

514.752+538.91

**РАЗМЕРНОСТИ И ДРУГИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ В ТЕОРИИ ПРОТЕКАНИЯ****И. М. Соколов****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение . . . . .	221
2. Теория протекания: определения и критическое поведение . . . . .	222
2.1. Основные определения и модели . . . . .	223
2.2. Универсальность. Подобие и самоподобие . . . . .	226
3. Размерности: основные определения . . . . .	227
3.1. Размерность самоподобия. Разветвленность и фазовые переходы . . . . .	228
3.2. Более строгие определения . . . . .	230
3.3. Самоподобные кривые . . . . .	231
4. Размерности перколяционных кластеров . . . . .	233
4.1. Однородные фракталы и размерность кластера . . . . .	233
4.2. Химическая размерность и скорость распространения возбуждений . . . . .	236
4.3. Границы перколяционных кластеров . . . . .	237
5. Размерности и кинетические коэффициенты . . . . .	238
5.1. Проводимость и упругость фрактальных сеток . . . . .	238
5.2. Показатель проводимости, аномальная диффузия и внутренняя размерность блужданий по кластеру . . . . .	240
5.3. Уравнение диффузии на фрактале . . . . .	242
6. Спектральная и связанные с ней размерности . . . . .	245
6.1. Спектральная размерность, размерность множества возвратов и размерность блужданий . . . . .	245
6.2. Собственные состояния на фракталах. Модель квантовой перколяции . . . . .	247
6.3. «Суперуниверсальность» спектральной размерности . . . . .	250
7. Заключение . . . . .	251
Список литературы . . . . .	253

**1. ВВЕДЕНИЕ**

В последние годы в теоретической физике сделалось популярным понятие размерности. Под этим словом понимается хаусдорфова размерность (или ее аналоги — емкость по Колмогорову, другие емкости, а также информационная размерность), которая может принимать нецелые значения и является характеристикой свойств самоподобия объектов. Наряду с собственно размерностями для описания других свойств самоподобных объектов используются другие, во многом аналогичные размерностям величины. Некоторые из этих величин могут быть истолкованы как размерности специальных множеств, некоторые имеют более сложный смысл. Введение такого рода величин оказалось полезным при изучении свойств самых разных физических объектов и процессов.

Понятие размерности, интенсивно исследовавшееся математиками с начала нынешнего столетия, было воспринято физиками благодаря монографии Мандельброта<sup>1</sup>, вышедшей в 1975 г. на французском, а в 1977 г. на английском языке. Эта книга, состоящая в основном из иллюстраций и примеров, но снабженная также строгим математическим приложением, имела целью показать полезность понятия размерности при описании свойств самых различных самоподобных объектов и структур в гидродинамике, стати-

стической физике, астрофизике и других дисциплинах. Эту монографию следует считать прекрасным образцом научной рекламы — имеется в виду, естественно, реклама новых понятий и моделей.

Первая известная автору работа, в которой исследовались размерности перколяционных кластеров<sup>2</sup>, появилась в 1977 г., а в вышедшем в 1979 г. обзоре Штауффера<sup>3</sup> уже имелся параграф, посвященный этому вопросу. За последние годы число работ, в которых исследуются такие размерности, достигло нескольких сотен.

Постепенно выделились две группы физических задач, в которых понятие размерности может принести и приносит реальную пользу. С одной стороны, это задачи о динамической стохастичности, турбулентности и вообще о хаотическом поведении, с другой — целый ряд задач статистической физики.

В первом случае понятие размерности дает возможность, например, более или менее адекватной классификации странных аттракторов и связанного с ними хаотического поведения. Размерности при этом не являются независимыми характеристиками: они связаны с показателями Ляпунова, асимптотикой спектров и т. д. Важно, что такие размерности представляют собой грубую и доступную измерению характеристику системы. Этим вопросам посвящен обзор<sup>4</sup>, и останавливаться на них мы не будем.

