L_\gamma \ \ldots \rangle$ по отношению к перестановке токов, то $\langle \mathrm{D}_\alpha J^L_\alpha,\ J^L_\mu,\ J^L_\gamma,\ \ldots \rangle \neq 0$. Отметим здесь же, что регуляризация Паули — Вилларса гарантирует бозе-симметрию коррелятора. В разделах 2 и 3 нашего обзора этот класс аномалий обсуждается весьма подробно. Еще одна важная аномалия из этого же класса — гравитационная. Она связана с коррелятором не киральных токов, а тензоров энергии-импульса, и описывает нарушение общей ковариантности гравитационных теорий за счет несохранения тензора энергии-импульса. (Оригинальная работа Альвареса-Гоме́ и Виттена по гравитационным аномалиям[35] является одновременно великолепным обзором по этой теме, поэтому мы отказались от обсуждения в настоящем тексте гравитационных аномалий.)

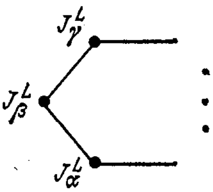

Рис. 3. Коррелятор киральных токов.

При наличии аномалии этот вклад в эффективное действие либо не калибровочно инвариантен, либо не обладает бозе-симметрией

3) Калибровочная инвариантность — дискретное преобразование инверсии. Такая аномалия, связанная с нарушением дискретной симметрии, имеется в нечетномерных теориях Янга — Миллса, например, в трехмерной электродинамике, где после интегрирования по фермионам в эффективном действии появляется весс-зуминовский член $\varepsilon_{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$, нарушающий P_1- и T-инвариантность. С другой стороны, в неабелевом случае весс-зуминовский член необходим для инвариантности теории относительно топологических нетривиальных («больших») калибровочных преобразований. Эта аномалия будет обсуждаться в разделе 4 обзора.

4) Сдвиговые преобразования — дилатация. Это хорошо известная конформная аномалия. Если классическая теория масштабно инвариантна, т. е. дилатационный ток $D_\mu = T^{\mathrm{conf}}_{\mu\nu} x_\nu$ сохраняется, $\partial_\mu D_\mu = T^{\mathrm{conf}}_{\mu\mu} = 0$, то в регуляризованной квантовой теории $T^{\mathrm{conf}}_{\mu\mu}$ оказывается отличным от нуля, если только потребовать сохранения тензора энергии-импульса $\partial_\mu T^{\mathrm{conf}}_{\mu\nu} = 0$. Известным примером является конформная аномалия в теории Янга — Миллса с $L = (1/4\alpha)\, F^2_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\mu} = -\frac{\beta(\alpha)}{2\alpha^2} F^2_{\mu\nu}.$$

Появление аномальных размерностей у операторов в регуляризованной теории также можно рассматривать как следствие конформной аномалии. Мы еще вернемся к этому типу аномалий в следующем разделе.

5) Калибровочная инвариантность — суперсимметрия. Не видно причин, по которым в некоторых суперсимметричных теориях не возникала бы аномалия в супертоке $\partial_\mu S_\mu \neq 0$ (причем такая, которую нельзя превратить в суперконформную аномалию). По-видимому, такая аномалия, если она существует, может быть устранена ценой нарушения калибровочной инвариантности (?). За исключением этого краткого замечания, мы не будем обсуждать аномалии в супертоке; см. [49], [50].

1.2.2. *Мнимые части и аномалии*

По этому поводу следует сказать, что известны аномалии, не связанные с ненулевыми мнимыми частями каких-либо корреляторов. Наилучшим примером является глобальная SU (2)-аномалия Виттена [46]; см. также раздел 4. Она заключается в неинвариантности фермионного детерминанта относительно топологически нетривиальных калибровочных преобразований, не сводимых к инфинитезимальным. Такого рода аномалии (их общее название — глобальные; см. следующий раздел 1.3) *не связаны* с дивергенциями токов и вообще с какими-либо пертурбативными функциями Грина.

Другой пример — аномалия Рёдлиха в нечетномерных калибровочных теориях [35,41]. С одной стороны, она близка по смыслу к виттеновской SU(2)-аномалии, с другой — непосредственно связана с самим фермионным детерминантом, а не с его изменением при каких-либо преобразованиях полей. В самом простом случае — в трехмерной электродинамике — аномалия получается из той же диаграммы рис. 2 для векторного тока J_α, что и двумерная швингеровская. Вычисляя петлю теперь уже в трехмерном пространстве с помощью регуляризации Паули — Вилларса, мы найдем, что регуляторные поля дают конечный вклад, равный

$$\langle J_\alpha\rangle - \text{вклад физического фермиона} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\operatorname{Tr}\gamma_\alpha\frac{1}{\hat{p}-iM}\times$$

$$\times\gamma_\beta\frac{1}{\hat{p}-\hat{q}-iM}A_\beta=\frac{i}{2\pi}\operatorname{sgn}|M|\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_\beta A_\gamma.$$

Этот результат соответствует возникновению в действии аномального члена $(i/8\pi)\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma}$. Однако, вычисляя ту же диаграмму по мнимой части, мы нашли бы для коэффициента перед аномальной структурой $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_\beta A_\gamma$:

$$\frac{m}{(q^2-m^2)^{1/2}}\,\theta\,(q^2-4m^2).$$

Устремляя массу физического фермиона m, введенную для инфракрасной регуляризации, к нулю, получим, что мнимая часть равна нулю. Соответственно действительная часть диаграммы пропорциональна произвольной постоянной. Другими словами, аномалии Рёдлиха не отвечают никакой мнимой части поляризационного оператора, и поэтому она может быть устранена выбором регуляризации. Тем не менее регуляризация Паули — Вилларса дает ненулевой ответ для этой аномалии. Это важно, потому что могут существовать физические требования, выделяющие регуляризацию Паули — Вилларса.

1.2.3. *Паули-вилларсовская регуляризация*

Главным достоинством этой регуляризации для фермионных полей является уже упоминавшееся сохранение векторных токов. Это очень важное свойство, поскольку все векторные токи, с которыми нам до сих пор пришлось столкнуться, сохраняются (в то время как о сохранении киральных токов в модели Глэшоу — Вайнберга — Салама природе пришлось специально позаботиться, подобрав кварк-лептонный состав полей материи так, чтобы сократить соответствующие аномалии). Кроме того, в этой регуляризации автоматически обеспечена бозе-симметрия всех корреляторов, что также является физическим требованием, предъявляемым к выбору регуляризации. Отметим (не доказывая), что во всех других регуляризациях, сохраняющих векторные токи и бозе-симметрию, ответы для аномалий совпадают. Одной из таких регуляризаций является размерная. Она особенно поучительна, потому что сразу становится очевидным появление ε-символа в выражениях для всех аномалий. Дело в том, что в размерной регуляризации единственным источником нарушения симметрий (кроме дилатационной и суперсимметрии) оказывается неопределенность аналитического продолжения ε-символа и γ^5-матрицы в пространства произвольной размерности *).

---

*) Более точная причина возникновения ε-символа является когомологической. В частности, интегралы от структур с ε-символом являются топологическими инвариантами.

К сожалению, автору неизвестен простой и понятный метод вычисления аномалий в размерной регуляризации, и мы не будем ею пользоваться.

Последнее, что мы хотели бы обсудить в этом разделе 1.2,— это разница между аномалией и спонтанно нарушенной симметрией. После спонтанного нарушения динамика теории по-прежнему обладает соответствующей инвариантностью — несимметричен только выбор базисных состояний, а тождества Уорда — соотношения между различными функциями Грина, вытекающие из симметрии лагранжиана,— остаются справедливыми. В частности, нётеровские токи по-прежнему сохраняются. Например, в теории Глэшоу — Вайнберга — Салама спонтанное нарушение изменяет уравнения движения фермионов: в них появляется масса, и в результате ток $\bar{\psi}\gamma_\mu\,[(1-\gamma^5)/2]\,\psi$ перестает сохраняться: $\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\,[(1-\gamma^5)/2]\,\psi = -m\bar{\psi}\gamma^5\psi$. Однако киральный ток, с которым взаимодействуют Z-бозоны, включает в себя не только фермионы, но и фазу хиггсовского поля (голдстоун): $J^{\mathrm{L}}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\,[(1-\gamma^5)/2]\,\psi + \partial_\mu\chi$. Сам же голдстоун связан с фермионами: $\partial^2\chi = +m\bar{\psi}\gamma^5\psi$ (это уравнение движения), и поэтому $\partial_\mu J^{\mathrm{L}}_\mu = 0$, чем и обеспечивается калибровочная инвариантность.

Иначе обстоит дело с аномальными симметриями. Здесь неинвариантна сама *динамика*, а не состояния. Скажем, γ^5-инвариантность в киральной модели [3,4] означает сохранение числа псевдоскалярных π-мезонов (G-четность). Из-за аномалии $\partial_\mu J^5_\mu = (i/8\pi^2)\,F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}$ оказывается возможным распад $\pi^0 \to 2\gamma$, нарушающий это правило отбора.

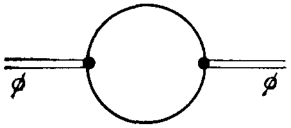

Рис. 4. Собственно-энергетическая диаграмма для поля Голдстоуна.

Появлению массы у этого поля отвечает не зависящий от импульса вклад в выражении для этой диаграммы

При спонтанном нарушении симметрии обязательно возникают безмассовые голдстоуновские частицы, что является однозначным следствием существования несимметричных вакуумных средних в теории с сохраняющимися нётеровским током. Интересно, что голдстоуны не обязаны приобретать массу в теории с аномалией, где $\partial_\mu J_\mu \neq 0$. Дело здесь в том, что аномальная дивергенция нётеровского тока равняется полной производной (см. раздел 3): $\partial_\mu J_\mu = \partial_\mu K_\mu$. (Например, в случае γ^5-аномалии при $D = 2$ $K_\mu \sim \varepsilon_{\mu\nu}A_\nu$.) Из-за этого сохраняющийся ток по-прежнему существует: $J_\mu \to J_\mu - K_\mu$, хотя уже не является нётеровским, т. е. не имеет вида $(\partial L/\partial\phi_{,\mu})\,\delta\phi$. Чтобы понять, стал ли голдстоун тяжелым, надо посмотреть на собственно-энергетическую диаграмму рис. 4. Вклад аномалии устроен как

$$\int \langle 0 \mid \partial_\mu K_\mu\,(x)\,\partial_\nu K_\nu\,(0) \mid 0\rangle\, e^{iqx}\mathrm{d}^D x \sim q_\mu q_\nu \int \langle 0 \mid K_\mu\,(x)\,K_\nu\,(0)\,|0\rangle\, e^{iqx}\mathrm{d}^D x.$$

Поэтому, если коррелятор $\langle 0 \mid KK\,|0\rangle$ не содержит полюса по q^2, то аномалия не дает массового члена в собственно-энергетической диаграмме Голдстоуна. В частности, аномальный распад $\pi^0 \to 2\gamma$ не генерирует никакой поправки к массе пиона. Бывает, однако, что коррелятор $\langle 0 \mid KK \mid 0\rangle$ содержит полюс. Наиболее известный пример — так называемый дух Венециано в КХД, который приводит к утяжелению девятого псевдоскалярного голдстоуновского η'-мезона [51]. Полюс в корреляторе в этом случае связан с инстантонными флуктуациями калибровочных полей. В абелевом случае такие флуктуации отсутствуют, так что аномальный распад $\pi^0 \to 2\gamma$ не генерирует никакой поправки к массе пиона. Однако виртуальный процесс $\pi^0 \to 2\mathrm{W} \to \pi^0$ с участием W-бозонов за счет инстантонных эффектов добавляет к массе π^0 ничтожно малую величину $\sim M_{\mathrm{W}} \exp\,[-\mathrm{const}/\alpha\,(M_{\mathrm{W}})]$. Инстантоны в КХД оказывают сильное влияние не на π^0, а на синглетные по флэйворной $\mathrm{U_f}$ (3) η'-мезоны.

1.3. Типы аномалий и их физические следствия

Мы начнем этот раздел с нескольких конкретных примеров физических теорий с аномалиями.

1.3.1. *Квантовая хромодинамика в киральном пределе*

$L = \bar{\psi} i (\hat{\partial} + \hat{A}_c)\psi$; здесь

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

— тройка кварковых полей, A_c — глюонное поле. Мы не будем пока интересоваться цветовыми степенями свободы (по цветовой группе $U_c(3)$ u, d, s — триплеты, а A_c — октет), поэтому соответствующие индексы не выписаны. Вместо этого нас будет интересовать флэйворная группа симметрии $U_f(3)$ между u-, d- и s-кварками. По этой группе ψ — триплет, а A_c — синглет. В киральном пределе, когда в лагранжиане отсутствуют массы кварков (это во многих случаях разумное приближение к реальной КХД), классическая теория обладает даже $U_f(3) \times U_f(3)$-симметрией, определяемой преобразованиями $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$ с матрицами α из алгебры $U_f(3)$. Группа $U_f(3) \times$ $\times\, U_f(3)$ в КХД глобальная, это означает, что с нётеровскими токами $\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^a\psi$ и $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\tau^a\psi$ (τ^a — генераторы $U_f(3)$) не связаны никакие калибровочные бозоны.

В КХД происходит спонтанное нарушение симметрии $U_f(3) \times U_f(3) \to$ $\to U_f(3)$, так как образуется вакуумный конденсат $\langle\bar{\psi}_i\psi_j\rangle = (1/3)\,\delta_{ij}\,\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, неинвариантный относительно замены $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$. Динамика теории, конечно, все еще обладает полной $U_f(3) \times U_f(3)$-симметрией, однако ее аксиальная часть реализуется на полях, описывающих элементарные частицы, нелинейно: среди этих полей имеется нонет голдстоуновских псевдоскалярных мезонов П ($\pi^{\pm}$, π^0, $K^{\pm}$, $\bar{K}^{\pm}$, η, η'), преобразующийся под действием $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$ по правилу $\Pi \to \Pi + \varepsilon$. Обычно поля П называются псевдоголдстоуновскими, потому что при учете масс кварков они также приобретают небольшую массу $\sim(m_q\,\langle\bar{\psi}\psi\rangle/f_\pi^2)^{1/2}$ (в то время как массы всех остальных не(псевдо)голдстоуновских мезонов определяются только конденсатами глюонных и кварковых полей и практически не зависят от m_q).

Спонтанное нарушение аксиальной флэйворной симметрии имеет вполне ощутимые физические следствия. Вместе с каждым мезоном и барионом в спектре физических состояний имеются вырожденные с ним по векторной $U_f(3)$-симметрии другие мезоны и барионы с теми же массами (точнее, почти с теми же, так как имеются массовые $\sim m_q$ и электромагнитные поправки, нарушающие эту симметрию явно) и с теми же квантовыми числами. Например, с протоном по $U_f(3)$ связан октет барионов (p, n, Λ, $\Sigma^{\pm,0}$, Ξ^0, Ξ^-). Однако таких же частиц, но с другой четностью, нет. Например, резонанс со спином и четностью $1/2^-$ имеет массу на 600 МэВ больше, чем у p ($1/2^+$). Вместо этого спонтанно нарушенная аксиальная $U_f(3)$-симметрия связывает частицу с «частицей + псевдоголдстоуновский мезон с нулевым импульсом»; так, в киральном пределе протон вырожден с парами $p + \pi$, $p + K$, ..., $\Xi +$ $+\, \eta$, ..., а также с тройками $p + \pi + \pi$ и т. д. Фактически спонтанно нарушенная аксиальная симметрия проявляется не в спектре масс частиц, а в существовании и свойствах (псевдо)голдстоуновских мезонов. В частности, любые взаимодействия этих частиц должны обращаться в нуль при нулевом импульсе. Тем самым гарантируется, что никакие силы не нарушат вырождения протона с состоянием $p + \pi$. Утверждение о градиентности всех взаимодействий пионов (т. е. пропорциональности потенциала $V(q)$ импульсу q_μ) имеет важное значение для всей ядерной физики.

Но все это еще не аномалия. Аномальной в киральной КХД является флэйворная аксиальная $\mathrm{U_f}(1)$-симметрия, определяемая преобразованиями $\psi \to e^{i\varepsilon\gamma^5}\psi$ с единичной матрицей ε. Соответствующий нётеровский ток $J^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi = \bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 u + \bar{d}\gamma_\mu\gamma^5 d + \bar{s}\gamma_\mu\gamma^5 s$ не сохраняется:

$$\partial_\mu J^5_\mu = \frac{3}{4\pi}\,\mathrm{Tr_c}\, F^{\mu\nu}_{\mathrm{c}}\tilde{F}^{\mu\nu}_{\mathrm{c}}$$

($\mathrm{Tr_c}$ — след в цветовой алгбере $\mathrm{SU_c}(3)$). Из-за аномалии аксиальная симметрия отсутствует не только в спектре одночастичных состояний, но и вообще в динамике теории. SU(3)-синглетный η'-мезон, имеющий квантовые числа аномального $\mathrm{U_f}(3)$-синглетного тока J^5_μ, больше не является голдстоуновским и даже псевдоголдстоуновским бозоном. Его масса определяется не массами кварков m_{q}, а, так же как у всех неголдстоуновских мезонов, непертурбативными вакуумными конденсатами полей КХД. Реально $m_{\eta'} \approx 958$ МэВ, что значительно больше масс октета псевдоголдстоунов: $m_\pi \approx 140$ МэВ, $m_{\mathrm{K}} \approx 498$ МэВ, $m_\eta \approx 549$ МэВ. По той же причине отсутствует вырождение между состояниями р и р $+\ \eta'$, ρ и $\rho + \eta'$ и т. д.

На самом деле с точки зрения спектроскопии элементарных частиц роль аксиальной аномалии в КХД не слишком велика. Это объясняется тем, что реально масса s-кварка весьма велика, $m_{\mathrm{s}} \approx 150$ МэВ, и флэйворная $\mathrm{U_f}(3)$-симметрия достаточно сильно нарушается безо всякой аномалии. Практически единственное место, в котором удается разделить эффекты аномалии и $m_{\mathrm{s}} \neq 0$, — это свойства η'. (Вопрос о большой величине отношения $m_{\eta'}/m_\eta$ получил в свое время название U(1)-проблемы[51] — проблемы выделенности $\mathrm{U_f}(1)$-подгруппы в аксиальной $\mathrm{U_f}(3)$. Она может быть разрешена только при учете аномалии.) Это, конечно, очень принципиально; кроме того, рассмотрение этой проблемы помогает понять, чем отличаются следствия спонтанного и аномального нарушений симметрии в реалистической теории, где имеют место оба эти эффекта. Теперь перейдем к другой аномалии в той же КХД, экспериментальные следствия которой значительно ярче. Для этого обсудим

1.3.2. *Киральную КХД во внешнем электромагнитном поле*

Лагранжиан имеет вид $L = \sum\limits_f \bar{\psi}_{\mathrm{f}} i\,(\partial + \hat{A}_{\mathrm{c}} + e_{\mathrm{f}}\hat{A}_{\mathrm{em}})\,\psi_{\mathrm{f}}$. Включение электромагнитного поля приводит к новым аномалиям. В частности, появляются аномалии в токах, не содержащих s-кварковых полей *). Массы же u- и d-кварков очень малы (порядка 10 МэВ), и аномалии на этот раз будут резко выделяться на фоне массовых поправок.

Электромагнитное взаимодействие нарушает флэйворную симметрию: разные кварки имеют различные электрические заряды. Мы будем говорить о двухкварковой теории:

$$L = \bar{u}i\left(\hat{\partial} + \hat{A}_{\mathrm{c}} + \frac{2}{3}\hat{A}_{\mathrm{em}}\right)u + \bar{d}i\left(\hat{\partial} + \hat{A}_{\mathrm{c}} - \frac{1}{3}\hat{A}_{\mathrm{em}}\right)d = \bar{\psi}i\,(\hat{\partial} + \hat{A}_{\mathrm{c}} + Q\hat{A}_{\mathrm{em}})\,\psi;$$

здесь

$$\psi - \text{дублет } \begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathrm{c}} - \text{синглет по } \mathrm{U_f}(2), \text{ а}$$

$$Q = \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = +\frac{1}{6}I + \frac{1}{2}J_3.$$

---

*) Возможно, следует пояснить, что для U (1)-проблемы существенны все кварковые поля с массами ниже характерного адронного масштаба m_ρ, т. е. в точности u, d и s. Тяжелые c-, b-, . . .-кварки не дают вклада в аномалию при адронных энергиях. Именно по этой причине в п. 1.31) мы рассматривали группу U_{f} (3), а не $\mathrm{U_f}$ (2) или $\mathrm{U_f}$ (4).

Лагранжиан обладает не полной $U_f(2) \times U_f(2)$-, а только $(U(1) \times U(1)_f) \times (U(1) \times U(1))_f$ *-симметрией*. Как *и ранее, аксиальная симметрия* спонтанно нарушается конденсатами $\langle \bar{u}u \rangle \approx \langle \bar{d}d \rangle$, и образуются (псевдо)голдстоуновские мезоны $\pi^0 \sim (1/\sqrt{2})\,(\bar{u}u - \bar{d}d)$, $\pi^\pm \sim u\bar{d},\ \bar{u}d$. Четвертый мезон $\sim (1/\sqrt{2})\,(\bar{u}u + \bar{d}d)$ обсуждать в рамках двухкварковой модели бессмысленно; решение U(1)-проблемы показывает, что он стопроцентно смешивается с $\bar{s}s$ и образует тяжелый η'-мезон. Из-за электромагнитного взаимодействия, нарушающего $U_f(2)$ до $(U(1) \times U(1))_f$, массы π^0 и $\pi^\pm$, пропорциональные $[(m_u + m_d)\,\langle \bar{u}u \rangle]^{1/2}/f_\pi$, несколько различаются: $m_{\pi,} \approx 135{,}0$ МэВ, $m_{\pi^\pm} \approx \approx 139{,}6$ МэВ. Аномалия, о которой мы собираемся говорить на этот раз, нарушает сохранение одного из аксиальных U(1)-токов, $J^5_{\mu(3)} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\tau_3\psi = \bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma^5 d$, связанного с преобразованием $\psi \to e^{i\varepsilon\tau_3\gamma^5}\psi$: $u \to e^{+i\varepsilon\gamma^5}u$, $d \to e^{-i\varepsilon\gamma^5}d$. Этот ток ортогонален синглетному аксиальному току, который мы обсуждали в разделе 1.3.1; в рамках чистой КХД без электромагнитных взаимодействий он точно сохраняется. Именно с этим током по гипотезе PCAC связан π^0-мезон:

$$\langle \pi^0 | \ldots = \frac{1}{if_\pi} \int d^3\mathbf{y}\, \langle 0 |\, [J^5_{0(3)}(\mathbf{y}),\ \ldots].$$

Аномалия в токе, $\partial_\mu J^5_{\mu(3)} \sim F^{\mu\nu}_{\rm em}\widetilde{F}^{\mu\nu}_{\rm em}$, приводит к возникновению ненулевой амплитуды перехода одного π-мезона в нуль π-мезонов (+2 фотона):

$$\langle \pi | \mathscr{H} | 2\gamma \rangle = \frac{1}{if_\pi} \int d^3\mathbf{y}\, \langle 0 | [J^5_{0(3)}(\mathbf{y}),\ \mathscr{H}] | 2\gamma \rangle =$$

$$= -\frac{1}{f_\pi} \int d^3\mathbf{y}\, \langle 0 | \partial_0 J^5_{0(3)}(\mathbf{y}) | 2\gamma \rangle = -\frac{1}{f_\pi} \int d^3\mathbf{y}\, \langle 0 | \partial_\mu J^5_{\mu(3)}(\mathbf{y}) | 2\gamma \rangle \sim$$

$$\sim \frac{1}{f_\pi} \int d^3\mathbf{y}\, \langle 0 | F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}(\mathbf{y}) | 2\gamma \rangle \sim \frac{1}{f_\pi\,(\omega^{(1)}\omega^{(2)})^{1/2}}\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, p^{(1)}_\mu p^{(2)}_\nu \varepsilon^{(1)}_\alpha \varepsilon^{(2)}_\beta.$$

В этой формуле $\mathscr{H}$ — гамильтониан взаимодействия пионов с фотонами, $p^{(1,2)}$, $\omega^{(1,2)}$, $\varepsilon^{(1,2)}$ — импульсы, частоты и поляризации фотонов. Мы воспользовались уравнением $\partial_0 J_0 = i\,[J_0\mathscr{H}]$ и тождеством $\int d^3\mathbf{y}\ \langle | \vec{\partial}\,\mathbf{J} | \rangle = 0$, из-за которого $\int d^3\mathbf{y}\ \langle | \partial_0 J_0 | \rangle = \int d^3\mathbf{y}\ \langle | d_\mu J_\mu | \rangle$. В принципе распад $\pi^0 \to 2\gamma$ мог бы происходить и без аномалии, из-за массовых членов кварков в лагранжиане, которые тоже нарушают сохранение тока $J^5_{\mu(3)}$. Однако вклад этих членов в амплитуду распада отличается от вклада аномалии множителем $\sim m^4_q/\omega^4$ (ср. раздел 2.5). Типичная величина частот фотонов $\omega \sim m_\pi/2$, и этот множитель очень мал. Поэтому можно утверждать, что ширина распада $\pi^0 \to 2\gamma$ целиком определяется аномалией в аксиальном токе.

Возможно, надо сказать, что аномалия в токе $J^5_{\mu(3)}$ не нарушает пространственной четности. По-прежнему имеется даже однопараметрическое преобразование, обобщающее дискретное преобразование четности. Только теперь его генератором является не $\int d^3\mathbf{y}\, J^5_{c(3)}$, а $\int d^3\mathbf{y}\, (J^5_{0(3)} - c\varepsilon_{0ijk} A^i_{\rm em} \partial_j A^k_{\rm em})$. Однако если без аномалии этот закон требовал также сохранения четности числа π-мезонов (*G*-четности), то теперь такого рода требование отсутствует.

Следующий пример теории с аномалями — модель Глэшоу — Вайнберга — Салама (ГВС). В этой модели имеются две интересные аномалии. Мы начнем с той, которая приводит к распаду протона.

1.3.3. *Распад протона в модели ГВС* (*аномалия в барионном токе*)

Фермионная часть лагранжиана ГВС, $L=\sum\limits_i \bar\psi_i i\,(\hat\partial+\hat W^a\tau_i^a+\hat BY_i)\,\psi_i+ +\sum\limits_{ij}\phi_{ij}\bar\psi_i\psi_j$, содержит поля ψ_i, принадлежащие синглетным и дублетным представлениям группы SU(2) и имеющие определенные значения U(1)-гиперзарядов Y_i. Левые и правые компоненты обычных частиц в модели ГВС имеют разные квантовые числа:

$$\begin{pmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{d}\end{pmatrix}_{\mathrm{L}}$$

— дублет по SU(2) с гиперзарядом $Y = 1/6$, а $u_{\rm R}$ и $d_{\rm R}$ — синглеты по SU(2) с гиперзарядами соответственно +2/3 и —1/3. Электрические заряды частиц равны $Q = \tau^3 + Y$. Через $\phi_{ij}\bar\psi_i\psi_j$ мы обозначили юкавские члены лагранжиана, описывающие взаимодействие фермионов с хиггсовскими полями. Матрица ϕ_{ij}, конечно, непроизвольна. На нее наложены требования $\mathrm{SU}(2)\times\times\mathrm{U_Y}(1)$-ковариантности. Кроме того, юкавские члены меняют киральность фермионов. Из многообразных свойств модели ГВС нас сейчас интересует только одно. Лагранжиан обладает не только калибровочной «флйэворной» $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U_Y}(1)$-симметрией, но и еще одной глобальной $\mathrm{U_f}(1)$, задаваемой преобразованиями $\psi_i\rightarrow e^{i\varepsilon}\psi_i$: умножением всех фермионных полей на один и тот же фактор. Хиггсовские поля при этом преобразовании (в отличие от $\mathrm{U_Y}(1)$) не изменяются: $\phi_{ij}\rightarrow\phi_{ij}$. Более точно, в модели ГВС имеется не одна, а две глобальные U(1)-симметрии. Это происходит из-за того, что юкавские члены не смешивают кварки с лептонами (из-за бесцветности хиггсовских полей). Поэтому можно преобразовывать по правилу $\psi_i\rightarrow e^{i\varepsilon}\psi_i$ отдельно кварки и лептоны. Две указанные U(1)-симметрии отвечают сохранению барионного и лептонного зарядов. Например, кварковой U(1)-симметрии отвечает нётеровский ток $J^{\rm B}_\mu = \bar u_{\rm L}\gamma_\mu u_{\rm L} + \bar u_{\rm R}\gamma_\mu u_{\rm R} + \bar d_{\rm L}\gamma_\mu d_{\rm L} + \bar d_{\rm R}\gamma_\mu \bar d_{\rm R}$ + члены с другими кварками $= \bar u\gamma_\mu u + d\gamma_\mu d + \ldots$ Сохранение барионного тока обеспечивает стабильность легчайшего из барионов — протона и обязывает все остальные барионы распадаться на в точности один протон + четное число лептонов (+ пары $\mathrm{p\bar p}$). Четность числа лептонов обеспечивается в свою очередь сохранением лептонного тока $J^{\rm lep}_\mu$. Однако в модели ГВС сохранение обоих токов $J^{\rm B}_\mu$ и $J^{\rm lep}_\mu$ нарушается аномалией:

$$\partial_\mu J^{\rm B}_\mu = a\,\mathrm{Tr}\,W_{\mu\nu}\widetilde W_{\mu\nu} + bB_{\mu\nu}\widetilde B_{\mu\nu},$$

$$\partial_\mu J^{\rm lep}_\mu = a\,\mathrm{Tr}\,W_{\mu\nu}\widetilde W_{\mu\nu} + bB_{\mu\nu}\widetilde B_{\mu\nu}.$$

Сохраняется только разность $J^{\rm B}_\mu - J^{\rm lep}_\mu$ (так называемый закон B — L). В результате протон в модели ГВС оказывается в принципе нестабильным — должен, хотя и очень медленно, распадаться на $\pi^0\mathrm{e}^+$ и др.

Подчеркнем, что в большинстве теорий великого объединения нестабильность протона связана с несохранением барионного тока в *классическом* лагранжиане. Например, в SU(5)-теории нет инвариантности по отношению к вращению фаз одних только кварков в 5-плете

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}\\ \mathrm{d}\\ \mathrm{d}\\ \mathrm{e}\\ \nu\end{pmatrix}.$$

Классический лагранжиан модели ГВС, напротив, обладает такой инвариантностью, но она аномальна — нарушается на квантовом уровне. Это различие имеет не только принципиальное значение, но и приводит к совершенно различным физическим предсказаниям. В модели ГВС протон распадается лишь в присутствии топологически нетривиального калибровочного поля

$$\Delta B \equiv \int \partial_\mu J^{\mathrm{B}}_\mu \mathrm{d}^4x = a \int \mathrm{Tr}\, W_{\mu\nu}\widetilde{W}_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x + b \int B_{\mu\nu}\widetilde{B}_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x =$$

$$= c \int F^{(\mathrm{em})}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{(\mathrm{em})}_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x + \text{вклады Z- и } \mathrm{W}^{\pm}\text{-бозонов.}$$

Для того чтобы $\Delta B \neq 0$, необходимо иметь полевую конфигурацию с ненулевым топологическим зарядом. В теории великого объединения ничего подобного не требуется: распад протона происходит *спонтанно*, через виртуальные X- и Y-бозоны.

Распад протона в модели ГВС не имеет «практического» значения. Он мог бы быть вызван статическими параллельными магнитным и электрическим полями. Но эти поля должны быть недостижимо велики, $E,\ H \gg m_\pi^2$. (В наших формулах опущены все члены, связанные с массами кварков, и на них можно полагаться только в этом пределе. Для более слабых полей барионный ток сохраняется, а вклад $F\widetilde{F}$ компенсируется образованием индуцированного фермионного конденсата $m\ \langle\bar{\psi}\psi\rangle \sim F\widetilde{F}$.) Более того, поля должны быть классическими: скажем, распад $\mathrm{p} \to (\pi_0 e^+)\ \gamma\gamma$ тоже не будет происходить. Хотя для пары фотонов $F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}$ может и не равняться нулю, но интеграл $\int F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x$ всегда зануляется из-за осцилляций фотонных полей во времени. Внешнее калибровочное поле с топологическим зарядом может быть создано, например, дионом — гипотетической частицей, несущей одновременно магнитный и электрический заряды. Вблизи диона протон нестабилен. На самом деле достаточно даже не диона, а просто магнитного монополя. Электрическое поле, дающее вклад в интеграл $\int F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x$, создается тогда самим протоном. Распад протона в поле монополя (монопольный катализ) известен под названием эффекта Каллена — Рубакова (обычно он обсуждается в более широком контексте теорий великого объединения, но от них требуется только монополь, а сам процесс распада объясняется и в рамках модели ГВС).

В принципе в модели ГВС имеется и спонтанный распад протона в отсутствие внешних полей. Он вызывается инстантонными флуктуациями. Однако вероятность таких флуктуаций и вклад электрослабых инстантонов в амплитуды физических процессов обычно ничтожны:

$$\exp\left(-\frac{4\pi}{g^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{\alpha_{\mathrm{em}}}\right) < 10^{-10}.$$

Возможно, что инстантонные эффекты и индуцированный ими распад протона становятся существенными при высоких температурах.

Приведенные три примера объединяет общее свойство: аномалии нарушают сохранение «*внешних*» нётеровских токов, с которыми не взаимодействуют никакие калибровочные бозоны. В результате аномалии приводят к ощутимым физическим следствиям, но не ведут к патологиям. Из-за таких аномалий разрушаются глобальные симметрии: деформируются спектры масс, исчезает вырождение состояний, открываются запрещенные каналы распада, изменяются амплитуды реакций, но *не возникает* новых физических состояний, не нарушается унитарность и *не меняются* ультрафиолетовые свойства теории.

Бывают, однако, аномалии, в корне изменяющие физическое содержание теории. Это «внутренние» аномалии, нарушающие калибровочную инвариантность. В калибровочных теориях пространство состояний векторных линий *получается из бесконечномерного пространства полей* A_μ^a *отождествлением* калибровочно эквивалентных полей A и GA, получающихся друг из друга преобразованиями из группы $G = \prod_{x} G(x)$ всех калибровочных преобразований. Топология этого «пространства орбит калибровочной группы» в общем случае весьма сложная: не все преобразования из G сводятся к суперпозиции бесконечно малых — инфинитезимальных: могут существовать также дискретные наборы топологически нетривиальных, несводимых к инфинитезимальным (нестягиваемых) калибровочных преобразований. Аномалии могут нарушать инвариантность по отношению к обоим типам преобразований. Следствия этого нарушения, однако, различаются.

Если теория неинвариантна относительно *нестягиваемых* калибровочных преобразований (в этом случае говорят, что имеется глобальная аномалия), это может приводить к непреодолимым трудностям в ее квантовом описании. Например, если действие S изменяется при нестягиваемых преобразованиях на π, то

$$\sum_{\substack{\text{(по калибровочным}\\ \text{преобразованиям)}}} e^{iS} \sim e^{iS} + e^{i(S+\pi)} = 0$$

В результате производящий функционал для такой теории не определен, и по всей видимости не определена и S-матрица: для нее получается выражение типа 0/0. Другая, часто встречающаяся глобальная аномалия возникает, когда $\pi_d(G) = \mathbb{Z}$ (d — размерность пространства-времени, G — калибровочная группа). Тогда эффективное действие, как правило, изменяется на $n\alpha$ при нестягиваемых калибровочных преобразованиях с топологическим зарядом $n \in \mathbb{Z}$. Теория может быть непротиворечиво сформулирована лишь в тех случаях, когда α кратно 2π. Таким образом, глобальные аномалии часто накладывают сильные ограничения на форму допустимой теории, например, они требуют квантования некоторых зарядов в лагранжиане. Глобальные аномалии во многом аналогичны ситуации с весс-зуминовскими членами в нечетномерных теориях Янга — Миллса,

$$L = -\frac{1}{4\alpha}\operatorname{Tr} F^2_{\mu\nu} + c\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_d}\operatorname{Tr} A_{\alpha_1}(\partial_{\alpha_2}A_{\alpha_3} \cdots \partial_{\alpha_{d-1}}A_{\alpha_d} + \ldots)$$

Условие калибровочной инвариантности таких теорий требует квантования коэффициента перед весс-зуминовским членом. Мы подробнее вернемся к этой аналогии в разделе 4.

Потеря инвариантности относительно *инфинитезимальных* калибровочных преобразований связана с нарушением ковариантного сохранения фермионных токов, взаимодействующих с калибровочными бозонами. Это не может происходить с векторными токами, а невекторные калибровочные взаимодействия возникают в киральных теориях, где левые и правые поля материи имеют различные квантовые числа. Простейшим примером теории, в которой имеется потенциальная внутренняя аномалия, является *модель ГВС*. Выше, в примере в), мы сталкивались с аномалией во *внешнем* барионном токе, нарушающей глобальную симметрию, ответственную за сохранение барионного заряда. Теперь нас интересует внутренняя аномалия.

1.3.4. *Внутренняя аномалия в модели ГВС*

Мы напишем действие в терминах левых фермионных полей (правая частица — это то же самое, что левая античастица). Правые фермионы, т. е. левые антифермионы, синглетные по SU(2), $\bar{e}_L$, $\bar{u}_L$, $\bar{d}_L$, . . ., мы обозначим через χ_L, а левые дублеты $(e^-, \nu)_L$, $(u, d)_L$, . . . — через ψ_L. Кроме того, как и везде в этом обзоре, допишем в действие «стерильные» правые поля χ_R и ψ_R, не взаимодействующие с калибровочными бозонами. Этот прием позволяет формально записать лагранжиан в терминах дираковских полей $\chi = (\chi_L, \chi_R)$ и $\psi = (\psi_L, \psi_R)$. Хиггсовский сектор выберем в соответствии с так называемой стандартной моделью ГВС: единственный скаляр ϕ, который является дублетом по SU(2). Тогда лагранжиан фермионов и скаляров равен

$$L=\sum_i \overline{\psi}_i i\left[\hat{\partial}-(\hat{W}+Y_i\hat{B})\frac{1-\gamma_5}{2}\right]\psi_i+\sum_j \overline{\chi}_j i\left(\hat{\partial}+\widetilde{Y}_j\hat{B}\,\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\chi_j+$$
$$+\sum_{ij} c_{ij}\phi\overline{C\psi_i}\frac{1-\gamma_5}{2}\chi_j+\text{к. с.}+\frac{1}{2}\,|\partial+W+Y_\phi B)\,\phi\,|^2+V\,(|\phi\,|^2).$$

Конкретный выбор юкавских констант c_{ij} для нас несуществен. Токами материи, взаимодействующими с калибровочными бозонами, являются

$$J_\mu^{\mathrm{W}^a}=i\sum_i \overline{\psi}_i\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\,t^a\psi_i+\phi^+t^a\mathrm{D}_\mu\phi-\text{к. с.}$$
$$(\mathrm{D}_\mu=\partial+W_\mu+Y_\phi B,\ \ W_\mu=-iW_\mu^a t^a),$$
$$J_\mu^{\mathrm{B}}=i\sum_i Y_i\overline{\psi}_i\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi_i+\sum_j \widetilde{Y}_j\overline{\chi}_j\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\,\chi_j+Y_\phi\phi^+\mathrm{D}_\mu\phi-\text{к. с.}$$

Важно, что эти токи не являются чисто фермионными, но содержат также хиггсовские поля. Это обстоятельство является ключевым для эффекта Хиггса вообще и для модели ГВС в частности. Благодаря ему *спонтанное* нарушение симметрии, связанное с образованием конденсата $\langle\phi\rangle$ и генерацией масс фермионов и калибровочных бозонов, *не нарушает* сохранения токов J^{W} и J^{B}, а значит, не разрушает калибровочную инвариантность теории.

С другой стороны, на *аномалию* такая модификация токов не влияет. Это связано с тем, что массовые члены для скаляров не портят сохранения $J^{\mathbf{W,B}}$ (в лагранжиане и так фигурирует произвольный потенциал $V\,(|\,\phi\,|^2)$), и потому скалярные регулярные поля не дают вклада в аномалию. Массовые же члены для фермионных регуляторных полей, $M\overline{\Psi}_i\Psi_i+M\overline{X}_iX_i$, приводят к аномалии. Здесь очень важно, что большие массы регуляторов *не могут* возникать тем же путем, что и массы обычных физических фермионов, т. е. за счет юкавских связей с хиггсами. В самом деле, *нельзя* написать в лагранжиане регуляторов выражения типа $C_{ij}\phi\overline{\Psi}_iX_j$ + к. с. с очень большими константами C_{ij}. После выпадения поля ϕ в конденсат такие члены привели бы к образованию масс $M\sim C\,\langle\phi\rangle$ у регуляторных полей, но это *не было* бы регуляризацией. Проще всего это понять, вспомнив, что ультрафиолетовые свойства теории не зависят от выбора вакуума теории возмущений, а вблизи неустойчивого вакуума $\phi=0$ поля Ψ и X никаких масс не имели бы. Явная бесконечность при такой «регуляризации» присутствует, например, в эффективном потенциале скаляров $\varphi=\phi^- - \langle\phi\rangle$, который генерируется однопетлевыми диаграммами с полями Ψ и X, распространяющимися в петле:

$$V_{\mathrm{eff}}\,(\varphi)\sim\ln\det\,(i\hat{\partial}+C\,\langle\phi\rangle+C\varphi)\sim\sum_n\frac{C^n\varphi^n}{n}\,\mathrm{Tr}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(\hat{p}+C\,\langle\phi\rangle)^n}\sim$$
$$\sim\sum_{n=0}^{n=4}\Lambda_n\varphi^n+\sum_{n=5}\gamma_n\,\frac{C^4}{\langle\phi\rangle^{n-4}}\,\varphi^n;$$

здесь $\Lambda_{0,\dots,4}$ — обычные расходящиеся параметры эффективного потенциала, которые являются свободными параметрами теории (энергией вакуума, массой и константой самодействия скалярного поля). Вся беда в том, что и остальные члены разложения V_{eff} также расходятся в пределе $C\to\infty$. Это и позволяет говорить о том, что теория оказалась бы нерегуляризованной.

Правила регуляризации требуют, чтобы все константы взаимодействия регуляторных полей (в том числе юкавская константа C) были такими же, как у физических полей (т. е. $C_{ij}=c_{ij}$), а массы регуляторов, и только они, были велики. В данном случае это означает, что в лагранжиан регуляторов должны быть включены члены $M\bar{\Psi}_i\Psi_i$, $M\bar{X}_iX_i$. Такие массовые члены нарушают сохранение киральных токов $J_\mu^{\mathrm{W,B}}$ и, вообще говоря, приводят к квантовой аномалии, разрушающей на однопетлевом уровне калибровочную инвариантность теории. Эта аномалия согласно общим правилам (см. разделы 2, 3) имеет вид

$$(\mathrm{D}_\mu J_\mu^{\mathrm{W}})^a \sim \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \operatorname{Tr} t^a \partial_\alpha \left(A_\beta \partial_\gamma A_\delta + \frac{1}{2} A_\beta A_\gamma A_\delta\right),$$

$$(\partial_\mu J_\mu^{\mathrm{B}}) \sim \sum_i Y_i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \operatorname{Tr} \partial_\alpha \left(A_\beta \partial_\gamma A_\delta + \frac{1}{2} A_\beta A_\gamma A_\delta\right);$$

здесь через A обозначено поле $A_\mu = -i\,(W_\mu^a t^a + Y_i B_\mu)$, отвечающее калибровочной алгебре SU(2) × U (1), и след берется по отношению к этой алгебре; t^a — генераторы подалгебры SU(2). В терминах полей W^a и B

$$\partial_\mu J_\mu^{\mathrm{B}} \sim \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\alpha \left[\left(\sum_i Y_i\right)\left(\frac{1}{2} W_\beta^a \partial_\gamma W_\delta^a - \frac{1}{4} f^{abc} W_\beta^a W_\gamma^b W_\delta^c\right) + \left(\sum_i Y_i^3\right) B_\beta \partial_\gamma B_\delta\right].$$

Что касается $(\mathrm{D}_\mu J_\mu^{\mathrm{W}})^a$, то эта дивергенция содержит два слагаемых:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \operatorname{Tr} t^a \partial_\alpha \left(W_\beta \partial_\gamma W_\delta + \frac{1}{2} W_\beta W_\gamma W_\delta\right),$$

$$\left(\sum_i Y_i\right) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\alpha \left[B_\beta \operatorname{Tr} t^a \left(\partial_\gamma W_\delta + \frac{1}{4} W_\gamma W_\delta\right)\right].$$

Первое из них пропорционально d^{abc} и потому равно нулю для алгебры SU(2). Поэтому для отсутствия аномалии в токе J_μ^{W}, связанном с SU(2)-калибровочными бозонами в четырех измерениях, нужно, чтобы сумма гиперзарядов обращалась в нуль. Сохранение U(1)-тока J_μ^{B} требует выполнения еще одного условия на гиперзаряды: $\sum\limits_i Y_i = 0$, $\sum Y_i^3 = 0$. Эти так называемые *условия сокращения аномалий* необходимы для справедливости обычной трактовки теорий ГВС с одним хиггсовским дублетом. В стандартной модели ГВС эти условия выполнены отдельно для каждого поколения фермионов с учетом трехцветности кварков:

$$Y_{\mathrm{e}} = -\frac{1}{2},\quad Y_{\tilde{\mathrm{e}}} = +1,\quad Y_\nu = -\frac{1}{2},\quad Y_{\mathrm{u}} = +\frac{1}{6},\quad Y_{\tilde{\mathrm{u}}} = -\frac{2}{3},$$

$$Y_{\mathrm{d}} = +\frac{1}{6},\quad Y_{\tilde{\mathrm{d}}} = +\frac{1}{3},$$

$$\sum_i Y_i = 0 + 3\cdot 0 = 0,$$

$$\sum Y_i^3 = \left[1^3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] + 3\left[2\left(+\frac{1}{6}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(+\frac{1}{3}\right)^3\right] = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0.$$

Более сложный пример теории с сокращением аномалий — это

1.3.5. *Четырехмерная* SU(5)-*модель великого объединения*

Каждое поколение фермионов в этой модели заключено в 5- и $\overline{10}$-плеты по калибровочной группе SU(5). Аномалия получается суммированием выражений

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\alpha \operatorname{Tr} t^a \left(A_\beta \partial_\gamma A_\delta + \frac{1}{2} A_\beta A_\gamma A_\delta\right) \sim \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\alpha \left(d^{abc} A_\beta^b \partial_\gamma A_\delta^c + \frac{1}{4} d^{abm} f^{cdm} A_\rho^b A_\gamma^c A_\delta^d\right)$$

для фермионов во всех представлениях группы; здесь

$$t^a t^b = \mathrm{const}\cdot\delta^{ab} + \frac{1}{2}\left(d^{abc} + i f^{abc}\right) t^c,$$

$$f^{abc} = -f^{bac},\quad d^{abc} = +d^{bac}.$$

Поскольку структурные константы f^{cdm} не зависят от представления, условие сокращения аномалий в четырехмерной теории состоит в том, что

$$\sum_{\substack{\text{(по всем представлениям } R,\\ \text{в которых имеются киральные фермионы)}}} d_R^{abc} = 0.$$

Для SU(5)-модели это условие выполнено, поскольку $d_5^{abc} + d_{\overline{10}}^{abc} = 0$.

Нарушение условий сокращения аномалий привело бы ко многим неприятным последствиям, возможно, даже к внутренней противоречивости теории. Главное из них связано с тем, что из-за взаимодействия с несохраняющимся током «ожили» бы калибровочные степени свободы векторных бозонов. В результате на квантовом уровне в теории оказалось бы больше степеней свободы, чем в классическом пределе. Это противоречит стандартному пониманию унитарности квантовой теории поля. Мы вернемся к вопросу об унитарности позднее, а сейчас поясним, что механизм устранения аномалий, восстанавливающий унитарность теории в обычном смысле, мог бы быть устроен и более просто, чем в моделях ГВС и SU(5). Вместо того чтобы подбирать состав фермионных полей так, чтобы сокращать их вклады в аномалию, можно компенсировать неинвариантность эффективного действия, связанную с аномалией в фермионном детерминанте, явно неинвариантными членами в исходном действии. Например, в случае абелевой теории можно было бы добавить к действию четырехмерной теории выражение типа

$$\hbar \int \partial_\alpha A_\alpha \frac{1}{\partial^2} F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} \mathrm{d}^4x \sim \hbar \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y \partial_\alpha A_\alpha\,(x)\, \frac{1}{(x-y)^2} F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}\,(y).$$

При калибровочных преобразованиях $A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha \varepsilon$ вариация этой добавки равна $\hbar \int \varepsilon F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} \mathrm{d}^4x$ и может компенсировать вариацию фермионного детерминанта. Это квантовая модификация действия, поскольку неинвариантность фермионного детерминанта проявляется лишь в первом (а не нулевом) порядке по $\hbar$, и компенсирующий член в действии должен также быть пропорционален $\hbar$. Беда, однако, в том, что необходимо добавлять к действию нелокальное выражение, не являющееся контрчленом в обычном смысле этого слова. От нелокальности можно избавиться, если имеется скалярное поле, изменяющееся при калибровочных преобразованиях $A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha \varepsilon$ неоднородно: $\chi \to \chi + \varepsilon$. Тогда компенсирующий член локально зависит от полей: $\int \chi F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} \mathrm{d}^4x$. Роль скаляра χ может играть фаза обычного U(1)-заряженного скаляра, $\phi = |\phi| e^{i\chi}$. Тогда при преобразовании $\phi \to e^{i\varepsilon}\phi$ $|\phi|$ не меняется, а $\chi \to \chi + \varepsilon$. Проблема заключается лишь в написании кинетического члена для поля χ. Представляют интерес две возможности. Во-первых, можно написать калибровочно инвариантное выражение $(\partial_\mu \chi - A_\mu)^2$. Недостаток такого кинетического члена в том, что он ведет к неперенормируемой четырехмерной теории: в самом деле, в этом выражении легко узнать (калибровочно инвариантный) массовый член для векторного бозона. Тем не менее в теориях, на которые не налагается требование перенормируемости, подобный механизм устранения аномалий очень полезен. Это относится, например, к десятимерной теории поля, получающейся из некоторых вариантов теории суперструн. Теория поля в этом случае описывает только низкоэнергетический предел полной теории и может быть неперенормируемой. Механизм компенсации аномалий, открытый в этих моделях Грином и Шварцем[52], является прямым обобщением рассмотренного примера, только роль поля χ там играет антисимметричное поле $B_{\mu\nu}$.

Вторая возможность генерации кинетического члена для поля появляется в неабелевых теориях. Дело в том, что неабелево обобщение выражения $\chi F\widetilde{F}$ — так называемый лагранжиан Весса — Зумино — Виттена $L_{\text{ВЗВ}}(\chi, A)$ не является более линейным по χ и содержит производные от χ, в том числе вклады типа $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{Tr}\, \chi\partial_\alpha\chi\partial_\beta\chi\partial_\gamma\chi\partial_\delta\chi$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{Tr}\chi\partial_\alpha\chi A_\beta\partial_\gamma A_\delta$, . . . Поэтому $L_{\text{ВЗВ}}$

уже на однопетлевом уровне описывает некоторую динамику поля χ. Предпринимаются (пока безуспешные) попытки доказать отсутствие патологий в такой модели. Если бы это удалось, то можно было бы думать и о сохранении перенормируемости, поскольку $L_{\text{взв}}$, в отличие от $(\partial_\mu \chi - A_\mu)^2$, не содержит размерных параметров.

Во всяком случае, даже если непротиворечивая теория с внутренней аномалией будет построена за счет введения дополнительных полей χ, отсутствующих в классическом пределе, модели без аномалий останутся выделенными. Частным случаем этой ситуации является известная проблема критической размерности в теории струн. Вне критической размерности теория либо бессмысленна ($d > d_{\text{cr}}$), либо в ней имеется дополнительная степень свободы ($d < d_{\text{cr}}$). Одновременно с этим исчезают безмассовые возбуждения — в спектре появляется щель, и резко усложняются другие динамические характеристики. В дальнейшем изложении мы будем требовать сокращения внутренних аномалий.

Теперь, подводя итог короткого обзора важнейших приложений аномалий к физике элементарных частиц (оставляя, правда, в стороне теорию струн, где аномалии одновременно и наиболее важны, и наиболее интересны), мы изложим некоторое подобие классификации аномалий. Мы видим три возможных принципа такой классификации.

а) Аномалии локальные и глобальные. Примеры глобальных аномалий: виттеновская SU(2)[46] и аналогичная аномалия Редлиха в нечетномерной неабелевой теории Янга — Миллса[35,41]. Они отвечают неинвариантности действия по отношению к топологически нетривиальным калибровочным преобразованиям и *не выражаются* в несохранении каких-либо токов. Все остальные аномалии, описывающие нарушение инвариантности относительно инфинитезимальных преобразований и связанные с несохранением нётеровских токов, называются локальными. Глобальные аномалии в калибровочных теориях должны отсутствовать. Это значит, что если какое-нибудь из полей дает вклад в глобальную аномалию, то необходимо подобрать полный состав полей таким образом, чтобы сократить этот вклад. В данном случае требуется, чтобы изменение действия при топологически нетривиальных калибровочных преобразованиях (удовлетворяющих условию $g(x) \to 1$ на бесконечности) было кратно $2\pi i$. В противном случае производящий функционал теории, пропорциональный e^{-S}, будет не определен.

Вся дальнейшая классификация относится только к локальным аномалиям.

б) Аномалии в глобальных и локальных (калибровочных) симметриях. Разницу между этими двумя классами симметрий мы подробно обсудили в разделе 1.1. Здесь отметим, что аномальная дивергенция одного и того же тока может описывать нарушение как глобальной, так и локальной симметрии. Это зависит от того, связаны с этим током в лагранжиане калибровочные бозоны или нет. Если нет, то нарушается глобальная инвариантность, если да — то локальная. Нарушение локальной (калибровочной) инвариантности, по-видимому, запрещено, и в согласованной теории вклады различных частиц в аномалию обязаны сокращаться. Условие сокращения аномалий токов, взаимодействующих с калибровочными бозонами, налагает весьма ограничительные правила отбора на реалистические теории. Мы упомянем лишь два наиболее ярких примера: предсказание существования c-кварка и, более общо, равенства числа кварков и лептонов, исходя из сокращения аномалий в теории Глэшоу — Вайнберга — Салама, и однозначная фиксация киральной ($D = 10$)-супергравитации без полей материи как следствие сокращения гравитационных аномалий[35]. Еще более важный пример: фиксация калибровочной группы в суперструнных теориях[52].

Что касается нарушения глобальных симметрий, то оно абсолютно безвредно с точки зрения самосогласованности теории, и требовать сокращения таких аномалий не надо. Важное приложение глобальных аномалий было предложено т'Хоофтом [26]. Его замечание основано на двух фактах. Во-первых, аномалия (аксиальная или киральная) определяется однопетлевой диаграммой и не зависит от следующих поправок, связанных с взаимодействием между фермионами, — это теорема Адлера — Барди́на [5]. Во-вторых, аномалия связана с существованием безмассовых возбуждений — это результат Долгова и Захарова [8]. Теорема Адлера — Барди́на немедленно следует из того, что в двух петлях и выше существует регуляризация, не нарушающая никаких симметрий, кроме дилатационной и суперсимметрии. Это может быть, например, регуляризация высшими производными [53]. Сами Адлер и Барди́н разбирались с ситуацией в электродинамике и использовали регуляризацию, вводящую массу фотону, но не фермиону. (По поводу этой теоремы см. также [50].) Что касается связи аномалий с существованием безмассовых возбуждений, то она видна уже из того, что аномальными оказываются именно симметрии, свойственные безмассовым полям и не выживающие при введении массы. В противном случае регуляризация Паули — Вилларса не нарушала бы симметрии и аномалии не было бы. Долговым и Захаровым было получено более четкое утверждение: аномалия связана с ненулевой мнимой частью некоторого коррелятора (см. раздел 1.2), и, более того, эта мнимая часть порпорциональна $\delta(s)$, т. е. целиком связана с безмассовыми возбуждениями (см., например, формулу (1.19) из предыдущего раздела).

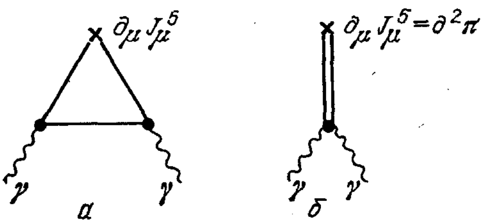

Рис. 5. Пример соотношения согласованности т'Хоофта.

Аксиальная аномалия в терминах фундаментальных кварковых полей (а) совпадает с аксиальной аномалией, выражающейся в аномальной вершине $\pi\gamma\gamma$ (б). Ответы для аномальной дивергенции аксиального тока, вычисленной для фундаментальных (кварки) и физических (π-мезоны) полей, равны.

Вывод, сделанный т'Хоофтом из этих утверждений, состоит в том, что аномалии в теории с взаимодействием должны быть такими же, как и при выключенном взаимодействии (т. е. совпадать с аномалиями соответствующих фундаментальных полей, которые непосредственно входят в лагранжиан). Следовательно, даже находясь в области сильной связи, мы знаем кое-что о спектре теории: если аномалии для фундаментальных частиц были отличны от нуля, то в спектре *всегда* есть безмассовые возбуждения. Они должны иметь такие квантовые числа, чтобы воспроизвести ответы для фундаментальных аномалий. Важно, что если у теории есть какая-то симметрия, но соответствующие нётеровские токи отсутствуют в лагранжиане, условие согласованности все равно существует: достаточно ввести бесконечно слабое взаимодействие этих токов с нефизическими (так называемыми спектаторными) калибровочными бозонами. В качестве примера можно привести квантовую хромодинамику. Фундаментальными фермионами в этой теории являются кварки. Если считать их безмассовыми (киральный предел), то в теории на классическом уровне есть аксиальная симметрия, которая, однако, нарушается аномалией. Физические адроны составлены из сильно взаимодействующих кварков и, вообще говоря, являются массивными. Тем не менее условие согласованности гарантирует, что в киральном пределе существуют безмассовые адроны. Это псевдоскалярные мезоны, π, K, η, массы которых пропорциональны массам кварков. (Массы же барионов, наоборот, практически не зависят от масс кварков.) Псевдоскалярные мезоны непосредственно взаимодействуют с аксиальным током, $J^5_\mu = \partial_\mu \pi$, и воспроизводят (рис. 5) аксиальную аномалию. В КХД мы хорошо понимаем истинный механизм возникновения масс адронов: в киральном пределе он целиком связан со спонтанным нарушением аксиальной инвариантности, массы всех адронов пропорциональны параметру нарушения — несимметричному фермионному конденсату $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, а псевдоскалярные мезоны — это голдстоуны, возникающие при спонтанном нарушении симметрии. Однако условие т'Хоофта позволяет сделать вывод о существовании безмассовых бозонов без этого понимания динамики: только из вида лагранжиана и из массивности физических фермионов — барионов. За более подробным обсуждением условий согласованности мы отсылаем читателя к оригинальной работе [26] и многочисленным последующим статьям [27].

в) Основная классификация аномалий связана, конечно, с перечислением различных аномальных симметрий. Мы уже говорили в разделе 1.2, что не будем заниматься суперсимметричными и гравитационными аномалиями. Несколько слов надо еще сказать о конформной аномалии. Дилатационная инвариантность связана, как правило, с отсутствием размерных параметров в классическом лагранжиане. При регуляризации расходящейся теории такой параметр — точка нормировки — неизбежно появляется (это явление известно под названием размерной трансмутации). Поэтому в теориях с расходимостями дилатационная инвариантность отсутствует. Имея в виду этот источник нарушения, легко вычислить аномальный след тензора энергии импульса, которому равняется дивергенция дилатационного тока, $T_{\mu\mu} = \partial_\mu D_\mu$. Например, теория Янга — Миллса $L = (1/4\alpha)\,\mathrm{Tr}F^2_{\mu\nu}$ при учете квантовых поправок превращается в

$$L\,(q^2) = \frac{1}{4\alpha\,(q^2/\mu^2)}\,\mathrm{Tr}\,F^2_{\mu\nu}.$$

Нарушение дилатационной инвариантности целиком связано с появившейся здесь зависимостью эффективного заряда $\alpha\,(q^2/\mu^2)$ от переданного импульса. В соответствии с этим

$$T^\mu_\mu = \frac{2g^{\mu\nu}}{|g|^{1/2}}\,\frac{\partial\,|g|^{1/2}\,L}{\partial g^{\mu\nu}} = -\,\frac{2g^{\mu\nu}}{\alpha^2}\,\frac{\partial\alpha}{\partial g^{\mu\nu}}\,L.$$

Зависимость α от $g^{\mu\nu}$ очень проста:

$$\alpha\left(g^{\mu\nu}\,\frac{q_\mu q_\nu}{\mu^2}\right), \quad \frac{g^{\mu\nu}\,\partial\alpha}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{q^2}{\mu^2}\,\frac{\partial\alpha}{\partial\,(q^2/\mu^2)} = \frac{\partial\alpha}{\partial\ln q^2},$$

и T^μ_μ выражается через β-функцию $\beta\,(\alpha) = \partial\alpha/\partial\ln q^2$:

$$T^\mu_\mu = -\frac{1}{2}\,\frac{\beta\,(\alpha)}{\alpha^2}\,\mathrm{Tr}\,F^2_{\mu\nu}.$$

Самый обширный класс аномалий связан с аксиальным и киральным токами. Обычно эти токи бывают фермионными, но известны также аномалии, связанные с киральными бозонами — самодуальными тензорными полями [35]. В настоящем обзоре будут обсуждаться только фермионы со спином 1/2. Возникающие при этом аномалии различаются еще по двум признакам: видом взаимодействия фермионов с калибровочными полями и выбором тока, дивергенция которого вычисляется. По первому признаку — виду лагранжиана теории — мы будем различать дираковскую:

$$L_{\mathrm{int}} = i\bar{\psi}\gamma_\mu t^a\psi A^a_\mu = \bar{\psi}\hat{A}\psi,$$

и вейлевскую:

$$L_{\mathrm{int}} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\,\frac{1-\gamma^5}{2}\,t^a\psi A^a_\mu = \bar{\psi}\hat{A}\,\frac{1-\gamma^5}{2}\,\psi,$$

аномалии. Обе они являются частным случаем общей бардиновской

$$L_{\mathrm{int}} = i\bar{\psi}\gamma_\mu t^a\psi V^a_\mu + i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5 t^a\psi A^a_\mu = \bar{\psi}\,(\hat{V} + \hat{A}\gamma^5)\,\psi$$

аномалии. Последняя будет лишь кратко затронута в тексте, поскольку ее место в общем формализме иерархии аномалий (см. раздел 3) автору неясно. Как обычно, если вместо t^a в лагранжианах стоят единицы, мы будем говорить об абелевой теории.

В перечисленных теориях можно интересоваться дивергенциями разных токов, в первую очередь векторных, аксиальных и киральных. Сами эти токи могут содержать и не содержать цветовые генераторы независимо от того, как устроен лагранжиан теории *). Соответствующие токи, а вслед за ними и аномалии называются неабелевыми и абелевыми.

Два раздела настоящего обзора (второй и третий) посвящены вычислению аномалий, т. е. выражений, стоящих в правых частях равенств $\mathrm{D}_\mu J_\mu = \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ является некоторой функцией от калибровочных полей $A_\mu = it^a A_\mu^a$. Мы будем выводить формулы для $\mathcal{A}(A)$ в трех различных случаях.

1) *Абелева аксиальная аномалия в дираковской теории* (*абелевой или неабелевой*) *в* $2n$*-мерном пространстве.* Выражение для этой аномалии имеет очень простой вид:

$$\partial_\mu J_\mu^5 = \frac{2}{(2\pi)^n\, n!}\, \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2n}} \operatorname{Tr} F_{\alpha_1\alpha_2} \ldots F_{\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}. \qquad (1.23)$$

2) *Неабелева аксиальная аномалия в той же дираковской теории* (*абелевой или неабелевой*). Вся разница по сравнению с предыдущим случаем сводится к появлению ковариантной производной слева и цветового генератора справа:

$$(\mathrm{D}_\mu J_\mu^5)^a = \frac{2}{(2\pi)^n\, n!}\, \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2n}} \operatorname{Tr} t^a F_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \quad F_{\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}} \qquad (1.24)$$

Мы договорились использовать везде паули-вилларсовскую регуляризацию, сохраняющую векторные токи. Из-за этого выражения для аксиальной и киральной аномалий в одной и той же теории совпадают. Чтобы не возникало различия в нормировке, мы договоримся всегда вычислять дивергенцию тока $J_\mu^{La} = \bar\psi\gamma_\mu (1 - \gamma^5)\, t^a\psi$ (в то время как в лагранжиан вейлевской теории входит

$$\bar\psi \hat{A}\, \frac{1-\gamma^5}{2}\, \psi = \frac{1}{2} J_\mu^{La} A_\mu^a).$$

Таким образом, киральная аномалия в дираковской теории совпадает с аксиальной (1.24):

$$(\mathrm{D}_\mu J_\mu^{\mathrm{L}})_{\mathrm{Dir}}^a = -\frac{2}{(2\pi)^n\, n!}\, \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2n}} \operatorname{Tr} t^a F_{\alpha_1\alpha_2} \qquad F_{\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}. \qquad (1.25)$$

3) Однако для современных теорий наиболее интересна *неабелева киральная аномалия не в дираковской, а в вейлевской теории.* Именно в этом случае происходит нарушение калибровочной инвариантности: не сохраняется «внутренний» ток, с которым взаимодействуют калибровочные бозоны. При переходе к вейлевской теории выражение для киральной аномалии сильно изменяется. В частности, оно перестает быть калибровочно ковариантным и не записывается в терминах напряженностей $F_{\alpha\beta}$. Вывод общего выражения для киральной аномалии в вейлевской теории опирается на соотношение Весса — Зумино (см. [5]), которое возникает именно в силу того, что рассматривается аномалия во внутреннем токе. Из-за этого $\mathcal{A}_u(A) \equiv \operatorname{Tr} u\, \mathrm{D}_\mu J_\mu^L = \delta_u S_{\mathrm{eff}}\{A\}$, т. е. равняется вариации эффективного действия (учитываю-

---

*) Мы будем предполагать, однако, что t^a в неабелевом токе совпадают с генераторами калибровочной группы, описывающей взаимодействие с векторными бозонами. В принципе имеет смысл изучать несохранение токов, связанных с другими группами, например, нарушение флэйворной группы $\mathrm{SU_L}(n_\mathrm{F}) \times \mathrm{SU_R}(n_\mathrm{F})$ в КХД. Обобщение всех формул на такие случаи почти очевидно, и мы не будем загромождать вычисления, добиваясь излишней общности.

щего однопетлевые поправки) при калибровочном преобразовании полей A: $\delta_u A_\mu = [A_\mu u] + \partial_\mu u = \mathrm{D}_\mu u$. Поскольку калибровочные преобразования образуют группу, легко понять, что $\delta_u \mathcal{A}_v - \delta_v \mathcal{A}_u = \mathcal{A}_{[uv]}$. Это и есть условие согласованности. Пользоваться этим соотношением можно по-разному. Сами Весс и Зумино с его помощью восстанавливали $\mathcal{A}_u\,(A)$ по известному «старшему члену» $\mathrm{Tr}\, u \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{2n}} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{2n-1}} A_{\alpha_{2n}}$. Условие согласованности определяет $\mathcal{A}_u\,(A)$ не однозначно, а с точностью до вариации произвольного локального функционала полей A. Однако добавление такого функционала к эффективному действию разрешено процедурой перенормировок — это так называемое добавление локальных контрчленов. Поэтому условие согласованности однозначно фиксирует лишь ту часть аномалии, которая не зависит от выбора локальных контрчленов, т. е. от выбора регуляризации. Но именно этот «истинно аномальный» вклад в $\mathcal{A}_u\,(A)$ представляет физический интерес. Легко убедиться, что «истинно аномальны» все структуры, содержащие ε-символ, и только они.

В настоящее время известен способ вывода общей формулы для $\mathcal{A}_u\,(A)$, основанный не на итерационном решении условия согласованности (как делали Весс и Зумино), а на так называемой иерархии аномалий. Этому вопросу посвящены разделы 2.4 и 3, здесь мы лишь сформулируем основную идею. Вместо того чтобы строить нелокальные функционалы, порождающие $\mathcal{A}_u\,(A)$, можно воспользоваться локальным функционалом, но зависящим от одного дополнительного поля. Если зависимость от этого поля выпадает при калибровочном преобразовании, то мы получим возможного кандидата на роль $\mathcal{A}_u\,(A)$. Оказывается, что при таком подходе возможно получить структуру с ε-символом в $\mathcal{A}_u\,(A)$. Полученный функционал, однако, не может рассматриваться как контрчлен, поскольку он зависит от дополнительного нефизического поля. (Он может оказаться контрчленом в теории, где имеются скаляры в присоединенном представлении калибровочной группы. Тогда дополнительное поле может быть отождествлено с калибровочной степенью свободы — фазой этих скаляров. В этом случае аномалия оказывается устранимой.) В общем случае функционал приобретает естественный смысл в пространстве на единицу большей размерности, когда дополнительное поле интерпретируется как $(2n+1)$-я компонента A_μ. Этот функционал при этом совпадает с весс-зуминовским членом, который, как уже говорилось, сам возникает в фермионном детерминанте $(2n+1)$-мерной теории. Связь между $(2n+1)$-мерным весс-зуминовским членом и $2n$-мерной функцией $\mathcal{A}_u\,(A)$ естественно назвать связью между аномалиями или их иерархией. Более того, иерархия аномалий продолжается и дальше: вверх, в $2n+2$ и вниз, в $2n-1$ и т. д. измерения.

Сделаем еще одно замечание по поводу киральных аномалий в вейлевских теориях. Может возникнуть вопрос, почему разрешается использовать паули-вилларсовскую регуляризацию при обсуждении этих аномалий. На ум может прийти пример аксиальной аномалии (см. (1.22)), где выбором регуляризации можно было добиться сохранения аксиального тока за счет несохранения векторного. В вейлевской теории следует стремиться к сохранению киральных токов, а сохранение векторных никому не нужно. Дело, однако, в том, что добиться сохранения киральных токов и одновременно бозе-симметрии между ними невозможно. В этих условиях сохранение векторного тока является совершенно безобидным дополнительным условием, никак не сказывающимся на существовании аномалии. Мы поясним это утверждение на уже знакомом примере двумерной теории поля. Из формулы (1.20) легко получить, в дополнение к (1.22), равенство

$$q_\alpha J^L_\alpha = q_\alpha\,(\delta_{\alpha\mu} - i\varepsilon_{\alpha\mu})\,\frac{1}{\pi}\left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} + c g_{\mu\nu}\right)(\delta_{\beta\nu} - i\varepsilon_{\beta\nu})\,A_\beta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,(q_\alpha A_\alpha + i\varepsilon_{\alpha\beta} q_\alpha A_\beta). \qquad (1.26)$$

Как и было обещано, зависимость от произвольного параметра c выпадает из выражения для вейлевской аномалии.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. Раздел 2 посвящен вычислению аномалий. В разделе 2.1 мы на диаграммах в двумерной теории поля демонстрируем различие между дираковской и вейлевской аномалиями. В отличие от уже приводившихся во введении вычислений, в этом разделе обсуждаются также неабелевы вклады в аномалии. В разделе 2.2 описано вычисление аномалий методом Вергелеса — Фуджикавы. Этот метод является частным случаем широко используемого теперь операторного формализма (см., например, [54]), чрезвычайно упрощающего вычисление диаграмм в калибровочных теориях. Метод Вергелеса — Фуджикавы сразу указывает связь между несохранением аксиального тока и индексом оператора Дирака $\operatorname{ind}(i\hat{D}) = \operatorname{Sp}\gamma^5$ и позволяет найти в самом общем виде выражения для дираковских аномалий. Что касается вейлевской аномалии, то этим методом можно вычислить ее в каждом отдельном случае, однако получить ответ в общем виде (во всех размерностях) затруднительно. Мы описываем общие принципы вычислений методом Вергелеса — Фуджикавы и надеемся, что при необходимости читатель сможет без труда использовать его для вычисления любых аномалий. В разделе 2.3 исследуется связь между дираковскими аномалиями в четномерных теориях и весс-зуминовскими членами в нечетномерных калибровочных теориях. К сожалению, привести к простому виду аналогичную связь между весс-зуминовскими членами и вейлевскими аномалиями пока не удается. (Один поучительный способ предложен Альваресом-Гомé и Гинспаргом [23]; к сожалению, он слишком длинен для включения в обзор, а в кратком изложении требует привлечения новых методов.) Поэтому в кратком разделе 2.4 обсуждается иной способ вывода вейлевской аномалии: на основе соотношений согласованности Весса —Зумино. Наконец, в разделе 2.5 приведено вычисление аксиальной аномалии по мнимой части в четырехмерной дираковской теории. Вместе с уже обсуждавшимся в разделе 1.2 примером такого же вычисления при $D = 2$ это дает полное представление о связи аномалий с безмассовыми возбуждениями и вообще о том, как устроена аномалия на уровне токов, а не их дивергенций.

Следующий раздел 3 посвящен иерархии аномалий. Здесь уже не упоминаются фермионы и речь идет только о бозонных выражениях, точнее, о дифференциальных формах, стоящих в правых частях аномалий. Дифференциальные формы здесь — просто лаконичный язык для записи сверток полей A_μ с ε-символами. Связь между правыми частями аномалий, конечно, такая же, как и между соответствующими фермионными детерминантами (разделы 2.3, 2.4). По-видимому, наибольший вклад в обсуждение соотношений между правыми частями аномалий в физической литературе сделал Б. Зумино [21]. Соответствующие идеи восходят к работам А. Н. Габриэлова, И. М. Гельфанда и М. В. Лосика [55], следует также отметить значение работ С. П. Новикова и др. [28], Л. Д. Фаддеева и др. [33], Э. Виттена и Л. А. Альвареса-Гоме [35]. В разделе 3.1 мы коротко напомним определение дифференциальных форм и операции внешнего дифференцирования d. Раздел 1.2 посвящен общей структуре «обратной» операции d^{-1}. Для иерархии аномалий более важна модификация этой операции, применимая к ограниченному множеству дифференциальных форм, которую мы назовем k_Z. В литературе об аномалиях она была, по-видимому, впервые использована Зумино [21]. У нас эта операция вводится в разделе 3.3. Сама иерархия аномалий описывается в разделе 3.4. Там получен общий ответ для киральной вейлевской аномалии.

В разделе 4 мы снова возвращаемся к вычислению фермионного детерминанта в нечетномерных калибровочных теориях. Возникновение весс-зуминовского члена рассматривается теперь как явление, аналогичное глобальной SU(2)-аномалии Виттена. Смысл этой аналогии раскрывается в коротком введении к разделу. Далее, в разделе 4.1 рассматривается глобальная аномалия, а в разделе 4.2 — происхождение весс-зуминовского члена. Здесь мы отметим только, что глобальные аномалии существуют во многих теориях, в том числе гравитационных (см. [35,47]); их общая классификация пока не производилась.

Ограниченный объем обзора не позволил включить в него приложения аномалий. На данный момент можно различать три сорта таких приложений. Во-первых, это вопрос о сокращении внутренних аномалий или их устранении локальными контрчленами в конкретных физических теориях. Во-вторых, это упоминавшееся в разделе 1.3 извлечение из аномалий «динамической» информации с помощью условий т'Хоофта [6]. В-третьих, это вычисление аномальных вкладов в фермионные детерминанты (т. е. аномальных вкладов в $e^{-S_{\text{eff}}}$). Последняя задача особенно полезна в тех случаях, когда детерминант не имеет неаномальной части. Это чаще всего случается в двух измерениях, но может происходить и при $D = 4$, например, при изучении киральных лагранжианов, описывающих взаимодействие псевдоскалярных голдстоунов.

Заканчивая этот раздел 1 (вводную часть), автор благодарит Ю. А. Симонова, по чьей инициативе в ИТЭФ были прочитаны лекции об аномалиях и написана основная часть этого обзора, и Л. Б. Окуня, предложившего опубликовать его сокращенную версию в УФН. Автор признателен также В. М. Беляеву, А. И. Вайнштейну, И. М. Гельфанду, Р. Джэкиву, А. Д. Долгову, В. И. Захарову, Б. Л. Иоффе, Р. Э. Каллош, Д. Р. Лебедеву, В. А. Новикову, М. А. Ольшанецкому, А. М. Переломову, А. В. Смилге, Л. Д. Фаддееву, С. Л. Шаташвили, А. С. Шварцу, М. А. Шифману, М. И. Эйдесу за обсуждение различных вопросов, затронутых в тексте, и особенно М. Б. Волошину, В. Г. Книжнику, Я. И. Когану и А. А. Рослому, которые оказали влияние практически на все содержание настоящего обзора.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ

2.1. Вычисление аномалий по диаграммам в двумерных теориях

Самым простым способом вывода аномалий в токах, сохраняющихся на классическом уровне, является вычисление диаграмм для (ковариантных) дивергенций токов с использованием паули-вилларсовской регуляризации. Представляем ток в виде $J = j - j_{\text{reg}}$, $\mathrm{D}j = 0$, $\mathrm{D}J = -\mathrm{D}j_{\text{reg}} \sim M_{\text{reg}} \neq 0$, и аномалия с технической точки зрения оказывается связанной с вкладом регуляторов, выживающим в пределе $M_{\text{reg}} \to \infty$. Мы часто будем пользоваться этим приемом. Большая буква M в этом разделе обозначает регуляторную массу $M = M_{\text{reg}}$.

При регуляризации по Паули — Вилларсу векторные токи всегда (ковариантно) сохраняются:

$$J_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu t^a \psi - \bar{\Psi}\gamma_\mu t^a \Psi,$$

$$(\mathrm{D}_\mu J_\mu)^a = (\partial_\mu J_\mu + [A_\mu J_\mu])^a = (\mathrm{D}_\mu j_\mu)^a - ((\mathrm{D}_\mu j)_\mu^{\text{reg}})^a = 0 - 0 = 0.$$

Напротив, дивергенция аксиального тока $J_\mu^{a5} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5 t^a\psi - \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma^5 t^a\Psi$ отлична от нуля, $(\mathrm{D}_\mu J_\gamma^5)^a = 2im\bar{\psi}\gamma^5 t^a\psi - 2iM\bar{\Psi}\gamma^5 t^a\Psi \underset{m\to 0}{\to} -2iM\bar{\Psi}\gamma^5 t^a\Psi$. На диаграммном языке эти утверждения получаются следующим способом. Для простоты мы обсудим абелеву теорию, в которой ковариантная производная совпадает с обычной. Тогда выражение для любой диаграммы (рис. 6), дающей вклад в дивергенцию векторного тока, содержит комбинацию

$$\frac{1}{\hat{p} + \hat{q} - im}\,\hat{q}\,\frac{1}{\hat{p} - im} = \frac{1}{\hat{p} - im} - \frac{1}{\hat{p} + \hat{q} - im}; \qquad (2.1)$$

здесь $\hat{p}$ — это переменная интегрирования в петле. Посмотрим теперь на конкретный пример рис. 7. Если в диаграмме *б* сдвинуть переменную интегрирования $p \to p + k_1$, то эта диаграмма сократится с диаграммой *в*. Аналогично, после сдвига $p \to p + k_2$ в диаграмме *г* она сокращается с *а*. В случае диаграммы с произвольным числом внешних концов необходимо просуммировать по всем перестановкам внешних импульсов и сделать сдвиги переменной интегрирования на всевозможные их линейные комбинации. Достаточно рассмотреть только однопетлевые диаграммы, поскольку остальные петли прикрепляются фотонными линиями, виртуальность которых никак не сказывается на сокращении диаграмм. Существенно, что мы работаем с регуляризованными токами. Именно это позволяет свободно сдвигать импульсы интегрирования, зато требует явного учета регуляторных вкладов. В случае векторного тока сокращение диаграмм не зависит от массы фермиона, и потому в регуляризации Паули — Вилларса векторные токи всегда (ковариантно) сохраняются. Для векторного тока в (1.1) появляется еще матрица γ^5:

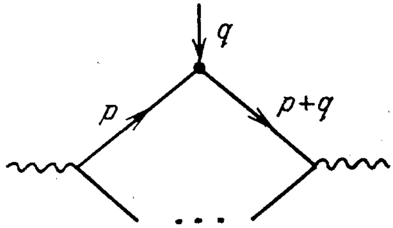

Рис. 6. Дивергенция тока на языке диаграмм

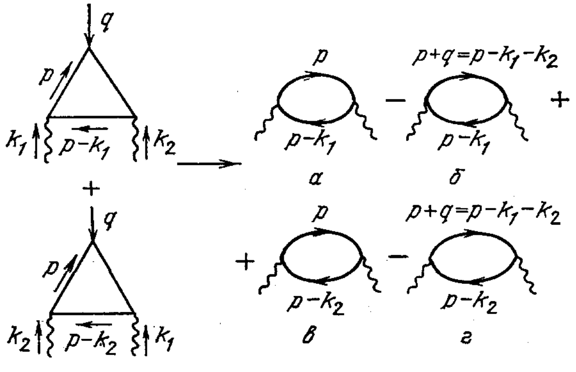

Рис. 7. Пример вычисления дивергенции тока (объяснения см. в тексте)

$$\frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-im}\hat{q}\gamma^5\frac{1}{\hat{p}-im} = -\frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-im}\hat{q}\frac{1}{\hat{p}+im}\gamma^5 =$$

$$= -\left(\frac{1}{\hat{p}+im} - \frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-im}\right)\gamma^5 - \frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-im}2im\frac{1}{\hat{p}+im}\gamma^5 =$$

$$= \frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-im}2im\gamma^5\frac{1}{\hat{p}-im} + \left[\gamma^5\frac{1}{\hat{p}-im} + \frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-im}\gamma^5\right]. \qquad (2.2)$$

Квадратная скобка выпадает из ответа по тем же причинам, что и в ситуации с векторным током, а первый член остается. Это означает, что диаграммы для дивергенции аксиального тока совпадают с диаграммами для $2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$.

Таким образом, для вычисления аксиальной аномалии необходимо найти среднее от $2iM\bar{\Psi}\gamma^5 t^a\Psi$ во внешнем поле. Ответ, разумеется, зависит от характера взаимодействия фермионов с внешним полем и различен в вейлевской и дираковской теориях. Мы продемонстрируем это на простейшем примере двумерных фермионов. При $D = 2$ придется рассмотреть только двуи треугольные диаграммы. Выражение для четыреххвостки имеет вид

$$M\int\frac{d^2p}{(p+M)^4} \sim O\left(\frac{1}{M}\right),$$

т. е. исчезает в пределе $M \to \infty$. Две диаграммы, которые необходимо вычислить, изображены на рис. 8, 9. Напишем выражения для этих диаграмм.

Дираковская теория:

$$2i\frac{\delta^{ab}}{2}\int\frac{\operatorname{Tr} M\gamma^5(\hat{p}+iM)\gamma_\alpha(\hat{p}+\hat{q}+iM)}{[p^2+M^2][(p+q)^2+M^2]}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}=$$

$$=-M^2\delta^{ab}(\operatorname{Tr}\gamma^5\gamma_\alpha\hat{q})\int\frac{(2\pi)^{-2}d^2p}{(p^2+M^2)^2}+O\left(\frac{1}{M}\right)=+\frac{\delta^{ab}}{2\pi}\varepsilon_{\alpha\beta}iq_\beta+O\left(\frac{1}{M}\right).$$

(Все формулы написаны в евклидовом пространстве, поэтому пропагатор фермиона равен $(\hat{p}-iM)^{-1}$, а $\gamma_\alpha\gamma^5 = i\varepsilon_{\alpha\beta}\gamma_\beta$.) Вклад этой диаграммы отвечает члену

$$\frac{1}{2\pi}\varepsilon_{\alpha\beta}\partial_\alpha A^a_\beta=\frac{1}{\pi}\varepsilon_{\alpha\beta}\operatorname{Tr} t^a\partial_\alpha A_\beta \tag{2.3}$$

в дивергенции аксиального тока $(D_\mu J^5_\mu)^a$. Заметим здесь же, что для перехода к абелевой теории надо не просто отбросить индексы a, b, c..., но еще домножить все выражения на 2. Это связано с нормировкой генераторов t, $\operatorname{Sp} t^at^b = \delta^{ab}/2$.

Вейлевская теория. Все, что требуется для получения выражения для диаграммы рис. 7,— это замена γ_α на $\gamma_\alpha(1-\gamma^5)/2$. Напомним еще раз, что регуляризация Паули — Вилларса явно сохраняет векторный ток, и потому аномальная дивергенция левого тока

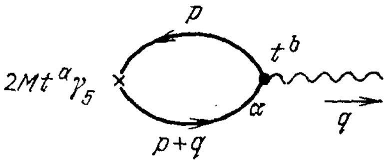

Рис. 8. Дивергенция аксиального тока во внешнем поле, $D = 2$.
Вклад – линейный по внешнему полю

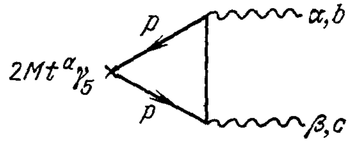

Рис. 9. Дивергенция аксиального тока во внешнем поле, $D = 2$.
Вклад – квадратичный по внешнему полю

$$J^{La}_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1-\gamma^5}{2}t^a\psi$$

в этой регуляризации совпадает (с точностью до знака) с дивергенцией аксиального:

$$-\operatorname{Tr}\gamma^5(\hat{p}+iM)\gamma_\alpha\frac{1-\gamma^5}{2}(\hat{p}+\hat{q}+iM)=$$

$$=-\frac{1}{2}[iM\operatorname{Tr}\gamma^5\gamma_\alpha\hat{q}-\operatorname{Tr}(\hat{p}-iM)\gamma_\alpha(\hat{p}+\hat{q}+iM)],$$

и ответ для всей диаграммы равен

$$-\frac{\delta^{ab}}{4\pi}(\varepsilon_{\alpha\beta}iq_\beta-q_\alpha)=\frac{\delta^{ab}}{4\pi}(\delta_{\alpha\beta}-i\varepsilon_{\alpha\beta})q_\beta. \tag{2.4}$$

Следует обратить внимание на разницу в нормировке вейлевской и дираковской аномалий. В случае $D = 2n$ измерений лидирующая диаграмма содержит в вейлевской теории лишний множитель $-1/(n+1)$. Член без ε в (2.4) не является «истинно аномальным», однако, в двух измерениях, из-за того, что $J^5_\alpha = i\varepsilon_{\alpha\beta}J_\beta$, поле A удовлетворяет соотношению $A_\beta = (\delta_{\alpha\beta}-i\varepsilon_{\alpha\beta})A_\alpha$, так что смысла в отбрасывании этого члена нет. В многомерном случае мы не будем выписывать такие вклады (они характерны тем, что получаются калибровочным преобразованием некоторого локального по полям A выражения, например $u\partial_\mu A_\mu = -\delta_u(1/2)A^2_\mu$.

Перейдем к вычислению трехвосток.

Дираковская теория. Внешние импульсы можно сразу положить равными нулю; кроме этого, ответ для диаграммы оказывается симметричным относительно перестановки внешних линий, и об этом можно специально не заботиться. Выражение для диаграммы имеет вид

$$-2i\frac{f^{abc}}{4}\int\frac{\mathrm{Tr}' M\gamma^5(\hat{p}+iM)\gamma_\alpha(\hat{p}+iM)\gamma_\beta(\hat{p}+iM)}{(p^2+M^2)^3}\frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}=$$

$$=-\frac{f^{abc}}{2}\int\frac{M^4\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\beta-M^2\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5\hat{p}\gamma_\alpha\hat{p}\gamma_\beta-M^2\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5\hat{p}\gamma_\alpha\gamma_\beta\hat{p}-M^2\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5\gamma_\alpha\hat{p}\gamma_\beta\hat{p}}{(p^2+M^2)^3}\frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}.$$

Теперь надо усреднить по направлениям вектора p, т. е. сделать замену $p_\mu p_\nu \to p^2\delta_{\mu\nu}/2$. После этого надо воспользоваться тождествами

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu=(2-D)\gamma_\alpha=0, \tag{2.5}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu=D\delta_{\alpha\beta}+\left(\frac{D}{2}-2\right)\sigma_{\alpha\beta}=+2\gamma_\beta\gamma_\alpha.$$

Тогда получится

$$-\frac{f^{abc}}{2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\beta\int\frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}\frac{M^4+M^2p^2}{(p^2+M^2)^3}=+i\cdot\frac{1}{4\pi}f^{abc}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{2.6}$$

Вейлевская теория. На этот раз надо вычислить выражение

$$-2i\frac{f^{abc}}{4}\int\frac{\mathrm{Tr}\left[M\gamma^5(\hat{p}+iM)\gamma_\alpha\frac{1-\gamma^5}{2}(\hat{p}+iM)\gamma_\beta\frac{1-\gamma^5}{2}(\hat{p}+iM)\right]}{(p^2+M^2)^3}\frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}.$$

Преобразуем сначала центральную структуру под знаком следа: $(1-\gamma^5)\times(\hat{p}+iM)\gamma_\beta(1-\gamma^5)=2(1-\gamma^5)\hat{p}\gamma_\beta$. Пронося $(1-\gamma^5)$ еще дальше налево, получим $\gamma^5(\hat{p}+iM)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)=\gamma^5(\hat{p}+iM)\gamma_\alpha-(\hat{p}-iM)\gamma_\alpha$. В результате исходное выражение пропорционально $[\gamma^5(\hat{p}+iM)\gamma_\alpha-(\hat{p}-iM)\gamma_\alpha]\hat{p}\gamma_\beta\hat{p}(\hat{p}+iM)$. С помощью соотношения (2.5) легко убедиться, что это выражение равно нулю.

Итак, при $D=2$ аномалия в дираковской теории

$$(\mathrm{D}_\mu J^5_\mu)^a=\frac{1}{2\pi}\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A^a_\beta+\frac{i}{2}f^{abc}A^b_\alpha A^c_\beta\right)=\frac{1}{\pi}\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\,t^a\frac{F_{\mu\nu}}{2}, \tag{2.7}$$

а в вейлевской

$$(\mathrm{D}_\mu J^L_\mu)^a=\frac{1}{4\pi}(\varepsilon_{\alpha\beta}\partial_\alpha A^a_\beta+\partial_\alpha A^a_\alpha)=\frac{1}{2\pi}(\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\,t^a\partial_\mu A_\nu+\mathrm{Tr}\,t^a\partial_\mu A_\mu). \tag{2.8}$$

Аналогичным образом можно вычислить диаграммы для аномалии в пространствах любых размерностей, но это чрезвычайно утомительно и вряд ли целесообразно (хотя четырехмерные аномалии были впервые получены именно таким образом). Ниже мы разберем метод прямого вычисления аномалий. Он был предложен Вергелесом (но не опубликован; см. [16]), а затем в серии статей развит Фуджикавой [17]. Аналогичный прием использовался также Романовым и Шварцем [15]. Большое число работ посвящено применению этого метода к вычислению неабелевых вейлевских [17-19] и гравитационных аномалий.

2.2. Вычисление аномалий методом Вергелеса — Фуджикавы

Первоначальная идея Вергелеса состояла в том, что аномалию можно интерпретировать как результат неинвариантности меры в континуальном интеграле. Действительно, если в выражении

$$[\int \mathrm{D}\bar{\psi}\mathrm{D}\psi\exp\left(i\int\bar{\psi}\hat{\mathrm{D}}\psi\,\mathrm{d}^{2n}x\right)]_{reg}$$

сделать замену переменных

$$\psi \to e^{i\varepsilon\gamma^5}\psi, \tag{2.9}$$

то под интегралом появятся, во-первых, $\exp\,(i\mathrm{Tr}\;\varepsilon \mathrm{D}_\mu J^5_\mu)$, а во-вторых, якобиан $Y^{(\varepsilon)}$ преобразования (2.9). Если потребовать, чтобы интеграл не менялся при замене переменных интегрирования, то получится соотношение

$$\mathrm{D}_\mu J^5_\mu = \frac{\delta Y^{(\varepsilon)}}{\delta\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}, \tag{2.10}$$

т. е. аномальная дивергенция тока однозначно связана с нетривиальностью якобиана $Y^{(\varepsilon)}$. «Наивно» $Y^{(\varepsilon)} = 1$, но, строго говоря, необходимо сначала регуляризовать якобиан:

$$(\ln Y^{(\varepsilon)})_{\mathrm{reg}} = (\ln\det e^{2i\varepsilon\gamma^5})_{\mathrm{reg}} = (\mathrm{Sp}\;2i\varepsilon\gamma^5)_{\mathrm{reg}} = \lim_{M\to\infty}\mathrm{Sp}\,(2i\varepsilon\gamma^5)\,e^{\hat{\mathrm{D}}^2/M^2};$$

здесь использована регуляризация по «собственному времени». Двойка связана с изменением обоих полей ψ и $\bar\psi$ при преобразовании (2.9). Займемся теперь вычислением регуляризованного детерминанта. Возьмем сначала γ-матричный след. Для этого заметим, что

$$\hat{\mathrm{D}}^2 = \mathrm{D}_\mu \mathrm{D}_\nu\,(\delta_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}) = \mathrm{D}^2 + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \qquad \left(\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\right).$$

Чтобы след с матрицей $\gamma^5 \sim \gamma_0\gamma_1\,\ldots\,\gamma_{2n-1}$ в $2n$ измерениях был отличен от нуля, необходимо взять, как минимум, n-й член разложения экспоненты в ряд Маклорена:

$$2\,\mathrm{Sp}\,i\varepsilon\gamma^5\exp\left(\mathrm{D}^2 + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)M^2 =$$

$$= \ldots + \frac{2}{n!}\,\mathrm{Sp}\left[i\varepsilon\gamma^5\left(\frac{F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}{2M^2}\right)^n\right]e^{\mathrm{D}^2/M^2} + O\left(\frac{1}{M^{2n+2}}\right). \tag{2.11}$$

Оставшийся функциональный след в импульсном пространстве включает в себя интегрирование по $\mathrm{d}^{2n}p/(2\pi)^{2n}$:

$$\int\frac{\mathrm{d}^{2n}p}{(2\pi)^{2n}}\,e^{-p^2/M^2} = \frac{M^{2n}\Omega_{2n-1}\,(n-1)!}{2\,(2\pi)^{2n}}.$$

Появившееся в числителе M^{2n} компенсирует $1/M^{2n}$ в (2.11), но этого недостаточно, чтобы сделать конечными при $M\to\infty$ вклады $O\,(1/M^{2n+2})$, возникающие из высших членов разложения экспоненты. Кроме этого, нужно знать площадь единичной сферы S^{2n-1}: $\Omega_{2n-1} = (2\pi)^n/2^{n-1}\,(n-1)!$ (для S^{2n} $\Omega_{2n} = 2\,(2\pi)^n/(2n-1)!!$). В результате получается

$$(\mathrm{D}_\mu J^5_\mu)^a = \frac{\delta Y^{(\varepsilon)}}{\delta\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{2^n\Omega_{2n-1}}{n\,(2\pi)^{2n}}\,\mathrm{Tr}\,t^a\,\frac{\varepsilon_{\mu_1\nu_1\ldots\mu_n\nu_n}F_{\mu_1\nu_1}\,\ldots\,F_{\mu_n\nu_n}}{2^n} =$$

$$= \frac{2^n\Omega_{2n-1}}{n\,(2\pi)^{2n}}\,\mathrm{Tr}\,t^aF^n = \frac{2}{(2\pi)^n\,n!}\,\mathrm{Sp}\,t^aF^n. \tag{2.12}$$

Последние два равенства записаны в терминах дифференциальных форм (см. ниже, раздел 3.1), причем $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu A_\nu]$, а форма $F = \mathrm{d}A + A^2$. С этим связан дополнительный множитель 2^n. Еще один фактор 2^n связан с тем, что размерность γ-матриц в $2n$-мерном пространстве равна $2^n \times 2^n$.

В этом месте имеет смысл сделать два замечания.

а) Пользоваться при регуляризации именно экспонентой не обязательно. Можно написать произвольную, убывающую на бесконечности быстрее, чем полином, функцию $f\,(-\hat{\mathrm{D}}^2/M^2)$. В ответ входит интеграл от n-й производной этой функции:

$$\frac{1}{n!}\int f^{(n)}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)\frac{\mathrm{d}^{2n}p}{M^{2n}} = \frac{1}{n!}\,\frac{\Omega_{2n-1}}{2}\int f^{(n)}\,(x)\,x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Omega_{2n-1}}{2n}\,f\,(0).$$

Поэтому все, что требуется от функции f,— это достаточно быстрое падение ее производных на бесконечности и условие $f\ (0) = 1$ — обращение в единицу при бесконечной регуляторной массе, т. е. при снятии регуляризации. На самом деле достаточно, чтобы $f^{(n)}\ (x) \leqslant \mathrm{const}/(1+x)^{n+\eta}$ при $x \to \infty$ $(\eta > 0)$.

б) Вывод формулы (2.12) оказался настолько простым из-за того, что существен единственный член разложения регуляризующей функции. Это в свою очередь объясняется отсутствием явной зависимости от импульсов у коэффициентов при матрицах $\sigma_{\mu\nu}$; здесь они оказались равными *c*-числам $(1/2)\ F_{\mu\nu}$. В вейлевской теории это уже не так: $\sigma_{\mu\nu}$ домножаются не только на *c*-числовые выражения, но, скажем, и на *q*-число $iA_\mu\partial_\nu \to A_\mu p_\nu$. Появление здесь импульса позволяет следующим членам разложения регуляризующей функции выжить при стремлении M к бесконечности, что чрезвычайно усложняет вычисления. Другими словами, если в применении к дираковским аномалиям метод Вергелеса — Фуджикавы обладает несомненным преимуществом перед простым вычислением диаграмм, то в случае вейлевских аномалий это преимущество менее очевидно. Мы разберем в этом разделе 2.2 два примера: вычисление двумерной вейлевской аномалии и вычисление коэффициента перед лидирующим членом в выражении для вейлевской аномалии в произвольном числе измерений. (Под лидирующим членом мы понимаем структуру $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{2n}} \mathrm{Tr}\ t^a\partial_{\alpha_1}A_{\alpha_2}\ \ldots\ \partial_{\alpha_{2n-1}}A_{\alpha_{2n}}$, не содержащую матричных коммутаторов.) Если первый из этих примеров позволит читателю оценить сложность метода в применении к вейлевским аномалиям, то второй пример преследует более «практическую» цель. Дело в том, что вычисление вейлевской аномалии в рамках иерархии аномалий в разделах 2.4 и 3 не позволяет определить общую нормировку аномалии. Ее мы найдем в нашем втором примере.

2.2.1. *Двумерная вейлевская аномалия*

Различие между дираковской и вейлевской теориями связано с заменой оператора $\hat{\mathrm{D}} = \hat{\partial} + \hat{A}$ в лагранжиане на $\widetilde{\mathrm{D}} \equiv \hat{\partial} + [\hat{A}\ (1-\gamma^5)/2]$. В соответствии с этим при вычислении вейлевской аномалии по методу Вергелеса — Фуджикавы возникает выражение

$$(\mathrm{D}_\mu J^{\mathrm{L}}_\mu)^a = 2\left[\mathrm{D}_\mu\left(\psi\gamma_\mu\,\frac{1-\gamma^5}{2}\,t\psi\right)\right]^a = 2\,\frac{\delta Y^{(\varepsilon)}}{\delta\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = $$

$$= 2\,\frac{\delta}{\delta\varepsilon}\,\mathrm{Sp}\,[i\varepsilon\,(1-\gamma^5)\,]_{\mathrm{reg}}\bigg|_{\varepsilon=0}. \qquad (2.13)$$

Используя ту же регуляризацию, что и в дираковском случае, получим

$$(\mathrm{D}_\mu J^{\mathrm{L}}_\mu)^a = 2\lim_{M\to\infty}\mathrm{Sp}\,t^a\,(1-\gamma^5)\,e^{\widetilde{\mathrm{D}}^2/M^2}. \qquad (2.14)$$

Займемся теперь оператором $\widetilde{\mathrm{D}}^2$:

$$\widetilde{\mathrm{D}}^2 \equiv \frac{1-\gamma^5}{2}\,\hat{\partial}\hat{\mathrm{D}} + \frac{1+\gamma^5}{2}\,\hat{\mathrm{D}}\hat{\partial},$$

где $\hat{\mathrm{D}} = \hat{\partial} + \hat{A}$ — обычный оператор Дирака. Поэтому след, который необходимо вычислить,— это

$$2\,\mathrm{Sp}\,t^a\,(1-\gamma^5)\,e^{\hat{\partial}\hat{\mathrm{D}}/M^2}.$$

Мы уже говорили, что существенным является появление в $\hat{\partial}\hat{\mathrm{D}} = \partial\mathrm{D} + [(\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial_\nu]\,\sigma_{\mu\nu}$ $(\partial\mathrm{D} = \partial_\mu\mathrm{D}_\mu = \partial^2 + (\partial A) + A\partial)$ структуры $A_\mu\partial_\mu - \sigma_{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu$. Мы сейчас увидим, к каким последствиям приводит такая модификация.

Прежде всего будем вычислять только «истинно аномальную» часть следа, содержащую γ^5-матрицу:

$$2\,\mathrm{Sp}\,t^a\,(1-\gamma^5)\,e^{\hat{\partial}\,\hat{\mathrm{D}}/M^2} \to -2\,\mathrm{Sp}\,t^a\gamma^5 e^{\hat{\partial}\,\hat{\mathrm{D}}/M^2}. \tag{2.15}$$

Как и раньше, γ-матричный след с γ^5 будет ненулевым только в том случае, когда из экспоненты спустится не менее n матриц $\sigma_{\mu\nu}$. Однако след с бо́льшим числом $\sigma_{\mu\nu}$ также отличен от нуля. В дираковском случае высшие члены разложения исчезали в пределе $M \to \infty$. Это происходило оттого, что в экспоненте стояло выражение $-F\sigma/2M^2$ и интегралы

$$\int \mathrm{d}^{2n}pe^{-p^2/M^2}\left(-\frac{F\sigma/2}{M^2}\right)^k \sim O\left(\frac{1}{M^{2(k-n)}}\right).$$

В вейлевском случае в экспоненте есть члены, линейные по p:

$$-\frac{i\,(Ap-\sigma Ap)+(\partial A+\sigma\,\partial A)}{M^2}.$$

Теперь k-й член разложения ведет себя как

$$\int \mathrm{d}^{2n}pe^{-p^2/M^2}\left[-\frac{i\,(Ap-\sigma Ap)+(\partial A+\sigma\,\partial A)}{M^2}\right]^k \sim$$

$$\sim O\left(\int \mathrm{d}^{2n}pe^{-p^2/M^2}\,\frac{p^k}{M^{2k}}\right) \sim O\left(\frac{1}{M^{k-2n}}\right),$$

и поэтому в пределе $M \to \infty$ может выжить целых n членов разложения: от n-го до $2n$-го. При конкретном вычислении придется следить еще за двумя вещами: аккуратной расстановкой операторов дифференцирования (они не коммутируют с полями A) и γ-матричными следами. В частности, структура этих следов такова, что после усреднения по направлениям вектора p члены разложения от n-го до $(2n-1)$-го приводят к интегралам $\sim O\,(1)$, а вклад $2n$-го члена равен нулю. Что касается упорядочения производных, то мы будем сначала раскладывать в ряд всю экспоненту, включая старшее слагаемое ∂^2/M^2, затем проносить все операторы ∂ направо и после этого снова собирать факторы e^{∂^2/M^2}.

Итак, вычисление для $D=2$:

$$2\,\mathrm{Sp}\,t^a\gamma^5 e^{\hat{\partial}\,\hat{\mathrm{D}}/M^2} = 2\,\mathrm{Sp}\,t^a\gamma^5\left[\frac{\hat{\partial}\,\hat{\mathrm{D}}}{M^2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\hat{\partial}\,\hat{\mathrm{D}}}{M^2}\right)^2+\ldots\right]=$$

$$=2\,\mathrm{Sp}\,t^a\gamma^5\left\{\frac{\sigma_{\mu\nu}\,(\partial_\mu A_\nu)}{M^2}+\frac{1}{2!M^4}\,[\underline{\partial^2\sigma_{\mu\nu}\,((\partial_\mu A_\nu)-A_\mu\partial_\nu)+\sigma_{\mu\nu}\,((\partial_\mu A_\nu)-A_\mu\partial_\nu)\,\partial^2}+\right.$$

$$+\sigma_{\mu\nu}\,((\partial_\mu A_\nu)-A_\mu\partial_\nu)\,((\partial_\alpha A_\alpha)+A_\alpha\partial_\alpha)+((\partial_\alpha A_\alpha)+A_\alpha\partial_\alpha)\,\sigma_{\mu\nu}\,((\partial_\mu A_\nu)-A_\mu\partial_\nu)+$$

$$\left.+\sigma_{\mu\nu}\,((\partial_\mu A_\nu)-A_\mu\partial_\nu)\,\sigma_{\alpha\beta}\,((\partial_\alpha A_\beta)-A_\alpha\partial_\beta)\,]+\ldots\right\}. \tag{2.16}$$

Начнем с подчеркнутого выражения. Преобразуем его к виду

$$\frac{1}{2!M^4}\,\{2\sigma_{\mu\nu}\,[(\partial_\mu A_\nu)-A_\mu\partial_\nu]\,\partial^2+[\partial^2;\ \sigma_{\mu\nu}\,((\partial_\mu A_\nu)-A_\mu\partial_\nu)]\}. \tag{2.17}$$

Точно так же в третьем члене разложения экспоненты встретится комбинация

$$\frac{1}{3!M^6}\,\{3\sigma_{\mu\nu}\,[(\partial_\mu A_\nu)-A_\mu\partial_\nu]\,\partial^4+\text{коммутаторные члены}\} \tag{2.18}$$

и т. д. Все эти структуры суммируются в выражение

$$\left\{\frac{\sigma_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu}{M^2}\,e^{\partial^2/M^2}+\text{коммутаторные члены}\right\}. \tag{2.19}$$

(Слагаемые $\sigma_{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu\partial^2$ и т. п. опущены, они исчезают при усреднении по направлениям вектора p: $\sigma_{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu\partial^2 \to -i\sigma_{\mu\nu}A_\mu p_\nu p^2 \to 0$.) Забудем на минуту о коммутаторных членах и вернемся к формуле (2.16). Первый член разложения, часть подчеркнутого выражения и пр. представляются в виде (2.19):

$$2\,\mathrm{Sp}\,\gamma^5 t^a \frac{\sigma_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu}{M^2}\, e^{\partial^2/M^2},$$

что в импульсном представлении выглядит так:

$$2\int \frac{\mathrm{d}^2 p}{(2\pi)^2}\, e^{-p^2/M^2}\,\mathrm{Tr}\, t^a\gamma^5 \frac{\sigma_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu}{M^2} = \frac{1}{\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\, t^a\partial_\mu A_\nu. \qquad (2.20)$$

Теперь коммутаторные члены в (2.17), (2.18). Они также приводят к конечному вкладу в аномалию. Но для этого необходимо пронести максимальное число операторов ∂ направо. После этого

$$\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{M^2} \to -\frac{p_\alpha p_\beta}{M^2} \to -\frac{1}{2M^2}\, p^2\delta_{\alpha\beta},$$

и после интегрирования по $\mathrm{d}^2 p\,/(2\pi)^2$ с весом e^{-p^2/M^2} получится конечный при $M \to \infty$ ответ

$$-\int \frac{p^2\delta_{\alpha\beta}}{2M^4}\, e^{-p^2/M^2}\, \frac{\mathrm{d}^2 p}{(2\pi)^2} = -\frac{1}{8\pi}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

Таким путем из $[\partial^2;\ \sigma_{\mu\nu}\,((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial_\nu)]$ в (2.17) получим

$$2\,\frac{1}{2!M^4}\,\mathrm{Sp}\,\gamma^5 t^a\,(-2\sigma_{\mu\nu}\,(\partial_\alpha A_\mu)\,\partial_\nu\partial_\alpha) \to$$

$$\to -4\varepsilon_{\mu\nu}\int \frac{\mathrm{d}^2 p}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Tr}\, t^a\partial_\mu A_\nu\cdot\frac{1}{2}\, p^2\,\frac{e^{-p^2/M^2}}{M^4} = -\frac{1}{2\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\, t^a\partial_\mu A_\nu. \qquad (2.21)$$

Коммутаторные члены в (2.18) и в следующих членах разложения приводят только к появлению множителей e^{∂^2/M^2} у выражений, выписанных явно в формуле (2.16), а все остальные вклады исчезают в пределе $M \to \infty$. Множители e^{∂^2/M^2} уже учтены в наших вычислениях. Таким образом, мы получили два вклада в двумерную вейлевскую аномалию (2.20) и (2.21):

$$(\mathrm{D}_\mu J^{\mathrm{L}}_\mu)^a = \frac{1}{\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\, t^a\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\, t^a\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\, t^a\partial_\mu A_\nu. \qquad (2.22)$$

В результате нормировка правой части отличается от дираковского случая. Ниже мы увидим, что в $2n$ измерениях нормировка отличается в $n+1$ раз.

Однако мы еще не закончили вычисление двумерной аномалии. Зачем нужны остальные (неподчеркнутые) слагаемые в (2.16)! Как уже говорилось, в пределе $M \to \infty$ существенны только те слагаемые, в которых производные проносятся через поля A, не действуя на них. В оставшейся части (2.16) стоит несколько членов такого вида:

$$-\gamma^5\sigma_{\mu\nu}\,(A_\mu\partial_\nu A_\alpha\partial_\alpha + A_\alpha\partial_\alpha A_\mu\partial_\nu) + \gamma^5\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta}A_\mu\partial_\nu A_\alpha\partial_\beta \to$$

$$\to -\gamma^5\sigma_{\mu\nu}\,(A_\mu A_\alpha\partial_\nu\partial_\alpha + A_\alpha A_\mu\partial_\alpha\partial_\nu) + \gamma^5\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta}A_\mu A_\alpha\partial_\nu\partial_\beta.$$

Вклады их в аномалию взаимно сокращаются:

$$\mathrm{Tr}\, t^a\,[-\gamma^5\sigma_{\mu\nu}\,(A_\mu A_\nu + A_\nu A_\mu) + \gamma^5\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\alpha\nu}\, A_\mu A_\alpha] =$$

$$= 2\mathrm{Tr}\, t^a\,[-\varepsilon_{\mu\nu}\,(A_\mu A_\nu + A_\nu A_\mu) + 0] = 0.$$

В результате структуры типа $\varepsilon_{\mu\nu}A_\mu A_\nu$ в двумерной вейлевской аномалии отсутствуют, и (2.22) является полным ответом. Тем не менее в высших измерениях вклады, имеющие аналогичное происхождение, выживают и дают вклад в вейлевскую аномалию. Всегда сокращаются только структуры, составленные из одних полей A, без производных ∂A.

Последнее утверждение очень легко понять. В самом деле, члены без производных получаются при замене всех операторов дифференцирования в $\hat{\partial}\hat{\mathrm{D}}$ на импульсы: $\hat{\partial}\hat{\mathrm{D}} \rightarrow -p^2 + iA_\alpha p_\alpha + i\sigma_{\alpha\beta}A_\beta p_\alpha$. В $2n$ измерениях при этом существен $2n$-й член разложения экспоненты в ряд Маклорена:

$$\sim \int \frac{\mathrm{d}^{2n}p}{(2\pi)^{2n}}\, e^{-p^2/M^2}\, \mathrm{Tr}\, \gamma^5 t^a\, \frac{(A_\alpha p_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}A_\beta p_\alpha)^{2n}}{M^{4n}} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^{2n}p}{(2\pi)^{2n}}\, \frac{e^{-p^2/M^2}}{M^{4n}}\, \mathrm{Tr}\, t^a \hat{p}\gamma_{\beta_1} \ldots \hat{p}\gamma_{\beta_{2n}} A_{\beta_1} \ldots A_{\beta_{2n}};$$

γ-матричный след пропорционален

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^5 \hat{p}\gamma_{\beta_1} \ldots \hat{p}\gamma_{\beta_{2n}} \sim \varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_{2n}}\, \mathrm{Tr}\, \hat{p}^{2n} - 2n\varepsilon_{\alpha\beta_2\ldots\beta_{2n}} p_\alpha\, \mathrm{Tr}\, \hat{p}^{2n-1}\gamma_{\beta_1} =$$

$$= 2^n\, (p^{2n}\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_{2n}} - 2n\varepsilon_{\alpha\beta_2\ldots\beta_{2n}} p_\alpha p^{2n-2} p_{\beta_1}),$$

и после усреднения по направлениям вектора p, $p_\alpha p_\beta \rightarrow (1/2n)\, p^2\delta_{\alpha\beta}$, эта разность обращается в нуль. Отсутствие членов $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{2n}}\, \mathrm{Tr}\, A_{\alpha_1} \ldots A_{\alpha_{2n}}$ в выражении для вейлевской аномалии весьма существенно: оно служит указанием на то, что это выражение является «полной производной» и к нему применима операция k_z (см. раздел 3.3).

2.2.2. *Старший член в выражении для вейлевской аномалии*

Теперь мы покажем, каким образом член

$$\frac{1}{n!}\, \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{2n}}\, \mathrm{Tr}\, t^a \partial_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_{2n-1}} A_{\alpha_{2n}},$$

возникающий в выражении для дираковской аномалии, заменяется на

$$\frac{1}{(n+1)!}\, \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{2n}}\, \mathrm{Tr}\, t^a \partial_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_{2n-1}} A_{\alpha_{2n}}$$

в случае вейлевской. Выше уже продемонстрировано появление 1/2 в двух измерениях ($n = D/2 = 1$). Нормировка остающихся неабелевых слагаемых ($\sim \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2n}}\, \mathrm{Tr}\, t^a A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \partial_{\alpha_3} A_{\alpha_4} \ldots \partial_{\alpha_{2n-1}} A_{\alpha_{2n}}$ и т. д.) при $n \neq 1$ в этом разделе обсуждаться не будет.

Все существенные моменты вычисления мы уже разобрали в предыдущем примере. Теперь нам потребуется их несколько формализовать. Разница между дираковской и вейлевской аномалиями в том, что $\hat{\mathrm{D}}^2 = \mathrm{D}^2 + (1/2)\, F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$ в первом случае заменяется на $\hat{\partial}\hat{\mathrm{D}} = \partial^2 + (\partial A) + A\partial + \sigma_{\mu\nu} \times ((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu \partial_\nu)$ во втором. Поскольку мы договорились рассматривать лишь старший абелев член в выражении для аномалии, то вместо $F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/2$ можно написать $\sigma_{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu)$. После этого различие между двумя аномалиями связано с наличием «свободных» производных в вейлевском случае. Удобно работать с этими производными, написав $\partial_\mu + ip_\mu$ вместо ∂_μ. По вектору p_μ производится усреднение, а ∂_μ, пронесенные через все A направо, при таком способе действий полагаются равными нулю. Тогда

$$\hat{\partial}\hat{\mathrm{D}} + p^2 \rightarrow (2ip\partial + \partial^2 + (\partial A) + A_\alpha \partial_\alpha + iA_\alpha p_\alpha) +$$
$$+ \sigma_{\mu\nu}\, ((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu \partial_\nu + ip_\mu A_\nu). \qquad (2.23)$$

При выводе вейлевской аномалии этот оператор возводится в k-ю степень, делится на $M^{2k}k!$ и интегрируется по $\mathrm{d}^{2n}p$ с весом $\exp\,(-p^2/M^2)$. Чтобы след с γ^5-матрицей был ненулевым, степень k должна быть не меньше n-й. Чтобы ответ не обращался в нуль при $M \rightarrow \infty$, для $k > n$ должно «работать» ровно $2\,(k - n)$ импульсов p в $[(2ip_\mu\partial_\mu + \partial^2 + (\partial A) + A_\mu\partial_\mu + iA_\mu p_\mu) + \sigma_{\mu\nu}\, ((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial_\nu + ip_\mu A_\nu)]$. Поскольку мы следим за вкладом $\sim (\mathrm{d}A)^n$, а с каждой матрицей $\sigma_{\mu\nu}$ в (2.23) обязательно связано поле A, то нужно учесть лишь те члены, которые содержат $\sigma_{\mu\nu}\, ((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial_\nu + ip_\mu A_\nu)$ ровно n раз.

Теперь вспомним, что после взятия γ-матричного следа $\sigma_{\mu\nu}$ превратятся в ε-символ. Из-за этого $i\sigma_{\mu\nu}p_\mu A_\nu$ можно брать не более одного раза, иначе свертка импульсов p с ε-символом даст нуль. Следовательно, оставшиеся $k-n$ сомножителей без $\sigma_{\mu\nu}$-матриц должны содержать не менее $2(k-n)-1$ импульсов p. С другой стороны, каждый из этих сомножителей содержит p не более чем в первой степени. Из $2(k-n)-1 \leqslant k-n$ находим $k=n$ или $k=n+1$. Другими словами, вклад $\sim(\partial A)^n$ в вейлевскую аномалию получается в методе Вергелеса — Фуджикавы всего лишь из двух членов разложения экспоненты:

$$\frac{1}{n!}\operatorname{Tr} 2\gamma^5 t^a (\sigma_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu)^n \int \frac{\mathrm{d}^{2n}p}{(2\pi)^{2n}} \frac{e^{-p^2/M^2}}{M^{2n}} +$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\operatorname{Tr} 2\gamma^5 t^a \int [2ip_\mu\partial_\mu + \sigma_{\mu\nu}((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial_\nu + ip_\mu A_\nu)] \frac{\mathrm{d}^{2n}p}{(2\pi)^{2n}} \frac{e^{-p^2/M^2}}{M^{2n+2}}.$$

В дираковском случае есть только первый из этих двух членов, равный $[2/(2\pi)^n n!] \operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d} A^n$. Во втором члене существенны, как уже говорилось, только два сомножителя с p, остальные $n-1$ сомножителей p не содержат. После усреднения по направлениям p $2ip_\alpha ip_\beta \to -2\delta_{\alpha\beta}p^2/2n$, и интеграл по $\mathrm{d}^{2n}p$ с учетом фактора $2/(n+1)!$ равен

$$-\frac{2\delta_{\alpha\beta}}{2n}\frac{2n}{(2\pi)^n(n+1)!} = -\frac{2}{(2\pi)^n(n+1)!}.$$

Мы покажем ниже, что возникает комбинация полей A, равная $n\operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d}A^n$, и тогда, собирая вместе все эти сомножители и слагаемые, получим для лидирующего вклада в вейлевскую аномалию выражение

$$\frac{2}{(2\pi)^n n!}\operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d}A^n - \frac{2}{(2\pi)^n(n+1)!} n \operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d}A^n = \frac{2}{(2\pi)^n(n+1)!}\operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d}A^n.$$

Происхождение $n \operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d}A^n$ проще всего понять на примерах, которые мы приводим, не повторяя данных ранее объяснений:

$n=1$:

$$\operatorname{Tr} t^a\gamma^5 [2ip_\alpha\partial_\alpha + \sigma_{\mu\nu}((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial_\nu + ip_\mu A_\nu)]^2 \to$$
$$\to \operatorname{Tr} t^a\gamma^5 (2ip_\alpha\partial_\alpha\sigma_{\mu\nu}ip_\mu A_\nu + \sigma_{\mu\nu}ip_\mu A_\nu\cdot 2ip_\alpha\partial_\alpha) \to$$
$$\to (2ip_\alpha ip_\mu)\operatorname{Tr} t^a\gamma^5[\sigma_{\mu\nu}(\partial_\alpha A_\nu) + 0] \to -\frac{2p^2}{2}[\operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d}A] \to \operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d}A$$

(двойка от γ-матричного следа была учтена ранее).

$n=2$:

$$\operatorname{Tr} t^a\gamma^5 [2ip_\alpha\partial_\alpha + \sigma_{\mu\nu}((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial_\nu + ip_\mu A_\nu)]^3 \to$$
$$\to \operatorname{Tr} t^a\gamma^5 [2ip_\alpha\partial_\alpha\sigma_{\mu\nu}((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial_\nu + ip_\mu A_\nu) \times$$
$$\times \sigma_{\rho\nu}((\partial_\rho A_\sigma) + ip_\rho A_\sigma) + \sigma_{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu)\cdot 2ip_\alpha\partial_\alpha\sigma_{\rho\sigma}((\partial_\rho A_\sigma) + ip_\rho A_\sigma)].$$

В обращении со вторым слагаемым под следом нет ничего нового: $2ip_\alpha ip_\mu \to \delta_{\alpha\mu}p^2$, а ∂_α действует на $\delta_{\alpha\mu}A_\nu$. Первое же слагаемое, помимо двух вкладов такого же типа, дает еще один со знаком минус: $p_\alpha\partial_\alpha(-A_\mu\partial_\nu)\, p_\rho A_\sigma \to -(\partial_\rho A_\mu)(\partial_\nu A_\sigma) \to -\mathrm{d}A^2$. В результате общий коэффициент перед $\operatorname{Tr} t^a \,\mathrm{d}A^2$ равен $[(2-1)+1] = 2 = n$.

$n=3$:

Здесь есть $3+2+1$ вкладов типа $p_\alpha\partial_\alpha p_\mu A_\nu \to (\partial_\mu A_\nu)$,
$(2+1)+1$ вклад $p_\alpha\partial_\alpha(-A_\mu\partial_\nu)(p_\rho A_\sigma) \to -(\partial_\rho A_\mu)(\partial_\nu A_c)$
и 1 вклад $p_\alpha\partial_\alpha(-A_\mu\partial_\nu)(-A_\rho\partial_\sigma)\, p_\tau A_\pi \to +(\partial_\tau A_\mu \times$
$\times (\partial_\nu A_\rho)(\partial_\sigma A_\pi)$.

Полный коэффициент перед $\mathrm{Tr}\, t^a\, \mathrm{d}A^3$ — $[(3+2+1) - ((2+1)+1)+1] = 3 = n$.

Комбинация $(2+1)+1$ имеет следующее происхождение. Мы перемножаем четыре одинаковые скобки $(2ip\partial + ((\partial_\mu A_\nu) - A_\mu \partial_\nu - iA_\mu p_\nu)\,\sigma_{\mu\nu})$. В одной из этих скобок мы берем структуру $(\partial_\mu A_\nu)$, а в трех других — слева направо — $2ip\partial$, $-A_\mu\partial_\nu$ и $-iA_\mu p_\nu$. Вопрос только в том, какие три скобки из четырех выбрать.

Пусть $2ip\partial$ взято из самой первой скобки. Если теперь $-A_\mu\partial_\nu$ берется из второй, то $-iA_\mu p_\nu$ можно выбрать в третьей или четвертой скобке двумя способами. Если $-A_\mu\partial_\nu$ берется из третьей скобки, то $-iA_\mu p_\nu$ может быть только в четвертой. Отсюда $(2+1)$.

Пусть теперь $2ip\partial$ взято во второй скобке. Тогда вариантов нет: разрешено только $-A_\mu\partial_\nu$ в третьей, а $-iA_\mu p_\nu$ в четвертой скобке. Это еще $+1$, а полное число вариантов для комбинации $2ip\partial\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-iA_\rho p_\sigma)$ $[(2+1)+1]$.

По тем же принципам вычисляется комбинаторный множитель и в случае $n=4$:

$$2ip\partial\,(-iA_\mu p_\nu)\colon\ (+)\ [4+3+2+1],$$
$$2ip\partial\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-iA_\mu p_\nu)\colon\ (-)\ [(3+2+1)+(2+1)+1],$$
$$2ip\partial\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-iA_\mu p_\nu)\colon\ (+)\ [((2+1)+1)+1],$$
$$2ip\partial\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-A_\mu p_\nu)\colon\ (-)\ 1.$$

Складывая все эти числа, получим $+4=n$.

Теперь уже нетрудно понять, как получается ответ для любого n. Обозначая коэффициент, стоящий в k-й строке, через S_n^k, получим рекуррентные соотношения

$$2ip\partial\,(-iA_\mu p_\nu)\colon\ S_{n+1}^1 = S_n^1 + (n+1),$$
$$2ip\partial\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-iA_\mu p_\nu)\colon\ (-)\ [S_{n+1}^2 = S_n^1 + S_n^2].$$

Действительно, если $2ip\partial$ взято в первой скобке, то две оставшиеся структуры $-A_\mu\partial_\nu$ и $-iA_\mu p_\nu$ можно выбирать в n скобках S_n^1 способами; если же $2ip\partial$ берется не в первой, а в какой-то из n оставшихся скобок, то по определению число вариантов равно S_n^2. Точно так же

$$2ip\partial\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-A_\mu\partial_\nu)\,(-iA_\mu p_\nu)\colon\ (+)\ [S_{n+1}^3 = S_n^2 + S_n^3];$$

вообще

$$S_{n+1}^{k+1} = S_n^k + S_n^{k+1},\ \text{причем}\ S_n^0 = (n+1).$$

Теперь понятно, что S_n^k — это коэффициенты бинома:

$$S_n^k = C_{n+1}^{k+1} \equiv \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!},$$

а сумма, которую надо вычислить:

$$\sum_{k=1}^{n} S_n^k\,(-)^{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^k\,(-)^k = (1-1)^{n+1} - C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 = n. \tag{2.24}$$

2.3. Соотношения между аномалиями фермионных токов

Аномалия соответствует вкладу регуляторов в фермионные петли, описывающие взаимодействие внешних токов и калибровочных полей. Поэтому все они допускают запись в терминах детерминантов или пропагаторов регуляторных фермионов.

Абелева дираковская аномалия в $2n$ измерениях:

$$\langle\partial_\mu J^5_\mu\rangle = 2\,\mathrm{Sp}\, M\gamma^5 \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - iM} = \int W^{(2n)}(A)\,\mathrm{d}^{2n}x. \tag{2.25}$$

Цветная дираковская аномалия в $2n$ измерениях:

$$\langle \mathrm{D}_\mu J^5_\mu\rangle^a = 2\,\mathrm{Sp}\, M\gamma^5 t^a \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - iM} = \int W^{a(2n)}(A)\,\mathrm{d}^{2n}x. \tag{2.26}$$

Вейлевская аномалия в левом токе в $2n$ измерениях:

$$\langle \mathrm{D}_\mu J^{\mathrm{L}}_\mu\rangle^a = 2\,\mathrm{Sp}\, M\gamma^5 t^a \frac{1}{i\tilde{\mathrm{D}} - iM} = \int W_1^{a(2n)}(A)\,\mathrm{d}^{2n}x, \quad \tilde{\mathrm{D}} = \hat{\partial} + \hat{A}\,\frac{1-\gamma^5}{2}. \tag{2.27}$$

Аномальная часть фермионного детерминанта в $2n+1$ измерении:

$$\{\ln\det(i\hat{\mathrm{D}} - iM)\}_{\text{аном}} = \int W_0^{(2n+1)}(A)\,\mathrm{d}^{2n+1}x. \tag{2.28}$$

В предыдущем разделе мы уже вычисляли выражения, стоящие в правых частях равенств (2.25)—(2.27). В этом разделе мы получим соотношения между левыми частями различных аномалий и заодно покажем, что

$$W_0^{(2n+1)}(A) = \frac{2\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_{2n+1}}}{(2\pi)^n (n+1)!}\,\mathrm{Tr}\,(A_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}A_{\alpha_3}\ \ldots\ \partial_{\alpha_{2n}}A_{\alpha_{2n+1}} + \ldots) =$$
$$= \frac{2}{(2\pi)^n (n+1)!}\,\mathrm{Tr}\,(A\,\mathrm{d}A^n + \ldots). \tag{2.29}$$

Соотношения между правыми частями различных аномалий (2.25)—(2.28) обсуждаются в разделе 3.4.

Мы начнем с соотношений между дивергенциями токов и следами. Прежде всего разберемся с законом сохранения *абелева векторного тока*:

$$\langle\partial_\mu J_\mu\rangle \equiv \mathrm{Sp}\, i\overset{+}{\overleftrightarrow{\hat{\partial}}}\,\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} - \text{вклад регуляторов}. \tag{2.30}$$

Теперь следует воспользоваться очевидными тождествами

$$i\hat{\partial}\,\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} = -(i\hat{A} - im)\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} + 1, \tag{2.31}$$

$$\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im}\, i\overleftarrow{\hat{\partial}} = +\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im}(i\hat{A} - im) - 1. \tag{2.32}$$

Тогда

$$\mathrm{Sp}\, i\overset{+}{\overleftrightarrow{\hat{\partial}}}\,\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} = \mathrm{Sp}\, i\overrightarrow{\hat{\partial}}\,\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} + \mathrm{Sp}\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im}\, i\overleftarrow{\hat{\partial}} =$$
$$= -\mathrm{Sp}\,(i\hat{A} - im)\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} + \mathrm{Sp}\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im}(i\hat{A} - im) =$$
$$= \mathrm{Sp}\,[-(i\hat{A} - im) + (i\hat{A} - im)]\,\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} = 0.$$

Вклад регуляторов также равен нулю.

Теперь — *аксиальная аномалия*:

$$\langle \partial_\mu J_\mu \rangle^5 \equiv \operatorname{Sp} i \overset{+}{\overleftrightarrow{\hat{\partial}}} \gamma^5 \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} - \text{вклад регуляторов} =$$

$$= \operatorname{Sp}\left[-\gamma^5 i \overrightarrow{\hat{\partial}} \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} + i\gamma^5 \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} \overleftarrow{\hat{\partial}} \right] - \text{рег.} =$$

$$= \operatorname{Sp}\left[-2\gamma^5 + \gamma^5 (i\hat{A} - im) \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} + \gamma^5 \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} (\hat{A} - im) \right] =$$

$$= -2im \operatorname{Sp} \gamma^5 \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} - \text{вклад регуляторов} \xrightarrow[m \to 0]{}$$

$$\xrightarrow[m \to 0]{} + 2iM \operatorname{Sp} \gamma^5 \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - iM}, \qquad (2.33)$$

что и утверждается в первом из равенств (2.25).

Для неабелевых токов формулы становятся чуть сложнее:

$$\langle (\mathrm{D}_\mu J_\mu)^a \rangle = \langle \partial_\mu J_\mu^a + [A_\mu J_\mu]^a \rangle.$$

Поэтому для *векторного тока*

$$\langle (\mathrm{D}_\mu J_\mu)^a \rangle = \operatorname{Sp} \overset{+}{\overleftrightarrow{\hat{\partial}}} t^a \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} + \operatorname{Sp} (if^{abc} \hat{A}^b t^c) \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im}.$$

Теперь напишем

$$\overset{+}{\overleftrightarrow{\hat{\partial}}} = \overrightarrow{\hat{\mathrm{D}}} + \overleftarrow{\hat{\mathrm{D}}}, \quad i\overrightarrow{\hat{\mathrm{D}}} \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} = 1 + im \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im},$$

$$\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} i\overleftarrow{\hat{\mathrm{D}}} = -1 - im \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im}.$$

В итоге все очень похоже на абелев случай:

$$\langle (\mathrm{D}_\mu J_\mu)^a \rangle = \operatorname{Sp} \left(\overrightarrow{\hat{\mathrm{D}}} t^a \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} + t^a \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} \overleftarrow{\hat{\mathrm{D}}} \right) + \operatorname{Sp} if^{abc} \hat{A}^b t^c \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} =$$

$$= 0 + \operatorname{Sp} [\hat{\mathrm{D}}, t^a] \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im} + \operatorname{Sp} if^{abc} \hat{A}^b t^c \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - im}.$$

Коммутатор $[\hat{\mathrm{D}}, t^a]$ равен $if^{cba} t^c \hat{A}^b = -if^{abc} \hat{A}^b t^c$, и два оставшихся пока вклада в $\langle (\mathrm{D}_\mu J_\mu)^a \rangle$ сокращают друг друга, $\langle (\mathrm{D}_\mu J_\mu)^a \rangle = 0$. Точно так же можно проверить первое из равенств (2.26) для безмассовых фермионов. Если же заметить, что появление проектора $(1 - \gamma^5)/2$ перед A не изменяет использовавшихся выше формул, то мы убедимся в справедливости аналогичного соотношения (2.27) для вейлевской аномалии.

W, W^a и W_1^a — функции полей A, стоящие в правой стороне равенств (2.25)—(2.27), — вычисляются теперь точно таким же образом, как в методе Вергелеса — Фуджикавы в предыдущем разделе. В самом деле,

$$i \operatorname{Sp} M\gamma^5 \frac{1}{i\hat{\mathrm{D}} - iM} = iM \operatorname{Sp} \gamma^5 \frac{i\hat{\mathrm{D}} + iM}{-\hat{\mathrm{D}}^2 + M^2}$$

Член с $\hat{\mathrm{D}}$ в числителе выпадает после взятия γ-матричного следа (поскольку $\hat{\mathrm{D}}^2$ в любой целой степени содержит четное число γ-матриц). Поэтому мы остаемся с выражением

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^5\,\frac{1}{1-(\hat{\mathrm{D}}^2/M^2)}\,.$$

Иными словами, в формулах раздела 2.2 теперь надо вычислять следы с весом не $e^{\hat{\mathrm{D}}^2/M^2}$, а $1/[1-(\hat{\mathrm{D}}^2/M^2)]$. Но мы знаем (см. замечание после формулы (2.12)), что при замене экспоненты на другую регуляризующую функцию ответ в вычислениях по методу Вергелеса — Фуджикавы не изменяется.

Обратимся теперь к соотношению (2.28), справедливому для калибровочных теорий в нечетном числе измерений. Для обсуждения связи этой аномалии с четномерными необходимо прежде всего привести левую часть равенства (2.28) к тому же виду, что и (2.25)—(2.27). Этого можно добиться дифференцированием (2.28):

$$\delta\ln\det(i\hat{\mathrm{D}}-iM)=\delta\,\mathrm{Sp}\ln(i\hat{\mathrm{D}}-iM)=\mathrm{Sp}\,\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}}-iM}\,\delta\,(i\hat{\mathrm{D}}-iM). \qquad (2.34)$$

(Знак следа позволяет поставить сомножители в указанном порядке.) Но по какой величине следует дифференцировать?

Вариация по массе регулятора M любых физических величин, в частности аномальных вкладов в эффективный лагранжиан, разумеется, исчезает. (Во избежание недоразумений отметим, что вариация *неаномальных* частей эффективного лагранжиана может быть ненулевой, например, $L_{\mathrm{eff}}(\mu)$ может содержать вклады $\sim\ln(\mu/M)$, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями. В таких случаях физический смысл имеет не сам эффективный лагранжиан, а его изменение при сдвиге точки нормировки. Нас, впрочем, будут интересовать только аномальные члены в L_{eff}, которые не зависят от M.)

Вариация по массе физического фермиона m не может зависеть от наличия регуляторов. Теорема об отщеплении тяжелых фермионов [56] и инфракрасная конечность теории возмущений запрещают физическим величинам зависеть от параметра m/M. Неудивительно поэтому, что при дифференцировании по m полностью теряется информация об аномалиях.

Остаются еще два способа проварьировать ln det:

— вариация по полю A_μ;

— вариация по некоторому дополнительному параметру, от которого зависит поле A_μ.

Оба способа оказываются содержательными, первый позволяет связать $W_0^{(2n+1)}$ с $W^{a(2n)}$, а второй — $W_0^{(2n+1)}$ с $W^{(2n+2)}$. В принципе существует еще одна возможность:

— калибровочное преобразование поля A_μ.

Таким образом, может быть установлена связь между $W_0^{(2n+1)}$ и $W_1^{a(2n)}$. Мы, однако, не будем разбирать здесь такую возможность.

2.3.1. *Связь между* $W_0^{(2n+1)}$ *и* $W^{a(2n)}$

Вариация левой части равенства (2.28) по A_0^a дает

$$\frac{\delta}{\delta A_0^a}\ln\det(i\hat{\mathrm{D}}-iM)=\mathrm{Sp}\,\gamma_0 t^a\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}}-iM}\,. \qquad (2.35)$$

Выберем теперь калибровку $A_0=0$ и заметим, что матрица γ_0 в $2n+1$ измерении совпадает с γ^5-матрицей в $2n$-мерной теории. Напрашивается мысль сравнить (2.35) с формулой (2.26) (но не с (2.27), где вместо $\hat{\mathrm{D}}$ стоит другой оператор $\tilde{\mathrm{D}}$). Вся разница между выражениями, входящими в эти формулы, — в дополнительном множителе M в (2.26) и в различном значении символа Sp: в (2.35) след содержит усреднение в $(2n+1)$-мерном пространстве, а в (2.26) — в $2n$-мерном. Оказывается, что при определенных условиях, отвечающих выделению из (2.35) аномального вклада, эти два различия компенсируют друг друга:

$$\mathrm{Sp}_{2n+1}\gamma_0 t^a \frac{1}{i\partial_0\gamma_0+i\hat{\mathrm{D}}-iM}=\mathrm{Sp}_{2n+1}\gamma_0 t^a \frac{i\partial_0\gamma_0+i\hat{\mathrm{D}}+iM}{-\partial_0^2-\mathrm{D}^2+M^2+(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/2)}\,. \quad (2.36)$$

Мы выделили здесь явно компоненту ∂_0 производной D_μ ($A_0=0$), а D содержит остальные $2n$ компонент. Фермионный детерминант описывает диаграммы с произвольным числом внешних линий, например, поправки к лагранжиану $F_{\mu\nu}^2$ и т. д. Нас здесь интересуют не такие поправки, а аномальные вклады, содержащие ε-символ. Для того чтобы выделить их в формуле (2.36), нужно не учитывать зависимость полей A_i от x_0 и считать, что $F_{0i}=0$. Тогда усреднение по координате x_0 можно произвести отдельно от усреднения по остальным координатам:

$$\mathrm{Sp}_{2n+1}\gamma_0 t^a \frac{i\partial_0\gamma_0+i\hat{\mathrm{D}}+iM}{-\partial_0^2-\mathrm{D}^2+M^2+[(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})/2]}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\mathrm{Sp}_{2n}\gamma_0 t^a \frac{p_0\gamma_0+i\hat{\mathrm{D}}+iM}{p_0^2-\mathrm{D}^2+M^2+[(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})/2]}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\mathrm{Sp}_{2n}\,\gamma_0 t^a \frac{iM}{-\mathrm{D}^2+(M^2+p_0^2)+[(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})/2]}\,. \quad (2.37)$$

Член $p_0\gamma_0$ в числителе выпадает после интегрирования по $\mathrm{d}p_0$, а $\hat{\mathrm{D}}=\mathrm{D}_i\gamma_i$ — при взятии γ-матричного следа. Получившееся выражение равно

$$\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\frac{M}{2\,(M^2+p_0^2)}\,\mathrm{Sp}_{2n}\gamma_0 t^a \frac{2i\,(M^2+p_0^2)}{-\hat{\mathrm{D}}^2+(M^2+p_0^2)}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\frac{M}{2\,(M^2+p_0^2)}\,\mathrm{Sp}\,\gamma_5 t^a \frac{2\,(M^2+p_0^2)^{1/2}}{i\hat{\mathrm{D}}-i\,(M^2+p_0^2)^{1/2}}\,. \quad (2.38)$$

Оставшийся след описывает цветную дираковскую аномалию (2.26) с заменой M на $(M^2+p_0^2)^{1/2}$. Но M — это масса регулятора, от которой W^a, разумеется, не зависит. Поэтому след просто совпадает с $W^{a(2n)}$, а интеграл по $\mathrm{d}p_0$ — это множитель, стоящий перед ним. Этот множитель равен 1/4, и мы получаем соотношение

$$\frac{\delta}{\delta A^a}\,W_0^{(2n+1)}=\frac{1}{4}\,W^{a(2n)} \quad (2.39)$$

(напомним, что $W_0^{(2n+1)}$ — это *аномальная* часть логарифма фермионного детерминанта, целиком определяемая регуляторами).

$W_0^{(2n+1)}$ — это не что иное, как весс-зуминовские члены, возникающие в нечетномерных теориях Янга — Миллса после интегрирования по фермионам. Они неявно инвариантны по отношению к инфинитезимальным калибровочным преобразованиям: калибровочная вариация $W_0^{(2n+1)}$ отлична от нуля, но является полной производной, поэтому фермионный детерминант, в который входит интеграл от $W_0^{(2n+1)}$, калибровочно инвариантен. Что касается глобальных калибровочных преобразований, не сводимых к бесконечно малым, то они могут приводить к изменению $\int W_0^{(2n+1)}\mathrm{d}^{2n+1}x$ (см. [41,45] и раздел 4). Калибровочная инвариантность восстанавливается при учете нелокальных вкладов в фермионный детерминант, связанных с легкими фермионами. Эти дополнительные вклады несущественны во всех случаях, когда масштаб изучаемого процесса меньше, чем обратная масса физического фермиона $1/m$. Формула (2.39) позволяет легко написать выражения для весс-зуминовских членов, исходя из известной уже формулы (2.12) для $W^{a(2n)}$:

$$W_0^{(1)}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,A,$$

$$W_0^{(3)}=\frac{1}{4\pi\cdot 2}\left(A\,\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A^3\right)=\frac{1}{4\pi\cdot 2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(A_\alpha\partial_\beta A_\gamma+\frac{2}{3}A_\alpha A_\beta A_\gamma\right),$$

$$W_0^{(5)}=\frac{1}{16\pi^2\cdot 3}\,\mathrm{Tr}\left(A\,\mathrm{d}A^2+\frac{3}{2}A^3\,\mathrm{d}A+\frac{3}{5}A^5\right)\ \ldots$$

Множители 2, 3, . . . в знаменателях возникают из интегралов $\int x^n\mathrm{d}x = x^{n+1}/(n+1)$.

Приведенный выше вывод соотношения (2.39) (в несколько иной форме) был впервые предложен Ниеми и Семеновым [42].

2.3.2. *Связь между* $W_0^{(2n+1)}$ *и* $W^{(2n+2)}$

Теперь мы выясним, чтó получается при втором способе обращения с аномалией (2.28). Предположим, что поля A_μ зависят не только от $2n+1$ координат x_μ, но и от еще одного параметра t, и продифференцируем (2.28) по этому параметру ($\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ будем обозначать точкой):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\,(i\hat{\mathrm{D}}-iM)=\mathrm{Sp}_{2n+1}\dot{A}_\mu\gamma_\mu\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}}-iM}. \tag{2.40}$$

Стоящие здесь $(2n+1)$-мерные γ-матрицы имеют размерность $2^n\times 2^n$.

С другой стороны, сделаем несколько элементарных преобразований в левой части выражения для абелевой аномалии (2.25). Во-первых, перейдем в калибровку $A_0=0$. Во-вторых, выберем $2^{n+1}\times 2^{n+1}$-Г-матрицы в $2n+2$ измерениях в виде

$$\Gamma_\mu=\begin{pmatrix}\gamma_\mu & \\ & -\gamma_\mu\end{pmatrix},\quad \mu=1\div 2n+1,\quad \Gamma_0=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix},\quad \Gamma_5=\begin{pmatrix} & i\\ -i & \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

(здесь произведено очевидное переобозначение $2n$-мерных матриц $\gamma_0\to\gamma_1$; $\gamma_1\to\gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_{2n-1}\to\gamma_{2n},\ \gamma_5\to\gamma_{2n+1}$; $\gamma_1\ \ldots\ \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}\sim\gamma_{2n+1}^2=1$). Тогда

$$2\,\mathrm{Sp}_{2n+2}\,M\Gamma^5\frac{1}{\hat{\mathrm{D}}-iM}=2M\,\mathrm{Sp}_{2n+2}\,\Gamma^5\frac{iM}{-\mathrm{D}^2+M^2+(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/2)+F_{0\mu}\sigma_{0\mu}}=$$

$$=2iM^2\,\mathrm{Sp}_{2n+2}\frac{\Gamma^5\dot{A}_\mu\sigma_{0\mu}}{[-\mathrm{D}^2+M^2+(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})/2]^2}=$$

$$=4M^2\,\mathrm{Sp}_{2n+2}\dot{A}_\mu\gamma_\mu\frac{1}{[-\mathrm{D}^2+M^2+(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/2)]^2}. \tag{2.42}$$

В этих равенствах учтено, что в калибровке $A_0=0$, $F_{0i}=\dot{A}_i$, и выписана двойка, возникающая при переходе от следа Г-матриц к γ, которые имеют вдвое меньшую размерность. Выражение (2.42) можно представить в виде

$$-4M^2\frac{\partial}{\partial M^2}\,\mathrm{Sp}_{2n+2}\dot{A}_\mu\gamma_\mu\frac{1}{-\mathrm{D}^2+M^2+(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/2)}, \tag{2.43}$$

а также выполнить явно усреднение по нулевой координате t. (При этом не следует учитывать зависимость $F_{\mu\nu}$ и $\dot{A}_\mu$ от t. В отличие от перехода между $W_0^{(2n+1)}$ и $W^{a(2n)}$, здесь это не связано с выделением аномального вклада; легко убедиться, что в данном случае изменения, возникающие при учете этой зависимости, обращаются в нуль в пределе $M\to\infty$.) Усредняя по t, получаем

$$-4M^2\frac{\partial}{\partial M^2}\,\mathrm{Sp}_{2n+1}\dot{A}_\mu\gamma_\mu\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{1}{p_0^2-\mathrm{D}^2+M^2+(F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/2)}=$$

$$=-4M^2\frac{\partial}{\partial M^2}\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi\,(p_0^2+M)^{1/2}}\left[\mathrm{Sp}_{2n+1}\dot{A}_\mu\gamma_\mu\frac{1}{i\hat{\mathrm{D}}-i\,(M^2+p_0^2)^{1/2}}\right]_{\text{аном}}. \tag{2.44}$$

Появившийся здесь след Sp_{2n+1} следует сравнить с (2.40). Обращаем внимание на то, что в формуле (2.44) стоит только аномальная часть следа Sp_{2n+1}; это произошло из-за исключения члена $\hat{\mathrm{D}}$ в числителе. (Дело в том, что в нечетномерном случае, в отличие от четномерного, γ-матричный след может быть ненулевым как для четного, так и для нечетного числа γ-матриц.) Поскольку аномальная часть следа Sp_{2n+1} не зависит от M, то интегрирование по $\mathrm{d}p_0$ и дифференцирование по M^2 могут быть выполнены явно:

$$-4M^2\frac{\partial}{\partial M^2}\int\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\,\frac{1}{(p_0^2+M^2)^{1/2}}=\frac{1}{\pi}\int\mathrm{d}p_0\,\frac{M^2}{(p_0^2+M^2)^{3/2}}=\frac{2}{\pi},$$

и результат состоит в том, что

$$W^{(2n+2)}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{d}W_0^{(2n+1)}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.45}$$

Производную $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ здесь можно заменить на формальное внешнее дифференцирование (см. раздел 3.1). Примеры:

$$W^{(2)}=\frac{2}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\,F=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{d}A=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,A=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}W_0^{(1)},$$

$$W^{(4)}=\frac{2}{(2\pi)^2\,2!}\,\mathrm{Tr}\,F^2=\frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{d}\left(A\,\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A^3\right)=$$
$$=\frac{2}{\pi}\,d\,\frac{1}{4\pi\cdot 2}\,\mathrm{Tr}\left(A\,\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A^3\right)=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}W_0^{(3)},$$

$$W^{(6)}=\frac{2}{(2\pi)^3\,3!}\,\mathrm{Tr}\,F^3=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}\,\frac{1}{16\pi^2\cdot 3}\,\mathrm{Tr}\left(A\,\mathrm{d}A^2+\frac{3}{2}A^3\,\mathrm{d}A+\frac{3}{5}A^5\right)=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}W_0^{(5)}.$$

Мы обсудили связь между левыми частями дираковских аномалий (2.25), (2.26), (2.28). Связь между вейлевской (2.27) и нечетномерной (2.28) аномалиями мы установим с помощью условий согласованности Весса — Зумино в следующем разделе.

2.4. Условия согласованности Весса — Зумино[7] и связь между дираковской и вейлевской аномалиями

Изменение $W_0^{(2n+1)}$ при калибровочном преобразовании является полной производной. Мы начнем раздел с доказательства этого утверждения, которое может показаться никак не связанным с заглавием. Тем не менее именно на этом утверждении основано соотношение между дираковской и вейлевской аномалиями. Доказывается утверждение очень просто. Дираковский фермионный детерминант является калибровочно инвариантной величиной, поэтому заранее ясно, что при инфинитезимальных калибровочных преобразованиях, не сингулярных нигде, в том числе на бесконечности, $\int W_0^{(2n+1)}\mathrm{d}^{2n+1}x$ не изменяется, а значит, $W_0^{(2n+1)}$ если и меняется, то только на полную производную. (Можно также воспользоваться равенством (2.45). Поскольку $W^{(2n+2)}\sim\mathrm{Tr}\,F^{n+1}$ явно калибровочно инвариантно, то из него сразу следует $0=\delta_{\mathrm{u}}W^{(2n+2)}=\mathrm{d}\delta_{\mathrm{u}}W_0^{(2n+1)}$, и в любой односвязной области вне сингулярностей $\delta_{\mathrm{u}}W_0^{(2n+1)}$ является внешней производной некоторого выражения.) Менее тривиально то, что эта полная производная не равна тождественно нулю, в чем проще всего убедиться, взглянув на конкретное выражение (2.29) для

$$W_0^{(2n+1)}=\frac{1}{2\,(2\pi)^n\,(n+1)!}\,\mathrm{Tr}\,(A\,\mathrm{d}A^n+\ldots).$$

Возьмем теперь интеграл от $W_0^{(2n+1)}$ не по всему пространству R^{2n+1}, а лишь по нижнему полупространству R_-^{2n+1}. Будем считать, что все поля убывают на бесконечности, так что это на самом деле интеграл по полусфере $S_-^{(2n+1)}$.

Обозначим его $U^{(2n+1)}$. Сам по себе этот интеграл ничем не замечателен, однако его вариация при калибровочном преобразовании,

$$U^{a(2n)}=\frac{\delta}{\delta u^a}U^{(2n+1)},$$

зависит только от значений полей на сфере S^{2n}, являющейся верхней границей $S_-^{(2n+1)}$. Функционал $U^{a(2n)}$ пригодится нам позднее.

Вернемся теперь к вейлевской аномалии. Лагранжиан

$$\bar{\psi}\left(\hat{\partial}+\hat{A}\,\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi$$

при калибровочном преобразовании

$$\psi\rightarrow\exp\left(-iu^at^a\,\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi$$

изменяется на

$$-\bar{\psi}\gamma_\mu t^a\frac{1-\gamma^5}{2}\psi\,(\mathrm{D}_\mu u)^a=-\frac{1}{2}J_\mu^{\mathrm{L}a}\,(\mathrm{D}_\mu u)^a\qquad(\mathrm{D}_\mu u=\partial_\mu u+[A_\mu u]).$$

Это изменение в точности компенсируется калибровочной вариацией внешнего поля A: $A_\mu\rightarrow A_\mu+\partial_\mu u+[A_\mu u]=A_\mu+D_\mu u$. Поэтому среднее от $(\mathrm{D}_\mu J_\mu^{\mathrm{L}})^a$ по вакууму является калибровочной вариацией эффективного действия, возникающего после интегрирования по фермионам:

$$\langle\mathrm{D}_\mu J_\mu^{\mathrm{L}}\rangle^a\equiv W_1^{a(2n)}=2\,\frac{\delta_u S_{\mathrm{eff}}\{A\}}{\delta u^a}.$$

Теперь можно воспользоваться тождеством Якоби $\delta_v\delta_u-\delta_u\delta_v+\delta_{[uv]}=0$, означающим, что калибровочные преобразования образуют группу. В частности, $\delta_v\delta_u S_{\mathrm{eff}}-\delta_u\delta_v S_{\mathrm{eff}}+\delta_{[uv]}S_{\mathrm{eff}}=0$, т. е.

$$\delta_v\,\mathrm{Tr}\,uW_1^{(2n)}-\delta_u\,\mathrm{Tr}\,vW_1^{(2n)}+\mathrm{Tr}\,[uv]\,W_1^{(2n)}\ \text{равно полной производной.}\tag{2.46}$$

Это и есть условие согласованности Весса — Зумино для вейлевской аномалии. Полная производная появилась из-за того, что S_{eff}, в отличие от $W_1^{(2n)}$, содержит интегрирование по $\mathrm{d}^{2n}x$. Эта полная производная весьма существенна. Выражения для вейлевских аномалий удовлетворяют уравнению (2.46) только с ее учетом. Например, в простейшем, двумерном, случае

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,W_1^{(2)}\sim\mathrm{Tr}\,u\,\mathrm{d}A,\\ &\delta_v\,\mathrm{Tr}\,uW_1^{(2)}=\mathrm{Tr}\,u\,([\mathrm{d}A,v]-[A,\mathrm{d}v])=-\mathrm{Tr}\,[uv]\,dA-\mathrm{Tr}\,[u\,\mathrm{d}v]\,A,\\ &-\delta_u\,\mathrm{Tr}\,vW_1^{(2)}\qquad=-\mathrm{Tr}\,[uv]\,\mathrm{d}A-\mathrm{Tr}\,[\mathrm{d}uv]\,A,\\ &+\mathrm{Tr}\,[uv]\,W_1^{(2)}\qquad=+\mathrm{Tr}\,[uv]\,\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

Складывая эти три выражения, получим

$$(-1-1+1)\,\mathrm{Tr}\,[uv]\,\mathrm{d}A-\mathrm{Tr}\,([u\mathrm{d}v]+[\mathrm{d}uv])\,A=$$
$$=-\mathrm{d}\,\mathrm{Tr}\,[uv]\,A=\text{полной производной.}$$

Отметим, что $\mathrm{Tr}\,uA^2$ *не удовлетворяет* условию согласованности: в левой части (2.46) на этот раз стоит $-\mathrm{Tr}\,[uv]\,A^2+\mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}\,[uv])A$, что не равно полной производной. Поэтому вейлевская аномалия W_1^2 содержит вклад $\sim\mathrm{d}A$, но не $\sim A^2$. Вообще, нетрудно убедиться, что по заданному «старшему» члену аномалии $W_1^{a(2n)}$, $\mathrm{Tr}\,t^a\mathrm{d}A^n$, с помощью условия (2.46) можно восстановить все остальные. Произвол при этом сводится к возможным структурам без ε-символа, которые могут быть получены калибровочной вариацией *локальных* функционалов и которые мы договорились по этой причине отбрасывать. (Истинно аномальным вкладам в аномалию отвечает *нелокальное* S_{eff}, например в пренебрежении неабелевыми вкладами

$$S_{\text{eff}} \sim \partial_\alpha A_\alpha \frac{1}{\partial^2} \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{2n}} F_{\mu_1\mu_2} \ldots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}},$$
$$\delta_u S_{\text{eff}} \sim u\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{2n}} F_{\mu_1\mu_2} \ldots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}.)$$

Поэтому любое нетривиальное решение уравнения (2.46), начинающееся с

$$\frac{i2}{(2\pi)^n (n+1)!} \operatorname{Tr} t^a \, \mathrm{d}A^n,$$

наверняка дает правильный ответ для вейлевской аномалии в $2n$-мерной теории. Здесь самое время вспомнить о выражении $U^{a(2n)}$, определенном в начале раздела 2.4, исходя из $W_0^{(2n+1)}$. По определению $U^{a(2n)}$ является калибровочной вариацией функционала $U^{(2n+1)}$ и при этом зависит только от значений полей в $2n$-мерном пространстве S^{2n}. Значит, $U^{a(2n)}$ обязательно удовлетворяет условию (2.46). С другой стороны, $U^{a(2n)}$ содержит ε-символ и потому (при правильной нормировке) дает ответ для вейлевской аномалии (см. примеры в разделе 3): $W_1^{a(2n)} \sim U^{a(2n)}$.

В заключение этого раздела — несколько слов о применимости условия Весса — Зумино в других ситуациях. Являясь просто тождеством Якоби, примененным к эффективному действию, это условие применимо всегда, когда определено действие группы калибровочных преобразований на фермионы и векторные поля, и рассматривается ковариантная дивергенция внутреннего тока, с которым взаимодействуют калибровочные бозоны. Реально оба условия выполнены только в двух случаях: для дивергенции векторного тока в дираковской теории (тогда аномалия равна нулю и условие Весса — Зумино выполнено тривиально) и для дивергенции левого (правого) тока в вейлевской теории. Это связано с тем, что в фермионной теории определено действие группы $G_{\text{L}} \times G_{\text{R}}$, у которой есть подгруппы только двух типов: G_{V} и G_{L} (G_{R}). Можно, конечно, еще написать условия согласованности для полной группы $G_{\text{L}} \times G_{\text{R}}$, именно они выведены в классической работе Весса и Зумино [7]. Эти условия можно записать в виде двух соотношений (2.46), отдельно для правых и левых преобразований, либо в смешанной форме: через векторные (V) $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ и аксиальные (A) $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$ преобразования:

$$\delta_u^{\text{V}}\delta_v^{\text{V}} - \delta_v^{\text{V}}\delta_u^{\text{V}} + \delta_u^{\text{A}}\delta_v^{\text{A}} - \delta_v^{\text{A}}\delta_u^{\text{A}} = \delta_{[uv]}^{\text{V}},$$
$$\delta_u^{\text{A}}\delta_v^{\text{V}} - \delta_v^{\text{V}}\delta_u^{\text{A}} + \delta_u^{\text{V}}\delta_v^{\text{A}} - \delta_v^{\text{A}}\delta_u^{\text{V}} = \delta_{[uv]}^{\text{A}}.$$

Этим соотношениям удовлетворяет, например, четырехмерная аномалия Бардина [6] в теории с лагранжианом $\bar{\psi}\hat{V}\psi + \bar{\psi}\hat{A}\gamma^5\psi$:

$$(D_\mu J_\mu^5)^a \equiv \partial_\mu J_\mu^{5a} + [V_\mu J_\mu^5]^a + [A_\mu J_\mu]^a =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Tr} t^a \Big[F_{\text{V}}^2 + \frac{1}{3} F_{\text{A}}^2 - \frac{4}{3} (A^2 F_{\text{V}} + A F_{\text{V}} A + F_{\text{V}} A^2) + \frac{8}{3} A^4 \Big]; \qquad (2.47)$$

здесь $F_{\text{V}} = \mathrm{d}V + V^2 + A^2$, $F_{\text{A}} = \mathrm{d}A + VA + AV$. Калибровочные преобразования действуют на поля по очевидным правилам:

$$\delta_{\text{u}}^{\text{V}} V = \mathrm{d}u + [Vu], \qquad \delta_{\text{u}}^{\text{V}} A = [Au],$$
$$\delta_{\text{u}}^{\text{A}} V = [Au], \qquad \delta_{\text{u}}^{\text{A}} A = \mathrm{d}u + [Vu],$$
$$\delta_{\text{u}}^{\text{V}} F_{\text{V}} = [F_{\text{V}} u], \qquad \delta_{\text{u}}^{\text{V}} F_{\text{A}} = [F_{\text{A}} u],$$
$$\delta_{\text{u}}^{\text{A}} F_{\text{V}} = [F_{\text{A}} u], \qquad \delta_{\text{u}}^{\text{V}} F_{\text{A}} = [F_{\text{V}} u].$$

Как и везде в нашем обзоре, в формуле (2.47) предполагается, что векторный ток сохраняется: $\mathrm{D}_\mu J_\mu = \partial_\mu J_\mu + [V_\mu J_\mu] + [A_\mu J_\mu^5] = 0$. При $A = 0$ из (2.47) получается дираковская аномалия $W^{a(4)} = (1/4\pi^2) \operatorname{Tr} t^a F_{\text{V}}^2$; при $V = \pm A$ —

вейлевская (чтобы получить правильный лагранжиан

$$\bar{\psi}\hat{V}\frac{1-\gamma^5}{2}\psi,$$

надо еще сделать замену $V \to V/2$, $A \to A/2$):

$$W_1^{a(4)} = \frac{1}{4\pi^2}\operatorname{Tr} t^a \left\{ \left(\frac{dV}{2} + 2\frac{V^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{dV}{2} + 2\frac{V^2}{4}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{3}\left[\frac{V^2}{4}\left(\frac{dV}{2} + 2\frac{V^2}{4}\right) + \frac{V}{2}\left(\frac{dV}{2} + 2\frac{V^2}{4}\right)\frac{V}{2} + \left(\frac{dV}{2} + 2\frac{V^2}{4}\right)\frac{V^2}{4}\right] + \frac{8}{3}\frac{V^4}{16}\right\} =$$

$$= \frac{1}{12\pi^2}\operatorname{Tr} t^a\left[dV^2 + \frac{1}{2}(V^2\,dV - V\,dVV + dVV^2)\right] = \frac{1}{12\pi^2}\operatorname{Tr} t^a d\left(V\,dV + \frac{1}{2}V^3\right).$$

Это действительно вейлевская аномалия, поскольку из-за сохранения векторного тока $D_\mu J_\mu^L = -D_\mu J_\mu^5$, $D_\mu J_\mu^R = +D_\mu J_\mu^5$. Еще один важный частный случай получается при $V = 0$, когда в теории есть только аксиальный калибровочный бозон:

$$(D_\mu J_\mu^5)_A^a = \frac{1}{12\pi^2}\operatorname{Tr} t^a (dA^2 - A^4). \tag{2.48}$$

На первый взгляд эта аномалия должна удовлетворять соотношению Весса — Зумино: вычисляется дивергенция того же тока, с которым взаимодействуют поля A. Однако не выполнено второе условие: аксиальные преобразования $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$ *не образуют* группы: у $G_L \times G_R$ нет подгруппы аксиальных преобразований G_A: коммутатор двух аксиальных преобразований $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$ равняется векторному $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, а не аксиальному. Поэтому (2.48) не удовлетворяет соотношению (2.46).

К сожалению, ограничения, накладываемые на бардиновскую аномалию соотношениями Весса — Зумино, в произвольном числе измерений невелики, в результате ее не удается включить в иерархию аномалий.

2.5. Вычисление аномалий с помощью дисперсионных соотношений

Этот подход к аномалиям был предложен Долговым и Захаровым[8]. Мы уже говорили о нем во Введении на примере двумерной теории. Вычисление аномалий по мнимой части, помимо того, что имеет принципиальное значение, в определенных случаях технически намного проще других методов. Это относится, например, к вычислению аномалий антисимметричных тензорных полей, поскольку работать с этими полями на массовой поверхности (что только и требуется в методе Долгова и Захарова) неизмеримо проще, чем вне ее. Мы воспроизведем ниже фрагмент работы[8], посвященный вычислению по мнимой части обычной треугольной γ^5-аномалии (т. е. абелевой дираковской четырехмерной аксиальной аномалии) (рис. 10).

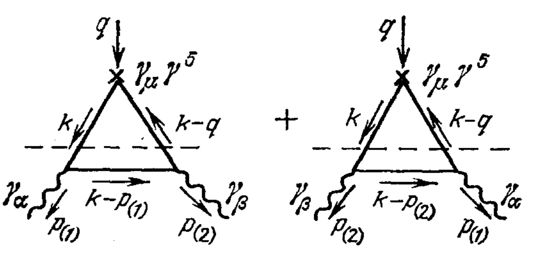

Рис. 10. Четырехмерная электродинамика. Аксиальный ток во внешнем фотонном поле. Штриховой линией обозначено разрезание при вычислении мнимой части диаграммы

Вместо того чтобы вычислять регуляторную диаграмму с вершиной $2\gamma^5 M_{\text{reg}}$, предлагается найти ответ для самого тока J_μ^5, а сначала — для его мнимой части. Мнимая часть определяется поведением полей на массовой поверхности, ультрафиолетово конечна и не содержит вклада регуляторов.

Зато теперь требуется инфракрасная регуляризация. Есть два удобных выбора этой регуляризации:

а) ненулевая масса фермиона m;

б) ненулевая масса фотона $p^2_{(1)} = p^2_{(2)} = \mu^2$.

Технически более простой является регуляризация б); кроме того, она вообще не требует ухода с массовой поверхности, и потому именно ею следует пользоваться при обсуждении антисимметричных полей и других сложных примеров. Регуляризацию а) использовали при расчетах сами Долгов и Захаров; простой пример вычисления с использованием такой регуляризации приводился в разделе 1.2. Ниже мы используем регуляризацию б).

Обозначим разность импульсов фотонов через $p_\mu = p^{(1)}_\mu - p^{(2)}_\mu$; сумма этих импульсов равна $q_\mu = p^{(1)}_\mu + p^{(2)}_\mu$. При условии $p^2_{(1)} = p^2_{(2)} = \mu^2$ скалярное произведение $qp = 0$. Выражение для $\operatorname{Im} \langle J^5_\mu \rangle_{\alpha\beta}$ должно быть симметрично относительно перестановки фотонов, т. е. быть инвариантом преобразования $\alpha \leftrightarrow \beta$, $p \leftrightarrow -p$. Этому условию удовлетворяют следующие четыре структуры:

$$\left.\begin{array}{c} q_\mu \varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta} p_\xi q_\eta, \quad q^2 \varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi} p_\xi, \\ p_\alpha \varepsilon_{\mu\beta\xi\eta} p_\xi q_\eta + p_\beta \varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta} p_\xi q_\eta, \\ q_\alpha \varepsilon_{\mu\beta\xi\eta} p_\varepsilon q_\eta - q_\beta \varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta} p_\xi q_\eta. \end{array}\right\} \tag{2.49}$$

Другие возможные структуры, например $p_\alpha \varepsilon_{\mu\beta\xi\eta} p_\xi q_\eta - p_\beta \varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta} p_\xi q_\eta$, сами по себе несимметричны и могли бы войти в ответ для диаграмм рис. 10 только с множителем (qp), который, однако, равен нулю в нашей кинематике (именно по этой причине удобно выбирать массы фотонов одинаковыми).

Последняя из структур (2.49) на самом деле выражается через две первые. Это вытекает из специфического четырехмерного соотношения между ε-символами, получающегося при антисимметризации по индексам μ, α, β, ξ, η произведения $\delta_{\lambda\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}$. Поскольку каждый из этих пяти индексов может пробегать лишь четыре значения, в результате антисимметризации должен получиться нуль:

$$0 \equiv \delta_{\lambda\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta} - \delta_{\lambda\alpha} \varepsilon_{\mu\beta\xi\eta} + \delta_{\lambda\beta} \varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta} - \delta_{\lambda\xi} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\eta} + \delta_{\lambda\eta} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi}. \tag{2.50}$$

Сворачивая это тождество с $q_\lambda p_\xi q_\eta$, найдем

$$q_\alpha \varepsilon_{\mu\beta\xi\eta} p_\xi q_\eta - q_\beta \varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta} p_\xi q_\eta = \\ = q_\mu \varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta} p_\xi q_\eta + q^2 \varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi} p_\xi - (pq)\, \varepsilon_{\mu\alpha\beta\eta} q_\eta. \tag{2.51}$$

Последнее слагаемое в правой части выпадает при $pq = 0$.

Когда фермионы в петле находятся на массовой поверхности, как это происходит при вычислении диаграммы по мнимой части, аксиальный ток сохраняется, т. е. $q_\mu \operatorname{Im} \langle J^5_\mu \rangle_{\alpha\beta} = 0$. (Если бы мы пользовались регуляризацией а), дающей фермиону массу, это было бы неверно.) Кроме того, как обычно, сохраняются векторные токи:

$$p^{(1)}_\alpha \operatorname{Im} \langle J^5_\mu \rangle_{\alpha\beta} = p^{(2)}_\beta \operatorname{Im} \langle J^5_\mu \rangle_{\alpha\beta} = 0.$$

Напишем общее выражение для

$$\operatorname{Im} \langle J^5_\mu \rangle_{\alpha\beta} = A q_\mu \varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta} p_\xi q_\eta + B q^2 \varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi} p_\xi + C\,(p_\alpha \varepsilon_{\mu\beta\xi\eta} p_\xi q_\eta + p_\beta \varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta} p_\xi q_\eta) \tag{2.52}$$

с произвольными пока коэффициентами A, B, C, являющимися функциями q^2. Тогда условия сохранения трех токов позволяют выразить B и C через A. В самом деле, домножая (2.52) на q_μ, найдем $B = A$. При умножении (2.52) на $p^{(1)}_\alpha = (1/2)\,(p + q)_\alpha$ получится соотношение $Bq^2 + Cp^2 = 0$. В точности такое же соотношение возникает при умножении $\operatorname{Im} \langle J^5_\mu \rangle_{\alpha\beta}$ на $p^{(2)}_\beta = (1/2) \times (-p + q)_\beta$. Заметим теперь, что $p^2 = (p^{(1)} - p^{(2)})^2 = 4\mu^2 - q^2$, и поэтому

$$C = -\frac{Bq^2}{p^2} = \left(1 - \frac{4\mu^2}{q^2}\right)^{-1} A.$$

В результате

$$\operatorname{Im}\langle J^5_\mu\rangle_{\alpha\beta}=A\Big[q_\mu\varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}p_\xi q_\eta+q^2\varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi}p_\xi+\\+\left(1-\frac{4\mu^2}{q^2}\right)^{-1}(p_\alpha\varepsilon_{\mu\beta\xi\eta}p_\xi q_\eta+p_\beta\varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta}p_\xi q_\eta)\Big]. \qquad (2.53)$$

Прямым вычислением можно найти коэффициент *)

$$A=\frac{\theta(q^2-4\mu^2)}{8\pi q^2}\left(1+O\left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)\right). \qquad (2.54)$$

В разделе 1.2 (см. формулы (1.18)—(1.22)) мы уже обсуждали вычисление аномалий по мнимой части. Там мы убедились, что аномалии отвечает мнимая часть $\sim\delta(q^2)$. В инфракрасно регуляризованной теории δ-функции, конечно, нет, вместо нее стоит выражение типа μ^2/q^4. Другими словами, аномальная мнимая часть должна быть пропорциональна квадрату регуляризующей массы. В формуле (2.53) это условие пока не выполнено. В чем дело? Из найденного выражения еще необходимо выделить собственно аномалию — структуру, описывающую переход именно в два фотона. От (2.53) амплитуда отличается наличием векторов поляризации фотонов $\varepsilon^{(1)}_\alpha$ и $\varepsilon^{(2)}_\beta$: $\operatorname{Im}\langle J^5_\mu\rangle_{\alpha\beta}\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta$. Очень важно, что векторы поляризации поперечны: $p^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(1)}_\alpha=p^{(2)}_\beta\varepsilon^{(2)}_\beta=0$. Оказывается, что после умножения на $\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta$ в (2.53) останется лишь вклад, пропорциональный $(\mu^2/q^2)\,A$. Действительно, снова пользуясь тождеством (2.51), найдем

$$q_\mu\varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}p_\xi q_\eta+q^2\varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi}p_\xi+p_\alpha\varepsilon_{\mu\beta\xi\eta}p_\xi p_\eta+p_\beta\varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta}p_\zeta q_\eta=\\=q_\alpha\varepsilon_{\mu\beta\xi\eta}p_\xi q_\eta-q_\beta\varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta}p_\zeta q_\eta+p_\alpha\varepsilon_{\mu\beta\xi\eta}p_\xi q_\eta+p_\beta\varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta}p_\xi q_\eta=\\=2\,(p^{(1)}_\alpha\varepsilon_{\mu\beta\xi\eta}p_\xi q_\eta-p^{(2)}_\beta\varepsilon_{\mu\alpha\xi\eta}p_\xi q_\eta),$$

что при умножении на $\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta$ обращается в нуль. Поэтому в полученной из (2.53) амплитуде что-то остается только благодаря отличию $[1-(4\mu^2/q^2)]^{-1}$ от единицы:

$$\operatorname{Im}\langle J^5_\mu\rangle_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta=\\=\frac{4\mu^2}{q^2}A\,(q_\mu\varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}p_\xi q_\eta+q^2\varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi}p_\xi)\,\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta\left(1+O\left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)\right)=\\=\frac{\theta(q^2-4\mu^2)}{\pi}\left[\frac{\mu^2}{q^4}\,q_\mu\varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}p^{(1)}_\xi p^{(2)}_\eta\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta+\right.\\\left.+\frac{\mu^2}{2q^2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi}\,(p^{(1)}_\xi-p^{(2)}_\xi)\,\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta\right]\left(1+O\left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)\right) \qquad (2.55)$$

При стремлении μ к нулю коэффициент при первой структуре превращается в $\delta(q^2)/4\pi$, а при второй — в нуль. Поэтому окончательно

$$\operatorname{Im}\langle J^5_\mu\rangle_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta=\frac{1}{4\pi}\,\delta(q^2)\,q_\mu\varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}p^{(1)}_\xi p^{(2)}_\eta\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta. \qquad (2.56)$$

Из этого выражения легко найти действительную часть амплитуды:

$$\langle J^5_\mu\rangle_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta=\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{q_\mu}{q^2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}p^{(1)}_\xi p^{(2)}_\eta\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta+c\varepsilon_{\mu\alpha\beta\xi}\,(p^{(1)}_\xi-p^{(2)}_\xi)\,\varepsilon^{(1)}_\alpha\varepsilon^{(2)}_\beta; \qquad (2.57)$$

---

*) Отметим, что при регуляризации а) с помощью введения массы фермиона коэффициент при структуре $q_\mu\varepsilon_{\alpha\beta\xi\eta}p_\xi q_\eta$ содержит дополнительный логарифмический множитель

$$\ln\frac{1-(4m^2/q^2)}{1+(4m^2/q^2)},$$

связанный с пороговыми эффектами. Такой множитель отсутствует, когда порог связан с внешними частицами, *не распространяющимися в петле*.

здесь c — произвольная постоянная, возникающая согласно дисперсионным соотношениям из нулевой мнимой части соответствующего формфактора. Векторные токи сохраняются при выборе $c = 0$, и тогда [8]

$$\langle J^5_\mu \rangle = \frac{q_\mu}{8\pi^2 q^2} F_{\alpha\beta} \widetilde{F}_{\alpha\beta},$$

$$\langle \partial_\mu J^5_\mu \rangle = \frac{1}{8\pi^2} F_{\alpha\beta} \widetilde{F}_{\alpha\beta}.$$

3. ИЕРАРХИЯ АНОМАЛИЙ

3.1. Дифференциальные формы

Выражения для аномалий содержат ε-символ — антисимметризацию по всем векторным значкам — и потому намного компактнее записываются в терминах дифференциальных форм. Дифференциальные формы в D измерениях строятся с помощью D антикоммутирующих дифференциалов $\mathrm{d}x_1 \ldots$ $\ldots \mathrm{d}x_D$, $\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu = -\mathrm{d}x_\nu\, \mathrm{d}x_\mu$, их всевозможных произведений и линейных комбинаций. Формальная сумма, каждое слагаемое которой содержит произведение k дифференциалов с коэффициентом, зависящим от x, $\Phi =$ $= \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k}(x)\, \mathrm{d}x_{\mu_1} \ldots \mathrm{d}x_{\mu_k}$, называется формой k-го ранга или k-формой. В терминах дифференциальных форм полю A^a_μ отвечает 1-форма $A = iA^a_\mu t^a \mathrm{d}x_\mu$, а антисимметричному тензору $F^a_{\mu\nu}$ — 2-форма $F = iF^a_{\mu\nu} t^a\, \mathrm{d}x_\mu\, \mathrm{d}x_\nu/2!$.

Для дифференциальных форм определены две важные операции: внешнее произведение и внешнее дифференцирование. Они получаются из тензорного произведения и обычного дифференцирования антисимметризацией по всем индексам. Внешнее произведение переводит две формы рангов k_1 и k_2 в $(k_1 + k_2)$-форму

$$(\Phi^{(1)}\Phi^{(2)})_{\mu_1 \ldots \mu_{k_1+k_2}} = \Phi^{(1)}_{[\mu_1 \ldots u_{k_1}} \Phi^{(2)}_{\mu_{k_1+1} \ldots \mu_{k_1+k_2}]}.$$

Операция внешнего дифференцирования переводит k-форму в $(k + 1)$-форму

$$(\mathrm{d}\Phi)_{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}} = \partial_{[\mu_1} \Phi_{\mu_2 \ldots \mu_{k+1}]} = (-)^k\, \partial_{[\mu_{k+1}} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k]}.$$

С помощью этих операций можно записать $F = \mathrm{d}A + A^2$. (Подробнее: $F = (1/2)\, F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x_\mu\, \mathrm{d}x_\nu = (1/2)\, (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu A_\nu])\, dx_\mu dx_\nu = (\partial_\mu A_\nu +$ $+ A_\mu A_\nu)\, \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu = \mathrm{d}A + A^2$.)

Наконец, дивергенцию на языке форм можно записать с помощью еще одной операции $*$, которая переводит k-форму в $(D - k)$-форму $(*\Phi)_{\mu_1 \ldots \mu_{d-k}} =$ $= \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_D} \Phi_{\mu_{D-k+1} \ldots \mu_D}$, $\partial_{\mu_1} \Phi_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \sim (\mathrm{d} * \Phi)_{\mu_2 \ldots \mu_k}$. Например, если $J^5 =$ $= J^5_\mu\, \mathrm{d}x_\mu$ — 1-форма, отвечающая аксиальному току, то абелева дираковская аномалия (2.25) может быть представлена в виде

$$\mathrm{d} * J^5 = \frac{2}{(2\pi)^n\, n!} \operatorname{Tr} F^n.$$

Выше мы уже записывали особенно громоздкие выражения через дифференциальные формы. Такая запись позволяет не выписывать большого числа векторных индексов.

3.2. Операция, обратная к внешнему дифференцированию

Всякая замкнутая дифференциальная форма Φ ранга $k + 1$, $\mathrm{d}\Phi = 0$, локально интегрируема, т. е. представима в виде внешней производной некоторой k-формы B: $\Phi = \mathrm{d}B$. Форма B может быть выражена через Φ нелокально, в виде интеграла. Например, замкнутая 1-форма $\Phi_\mu \mathrm{d}x_\mu$, $\Phi_{\mu,\nu} =$

$= \Phi_{\nu,\mu}$, является дифференциалом 0-формы

$$B = \int^{x} \Phi_{\mu}\, \mathrm{d}x_{\mu}. \tag{3.1}$$

Нашей первой задачей в этом разделе будет обобщение выражения (3.1) на случай произвольного ранга $k \neq 0$.

3.2.1. *Интегрирование дифференциальных форм*

Можно попытаться искать решение уравнения

$$\Phi_{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}} = (-)^k \partial_{[\mu_{k+1}} B_{\mu_1 \ldots \mu_k]} \tag{3.2}$$

в случае замкнутой формы Φ в том же виде (3.1):

$$B_{\mu_1 \ldots \mu_k}(x) = \int_{C}^{x} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}}\, \mathrm{d}x^{\mu_{k+1}}, \tag{3.3}$$

где интеграл берется вдоль контура C, оканчивающегося в точке x. К сожалению, интеграл зависит от выбора контура, и потому формула (3.3) бессмысленна. Замкнутость $(k+1)$-формы Φ гарантирует независимость от выбора поверхности интегрирования только для интеграла $\int \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}} \mathrm{d}x^{\mu_1} \ldots \mathrm{d}x^{\mu_{k+1}}$, но никак не для интегралов низшего порядка. Справедливость представления (3.1) в этом смысле случайна — оно правильно для замкнутых 1-форм, и только для них.

Однако история с представлением (3.3) еще не закончена. Поскольку нам мешает зависимость от пути интегрирования, можно попытаться зафиксировать этот путь. Простейший выбор контура C — это прямая с линейной параметризацией, идущая из какой-нибудь заданной точки, например из нуля, в точку x:

$$C = \{xt;\ t \in [0,\ 1]\}. \tag{3.4}$$

Отметим сразу, что никакой гарантии, что такой выбор контура в (3.3) приведет к решению уравнения (3.2), нет. Действительно, при изменении точки x (рис. 11) контур C также изменяется: $C + \delta C \neq C$. Если бы интеграл не зависел от выбора контура, то разность

$$\int_{C+\delta C} - \int_{C}$$

равнялась бы интегралу по отрезку $[x,\ x + \delta x]$ и все было бы в порядке. Но на самом деле интеграл от пути зависит, и эта разность не обязана определяться окрестностью точки x, она может оказаться нелокальным выражением, зависящим от значений подынтегральной функции во всех точках контура C. Мы убедимся ниже в правильности такого подозрения, но увидим также, что еще одна простая модификация формулы (3.3) позволит получить правильное представление для $B(x)$.

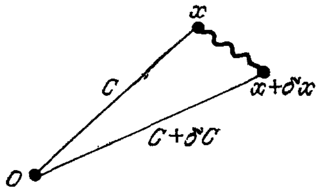

Рис. 11. Вариация контура C в формуле (3.3)

Попробуем использовать в (3.3) контур (3.4) и проверим, удовлетворяет ли получившееся выражение уравнению (3.2):

$$\partial_{[\lambda} \int_0^1 \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k]\mu_{k+1}}(xt)\, x^{\mu_{k+1}}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 [\Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda}(xt) + \Phi_{[\mu_1 \ldots \mu_k \check{\mu}_{k+1},\, \lambda]}(xt)\, t x^{\mu_{k+1}}]\, \mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

Что делать со вторым слагаемым в этой формуле? Воспользовавшись замкнутостью $(k+1)$-формы Φ, можно поменять местами индексы μ_{k+1} и λ:

$$\Phi_{[\mu_1 \ldots \mu_k \check{\mu}_{k+1}, \lambda]} = \frac{1}{k+1} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda, \mu_{k+1}} .$$

Теперь нетрудно увидеть, что в квадратной скобке в (3.5) стоит полная производная по t:

$$\left(\Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda} (xt) + \frac{tx^{\mu_{k+1}}}{k+1} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda, \mu_{k+1}}\right) = \frac{1}{(k+1)\, t^k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(t^{k+1} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda} (xt)\right).$$

Ясно, что если интегрировать это выражение не с единичным весом, как делается в (3.3) и (3.5), а с весом t^k, то мы получим в результате

$$\Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda} (x) - \lim_{t \to +0} t^{k+1} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda} (tx) = \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda} (x). \qquad (3.6)$$

Другими словами, решение уравнения (3.2) выглядит так:

$$B_{\mu_1 \ldots \mu_k} (x) = (-)^k \int\limits_0^1 \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}} (xt)\, x^{\mu_{k+1}} t^k \, \mathrm{d}t. \qquad (3.7)$$

В формуле (3.6) мы специально оставили предел при $t \to 0$. Существуют важные пределы сингулярных форм Φ, для которых этот предел отличен от нуля (см. по этому поводу раздел 3.2.3).

3.2.2. *Калибровка фиксированной точки*

Всякому, кто знаком с калибровкой фиксированной точки, активно используемой в КХД [54, 57], формула (3.7) должна показаться знакомой.В самом деле, существует представление глюонного поля A_μ через напряженность $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu A_\nu]$:

$$A_\mu (x) = - \int F_{\mu\nu} (tx)\, x_\nu t \, \mathrm{d}t. \qquad (3.8)$$

(Это не есть буквальный аналог (3.7), так как в неабелевом случае $\mathrm{d}F \neq 0$ и $F = \mathrm{d}A + A^2 \neq \mathrm{d}A$. Это обстоятельство для нас несущественно, и мы закрываем на него глаза, тем более что ниже приводится вывод, применимый и к (3.7), и к (3.8).)

Формула (3.8) справедлива в калибровке фиксированной точки, заданной условием

$$x_\mu A_\mu (x) = 0. \qquad (3.9)$$

Заметим теперь, что k-форма B определяется из уравнения $\mathrm{d}B = \Phi$ также неоднозначно — существует «калибровочный произвол», и формула (3.7) отвечает определенной фиксации калибровки в соответствии с тем же условием (3.9):

$$x_{\mu_1} B_{\mu_1 \ldots \mu_k} (x) = 0 \quad (\text{т. е. } x * B = 0). \qquad (3.10)$$

Наоборот, условие (3.10) само по себе достаточно для того, чтобы получить формулу (3.7). Действительно,

$$B_{\mu_1 \ldots \mu_k} (y) = \frac{\partial}{\partial y_{\mu_1}} (y_\lambda B_{\lambda \mu_2 \ldots \mu_k}) - y^\lambda \frac{\partial}{\partial y_{\mu_1}} B_{\lambda \mu_2 \ldots \mu_k} =$$

$$= - y_\lambda \frac{\partial}{\partial y_{\mu_1}} B_{\lambda \mu_2 \ldots \mu_k}. \qquad (3.11)$$

Было бы удобно иметь здесь производную не по y_{μ_2}, а по y_λ. Этого можно добиться, используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial y_{\mu_1}} B_{\lambda\mu_2 \ldots \mu_k} - \frac{\partial}{\partial y_{\mu_2}} B_{\lambda\mu_1\mu_3 \ldots \mu_k} + \ldots = \Phi_{\mu_1\lambda\mu_2 \ldots \mu_k} + \frac{\partial}{\partial y_\lambda} B_{\mu_1 \ldots \mu_k}. \quad (3.12)$$

Для того чтобы получить такую линейную комбинацию, достаточно заметить, что наряду с (3.11) имеет место

$$B_{\mu_1 \ldots \mu_k}(y) = -y_\lambda \frac{\partial}{\partial y_{\mu_2}} B_{\mu_1\lambda\mu_2 \ldots \mu_k},$$

и т. д. Поэтому

$$kB_{\mu_1 \ldots \mu_k}(y) + y_\lambda \frac{\partial}{\partial y_\lambda} B_{\mu_1 \ldots \mu_k}(y) = -y_\lambda \Phi_{\mu_1\lambda\mu_2 \ldots \mu_k} =$$
$$= (-)^k \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}}(y)\, y^{\mu_{k+1}}.$$

Подставляя теперь y в виде $y = tx$, получим слева полную производную

$$\frac{1}{t^{k-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [t^k B_{\mu_1 \ldots \mu_k}(tx)],$$

а справа — $(-)^k \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}}(tx)\, x^{\mu_{k+1}} t$. Интегрируя это выражение по $\mathrm{d}t$ с весом t^{k-1}, снова приходим к формуле (3.7). Возвращаясь к (3.8), отметим, что в приведенном выводе замена короткой производной ∂ на длинную $\partial + A$ могла бы быть опасна в соотношении (3.12). Однако в калибровке фиксированной точки необходимое равенство

$$y_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial y_\nu} - y_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial y_\mu} = -y_\mu F_{\mu\nu}$$

выполняется.

3.2.3. *Интегрирование сингулярных форм*

Этот раздел носит чисто технический характер и посвящен упомянутому в конце раздела 3.2.1 нарушению формулы (3.7), связанному с сингулярностью формы Φ в нуле. Мы разберем здесь простой, но важный и характерный пример. Пусть $\tilde{\Phi}_\mu$ имеет в импульсном пространстве вид $q_\mu \delta(q^2)$ $\left(\text{а в координатном, в } 2n \text{ измерениях,} - \frac{x^\mu}{x^{2n}}\right)$. Тогда $q_\mu \tilde{\Phi}_\mu(q) = q^2 \delta(q^2) = 0$, т. е. дивергенция $\tilde{\Phi}_\mu(x)$ равна нулю. Это означает, что $(2n - 1)$-форма $\Phi = *\tilde{\Phi}$, $\Phi_{\mu_1 \ldots \mu_{2n-1}} = \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{2n}} \tilde{\Phi}_{\mu_{2n}}$, замкнута. Вопрос: чьей внешней производной она является? Чему равна $B_{\mu_1 \ldots \mu_{2n-2}}$? Проблема здесь в том, что B имеет $2n - 2$ индекса и обязательно содержит ε-символ с $2n$ индексами. Два лишних индекса надо с чем-то свернуть. В нашем распоряжении на первый взгляд нет никаких векторов, кроме x^μ. Но он только один. Посмотрим, что́ получается по формуле (3.7):

$$B_{\mu_1 \ldots \mu_{2n-2}}(x) = \int\limits_0^1 \left[\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{2n}} \frac{(xt)^{\mu_{2n}}}{|xt|^{2n}}\right] x^{\mu_{2n-1}} t^{2n-2}\, \mathrm{d}t = 0. \quad (3.13)$$

Что же произошло? Ответом является соотношение (3.6). Произведение

$$t^{2n-1} \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_{2n-1}}(tx) = \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{2n}} \frac{x^{\mu_{2n}}}{x^{2n}}$$

вообще не зависит от t, в частности, не обращается в нуль при $t \to 0$, а потому формула (3.7) оказывается неприменимой. (Вывод, приведенный в п. 3.2.2, несправедлив по аналогичной причине: из него вытекает, что формула (3.7) определяет на самом деле не $B(x)$, а $B(x) - \lim\limits_{t\to+0} t^k B(tx)$.)

Для того чтобы формулой (3.7) можно было пользоваться в данной ситуации, ее необходимо регуляризовать. Предел $\lim\limits_{t\to 0} t^{2n-1}\Phi(tx)$ станет нулевым, если заменить функцию $\Phi(y)$ на $\Phi(y + \mathbf{n})$, где $\mathbf{n}_\mu$ — какой-нибудь ненулевой вектор; снятию регуляризации будет отвечать предел $|\mathbf{n}| \to 0$. После такой замены интеграл в (3.13) равен

$$B_{\mu_1\ldots\mu_{2n-2}}(x) = \int\limits_0^1 \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{2n}} \frac{(xt+\mathbf{n})^{\mu_{2n}}}{|xt+\mathbf{n}|^{2n}} x^{\mu_{2n-1}} t^{2n-2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{2n}} \frac{\mathbf{n}^{\mu_{2n}} x^{\mu_{2n-1}}}{x^{2n}} \int\limits_0^1 \frac{t^{2n-2}\,\mathrm{d}t]}{[t+(2(x\mathbf{n})/x^2)]^{2n}} + O(\mathbf{n}) = \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{2n}} \frac{x^{\mu_{2n-1}} n^{\mu_{2n}}}{2x^{2n-2}(x\mathbf{n})} + O(\mathbf{n}), \tag{3.14}$$

или, в импульсном пространстве,

$$B_{\mu_1\ldots\mu_{2n-2}}(q) \sim \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{2n}} \frac{q^{\mu_{2n-1}}\mathbf{n}^{\mu_{2n}}}{(qn)}\,\delta(q^2). \tag{3.15}$$

Например, в двух измерениях ($n = 1$)

$$\varepsilon_{\alpha\mu} q_\mu \delta(q^2) = q_\alpha \left[\varepsilon_{\mu\nu} \frac{q^\mu \mathbf{n}^\nu}{(q\mathbf{n})}\,\delta(q^2)\right].$$

Зависимость B от направления регуляризующего вектора $\mathbf{n}_\mu$ не удивительна — она отвечает произволу в определении B из уравнения (3.2). Важно, что существуют сингулярные формы Φ, для которых B не может быть выбрана в «изотропном» виде — зависящей только от вектора x^μ и параметров, входящих в Φ. Формула (3.7) в таких случаях нуждается в регуляризации, приводящей к появлению произвольного единичного вектора.

3.2.4. *Неточные формы и K-операция*

Следующий вопрос в связи с формулой (3.7) возникает при рассмотрении незамкнутых форм Φ. (3.7) определяет некоторую линейную операцию, действующую на любые формы Φ. В чем ее смысл, если $\mathrm{d}\Phi \neq 0$? Для краткости мы обозначим эту операцию буквой K. K понижает ранг формы на единицу,

$$K\{\Phi_{\nu_1\ldots\nu_{k+1}}\}_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) \equiv (-)^k \int\limits_0^1 \Phi_{\mu_1\ldots\mu_{k+1}}(tx)\, x^{\mu_{k+1}} t^k\,\mathrm{d}t. \tag{3.16}$$

Из вывода, приведенного в разделе 3.2.1, следует, что $(k+1)$-форма $\mathrm{d}K\{\Phi\}$ равна

$$\mathrm{d}K\{\Phi\}_{\mu_1\ldots\mu_{k+1}}(x) = \Phi_{\mu_1\ldots\mu_{k+1}}(x) - (-)^{k+1} \int\limits_0^1 (\mathrm{d}\Phi)_{\mu_1\ldots\mu_{k+1}\mu_{k+2}} x^{\mu_{k+2}} t^{k+1}\,\mathrm{d}t.$$

В случае замкнутой Φ мы возвращаемся к старому утверждению $\mathrm{d}K\{\Phi\} = \Phi$. Однако в случае $\mathrm{d}\Phi \neq 0$ получается новое соотношение

$$\mathrm{d}K\{\Phi\} + K\{\mathrm{d}\Phi\} = \Phi, \tag{3.17}$$

или, в «операторной» форме,

$$\mathrm{d}K + K\mathrm{d} = 1. \tag{3.18}$$

Тождество (3.18) справедливо при действии на любые несингулярные (см.

раздел 3.2.3) формы произвольного ненулевого ранга. Если ранг Ф — нулевой, надо снова вспомнить о соотношении (3.6), в котором на этот раз стоит

$$\lim_{t\to 0} \Phi(tx).$$

При действии на 0-формы (3.18) справедливо, лишь если этот предел равен нулю, т. е. когда 0-форма исчезает в начале координат.

Формула (3.16) определяет линейную операцию, обратную к внешнему дифференцированию, $K = d^{-1}$. Из-за нильпотентности оператора d, $\mathrm{d}^2 = 0$, обратный к нему оператор должен определяться именно по правилу (3.18), а не более привычными соотношениями $K\mathrm{d} = \mathrm{d}K = 1$ (такой оператор был бы не определен на неточных формах). Часто K называют гомотопическим оператором. Он определяется соотношением (3.18) неоднозначно, выбор (3.16) отвечает калибровке фиксированной точки, $x * K\ \{\Phi\} = 0$. Оператор K также нильпотентен, уже его квадрат $K^2 = 0$, что сразу следует из (3.16) и антисимметричности дифференциальных форм:

$$K^2\{\Phi\}_{\mu_1 \ldots \mu_{k-2}} =$$

$$= (-)^{k-2}(-)^{k-1} \int_0^1 \int_0^1 \Phi_{\mu_1 \ldots \mu_k}(\tau t x)\,(\tau x)^{\mu_k} t^{k-1}\,\mathrm{d}t x^{\mu_{k-1}} \tau^{k-2}\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

Теперь — несколько слов о действии операции K на внешнее произведение дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование является нечетной операцией, т. е. действует на произведение по правилу

$$\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}A \cdot B + (-)^{R_A} A\,\mathrm{d}B,$$

где R_A — ранг формы A, а $(-)^{R_A}$ — ее четность. Обратная операция K этим свойством не обладает: при действии на произведение вообще невозможно выделить действие только на один из сомножителей. (Точно так же для обычных интегралов несправедлива формула Лейбница, верная для дифференцирования.)

3.2.5. *Может ли* d^{-1} *быть локальным оператором?*

Понятно, что общий ответ на этот вопрос отрицательный. В общем случае d^{-1} — интегральная, нелокальная операция. Тем не менее может существовать некоторое множество форм, на котором действует операция d^{-1}, не содержащая в явном виде интегрирования. Мы несколько вольно будем называть такую операцию локальной. Ниже речь пойдет о важном классе форм, построенных из 1-формы $A\ (x)$ и ее внешней производной $\mathrm{d}A\ (x)$ и не содержащих *явной* зависимости от x. Именно такие формы возникают при изучении аномалий. Зумино[21] ввел на этом классе форм операцию (мы назовем ее k_Z; в тексте «k_z»), локальную и с некоторыми оговорками удовлетворяющую соотношению $\mathrm{d}k_z + k_z\mathrm{d} = 1$. Мы обсудим эту операцию в разделе 3.3, а в этом разделе попробуем выяснить, каким образом K, заданная формулой (3.16), может превращаться в локальную операцию. В результате станет более ясным определение k_z, а также область ее применимости. При желании читатель может перейти сразу к разделу 3.3, содержание которого не зависит от оставшейся части этого пункта.

Применим операцию K к точной 2-форме $\mathrm{d}A$:

$$K\{\mathrm{d}A\}_\mu(x) = -\int (dA)_{\mu\nu}(xt)\,x^\nu t\,\mathrm{d}t = \int [-\partial_\mu A_\nu(xt) + \partial_\nu A_\mu(xt)]\,x^\nu t\,\mathrm{d}t =$$

$$= A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\int_0^1 A_\nu(xt)\,x^\nu\,\mathrm{d}t = \Big[A - \mathrm{d}\int_0^1 A_\nu(xt)\,x^\nu\,\mathrm{d}t\Big]_\mu. \qquad (3.19)$$

Видно, что в результате получается не исходная форма A, а ее «калибровочное преобразование». После того, что сказано в разделе 3.2.2, это не должно вызывать удивление: мы уже знаем, что в результате применения операции K получается ответ в калибровке фиксированной точки (КФТ).

Договоримся выбирать поле A в КФТ. Тогда соотношение $K\,\{\mathrm{d}A\} = A$ будет выполнено. Более того, в этом случае

$$K\{A\} = \int\limits_0^1 A_\mu\,(xt)\,x^\mu\,\mathrm{d}t = 0.$$

Рассмотрим теперь форму, являющуюся внешним произведением любого количества A и $\mathrm{d}A$, и применим к ней операцию K.

Действуя оператором K на внешнее произведение форм A и $\mathrm{d}A$, мы получим под интегралом сумму нескольких слагаемых, соответствующих свертке x^λ с различными сомножителями. При этом всякий раз, когда x^λ сворачивается с A^λ, в КФТ получается нуль, а когда x^λ сворачивается с $(\mathrm{d}A)_{\mu\lambda} = [\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu]\,(xt)$, получается выражение, в котором

$$\mathrm{d}A_{\mu\lambda}\,(xt)\,x^\lambda$$

заменено на

$$-\frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(tA_\mu\,(xt)).$$

Например, при действии K на произведение p форм $\mathrm{d}A$ и $k+1-2p$ форм A (являющееся $k+1$-формой) возникает сумма

$$K\{\ldots A\,\ldots\mathrm{d}A\,\ldots\mathrm{d}A\,\ldots A\} \equiv$$

$$\equiv (-1)^k \int\limits_0^1 (\ldots A\,\ldots\mathrm{d}A\,\ldots\mathrm{d}A\,\ldots A\,\ldots)\,(xt)_{\ldots\lambda}\,x^\lambda t^k\,\mathrm{d}t =$$

$$= (-)^k \int\limits_0^1 \Big\{\,\ldots + 0 + \ldots + \ldots A\,\ldots\Big[-\frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(tA\,(xt))\Big]\,\ldots$$

$$\ldots\mathrm{d}A\,\ldots A\,\ldots + \ldots A\,\ldots\mathrm{d}A\,\ldots\Big[-\frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,tA\,(xt)\Big]\,\ldots$$

$$\ldots A\,\ldots + \ldots + 0 + \ldots\Big\}\,t^k\,\mathrm{d}t. \qquad (3.20)$$

В каждом из ненулевых слагаемых теперь надо «распределить» t^k по одному t на $k+1-2p$ сомножителей A и по два t на $p-1$ сомножителей $\mathrm{d}A$. Еще одно t идет на сокращение $1/t$ перед

$$-\frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(tA).$$

В результате все $A\,(xt)$ заменяются на $tA\,(xt)$, а $\mathrm{d}A\,(xt)$ — на

$$t^2\,dA_{\mu\nu}\,(xt) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,[tA_\nu\,(xt)]$$

(обращаем внимание на то, что

$$(\partial A)\,(xt) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\,A\,(y)\,|_{y=xt} = \frac{1}{t}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(A\,(xt)).$$

Теперь можно положить $x = 0$ и взять интеграл по t. Полученная таким формальным путем операция выглядит так, как будто мы заменяем один из сомножителей на A и приписываем дополнительный множитель

$$\int\limits_0^1 t^{p+(k+1-2p)-1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^{k-p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1-p} =$$

$$= (\text{число раз, которое встречается буква } A \text{ в произведении})^{-1}.$$

Наконец, знак определяется, исходя из того, что K — нечетная операция, т. е. при прохождении через каждую 1-форму A или внешнее дифференцирование возникает знак минус. Это и есть операция k_Z. В следующем разделе мы разберем ее более подробно, поскольку эта операция чрезвычайно важна при обращении с аномалиями.

3.3. Операция k_Z[21]

Эта операция определена только на формах, составленных из 1-формы A и ее внешней производной $\mathrm{d}A$. k понижает ранг формы на единицу и на указанном классе форм удовлетворяет соотношению

$$k_z\mathrm{d} + \mathrm{d}k_z = 1, \tag{3.21}$$

т. е. действует на этом классе как d^{-1}. Начнем с действия на «элементарные» формы:

$$k_zA = 0, \quad k_z(\mathrm{d}A) = A. \tag{3.22}$$

Ясно, что (3.21) выполняется:

$$(k_z\mathrm{d} + \mathrm{d}k_z)A = k_z(\mathrm{d}A) = A,$$

$$(k_z\mathrm{d} + \mathrm{d}k_z)\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}\,(k_z(\mathrm{d}A)) = \mathrm{d}A.$$

Рассмотрим теперь произведение нескольких форм A и $\mathrm{d}A$, например $A\mathrm{d}A$. Предположим, что k_z действует на произведение как локальная нечетная операция:

$$k_zA = -Ak_z + (k_zA) = -Ak_z,$$

$$k_z\mathrm{d}A = +(\mathrm{d}A)\,k_z + (k_z(\mathrm{d}A)) = +(\mathrm{d}A)\,k_z + A.$$

Тогда $k_z(A\mathrm{d}A) = -Ak_z\mathrm{d}A = -AA = -A^2$. Проверим, выполняется ли соотношение (3.21):

$$dk_z(A\mathrm{d}A) = d\,(-A^2) = -\mathrm{d}AA + A\mathrm{d}A,$$

$$k_z\mathrm{d}\,(A\mathrm{d}A) = k_z(\mathrm{d}A^2) = (A + (\mathrm{d}A)\,k_z)\,\mathrm{d}A = A\mathrm{d}A + \mathrm{d}AA.$$

Получается $(\mathrm{d}k_z + k_z\mathrm{d})(A\mathrm{d}A) = 2A\mathrm{d}A$. Появился лишний множитель 2. Из этого видно, что *локальной* операции k_z не существует. Посмотрим, однако, что происходит в общем случае. Возьмем произведение p 1-форм A и q 2-форм $\mathrm{d}A$, записанных в любом порядке. Тогда

$$\mathrm{d}k_z\,\{\ldots A\ldots A\ldots\} = \ldots + \ldots(\mathrm{d}k_zA)\ldots A\ldots + \ldots A\ldots(\mathrm{d}k_zA)\ldots +$$
$$+ [\ldots(\mathrm{d}A)\ldots(k_zA)\ldots - \ldots(k_zA)\ldots(\mathrm{d}A)\ldots] + \ldots$$

С другой стороны,

$$k_zd\,\{\ldots A\ldots A\ldots\} = \ldots + \ldots(k_z\mathrm{d}A)\ldots A\ldots + \ldots A\ldots(k_z\mathrm{d}A)\ldots +$$
$$+ [-\ldots(\mathrm{d}A)\ldots(k_zA)\ldots + \ldots(k_zA)\ldots(\mathrm{d}A)\ldots] + \ldots$$

Важно, что квадратные скобки в этих двух равенствах отличаются только знаком. Ничего не изменится, если вместо A будут стоять $\mathrm{d}A$. Это означает, что при действии суммы $k_z\mathrm{d} + \mathrm{d}k_z$ на произведение не нужно учитывать перекрестные члены, когда d и k_z действуют на *разные* элементарные формы:

$$(\mathrm{d}k_z + k_z\mathrm{d})\;\{\ldots A\ldots\mathrm{d}A\} = \ldots+\ldots[(\mathrm{d}k_z + k_z\mathrm{d})A]\ldots\mathrm{d}A\ldots+$$
$$+\ldots A\ldots[(k_z\mathrm{d} + \mathrm{d}k_z)\,\mathrm{d}A]\ldots+\ldots = (p+q)\ldots A\ldots\mathrm{d}A\ldots$$

Здесь все знаки — плюс, поскольку $k_z\mathrm{d} + \mathrm{d}k_z$ действует как четная форма.

Итак, мы убедились, что в предположении локальности k_z при действии $\mathrm{d}k_z + k_z\mathrm{d}$ на произведение p форм A и q форм $\mathrm{d}A$ оно умножается не на единицу, а на $p + q$. Чтобы удовлетворить соотношению (3.21), следует ввести дополнительное правило: приписывать каждому такому произведению множитель $1/(p + q)$. Подчеркнем еще раз, что после этого k_z перестает быть локальной операцией в том смысле, что ее действие на произведение не определяется как поочередное действие на сомножители — требуется еще некоторая «глобальная» характеристика — полное число форм $p + q$. Зумино [21] предложил следующее мнемоническое правило для учета этой «нелокальности»: приписать каждой A и $\mathrm{d}A$ по множителю t и взять интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

от получившегося выражения. Ясно, что таким образом воспроизводится фактор $1/(p + q)$. Менее понятно происхождение и смысл этого правила. Мы постарались показать в предыдущем разделе, что нелокальность операции k_z и появление параметра t являются следствием общей структуры операции d^{-1}.

Во избежание недоразумений надо пояснить, что k_z определена «алгебраически»: операция интегрирования здесь сводится фактически к замене $\mathrm{d}A$ на A. Из-за этого k_z «не знает» о важном свойстве замкнутости D-форм в D-мерном пространстве. В самом деле, рассмотрим 2-форму A^2 в двумерном пространстве. С одной стороны, $k_zA^2 = 0$, а с другой — $\mathrm{d}\,(A^2)$ в этой ситуации также равно нулю. Но это явно противоречит соотношению (3.21)! Как такое могло случиться? Возвращаясь к выводу свойств операции k_z, мы обнаружим, что $k_z\mathrm{d}\,(A^2) = [(k_z\mathrm{d}A)\,A + A\,(k_z\mathrm{d}A)] = 2A^2 \neq 0$. Иначе говоря, k_z «не знает» о том, что повышать ранг D-формы запрещено; что же до произведения $k_z\mathrm{d}$, то оно ранга не меняет и полученный таким алгебраическим путем ответ не содержит никакого намека на ошибочность вывода. Можно посмотреть на приведенный пример с несколько иной точки зрения: операция k_z *не всегда* делает из *замкнутой* формы ее прообраз (как это должно быть согласно (3.21):

$$\mathrm{d}\,(k_z\Phi) = \Phi - k_z\mathrm{d}\Phi = \Phi).$$

Например, из замкнутой 2-формы A^2 в двумерии вместо правильного ответа

$$\int\limits_0^1 A_\mu\,(tx)\;A_\nu\,(tx)\,x^\nu t\,\mathrm{d}t$$

получится нуль. Чтобы прообраз получался правильно, необходима алгебраическая замкнутость, т. е. $\mathrm{d}\Phi = 0$ независимо от размерности пространства (в то время как в приведенном примере алгебраически $\mathrm{d}\,(A^2) = \mathrm{d}AA - A\mathrm{d}A \neq 0$). Такое патологическое поведение, естественно, отсутствует у исходной операции K (см. (3.16)). Напомним, что при переходе от K к k_z в конце предыдущего раздела нам потребовалась калибровка фиксированной точки. Из-за этого следует быть особенно внимательными при применении операции k_z к калибровочно неинвариантным формам.

В качестве важных примеров обсудим две $2n$-формы в $2n$-мерном пространстве, возникающие при обсуждении дираковских аномалий: $W = \mathrm{Tr}F^n$ и $W^a = \mathrm{Tr}\,t^aF^n$ $(F = \mathrm{d}A + A^2)$. Обе формы замкнуты и представимы в виде $\mathrm{d}\,(KW)$. Однако заменить K на k_z можно только в случае W. Здесь следует прежде всего вспомнить, что W — калибровочный инвариант, а W^a — нет: при замене $A \to U^{-1}AU + U^{-1}dU$ $W^a \to \mathrm{Tr}\,U^{-1}t^aUF^n \neq W^a$. Кроме этого,

W зануляется при *формальном* (алгебраическом) внешнем дифференцировании, а W^a — нет *):

$$\mathrm{d}W = n\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}F)\,F^{n-1} = n\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}AA - A\mathrm{d}A)\,F^{n-1} = n\,\mathrm{Tr}\,(FA - AF)\,F^{n-1} = 0,$$

$$dW^a = \mathrm{Tr}\,t^a\,[(FA - AF)\,F^{n-1} + F\,(FA - AF)\,F^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + F^{n-1}\,(FA - AF)] = \mathrm{Tr}\,(At^a - t^aA)\,F^n \neq 0$$

(последнее выражение является $(2n + 1)$-формой и, разумеется, обращается в нуль в $2n$-мерном пространстве, но об этом операция k_z «знать» не может). Итак, замкнутая форма $W^a = \mathrm{Tr}\,t^aF^n$ может быть представлена в виде внешней производной только от нелокального по x выражения, в то время как $W = \mathrm{Tr}F^n = \mathrm{d}\,\{k_z\,\mathrm{Tr}\,F^n\}$. Для дальнейшего удобно ввести симметризованный след, подразумевающий симметризацию по всевозможным перестановкам цветовых матриц перед взятием следа:

$$\mathrm{STr}\,(A,\,B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(AB + (-)^{R_A + R_B}BA)$$

и т. п. Тогда $\mathrm{Tr}\,F^n = S\,\mathrm{Tr}\,F^n (\equiv \mathrm{STr}\,(F,\,F,\,\ldots,\,F)) = \mathrm{d}\,(k_z\mathrm{STr}F^n) =$

$$= \mathrm{d}[k_z \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{STr}\,(\mathrm{d}A^k,\,(A^2)^{n-k})] = \mathrm{d} \sum_{k=0}^{n} \frac{kC_n^k}{2n-k}\,\mathrm{STr}\,(\mathrm{d}A^{k-1},\,A,\,(A^2)^{n-k});$$ здесь

$C_n^k = n!/k!(n - k)!$ — коэффициенты бинома, а множитель $2n - k = 2\,(n - k) + k$ связан с интегрированием по t в определении операции k_z.

Отметим еще один момент, касающийся применения операции k_z к $\mathrm{Tr}F^n$. Понятно, что для применимости k_z к *замкнутой* форме необходимо (*не достаточно*), чтобы в ней не было слагаемых типа A^k, не содержащих $\mathrm{d}A$. В самом деле, для замкнутой формы $\mathrm{d}\,\{k_z\Phi\} = \Phi$, а поскольку $k_z\Phi$ *не содержит* интегралов, то, дифференцируя ее, мы обязательно получим выражение, пропорциональное $\mathrm{d}A$. Ясно поэтому, что слагаемое без $\mathrm{d}A$ в $\mathrm{Tr}F^n$, т. е. $\mathrm{Tr}A^{2n}$, равняется нулю. Это действительно так, например,

$$\mathrm{Tr}\,A^2 = \frac{1}{2!}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\,A_\mu A_\nu = \frac{1}{2!\cdot 2}\,\varepsilon_{\mu\nu}A_\mu^a A_\nu^a = 0,$$

$$\mathrm{Tr}\,A^4 = \frac{1}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta = \frac{1}{4!\cdot 8}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f^{abm} f^{cdm} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c A_\beta^d = 0$$

(последнее равенство связано с тождеством Якоби для структурных констант, $f^{a[bm}f^{cd]m} = 0$). Общее доказательство выглядит намного проще:

$$\mathrm{Tr}A^{2n} = \mathrm{Tr}AA^{2n-1} = (-)^{2n-1}\mathrm{Tr}A^{2n-1}A = -\,\mathrm{Tr}A^{2n} = 0$$

(мы переставили A под знаком следа слева направо, а множитель $(-)^{2n-1}$ возник из-за перестановки 1-формы A с $(2n - 1)$-формой A^{2n-1}). Не должно вызвать удивления отсутствие аналогичного свойства у $\mathrm{Tr}t^aF^n$: $\mathrm{Tr}t^aA^{2n} \neq 0$, так как уже при $n = 1$

$$\mathrm{Tr}\,t^aA^2 = \frac{1}{8}\,f^{abc}\varepsilon_{\mu\nu}A_\mu^b A_\nu^c \neq 0.$$

---

*) Здесь можно также использовать тождество Бьянки $\mathrm{D}F = 0$, где $\mathrm{D} = \mathrm{d} + [A,\ ]$; $\mathrm{D}\,(\Phi_1,\,\Phi_2) = (\mathrm{D}\Phi_1)\,\Phi_2 + (-)\,R_{\Phi_1}\Phi_1\mathrm{D}\Phi_2$. Поскольку W и W^a являются следами и не имеют свободных цветовых индексов, то $\mathrm{d}W = \mathrm{D}W$ и $\mathrm{d}W^a = \mathrm{D}W^a$, $\mathrm{dTr}\,F^n = \mathrm{D}\,\mathrm{Tr}F^n = 0$, но $\mathrm{d}\,\mathrm{Tr}\,t^aF^n = \mathrm{D}\,\mathrm{Tr}t^aF^n = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{D}t^a)\,F^n + \mathrm{Tr}\,t^a\mathrm{D}F^n = \mathrm{Tr}\,[A,\,t^a]\,F^n = \mathrm{Tr}\,(At^a - t^aA)\,F^n$.

3.4. Соотношения между аномалиями [20–23, 33]

В этом разделе обсуждаются соотношения между выражениями, стоящими в правых частях четырех простейших аномалий.

Дираковская абелева аномалия в $2n$ измерениях:

$$\mathrm{d} * J^5 \equiv W^{(2n)} = \frac{2}{(2\pi)^n\, n!}\,\mathrm{Tr}\, F^n, \quad F = \mathrm{d}A + A^2, \quad J^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi. \tag{3.23}$$

Дираковская цветная аномалия в $2n$ измерениях:

$$(\mathrm{D} * J^5)^a \equiv W^{a(2n)} = \frac{2}{(2\pi)^n\, n!}\,\mathrm{Tr}\, t^a F^n, \quad J^{5a}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5 t^a\psi. \tag{3.24}$$

Весс-зуминовский член (класс Черна — Саймонса) в $(2n+1)$-мерной калибровочной теории:

$$\ln\det \mathrm{D}_{\text{аном}} = \int W_0^{(2n+1)}, \quad W_0^{(2n+1)} = \\ = \frac{1}{2\,(2\pi)^n\,(n+1)!}\,\mathrm{Tr}\,[A\,(\mathrm{d}A)^{n-1} + \ldots]. \tag{3.25}$$

Вейлевская аномалия в $2n$ измерениях:

$$(\mathrm{D} * J^L)^a \equiv W_1^{a(2n)} = \frac{2}{(2\pi)^n\,(n+1)!}\,\mathrm{Tr}\, t^a\,[(\mathrm{d}A)^n + \ldots] \tag{3.26}$$

Мы покажем, что перечисленные структуры связаны друг с другом с помощью операции k_z следующим образом (рис. 12):

$$W_0^{(2n+1)} = (\pi/2) k_z W^{(2n+2)}, \\ \text{или}\ (\pi/2) W^{(2n+2)} = \mathrm{d} W_0^{(2n+1)}. \tag{3.27}$$

Например, для $n = 1$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Tr}\, F^2 = \mathrm{d}\,\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{Tr}\left(A\,\mathrm{d}A + \frac{2}{3}A^3\right).$$

Левая ветвь диаграммы отвечает соотношению

$$W^{a(2n)} = 4\frac{\delta W_0^{(2n+1)}}{\delta A^a}. \tag{3.28}$$

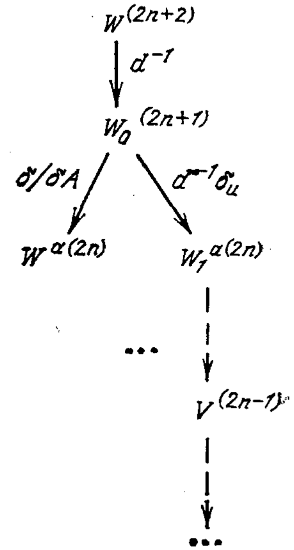

Рис. 12. Схема иерархии аномалий.

Переходы, обозначенные штриховыми стрелками, в тексте не обсуждаются

Например,

$$\frac{2}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\, t^a F = 4\frac{\delta}{\delta A^a}\,\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{Tr}\left(A\,\mathrm{d}A + \frac{2}{3}A^3\right) = \frac{2}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\, t^a\,(\mathrm{d}A + A^2).$$

Вторая ветвь диаграммы связана с более сложными преобразованиями — калибровочными вариациями полей: $\delta_u\colon A \to A + [Au] + \mathrm{d}u$; $\delta_u\colon F = \mathrm{d}A + A^2 \to \mathrm{d}A + [\mathrm{d}A,\, u] - [A,\, \mathrm{d}u] + A^2 + A\,[Au] + [Au]A + \mathrm{d}uA + A\mathrm{d}u = F + [Fu]$. Стрелке на рис. 12 соответствует соотношение

$$u^a W_1^{a(2n)} = 4 k_z \delta_u W_0^{(2n+1)}, \\ \text{или}\ \mathrm{d}\,(u^a W_1^{a(2n)}) = 4\delta_u W_0^{(2n+1)}. \tag{3.29}$$

Например, для $n = 1$

$$\mathrm{d}\,(u^a W_1^{a(2)}) = \mathrm{d}\,\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\, u\,\mathrm{d}A = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}A.$$

С другой стороны,

$$4\delta_u W_0^{(3)} = 4\delta_u\,\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{Tr}\left(A\,\mathrm{d}A + \frac{2}{3}A^3\right) = 4\,\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{Tr}\Big\{\mathrm{du}\,\mathrm{d}A - A\,[A\,\mathrm{d}u] + \\ + \frac{2}{3}(A^2\,\mathrm{d}u + A\,\mathrm{d}uA + \mathrm{d}uA^2)\Big\} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}A.$$

Читатель легко узнает в этих соотношениях между различными аномалиями формулы связи, которые уже обсуждались в разделе 2.3. Там, однако, речь шла о левых, фермионных, частях равенств (3.23) — (3.26). Теперь мы займемся правыми, бозонными, частями, в частности, выведем общие формулы для $W_0^{(2n+1)}$ и $W_1^{a(2n)}$. Иерархия аномалий, задаваемая соотношениями (3.27)—(3.29), представляет из себя чисто алгебраическую конструкцию, связывающую друг с другом различные когомологические характеристики операций варьирования по калибровочному полю (связности) [55] и калибровочных преобразований [33]. С практической точки зрения формулы (3.27)—(3.29) позволяют автоматически находить сложные выражения для вейлевской аномалии в пространствах с большим числом измерений, исходя из простого выражения (3.23) для дираковской аномалии в пространстве на двойку бо́льшей размерности. Отметим также, что иерархия аномалий не исчерпывается диаграммой (см. рис. 12): можно спускаться и ниже — в пространства $2n-1$, $2n-2$ и т. д. измерений. (Метод получения таким образом новых когомологических характеристик называется иногда методом спуска.) Однако физическая интерпретация возникающих в результате формул в настоящее время вызывает разногласия [33, 58–60], и мы не будем останавливаться на этих вопросах.

Оставшаяся часть раздела 3.4 носит чисто технический характер: мы выпишем явные выражения для всех аномалий.

Абелева дираковская аномалия:

$$\frac{(2\pi)^n\, n!}{2} W^{(2n)} = \operatorname{Tr} F^n = \operatorname{S\,Tr} F^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \operatorname{S\,Tr}(\mathrm{d}A^k,\ (A^2)^{n-k}) =$$
$$= \mathrm{d} \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k k}{2n-k} \operatorname{S\,Tr}(\mathrm{d}A^{k-1},\ A,\ (A^2)^{n-k}). \qquad (3.30)$$

Последнее равенство следует из свойств операции k_z; см. раздел 3.3, где этот переход был разъяснен во всех подробностях. Из (3.30) следует, что

$$W_0^{(2n-1)} = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}\, n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k k}{2n-k} \operatorname{STr}(\mathrm{d}A^{k-1},\ A,\ (A^2)^{n-k}),$$
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (3.31)$$

Чтобы перейти к цветной дираковской аномалии, нужно проварьировать это выражение по полю A. Удобно вместо (3.31) использовать интегральное представление, даваемое операцией k_z:

$$2(2\pi)^{n-1} n! W_0^{(2n-1)} = n \operatorname{STr} \int_0^1 A F_\xi^{n-1}\, \mathrm{d}\xi, \quad F_\xi = \xi\, \mathrm{d}A + \xi^2 A^2. \qquad (3.32)$$

Итак, варьируем (3.32) по полю A. Для этого сделаем замену $A \to A + a$ и

$$\operatorname{STr} A F_\xi^{n-1} \to \operatorname{STr} A F_\xi^{n-1} + \operatorname{STr}(a,\ F_\xi^{n-1}) +$$
$$+ (n-1) \operatorname{STr}\{A,\ F_\xi^{n-2},\ \xi\, \mathrm{d}a + \xi^2 (Aa + aA)\}. \qquad (3.33)$$

Теперь можно заметить два обстоятельства. Во-первых, $Aa + aA = [A, a]$, а значит, $\xi \mathrm{d}a + \xi^2 (Aa + aA) = \xi \mathrm{D}_\xi a$, где $\mathrm{D}_\xi = \mathrm{d} + [\xi A,\ ]$ — ковариантная производная по отношению к полю ξA. Во-вторых,

$$\mathrm{D}_\xi F_\xi = 0. \qquad (3.34)$$

Это соотношение получается из тождества Бьянки $\mathrm{D}F = 0$ подстановкой ξA вместо A. Из-за этого последний след в (3.33) с точностью до полной производной равен $+\xi(n-1)\,S\mathrm{Tr}\,(a,\ \mathrm{D}_\xi A,\ F_\xi^{n-2})$. Знак здесь плюс, поскольку из-за нечетности 1-формы $a\,(\mathrm{D}_\xi a)B - a\,(\mathrm{D}_\xi B) = \mathrm{D}_\xi\,(aB)$. Далее, $\mathrm{D}_\xi A = \mathrm{d}A + 2\xi A^2$, и из (3.33) получаем

$$\frac{\delta}{\delta A^a} 2\,(2\pi)^{n-1}\,n!\,W_0^{(2n-1)} = n\,\mathrm{STr}\left\{t^a,\ \int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\,[F_\xi^{n-1} + (n-1)\,(\xi\,\mathrm{d}A + 2\xi^2A^2,\ F_\xi^{n-2})]\right\} =$$

$$= n\,\mathrm{STr}\left\{t^a,\ \int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\,[(nF_\xi + (n-1)\,\xi^2A^2),\ F_\xi^{n-2}]\right\} =$$

$$= n\sum_k \left\{nC_{k-1}^{n-1}\,\frac{S\,\mathrm{Tr}\,\{t^a,\ \mathrm{d}A^{k-1},\ (A^2)^{n-k}]}{2n-k} + (n-1)\,C_{k-1}^{n-2}\,\frac{\mathrm{STr}\,[t^a,\ \mathrm{d}A^{k-1},\ (A^2)^{n-k}]}{2n-k}\right\} =$$

$$= \sum_k \frac{nC_{k-1}^{n-1}}{2n-k}\,\mathrm{STr}\,[t^a,\ \mathrm{d}A^{k-1},\ (A^2)^{n-k}]\,[n + (n-k)] =$$

$$= n\sum_k C_{k-1}^{n-1}\mathrm{STr}\,[t^a,\ \mathrm{d}A^{k-1},\ (A^2)^{n-k}] = n\,\mathrm{Tr}\,(t^aF^{n-1}) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2}\,n!\,W^{o(2n-2)}.$$

Тем самым соотношение $\delta W_0^{(2n-1)}/\delta A^a = W^{a(2n-2)}/4$ доказано.

Теперь займемся связью $W_0^{(2n-1)}$ с $W_1^{a(2n)}$. Для этого потребуется калибровочная вариация выражения (3.32):

$$\delta_u\,\{2\,(2\pi)^n\,(n+1)!\,W_0^{(2n+1)}\} = (n+1)\,\delta_u S\,\mathrm{Tr}\int\limits_0^1 AF_\xi^n\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= (n+1)\,S\,\mathrm{Tr}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\,\{(\mathrm{d}u,\ F_\xi^n) + n\,[A,\ F_\xi^{n-1},\ -\xi\,[A,\ \mathrm{d}u] + \xi^2\,(A\,\mathrm{d}u + \mathrm{d}uA)]\} =$$

$$= (n+1)\,S\,\mathrm{Tr}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\,\{(\mathrm{d}u,\ F_\xi^n) - n\xi\,(1-\xi)\,([\mathrm{d}u,\ A],\ A,\ F_\xi^{n-1})\}. \qquad (3.36)$$

Понятно, что u без производной содержится только в коммутаторах $[A, u]$ $[F_\xi,\ u]$ и выпадает после взятия следа. По этой причине мы с самого начала не писали членов, не содержащих $\mathrm{d}u$. Для доказательства (3.29) нужно прежде всего показать, что в (3.36) стоит полная производная. Но поскольку эта производная пропорциональна $\mathrm{d}u$, все выражение (3.36) должно иметь вид $\mathrm{STr}\,\{\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}V\}$. Для начала мы в качестве наводящего соображения покажем, что в (3.36) сокращается член $\mathrm{STr}\,\{\mathrm{d}u,\ A^{2n}\}$, которого точно не может быть в $\mathrm{STr}\,\{\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}V\}$:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi S\,\mathrm{Tr}\,\{\mathrm{d}u,\ \xi^{2n}A^{2n} - n\xi\,(1-\xi)\,[\mathrm{d}u,\ A],\ A,\ \xi^{2(n-1)}A^{2(n-1)}\} =$$

$$= S\,\mathrm{Tr}\,\{\mathrm{d}u,\ A^{2n}\}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\,[\xi^{2n} - 2n\xi\,(1-\xi)\,\xi^{2(n-1)}].$$

Интеграл равен

$$\frac{1}{2n+1} - 2n\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = 0.$$

Прежде чем выводить общее выражение для $W_1^{(2n-1)}$, еще раз повторим весь путь от дираковской аномалии к вейлевской. Исходным выражением является

$$W^{(2n+2)} = \frac{2}{(2\pi)^{n+1}\,(n+1)!}\,\mathrm{Tr}\,F^{n+1}$$

— явно калибровочно инвариантное выражение. Далее, $W^{(2n+2)}$ представлено в виде

$$\frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}W_0^{(2n+1)},$$

где

$$W_0^{(2n+1)}=\frac{1}{2\,(2\pi)^n\,n!}\,\mathrm{Tr}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi A F_\xi^n$$

уже не обязано быть калибровочно инвариантным, однако изменение $W_0^{(2n+1)}$ при калибровочных преобразованиях полей — полная производная, $\delta_u\,W_0^{(2n-1)}=\mathrm{d}U_u$, поскольку $\mathrm{d}\delta_u W_0^{(2n+1)}=(\pi/2)\delta_u W_0^{(2n+2)}=0$. Вариация $\delta_u W_0^{(2n+1)}$ линейна по u, но из-за бесцветности $W_0^{(2n+1)}$ она может содержать u только в виде $\mathrm{d}u$ (u без производных выпадает при взятии следа). Поэтому $\delta_u W_0^{(2n+1)}=\mathrm{d}U_u=\mathrm{Tr}\,\mathrm{d}uU$ и $0=d\delta_u W_0^{(2n+1)}=-\,\mathrm{Tr}\mathrm{d}u\mathrm{d}U$. Это равенство справедливо для любых u, поэтому $\mathrm{d}U\equiv 0$, а значит, $U=\mathrm{d}V$ и $\delta_u W_0^{(2n+1)}=$ $=\mathrm{Tr}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}V$. Это обстоятельство позволяет применять к (3.36) операцию k_z, которая действует только на A и $\mathrm{d}A$, но не на $\mathrm{d}u$, и в результате мы получим в точности $S\mathrm{Tr}\,\mathrm{d}uV:-\mathrm{dSTr}\,\mathrm{d}uV=\mathrm{STr}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}V=W_0^{(2n+1)}$. Замечательно, что при действии k_z второе слагаемое в

$$\delta_u W_0^{(2n+1)}=\frac{1}{2\,(2\pi)^n\,n!}\,\mathrm{STr}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\,\{\mathrm{d}u,\ F_\xi^n-n\xi\,(1-\xi)\,[\mathrm{d}u,\ A],\ A,\ F_\xi^{n-1}\} \qquad (3.37)$$

обращается в нуль. Это происходит из-за нечетности k_z и из-за взятия *симметризованного* следа. Напомним (раздел 3.3), что $k_zA=0$ и $k_z\mathrm{d}A=A$. Поскольку k_z переводит 2-форму $\mathrm{d}A$ в 1-форму A, она должна быть нечетной операцией. В результате действия k_z на симметризованный след $S\mathrm{Tr}\,([\mathrm{d}u,\ A],$ $A,\ F_\xi^{n-1})$ возникает выражение $\xi^{(n-1)}\,S\mathrm{Tr}([du,\ A],\ A,\ A,\ F_\xi^{n-2})$, которое равно нулю из-за симметризации по двум 1-формам A. Поэтому роль второго слагаемого в (3.37) состоит только в том, чтобы достроить $\mathrm{Tr}\mathrm{d}uF_\xi^n$ до точной формы, что позволяет использовать операцию k_z, сама же эта операция нетривиально действует только на F_ξ^n:

$$\mathrm{STr}\,(\mathrm{d}u,\ F_\xi^n)\xrightarrow{k_z} n\,\mathrm{STr}\,(\mathrm{d}u,\ \xi A,\ F_\xi^{n-1}),$$

так как $k_zF_\xi=k_z\,(\xi\mathrm{d}A+\xi^2A^2)=\xi A$. Вспомним, однако, что по определению операции k_z следует еще домножить все поля A на t и взять интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Но точно ту же самую роль играл при переходе от $W^{(2n+2)}$ к $W_0^{(2n+1)}$ параметр ξ, поэтому достаточно заменить ξ на ξt и проинтегрировать по

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi.$$

Тогда

$$k_z\,\mathrm{STr}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\,(\mathrm{d}u,\ F_\xi^n)=n\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\,\mathrm{STr}\,(\mathrm{d}u,\ \xi tA,\ F_{\xi t}^n).$$

Перейдем к новым переменным интегрированиям (ξt) и t:

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\xi\ \ldots=\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,(\xi t)\int\limits_{(\xi t)}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\frac{1}{t}\ \ldots=\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,(\xi t)\,\frac{1-(\xi t)}{(\xi t)}\ \ldots$$

Обозначая (ξt) через ξ', а затем снова через ξ, найдем

$$k_z \mathrm{STr} \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, (\mathrm{d}u,\ F_\xi^n) = n \int_0^1 \mathrm{d}\xi'\, \frac{1-\xi'}{\xi'} \mathrm{STr}\, (\mathrm{d}u,\ \xi' A,\ F_{\xi'}^{n-1}) =$$

$$= n \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, (1-\xi)\, \mathrm{STr}\, (\mathrm{d}u,\ A,\ F_\xi^{n-1}).$$

В результате будет

$$\delta_u W_0^{(2n+1)} = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}V^{(2n-1)} =$$

$$= \frac{1}{2\,(2\pi)^n\,(n-1)!}\, \mathrm{d} \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, (1-\xi)\, \mathrm{STr}\, (\mathrm{d}u,\ A,\ F_\xi^{n-1}). \tag{3.38}$$

Само $V^{(2n-1)}$ может быть выражено через симметризованное (снова по цветовым индексам) произведение SP:

$$V^{(2n-1)} = \frac{2}{(2\pi)^n\,(n-1)!} \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, (1-\xi)\, \mathrm{SP}\, (A,\ F_\xi^{n-1}) = \frac{2}{(2\pi)^n\,(n+1)!}\, (\mathrm{SP}\, A\, \mathrm{d}A^{n-1} + \ldots). \tag{3.39}$$

След $W_1^{a(2n)} = \mathrm{Tr}\, t^a \mathrm{d}V^{(2n-1)}$ определяет вейлевскую аномалию.

3.5. Аномалия и кограничный оператор [33]

Вычисления, проделанные в предыдущем разделе, допускают красивую и содержательную интерпретацию. Вернемся в очередной раз к условию согласованности Весса — Зумино. Аномалия $w^1(u \mid A) \equiv \int W_D^1(u \mid A)\, \mathrm{d}x$ удовлетворяет соотношению $\delta_u w^1(v \mid A) - \delta_v w^{-1}(u \mid A) - w^1([uv] \mid A) = 0$. Интерес представляют нетривиальные решения этого уравнения, которые не являются калибровочными преобразованиями интеграла от какого-либо локального выражения $w^0(A) \equiv \int W^0(A)\, \mathrm{d}^D x : w^1(u \mid A) \neq \delta_u w^0(A)$ ни для каких $w^0(A)$. В противном случае $w^0(A)$ можно было бы добавить к действию как контрчлен, устраняющий аномалию. Другими словами, аномалия существует только тогда, когда имеются решения $w^1(u \mid A)$ уравнения

$$(\Delta w^1)\,(u,\ v \mid A) \equiv \delta_u w^1(v,\ A) - \delta_v w^1(u \mid A) - w^1([uv] \mid A) = 0, \tag{3.40}$$

не представимые в виде $(\Delta w^0)(u \mid A) \equiv \delta_u w^0(A)$. Теперь надо вспомнить, что всякая вариация $\delta_u w^0(A)$ автоматически удовлетворяет условию (3.40): $\Delta(\Delta w^0) \equiv 0$. Таким образом, имеется операция Δ, квадрат которой равен нулю, $\Delta^2 = 0$, и нас интересуют решения уравнения $\Delta w^1 = 0$, нетривиальные в том смысле, что $w^1 \neq \Delta w^0$. (Тривиальность решений типа $w^1 = \Delta w^0$ выражается в том, что для них $\Delta w^1 = 0$ из-за свойств операции Δ, а не самих решений.) Операция Δ переводит выражения типа $w^0(A)$, зависящие только от полей A, в выражения $(\Delta w^0)(u \mid A)$, содержащие дополнительную зависимость от параметра u калибровочного преобразования (или, проще говоря, от элемента алгебры Ли G). В свою очередь выражения $w^1(u \mid A)$, уже содержащие зависимость от одного элемента алгебры Ли, переводятся этой операцией в $(\Delta w^1)(u,\ v \mid A)$, зависящие от двух элементов u и v. Понятно, что это построение легко обобщается. Следует только позаботиться о сохранении свойства $\Delta^2 = 0$. Например, для $w^2(u,\ v \mid A) = -w^2(v,\ u \mid A)$ можно

5*

определить

$$(\Delta w^2)(u, v, w \mid A) \equiv \delta_u w^2(v, w \mid A) + \delta_v w^2(w, u \mid A) + \delta_w w^2(u, v \mid A) - \\ - w^2([uv], w \mid A) - w^2([v\,w], u \mid A) - w^2([wu], v \mid A).$$

Легко проверить, что

$$(\Delta^2 w^1)(u, v, w \mid A) = (\Delta(\Delta w^2))(u, v, w \mid A) = w^1([[uv]w] \mid A) + \\ + w^1([[vw]u] \mid A) + w^1([[wu]v] \mid A) = 0$$

в силу тождества Якоби для алгебры Ли, которое легко применить, если $w^1(u \mid A)$ линейно по переменной u.

Вообще, для любого n можно ввести линейное пространство L^n выражений $w^n(u_1, \ldots, u_n \mid A)$, совершенно антисимметричных по всем $u_1, \ldots, u_n$ и линейных по каждому из них. Такие w^n называются n-коцепями, и на них определенно действие «кограничного оператора» $\Delta : L^n \to L^{n+1}$, такое, что $\Delta^2 = 0$. На n-коцепь w^n Δ действует по правилу

$$(\Delta w^n)(u_1, \quad , u_{n+1}|A) = \sum_i (-)^{P_i} \delta_{u_i} w^n(u_1 \ldots u_i \ldots u_{n+1}|A) - \\ - \sum_{i<j} (-)^{P_{ij}} w^n([u_i u_j], u_1 \ldots \check{u}_i \ldots \check{u}_j \ldots u_{n+1}|A); \qquad (3.41)$$

здесь P_i и P_{ij} — соответственно четности подстановок $(i, 1, \ldots, \check{i}, \ldots, n+1)$ и $(i, j, 1, \ldots, \check{i}, \ldots, \check{j}, \ldots n+1)$. Галочки означают пропуск отмеченных букв. Последовательность отображений

$$L^0 \xrightarrow{\Delta} L^1 \xrightarrow{\Delta} \ldots \xrightarrow{\Delta} L^{n-1} \xrightarrow{\Delta} L^n \xrightarrow{\Delta} L^{n+1} \xrightarrow{\Delta} \ldots$$

обладает следующим свойством:

образ $\mathrm{Im}_{n-1}\Delta = \Delta B^{n-1} = \left\{\begin{array}{l}\text{множество всех «кограничных» (или «точных»)}\\ \text{элементов } L^n\text{, получающихся из каких-то}\\ \text{элементов } L^{n-1} \text{ при отображении } \Delta,\end{array}\right.$

ядру $\mathrm{Ker}_n\,\Delta = \left\{\begin{array}{l}\text{множество всех «козамкнутых» элементов } L^n,\\ \text{зануляющихся при отображении } \Delta \text{ из } L^n \text{ в } L^{n+1},\end{array}\right.$

$$\mathrm{Im}_{n-1}\Delta \subset \mathrm{Ker}_n\Delta.$$

Они, однако, не обязаны совпадать: могут существовать «коциклические» элементы, являющиеся козамкнутыми, но не кограничными. Для этого требуется, чтобы была нетривиальной «группа когомологий» $H^n(\Delta) \equiv \equiv \mathrm{Ker}_n\Delta/\mathrm{Im}_{n-1}\Delta$. ($\mathrm{Im}_{n-1}\Delta$ и $\mathrm{Ker}_n\Delta$ являются линейными подпространствами в L^n, поэтому

$$H^n(\Delta) = \left\{\begin{array}{l}\text{множество классов эквивалентности элементов}\\ \mathrm{Ker}_n\,\Delta\text{, отличающихся на элементы } \mathrm{Im}_{n-1}\,\Delta\end{array}\right.$$

также является линейным пространством и, в частности, имеет структуру абелевой группы по сложению.)

Возвращаясь к аномалиям, мы можем сделать вывод, что аномалия $w^1(u \mid A)$ является 1-коциклом — элементом группы когомологий $H^1(\Delta)$.

Что же приобретено в результате такой переформулировки условий согласованности? Первое и главное — выяснен алгебраический смысл этого условия, и вопрос об аномалии связан со многими другими (математическими) вопросами. Есть и более «практические» результаты: аномалия оказалась одним из элементов бесконечного ряда: помимо первой когомологии H^1 есть еще H^2, H^3 и т. д. — возникла иерархия аномалий. К этому ряду мы вернемся чуть позже.

Наконец, получился новый вычислительный метод. Для нахождения аномалии w^1 $(u \mid A)$ надо выписать все элементы L^1 и отобрать те их линейные комбинации, которые зануляются при действии Δ. Получится $\mathrm{Ker}_1\Delta$. Далее надо написать все элементы L^0 и подействовать на них Δ: получится $\mathrm{Im}_0\Delta$. Разница между $\mathrm{Ker}_1\Delta$ и $\mathrm{Im}_0\Delta$ — это и есть аномалия (с точностью до числовых множителей). Посмотрим, как работает этот метод на конкретном примере. Сами пространства L^0, L^1, . . . зависят от размерности пространства-времени D: этим определяется зависимость коцепей, являющихся интегралами D-форм, от полей A. Остановимся на простейшем случае $D = 2$. Базис в линейном пространстве $L^1_{D=1}$ состоит из двух элементов $\mathrm{Tr}\int u\mathrm{d}A$ и $\mathrm{Tr}\int uA^2$, которые операция Δ переводит соответственно в

$\int \mathrm{d}\,[\mathrm{Tr}\,[uv]A) =$

$= 0$ (интеграл от полной производной) и $\mathrm{Tr}\int A\mathrm{d}\,[uv] + \mathrm{Tr}\int [uv]A^2 \neq 0$.

Поэтому $\mathrm{Ker}^1_{D=2}\Delta$ состоит из 2-форм $\mathrm{Tr}\int u\mathrm{d}A$ с произвольным численным множителем. Пространство $L^0_{D=2}$ оказывается пустым: и $\mathrm{Tr}\int \mathrm{d}A = 0$, и $\mathrm{Tr}\int A^2 = 0$, так что $\mathrm{Im}^0_{D=2}\Delta = 0$. Таким образом, $H^1_{D=2}(\Delta) = \{\mathrm{const}\cdot\mathrm{Tr}\int u\,\mathrm{d}A\}$. Мы знаем, что вейлевская аномалия в двух измерениях действительно имеет такой вид. Численный множитель, конечно, не фиксируется вычислением группы когомологий, как и самим условием согласованности Весса — Зумино.

Следует сказать, что такой чисто алгебраический метод вычисления аномалий весьма полезен в сложных многомерных задачах. Кроме того, он применим не только к вейлевским аномалиям: единственное, что требуется,— связать аномалию с когомологиями некоторого комплекса. Интересно, что это удается сделать даже для конформных аномалий [24]. Чтобы превратить соответствующий оператор $\Delta' = g^{\mu\nu}\delta/\delta g^{\mu\nu}$ в кограничный (т. е. удовлетворяющий условию $\Delta^2 = 0$), его просто домножают на грассманов параметр $\theta : \Delta = \theta\Delta' = \theta g^{\mu\nu\delta}/\delta g^{\mu\nu}$, $\theta^2 = 0$. Такая, на первый взгляд малоосмысленная, операция позволяет сильно упростить вычисление конформных аномалий в присутствии внешних гравитационных и янг-миллсовских полей.

Вернемся к иерархии аномалий. Прежде всего объясним, как выглядит метод спуска, применявшийся в предыдущем разделе, с точки зрения комплекса:

$$L^0 \xrightarrow{\Delta} L^1 \xrightarrow{\Delta} \ldots \xrightarrow{\Delta} L^n \xrightarrow{\Delta} \ldots$$

Поскольку метод спуска использует переход из одной размерности пространства-времени в другую с помощью операций d и d^{-1}, понятно, что он имеет дело не с пространствами L^n_D интегралов от D-форм, а с пространствами A^n_D самих D-форм: $L^n_D = \int A^n_D$. Операция Δ действует по правилу (3.41) и на самих формах, и при этом снова $\Delta^2 = 0$. Во избежание путаницы эту операцию на формах мы обозначим другой буквой $\delta : \Delta\int W^n_D = \int \delta W^n_D$. Поскольку $\delta^2 = 0$, имеется комплекс

$$A^0_D \xrightarrow{\delta} A^1_D \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} A^n_D \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} A^D_D \xrightarrow{\delta} 0.$$

Кроме того, теперь в нашем распоряжении имеется еще и операция внешнего дифференцирования, переводящая A^n_D в A^n_{D+1}, также удовлетворяющая условию $\mathrm{d}^2 = 0$. Так что имеется даже «двойной комплекс»

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & & {} & \\
A_D^0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & A_D^1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & \ldots \arrow[r, "\delta"] & A_D^n \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[u, "\mathrm{d}"] & \ldots \arrow[u, "\mathrm{d}"] & & \ldots \arrow[u, "\mathrm{d}"] & \\
A_1^0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & A_1^1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & \ldots \arrow[r, "\delta"] & A_1^n \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & \ldots \\
A_0^0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & A_1^0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & \ldots \arrow[r, "\delta"] & A_0^n \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & \ldots
\end{tikzcd} \tag{3.42}$$

Операции δ и d коммутируют друг с другом, что следует из равенства $\mathrm{d}\delta_u A = \mathrm{d}([Au] + \mathrm{d}u) = [\mathrm{d}A, \quad u] - [A, \quad \mathrm{d}u] = \delta_u \mathrm{d}A$. Поэтому диаграмма (3.42) коммутативная. Что такое аномалия W_D^1 в терминах этого двойного комплекса? Условие Весса — Зумино требует, чтобы $\Delta \int W_D^1 = \int \delta W_D^1 = 0$, а значит, $\delta W_D^1 = \mathrm{d}W_{D-1}^2$ для какого-то $W_{D-1}^2 \in A_{D-1}^2$: W_D^1 не обязано принадлежать ядру δ, но должно переводиться этим оператором в полную производную. Зато интеграл от возникшей в результате $(D - 1)$-формы $\int W_{D-1}^2 \in L_{D-1}^2$ сам удовлетворяет соотношению $\Delta \int W_{D-1}^2 = 0$. Действительно, δW_{D-1}^2 является точной формой, поскольку $\mathrm{d}(\delta W_{D-1}^2) = \delta(\mathrm{d}W_{D-1}^2) = \delta(\delta W_D^1) = \delta^2 K_D^1 = 0$, и $\Delta \int W_{D-1}^2 = \int \delta W_{D-1}^2 =$ интеграл от точной формы $= 0$. Короче говоря, Δ-замкнутые элементы из L_D^1 отображаются в Δ-замнутые элементы L_{D-1}^2. Более того, Δ-точные элементы из L_D^1 переходят в Δ-точные элементы L_{D-1}^2. В самом деле, если $\int W_D^1 = \Delta \int W_D^0$, то $W_D^1 = \delta W_D^0 + \mathrm{d}W_{D-1}^1$ для какого-то $W_{D-1}^1 \in A_{D-1}^1$. тогда $\delta W_D^1 = \delta \mathrm{d} W_{D-1}^1$ и $\mathrm{d}\delta \; W_D^1$ соответствует в A_{D-1}^2 элементу $\delta W_{D-1}^2 + \mathrm{d}W_{D-2}^2$ с каким-то W_{D-2}^2. Интеграл от этого элемента, $\int (\delta W_{D-1}^1 + \mathrm{d}W_{D-2}^2) = \int \delta W_{D-1}^1 = \Delta \int W_{D-1}^1$, является Δ-точным в L_{D-1}^2.

Все это означает, что свойства двойного комплекса (3.41) позволяют построить отображение $P : H_D^1(\Delta) \rightarrow H_{D-1}^2(\Delta)$ групп когомологий комплексов $L_D^0 \xrightarrow{\Delta} L_D^1 \xrightarrow{\Delta} \ldots \xrightarrow{\Delta} L_D^n \xrightarrow{\Delta} \ldots$ и $L_{D-1}^0 \xrightarrow{\Delta} L_{D-1}^1 \xrightarrow{\Delta} \ldots \xrightarrow{\Delta} \xrightarrow{\Delta} L_{D-1}^n \xrightarrow{\Delta} \ldots$ Понятно, что точно таким же образом можно построить операцию $P : H_D^n(\Delta) \rightarrow H_{D-1}^{n+1}(\Delta)$ для любых n и D. (Правило состоит в том, что для $\Delta \int W_D^n = 0 \; \delta W_D^n = \mathrm{d}W_{D-1}^{n+1}$ и $\Delta \int W_{D-1}^{n+1} = 0$, а если $\int W_D^n = \Delta \int W_D^{n-1}$, то $W_D^n = \delta W_D^{n-1} + \mathrm{d}W_{D-1}^n$, $\delta W_D^n = \mathrm{d}(\delta W_{D-1}^n + \mathrm{d}W_{D-2}^n)$ и $\int (\delta W_{D-1}^n + \mathrm{d}W_{D-2}^n) = \Delta \int W_{D-1}^n$.)

Иерархия аномалий получается последовательным применением операции P к $H_D^0(\Delta) : H_D^0(\Delta) \xrightarrow{\mathrm{P}} H_{D-1}^1(\Delta) \xrightarrow{\mathrm{P}} H_{D-2}^2(\Delta) \xrightarrow{\mathrm{P}} \ldots$ В этой последовательности P^2, вообще говоря, не равно нулю и само P обычно осуществляет сюръективное отображение: всякий коцикл из H_{D-k-1}^{k+1} получается применением P из некоторого коцикла в H_{D-k}^k. Исходное H_D^0 — пространство калибровочно инвариантных интегралов от D-форм — в случае четного и нечетного D устроено по-разному. Для $D = 2n$ базисным элементом в H_D^0 является $\mathrm{Tr} \int F^n$. В этом случае сама $2n$-форма $W_{2n}^0 = \mathrm{Tr} F^n$ является калибровочно инвариантной, $\delta W_{2n} = 0$, и первое же применение операции P приводит к нулевому результату. Для нечетного $D = 2n - 1$ ситуация иная. $W^0_{2n} = \mathrm{Tr} F^n = dW^0_{2n-1}$, и $\int W^0_{2n-1}$ является базисным элементом H^0_{2n-1}. δW^0_{2n-1} уже не обращается в нуль, и операция P позволяет получать из $\int W^0_{2n-1}$ выражение $\int W^1_{2n-2}$ для вейлевской аномалии в $2n - 2$ измерениях. Пример такого вычисления уже приводился в предыдущем разделе.

4. ГЛОБАЛЬНЫЕ АНОМАЛИИ

В 1982 г. Виттеном [46] было исследовано поведение фермионного детерминанта при топологически нетривиальных калибровочных преобразованиях. Интерес при этом представляют вейлевские фермионы, поскольку регуляризация Паули — Вилларса гарантирует калибровочную инвариантность детерминанта дираковских фермионов. Действие вейлевских фермионов неинвариантно уже в силу вейлевской аномалии, связанной с детерминантом регуляторов. Теперь же речь идет о *дополнительной* неинвариантности. (Конечно, глобальная аномалия более существенна в тех случаях, когда локальная вейлевская отсутствует. Так происходит, например, в случае группы SU (2) при $D = 4$, так как $\mathrm{Tr} t^a FF \sim d^{abc} F^b F^c = 0$, которой будет уделено основное внимание в дальнейшем.) Оказалось, что при $D = 4$ вейлевские фермионы в фундаментальном представлении группы $G = \mathrm{Sp}\,(n)$, в частности $\mathrm{SU}\,(2) = \mathrm{Sp}\,(1)$, обязательно порождают действие, которое изменяется в точности на $i\pi$ (а экспонента от действия меняет знак) при нестягиваемом калибровочном преобразовании, существование которого связано с нетривиальностью гомотопической группы $\pi_{D=4}\,(G)$. Это калибровочное преобразование существенно глобально и не сводится к композиции инфинитезимальных. Соответствующая неинвариантность действия не проявляется поэтому в несохранении какого-либо тока.

Несколько позднее Редлихом [41] (см. также [35]) было обнаружено аналогичное явление в случае нечетномерных теорий. Здесь регуляризованный детерминант, конечно, не может нарушать калибровочную инвариантность (фермионы дираковские), однако по отдельности детерминанты физического фермиона и регулятора оказываются неинвариантными. Более точно, надо рассмотреть вклады в эффективное действие, пропорциональные ε-символу. Соответствующая аномальная структура в лагранжиане $(2n + 1)$-мерной теории имеет вид

$$W_0^{(2n+1)} = \frac{1}{2\,(2\pi)^n\,(n+1)!}\,\mathrm{Tr}\,(A\,\mathrm{d}A^n + \ldots), \tag{4.1}$$

а коэффициент перед ней в импульсном пространстве устроен так [45]:

$$1 - \frac{2m}{|p|}\arcsin\frac{|p|}{(|p|^2 + 4m^2)^{1/2}}\,. \tag{4.2}$$

Единица — это вклад регулятора, а второе (нелокальное) слагаемое — вклад физического фермиона с массой m. Предел $m = 0$ не всегда осмыслен — теория содержит инфракрасные расходимости. Для очень легкого фермиона при всех энергиях $|p| > m$ второй член в скобке несуществен, поэтому все физические свойства теории (спектр, характеристики рассеяния) определяются действием с единичным коэффициентом при структуре $\int W_0^{(2n+1)}$. Если же заходит речь о глобальных калибровочных преобразованиях, медленно спадающих на бесконечности, то нелокальный член «срабатывает» и компенсирует неинвариантность действия с $\int W_0^{(2n+1)}$ при таких преобразованиях. Например, для $D = 2n + 1 = 3$ вариация $\int W_0^{(2n+1)}$ при преобразовании $A \to g^{-1}(Ag + dg)$ равна $\pi \mathrm{Tr} \int (24\pi^2)^{-1} \mathrm{Tr}\,(g^{-1}dg)$ и кратна π, поэтому существуют преобразования (отвечающие нечетному топологическому заряду обыкновенного четырехмерного БПТШ инстантона), при которых $\exp\left(i \int W_0^{(3)}\right)$ меняет знак. Однако действие физического фермиона при этом также меняется на π, и теория оказывается инвариантной.

Мы уже вычисляли в разделе 2.3 аномальный вклад в детерминант регуляторного фермиона. Интересно, что в неинвариантности этого детерминанта можно убедиться тем же методом, каким Виттен исследовал SU(2)-аномалию. Следует еще раз подчеркнуть и глубокое различие между теориями, изучавшимися Виттеном и Редлихом. В первом случае регуляризации, делающей производящий функционал инвариантным, *не существует*, т. е. теория *несамосогласованна*, а во втором — с теорией все в порядке, однако *не всякая* регуляризация может быть использована. (В частности, неизбежным оказываются нарушения P_1- и T-инвариантностей, которые есть в классической теории *безмассовых* фермионов в нечетном числе измерений.) Вывод SU(2)-аномалии основан в конечном счете на теоремах об индексе оператора Дирака. При этом индексы в четырехмерной теории, рассмотренной Виттеном, и в трехмерной — у Редлиха — различны. Не ставя перед собой задачи вывести соответствующие теоремы, мы в этом разделе, следуя в основном работе [45], постараемся объяснить, каким образом отличие индексов приводит к отличию физических результатов: возможности или невозможности регуляризовать теорию.

4.1. Свойства фермионного детерминанта по отношению к топологически нетривиальным калибровочным преобразованиям

Метод исследования этого вопроса, использованный в статье Виттена, состоит в следующем:

а) Заметим прежде всего, что детерминант оператора Дирака для вейлевских фермионов не определен, поскольку $\hat{\mathrm{D}} = \hat{\partial} + \hat{A}$ переводит левые фермионы в правые, т. е. выводит из пространства левых фермионов. В остальных разделах мы разрешали эту трудность, переходя к оператору

$$\mathrm{D} = \hat{\partial} + \hat{A}\,\frac{1-\gamma^5}{2}.$$

Этот оператор, однако, неэрмитов и потому неудобен при рассмотрении топологических эффектов. Вместо этого можно определить вейлевский детерминант как корень квадратный из дираковского, воспользовавшись тем, что собственные значения последнего «вырождены»:

$$i\hat{\mathrm{D}}^{(4)}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda,$$

$$i\hat{\mathrm{D}}^{(4)}(\gamma^5\psi_\lambda) = -\lambda(\gamma^5\psi_\lambda),$$

т. е. $\gamma^5\psi_\lambda = \psi_{-\lambda}$ (для краткости мы будем называть это вырождение с точностью до знака вырождением в кавычках). Подчеркнем, что здесь существенна безмассовость оператора Дирака $i\hat{\mathrm{D}}^{(4)}$, вопрос о регуляризации пока открыт. В регуляризованной теории, вообще говоря, возникает обычная вейлевская аномалия. С другой стороны, виттеновская аномалия не обязательно присутствует в детерминанте регуляторов (см. ниже), в частности, при $D = 4$ ее нет, поэтому достаточно пока рассмотреть нерегуляризованный детерминант.

Взятие корня определено с точностью до знака. Строго говоря, вся информация о фазе вейлевского детерминанта выбрасывается при переходе к обычному оператору Дирака: $\det\,(i\hat{D}^{(4)})$ есть произведение детерминантов для правых и левых фермионов, которые комплексно сопряжены друг другу, и фаза каждого из них целиком сокращается в произведении фазой другого. Тем более замечательно, что изменение этой фазы, не связанное с регуляторами, оставляет свой след в характеристиках оператора $i\hat{D}^{(4)}$.

б) След этот обнаруживается при рассмотрении не всего детерминанта $\det(i\hat{D}^{(4)})$, а эволюции отдельных собственных значений $i\hat{D}^{(4)}$ — при изменении поля A. Сделаем с полем A топологически нетривиальное калибровочное преобразование $A \to \Omega A$ (такое, что отображение $\Omega : S^4 \to G$ не гомотопно единичному). Спектры операторов $i\hat{D}^{(4)}(A)$ и $i\hat{D}^{(4)}(\Omega A)$, разумеется, совпадают, собственные функции второго получаются из собственных функций первого умножением на матрицу Ω^{-1}. Любая интерполяция между A и ΩA, например,

$$A_\xi = A\,\frac{1-\operatorname{th}\xi}{2} + (\Omega A)\,\frac{1+\operatorname{th}\xi}{2},$$

по определению Ω не является калибровочным преобразованием поля A. Поэтому при конечных значениях ξ спектр оператора $i\hat{D}^{(4)}(A_\xi)$ отличается от спектра $iD^{(4)}(A)$, и можно задать вопрос об эволюции собственных значений оператора $i\hat{D}^{(4)}_{\xi}(A_\xi)$ с изменением ξ. Картина этой эволюции изображена на рис. 13. Картинка эта симметрична относительно оси абсцисс, поскольку при любых значениях ξ $i\hat{D}^{(4)}(A_\xi)$ антикоммутирует с γ^5 и его спектр «вырожден». Однако, сейчас важно не это. Важно наличие двух собственных значений, *меняющихся местами*. Может показаться, что в точке пересечения трудно сказать, прошло собственное значение сверху вниз или же «отразилось» от оси абсцисс и ушло обратно вверх. На самом деле вейлевский детерминант должен определяться как аналитическая функция полей и в окрестности своего нулевого значения, $\det[i\hat{D}^{(4)}(A_{\xi=\xi_0})] = 0$, иметь вид $\det(i\hat{D}^{(4)}(A_\xi)) \sim (A_\xi - A_{\xi_0}) \sim \xi - \xi_0$, т. е. менять знак при прохождении через простой нуль. Поэтому никакого излома на траектории собственного значения быть не может.

Вопросу о том, как возникает картина эволюции собственных значений (с. з.), изображенная на рис. 13, посвящен следующий раздел. Здесь же мы хотели бы обсудить еще нечетномерную теорию Янга — Миллса, которую рассматривал Редлих.

а) Нечетномерный оператор Дирака $i\hat{D}^{(2n+1)}$ имеет хорошо определенные с. з., а спектр этого оператора никаким «вырождением» не обладает (матрицы, антикоммутирующей со всеми γ-матрицами, теперь нет). Если гомотопическая группа $\pi_{2n+1}(G) \neq 0$, то здесь тоже есть нестягиваемые калибровочные преобразования Ω, и можно рассмотреть эволюцию с. з. оператора $i\hat{D}^{(2n+1)}_{\xi}(A_\xi)$. Однако картина этой эволюции выглядит теперь совершенно иначе (почему — объясняется в следующем разделе) (рис. 14). Асимметрия картинки связана с отсутствием «вырождения» спектра. Чтобы с. з. двигались не вверх, а вниз, надо рассмотреть либо оператор $i\hat{D}^{(2n+1)}_{\xi}$, либо преобразование Ω' с противоположным топологическим зарядом (индексом Понтрягина).

Теперь — о том, что мы узнаём из этих картинок. Чтобы определить детерминант, нужно отобрать какую-то часть собственных значений: во-первых, отбросить все с. з., превосходящие по модулю ультрафиолетовое обрезание Λ, а во-вторых — в вейлевском случае (см. рис. 13) — оставить лишь по одному из каждой пары с. з. $\pm\lambda$. Произведение оставшихся с.з., как легко понять, меняет знак в случае обеих картинок рис. 13 и 14. Однако теория еще не регуляризована — само по себе ультрафиолетовое обрезание Λ оказывается плохой регуляризацией для $\det(i\hat{D}^{(2n+1)})$, поскольку одно из с. з. в области $(-\Lambda, +\Lambda)$ при изменении ξ обязательно выйдет из нее: регуляризации при $\xi = -\infty$ и $\xi = +\infty$ окажутся различными. Поэтому необходимо учесть детерминант регуляторов. Важно, что регуляризация по самой своей идее затрагивает только высокие собственные значения. В вейлевском случае (см. рис. 13) в поведении высоких с. з. нет ничего замечательного, они отображаются при изменении сами в себя, поэтому детерминант регуляторов *не может* скомпенсировать изменение знака «низкоэнергетического» детерминанта. В случае рис. 14 это уже не так. Теперь все, как угодно высокие, с. з. поднимаются с изменением ξ на одну ступеньку. Всегда найдется с. з., которое пересекает горизонтальную прямую, проведенную на высоте $-M$, и потому детерминант $\det(i\hat{\mathrm{D}}^{(2n+1)} + M)$ меняет знак одновременно с с $\det(i\hat{\mathrm{D}}^{(2n+1)})$. Этот детерминант еще не является настоящим детерминантом регуляторов, где фигурирует оператор $i\hat{\mathrm{D}}^{(2n+1)} + iM$ (неэрмитов), однако легко понять, что при движении вещественных с. з. оператора $i\hat{\mathrm{D}}^{(2n+1)}$ в соответствии с рис. 14 фаза $\det(i\hat{\mathrm{D}}^{(2n+1)} + iM)$ меняется в точности на π и регуляторный детерминант также меняет знак. В результате регуляризованный детерминант оказывается калибровочно инвариантным.

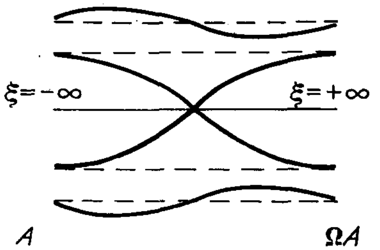

Рис. 13. Картина эволюции собственных значений *четномерного* оператора Дирака $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(4)} = i(\hat{\partial} + \hat{A}_\xi)^{(4)}$ в случае нестягиваемого калибровочного преобразования Ω.

$$A_\xi = \frac{1-\mathrm{th}\,\xi}{2}A + \frac{1+\mathrm{th}\,\xi}{2}\Omega A$$

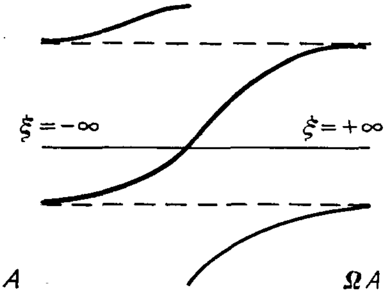

Рис. 14. Картина эволюции собственных значений *нечетномерного* оператора Дирака $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(3)} = i(\hat{\partial} + \hat{A}_\xi)^{(3)}$ в случае нестягиваемого калибровочного преобразования Ω.

$$A_\xi = \frac{1-\mathrm{th}\,\xi}{2}A + \frac{1+\mathrm{th}\,\xi}{2}\Omega A$$

Короче говоря, вейлевская теория, в которой с. з. ведут себя в соответствии с картинкой рис. 13 (при $d = 4$ это относится к калибровочным группам $G = \mathrm{Sp}(n)$), не может быть регуляризована с сохранением инвариантности относительно топологически нетривиальных калибровочных преобразований, в результате производящий функционал не определен. В нечетномерной теории Янга — Миллса, в которой с. з. ведут себя в соответствии с рис. 14 (это происходит всякий раз, когда группа $\pi_{2n+1}(G) \neq 0$), детерминант физического и регуляторного фермионов по отдельности не калибровочно инвариантны, однако их отношение — регуляризованный детерминант — хорошо определенная величина.

4.2. Различие между γ^5-индексом и C-индексом

Этот раздел посвящен доказательству того, что эволюция собственных значений операторов $i\hat{\mathrm{D}}^{(D)}(A_\xi)$ действительно имеет вид, изображенный на рис. 13 и 14 в зависимости от размерности пространства-времени.

Эволюцию с. з. оператора Дирака $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(D)}$ можно исследовать, воспользовавшись ее связью с нулевыми модами операторов на единицу большей размерности, например,

$$\mathrm{D}_1^{(D+1)} = \frac{\partial}{\partial\xi} + i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(D)} - M.$$

В самом деле, с. з. эрмитова оператора $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(D)}$ вещественны, и если для некоторого с. з. λ ($\xi = -\infty$) $< M$, а λ ($\xi = +\infty$) $> M$, то оператор $\mathrm{D}_1^{(D+1)}$ должен иметь нулевую моду

$$\psi(\xi) \sim \exp\left[-\int^{\xi}(\lambda(\xi) - M)\,\mathrm{d}\xi\right].$$

Эта функция является нормируемой, т. е. входит в число функций, которые необходимо учитывать в мере континуального интегрирования, и она удовлетворяет уравнению $D_1^{(D+1)}\psi = 0$. Точнее, если $i\hat{D}_\xi^{(D)}\psi_{\lambda,\xi} = \lambda(\xi)\psi_{\lambda,\xi}$, то

$$\psi(\xi) = \psi_{\lambda,\xi}\exp\left[-\int^{\xi}(\lambda(\xi) - M)\,\mathrm{d}\xi\right].$$

Производная ψ (ξ) по ξ равна

$$\left(-\lambda(\xi) + M + \frac{\partial}{\partial\xi}\ln\psi_{\lambda,\xi}\right)\psi(\xi).$$

Величина первого слагаемого определяется величиной λ (ξ) (которая, в свою очередь связана с номером собственного значения и «размером ящика», в котором заключена система). Величина второго слагаемого может быть сделана сколь угодно малой за счет достаточно медленного изменения поля A_ξ. Выбор интерполяции A (ξ) между A и ΩA целиком в наших руках, и потому второе слагаемое можно не учитывать. Верно также и обратное: каждая нулевая мода оператора $D_1^{(D+1)}$ соответствует какому-то собственному значению оператора $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(D)}$, пересекающему прямую $\lambda = M$ снизу вверх. Аналогично собственные значения, идущие сверху вниз, находятся во взаимно однозначном соответствии с нулевыми модами другого оператора

$$\mathrm{D}_2^{(D+1)} = -\frac{\partial}{\partial\xi} + i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(D)} - M,$$

отличающегося от $D_1^{(D+1)}$ знаком перед $\partial/\partial\xi$. Эволюцию с. з. удается связать также с нулевыми модами других ($D + 1$)-мерных операторов. Смысл этих манипуляций в том, что если для оператора D определен индекс, то задача о нулевых модах D оказывается достаточно простой. Для существования индекса надо, чтобы нашелся еще один оператор P, антикоммутирующий с D, $\mathrm{DP} = -\mathrm{PD}$. Существование P обеспечивает «вырождение» спектра D : $\mathrm{D}\psi = \lambda\psi \Leftrightarrow \mathrm{D}\,(\mathrm{P}\psi) = -\lambda\,(\mathrm{P}\psi)$. Если при непрерывном изменении параметров оператора D свойство антикоммутативности с P сохраняется, то число нулевых мод D может изменяться только за счет прихода или ухода пары с. з. Поэтому четность числа нулевых мод остается неизменной при непрерывной вариации параметров D. Обычно $\mathrm{P}^2 = 1$, однако необходимыми являются только требования невырожденности и равномерной ограниченонсти P. (Они нужны для того, чтобы $\psi_{-\lambda} = \mathrm{P}\psi_\lambda$ не оказалась равной нулю тождественно и была нормируемой функцией, а также чтобы эти условия выполнялись, когда пара функций $\psi_{\pm\lambda}$ превращается в две нулевые моды.) В случае $\mathrm{P}^2 = 1$ более точное утверждение состоит в том, что инвариантно число n_+ нулевых мод $\mathrm{P}\psi = +\psi$ минус число n_- нулевых мод $\mathrm{P}\psi = -\psi$: $n_+ - n_- \equiv \mathrm{ind}_{\mathrm{P}}\mathrm{D}$ — эта разность называется P-индексом оператора D. Индекс оператора, как мы объяснили, является топологическим инвариантом (т. е. не меняется при непрерывных деформациях), он может быть определен топологическими средствами либо найден для какого-то удобного выбора параметров.

Возвращаясь к задаче об эволюции собственных значений, мы должны построить связанный с $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(D)}$ $(D+1)$-мерный оператор, имеющий индекс. Для простейших операторов $\mathrm{D}_{1,2}^{(D+1)}$ антикоммутирующих с ними P нет, и потому потребуется более сложное построение.

Хорошо известно, что четномерные безмассовые операторы Дирака имеют индекс, связанный с $\mathrm{P}=\Gamma^5$. Поэтому, обсуждая эволюцию с. з. нечетномерного $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)})$ (случай Редлиха), *можно попробовать достроить этот* оператор до $(D+1=2n-1+1=2n)$-мерного оператора Дирака. При этом придется прежде всего изменить размерность Г-матриц. Именно, $2n$-мерные матрицы Г получаются из $(2n-1)$-мерных γ_i, $i=1, 2, \ldots, 2n$, по правилу

$$\mathbf{\Gamma}_i=\begin{pmatrix}\gamma_i & \\ & -\gamma_i\end{pmatrix}, \quad \Gamma_0=\begin{pmatrix} & -i\\ +i & \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Оператор

$$i\hat{\mathrm{D}}^{(2n)}=\begin{pmatrix} i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)} & \frac{\partial}{\partial\xi}\\ -\frac{\partial}{\partial\xi} & -i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)}\end{pmatrix}$$

вполне пригоден для наших целей. Его левые нулевые моды

$$\Psi_{\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}\psi\\ \psi\end{pmatrix}$$

удовлетворяют уравнению

$$\mathrm{D}_1^{(2n)}(M=0)\,\psi=\frac{\partial}{\partial\xi}\psi+i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)}\psi=0$$

и соответствуют с.з. оператора $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)}$, пересекающим нуль снизу вверх, а правые

$$\Psi_{\mathrm{R}}=\begin{pmatrix}+\psi\\ -\psi\end{pmatrix}$$

— уравнению

$$\mathrm{D}_2^{(2n)}(M=0)\,\psi=-\frac{\partial}{\partial\xi}\psi+i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)}\psi=0$$

и определяют с.з., проходящие через нуль сверху вниз. Подчеркнем, что, в отличие от самих операторов $D_{1,2}^{(2n)}$, $i\hat{\mathrm{D}}^{(2n)}$ имеет индекс, и потому число его нулевых мод легко найти. Оно определяется дираковской аномалией и равно

$$\operatorname{ind}\ i\hat{\mathrm{D}}^{(2n)}\ \{A_\xi\}\ =\frac{1}{}W^{(2n)}\ =\frac{1}{(2\pi)^n n!}\int \mathrm{Tr}F^n$$

— топологическому заряду поля A_ξ.

К настоящему моменту мы убедились, что для топологически нетривиальных калибровочных преобразований Ω с индексом Понтрягина $+1$ (при граничных условиях $A_\xi\to A$ при $\xi\to-\infty$ и $A_\xi\to\Omega A$ при $\xi\to+\infty$ оператор $i\hat{\mathrm{D}}^{(2n)}$ имеет левых нулевых мод на одну больше, чем правых) число с.з. оператора $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)}$, проходящих через нуль снизу вверх, на единицу превышает число тех, которые идут через нуль сверху вниз. Для доказательства правильности картинки рис. 14 остается объяснить, почему поднимаются *остальные* с.з., не проходящие через нуль. Интуитивно ясно, что у них «нет другого выхода»: картинка в окрестности прямой $\lambda=0$ предопределяет *поведение остальных с.з. Доказательство же основано на том, что оператор* $i\hat{\mathrm{D}}^{(2n)}-iM\Gamma_0\Gamma_5$ по-прежнему антикоммутирует с Г , и потому его индекс *не зависит* от значения параметра M, т. е. совпадает с известным индексом при $M=0$. С другой стороны, левые и правые моды этого оператора удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{D}_1^{(2n)}\psi = \frac{\partial}{\partial\xi}\psi + i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)}\psi - M\psi = 0,$$

$$\mathrm{D}_2^{(2n)}\psi = -\frac{\partial}{\partial\xi}\psi + i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(2n-1)}\psi - M\psi = 0$$

соответственно. Этого достаточно для доказательства справедливости рис. 14. (Более детальный анализ содержится в работах [41, 45].)

Получить виттеновскую картинку рис. 13 несколько сложнее, поскольку необходимая в этом случае версия теоремы об индексе менее известна в физической литературе. Вместо того чтобы доказывать эту теорему (см. [11]), мы приведем в конце этого раздела простой пример, ее иллюстрирующий.

Переход от оператора $i\hat{\mathrm{D}}^{(4)}$ к $(D+1=5)$-мерному оператору Дирака $i\hat{\mathrm{D}}^{(5)}$ не требует изменения размерности γ-матриц:

$$i\hat{\mathrm{D}}^{(5)} = i\gamma^5\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \gamma^5\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(4)}\right).$$

Нулевые моды этого оператора вполне подойдут для наших целей; достаточно заметить, что спектры операторов $\gamma^5\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(4)}$ и $i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(4)}$ совпадают:

$$i\hat{\mathrm{D}}_\xi^{(4)}\psi = \lambda\psi \Rightarrow \gamma^5\hat{\mathrm{D}}^{(4)}(\psi \mp i\gamma^5\psi) = \pm\lambda(\psi \mp i\gamma^5\psi),$$

$$\gamma^5\hat{\mathrm{D}}^{(4)}\chi = \mu\chi \Rightarrow i\hat{\mathrm{D}}^{(4)}(\chi \pm i\gamma^5\chi) = \pm\mu(\chi \pm i\gamma^5\chi).$$

Беда только в том, что для нечетномерных операторов аналога γ^5-матрицы нет и индекса, вообще говоря, не существует. В ряде случаев, однако, оператор P, антикоммутирующий с $i\hat{\mathrm{D}}^{(5)}$, можно построить, исходя из операции комплексного сопряжения C. В базисе

$$\gamma_i = \begin{pmatrix}\sigma_i & \\ & -\sigma_i\end{pmatrix} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

операция CP_1P_3, состоящая из комплексного сопряжения и инверсии первой и третьей координат (т. е. поворота на π в плоскости рис 13), антикоммутирует с эрмитовым оператором

$$i\gamma^5\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \gamma^5\hat{\partial}^{(4)}\right) = i\hat{\mathrm{D}}^{(5)} \quad (A=0).$$

(Эрмитовость здесь особенно существенна: в противном случае оператор P, содержащий комплексное сопряжение, не будет коммутировать с собственными значениями $i\hat{\mathrm{D}}^{(5)}$ и получится $i\hat{\mathrm{D}}\,(\mathrm{P}\psi) = -\mathrm{P}i\hat{\mathrm{D}}\psi = -\mathrm{P}\lambda\psi = -\overset{*}{\lambda}\,(\mathrm{P}\,\psi)$.) Оказывается, что это свойство можно сохранить и при включении полей $A_\mu = iA_\mu^a t^a$. Для этого требуется существование для алгебры G инволюции ΣC, связывающей комплексно сопряженные представления: $\Sigma^{-1}\overset{*}{t^a}\Sigma = -t^a$. Тогда $(C\Sigma^{-1})(\partial + A)(C\Sigma) = \partial + A$, и оператор P можно выбрать в виде $\mathrm{P} = \mathrm{C}\Sigma P_1P_3$. Такая инволюция существует для группы $\mathrm{SU}(2) : \Sigma = \tau_2,\ t^{1,2,3} = \tau_{1,2,3}$. Важно, что для массивного оператора Дирака $i\hat{\mathrm{D}}^{(4)} + M$ никакого пятимерного оператора, обладающего индексом, нет:

$$i\frac{\partial}{\partial\xi} + \gamma^5\hat{\partial}^{(4)} + M$$

не антикоммутирует с CP_1P_3, а оператор

$$i\frac{\partial}{\partial\xi} + \gamma^5(\hat{\partial}^{(4)} - iM)$$

неэрмитов, и потому его антикоммутативности с $\mathrm{P} = CP_1P_3$, содержащим комплексное сопряжение, недостаточно для инвариантности индекса. Это показывает, что для четномерного оператора Дирака собственные значения пересекают только прямую $\lambda = 0$ (и близкие к ней в слое толщиной $\sim$ (размер ящика)$^{-1}$), что и изображено на рис. 13. Для того чтобы *доказать*, что одна пара собственных значений все-таки меняется местами, необходима упоминавшаяся выше теорема об индексе ^{11}, связывающая четность числа нулевых мод оператора $i\hat{\mathrm{D}}^{(5)}$ с топологической нетривиальностью поля A. Мы уже говорили, что глобальная виттеновская аномалия не связана с несохранением какого-либо тока, это проявляется и в отсутствие интегрального представления для C-индекса оператора $i\hat{\mathrm{D}}^{(5)}$.

В заключение мы приведем обещанный пример, иллюстрирующий ситуацию с операторами $i\hat{\mathrm{D}}^{(4)}_{\xi}$ и $i\hat{\mathrm{D}}^{(5)}$ и теорему об индексе ^{11}. Пара операторов, фигурирующая в этом примере: $\Delta^{(1)}_{\xi} = \sigma_1 i\partial_x + \sigma_2 A_\xi$, $\Delta^{(2)} = \sigma_3 i\partial_\xi + \sigma_1 i\partial_x + \sigma_2 A_\xi$. Оба эти оператора эрмитовы и чисто мнимые, а потому имеют индекс ($\mathrm{P} = C$). Мы будем обсуждать эволюцию с.з. оператора $\Delta^{(1)}(A_\xi)$, и нам потребуется лишь индекс оператора $\Delta^{(2)}$. В топологически нетривиальном поле $A_\xi(x)$ $\Delta^{(2)}$ будет иметь нулевую моду, отвечающую с.з. оператора $\Delta^{(1)}_{\xi}$, пересекающему ось абсцисс снизу вверх («вырожденное» с ним с.з. (оно существует, так как $\Delta^{(1)}\sigma_3 = -\sigma_3\Delta^{(1)}$), движущееся сверху вниз, описывается нулевой модой оператора $\hat{\Delta}^{(2)} = -\sigma_3 i\partial + \sigma_1 i\partial_x + \sigma_2 A_\xi$). Термин «топологически нетривиальный» здесь относится к классификации в соответствии с гомотопической группой π_1 (G). Возьмем $G = \mathrm{U}(1)$ в поле A_ξ с единичным топологическим зарядом, определенное на S^1 при каждом ξ на окружности длиной $L: A_\xi = (\pi/L)\,\mathrm{th}\,\xi$. (Топологический заряд

$$\frac{1}{2}W^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu}\int \partial_\mu A_\nu \mathrm{d}^2x = \frac{1}{2\pi}L\int \mathrm{d}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}A_\xi = \frac{L}{2\pi}(A_{+\infty} - A_{-\infty}) = 1.$$

Добавить к $\pi/L\mathrm{th}\xi$ константу нельзя, потому что тогда спектры операторов $\Delta^{(1)}_{-\infty}$ и $\Delta^{(1)}_{+\infty}$ не будут совпадать: полноценной калибровочной инвариантности у оператора $\Delta^{(1)}(A)$ нет — такова цена за простоту и наглядность этого примера.) Как и предсказывается теоремой об индексе для оператора $\Delta^{(2)}$, из всех собственных значений оператора $\Delta^{(1)}(A_\xi = (\pi/L)\,\mathrm{th}\,\xi)$, равных $\lambda_n^2 = (2\pi n/L)^2 + A_\xi^2$, лишь одна пара меняется местами, а остальные отображаются сами в себя в полном соответствии с рис. 13.

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steinberger J.//Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 1180.
2. Schwinger J.//Ibidem. 1951. V. 82. P. 664; 1962. V. 128. P. 2425.
3. Adler S. L.//Ibidem. 1969. V. 177. P. 2426.
   Bell J. S., Jackiw R.//Nuovo Cimento. Ser. A. 1969. V. 60. P. 47.
4. Трейман С., Джекив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов.— М.: Атомиздат, 1977.
5. Adler S. L., Bardeen W.//Phys. Rev. 1969. V. 182. P. 1517.
6. Bardeen W.//Ibidem. V. 184. P. 1848.
7. Wess J., Zumino B.//Phys. Lett. Ser. B. 1971. V. 37. P. 95.
8. Dolgov A. D., Zakharov V. I.//Nucl. Phys. Ser. B. 1971. V. 27. P. 525.
9. 't Hooft G.//Phys. Rev. Ser. D. 1976. V. 4. P. 3432; Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 8.
10. Atiyah M. F., Singer I. M.//Bull. Am. Math. Soc. 1963. V. 69. P. 422; Ann. of Math. 1968. V. 87. P. 484.
    Atiyah M. F., Bott R., Patodi V.//Invent. Math. 1973. V. 19. P. 279.
    Atiyah M. F., Patodi V., Singer I. M.//Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1976. V. 79. P. 71.
    Schwarz A. S.//Phys. Lett. Ser. B. 1977. V. 67. P. 172.
    Brown L., Carlitz R., Lee C.//Phys. Rev. Ser. D. 1977. V. 16. P. 417.

11. Atiyah M. F., Singer I. M.//Ann. of Math. 1971. V. 93. P. 119.
12. Witten E.//J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 661.
13. Alvarez-Gaumé L.//J. Phys. Ser. A. 1983. V. 16. P. 4177.
14. Georgi H., Glashow S. L.//Phys. Rev. Ser. D. 1972. V. 6. P. 429.
    Gross D., Jackiw R.//Ibidem. P. 477.
    Banks J., Georgi H.//Ibidem. 1976. V. 14. P. 1159.
    Okubo S.//Ibidem. 1977. V. 16. P. 3528.
15. Романов В. Н., Шварц А. С.//ТМФ. 1979. Т. 41. С. 190.
16. Vergeles S. N. Landau Institute Preprint.— Moscow, 1975.
17. Fujikawa K.//Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44. P. 1733; Phys. Rev. Ser. D. 1980. V. 21. P. 2848.
18. Balachandran A. P., Marmo G., Naik V. P., Trahern C. G.// Ibidem. 1982. V. 25. P. 2713.
19. Frampton P. H., Preskill J., van Damme H.//Phys. Lett. Ser. B. 1983, V. 124. P. 209.
    Frampton P. H., Kephart T. W.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1343, 1347.
20. Zumino B., Wu Yong- Shi, Zee A.//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 239. P. 477.
21. Zumino B.//Relativity, Groups, Topology. II/Eds R. Stora, B. de Witt.— Amsterdam: North-Holland, 1984.
22. Stora R.//Progress in Gauge Field Theory/Ed. H. Lehmann.— New York: Plenum Press, 1984.
23. Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P.//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 243. P. 449; Ann. of Phys. 1985. V. 161. P. 423.
24. Bonora L., Cotta-Ramusino P., Reina C.//Phys. Lett. Ser. B. 1983. V. 126 B. P. 305.
    Bonora L., Cotta-Ramusino P.//Comm. Math. Phys. 1983. V. 87. P. 589.
25. Терентьев М. В.//УФН. 1974. Т. 112. С. 37.
26. 't Hooft G.//Cargese Lectures. 1979: Recent Developments in Gauge Theories.— New York: Plenum Press, 1980.
27. Ансельм А. А.// Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 138.
    Zee A.//Phys. Lett. Ser. B. 1980. V. 95. P. 290.
    Farrar G. R.//Ibidem. V. 96. P. 273.
    Weinberg S.//Ibidem. 1981. V. 102. P. 401.
    Frishman A., Banks T., Yankelowicz S.//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 177. P. 157.
    Coleman S., Grossman B.//Ibidem. 1982. V. 203. P. 205.
28. Новиков С. П.//ДАН СССР. 1981. Т. 260. С. 222; Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 4. С. 37; УМН. 1982. Т. 37, вып. 5. С. 3.
    Новиков С. П., Шмельцер И.//Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 3. С. 54.
29. Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 223. Pp. 422, 432.
30. Polyakov A. M., Wiegmann P. B.//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 141. P. 223.
31. Дьяконов Д. И., Эйдес М. И.//Письма ЖЭТФ 1983. Т. 38. С. 358.
32. Witten E.//Comm. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 455.
33. Faddeev L. D.//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 145. P. 81.
    Faddeev L. D., Shatashvili S. L.//Ibidem. 1986. V. 167. P. 225.
    Рейман А. Б., Семенов-Тянь-Шанский М. А., Фаддеев Л. Д.// Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 4. С. 64.
34. Bardeen W. A., Zumino B.//Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 244. P. 421.
35. Alvarez-Gaumé L., Witten E./Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 234. P. 269.
36. Alvarez O. et al.//Comm. Math. Phys. 1984. V. 96. P. 409.
37. Langouche F. et al.//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 1671. P. 225.
38. Schonfeld J.//Nucl. Phys. Ser. B 1981. V. 185. P. 157.
39. Jackiw R., Templeton S.//Phys. Rev. Ser. D. 1981. V. 23. P. 2291.
40. Deser S., Jackiw R., Templeton S.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 975; Ann. of Phys. 1982. V. 140. P. 372.
41. Redlich A. N.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 18; Phys. Rev. Ser. D. 1984. V. 29. P. 2366.
42. Niemi A. J., Semenoff G. W.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2077.
43. Jackiw R.//Phys. Rev. Ser. D. 1984. V. 29. P. 2375.
44. Hughes R. J. Preprint CERN TH. 3913.— Geneva, 1984.
45. Коган Я. И. и др.//ЯФ 1985. Т. 41. С. 1080; ЖЭТФ, 1985. Т. 88. С. 3.
46. Witten E.//Phys. Lett. Ser. B. 1982. V. 117. P. 324.
47. Witten E.//Global Gravitational Anomalies: Princeton preprint.— 1985.
48. Окунь Л. Б. Лептоны и кварки.— М. Наука, 1981.
49. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Preprint ITEP-82.— Moscow, 1982.
50. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Preprint CERN TH.4135.— Geneva, 1985.

51. Witten E.//Nucl. Phys. 1979. V. 156. P. 269.
Veneziano G.//Ibidem. V. 159. P. 213.
Дьяконов Д. И., Эйдес М. И.//ЖЭТФ. 1981., Т. 81. С. 434.
52. Green M., Schwarz J.//Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 149. P. 117.
53. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.
54. Novikov V. A., et al.//Fortschr. d. Phys.// 1984. Bd 32. S. 585.
55. Габриэлов А. Н., Гельфанд И. М., Лосик М. В.//Функц. анализ. и его прил. 1975. Т. 9, вып. 2. С. 12; вып. 3. С. 5; 1976. Т. 10, вып. 2. С. 13.
56. Appelquist T., Carazonne J.//Phys. Rev. Ser. D. 1975. V. 11. P. 2856.
57. Fock V. A.//Sov. Phys. 1937. V. 12. P. 404.
Швингер Ю. Частицы, источники, поля.— М.: Мир, т. 1, 1973; т. 2, 1976.
Shifman M. A.//Nucl. Phys. Ser. B. 1980. V. 173. P. 13.
Dubovikow M. S., Smilga A. V.//Ibidem. 1981. V. 185. P. 109.
58. Kobayashi M., Sugamoto A. KEK preprint TH. 103.—1985.
59. Jackiw R.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 159.
60. Bulware D. G., Deser S., Zumino B.//Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 153. P. 307.