Наш обзор посвящен второй группе задач — точнее даже одной задаче этой группы — теории протекания (просачивания). На примере этой задачи мы покажем, как вводятся размерности и другие геометрические показатели, какие соотношения подобия существуют между ними, как связаны они с другими, более привычными критическими показателями. При этом для каждого критического показателя (кроме показателя  $\nu$ , описывающего расходимость длины корреляции) можно указать множество, с размерностью которого этот показатель связан. Исследование структуры этих множеств много дает для понимания критического поведения системы и соотношений между показателями. Прослеживается также общая связь между промежуточными асимптотиками поведения системы и ее фрактальной геометрией. Ограничиваясь одной задачей, мы можем подробно обсудить все эти вопросы. Вводимые нами показатели по большей части являются стандартными и полезны при исследовании других систем. Такими системами, в частности, являются: линейные и ветвящиеся полимеры и эпоксидные смолы<sup>5-7</sup>, белковые структуры<sup>8,9</sup>, пористые материалы и материалы с развитой поверхностью<sup>10-12</sup>, а также агрегаты, возникающие при реакциях, управляемых диффузией (дендриты). Этому последнему вопросу посвящена обширная литература, например,<sup>13-27</sup>.

«Фрактальный бум» в теории протекания, достигший пика в 1983—1984 гг., начал уже понемногу стихать. Основные понятия сформулированы и стали привычными, результаты, которые можно было получить, переписывая известные соотношения в новых обозначениях, уже получены. Можно подвести некоторые итоги. Тем не менее, как мы увидим ниже, многие вопросы остались неразрешенными или даже незатронутыми, решение других требует большого объема вычислительной или аналитической работы. Существующий устойчивый интерес к проблеме позволяет надеяться на их решение в недалеком будущем.

## 2. ТЕОРИЯ ПРОТЕКАНИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

С момента появления в 1957 г. первой работы Бродбента и Хаммерсли<sup>28</sup> интерес к теории протекания не угасает на протяжении вот уже почти 30 лет. Причин к этому несколько. Ограничимся указанием двух из них.

1. Теория адекватно описывает многие системы, в которых имеет место геометрический фазовый переход: переход проводник — изолятор в смесях проводящих и изолирующих частиц<sup>29</sup>, раскалывание горных пород при обра-

зовании достаточного количества трещин<sup>30</sup> и т. д. Она используется при описании упругости полимерных гелей<sup>31</sup>, прыжковой проводимости в легированных полупроводниках<sup>32</sup>, андерсоновской локализации в неупорядоченных системах<sup>33, 34</sup> и целом ряде других задач. Формулировке и приложениям перколяционных задач посвящена обширная литература: на русском языке назовем обзор<sup>32</sup>, гл. 5 монографии<sup>35</sup>, популярную книгу<sup>36</sup>, на английском — два взаимодополняющих обзора<sup>3, 37</sup>. За годы, прошедшие с написания последнего из этих обзоров, появилось множество новых задач, при решении которых используются перколяционные модели. Модификации этих моделей столь многочисленны, что здесь нет возможности их перечислить.

2. Модели теории протекания просты и наглядны. Под простотой следует понимать как простоту исходной формулировки задачи, так и возможность достаточно далеко продвинуться в ее решении. Простые модели вскоре становятся стандартными и их рассмотрение увлекает физиков-теоретиков на многие годы. Польза стандартных моделей состоит в том, что они представляют собой полигон для опробывания различных методов. При этом единообразии исходной задачи дает возможность сравнения и интеграции их результатов.

Кроме этих двух аспектов простоты, делающих столь привлекательной эту задачу, есть и еще один. Многие модели теории протекания (по крайней мере, решеточные модели) могут быть легко реализованы при численном моделировании на ЭВМ. Простота исходной формулировки и высокая эффективность алгоритмов (в основном сортировки и поиска, а также решения систем линейных уравнений) дают возможность исследования этих моделей методами Монте-Карло, конечного скейлинга и др. Наличие обширных и чрезвычайно точных «экспериментальных» сведений о многих моделях и возможность постановки практически любого мыслимого эксперимента делают эти задачи еще более привлекательными.

Перечисленного выше достаточно, чтобы понять, что задачи теории протекания представляют собой чрезвычайно интересный объект исследования. В нашем обзоре нас в основном будет интересовать геометрический характер фазового перехода и большое многообразие имеющих критическое поведение величин — все это делает рассматриваемый подход наглядным и полезным. Это же многообразие величин делает введенные нами понятия и соотношения важным инструментом при решении других задач — в частности тех, что перечислены во введении.

## 2.1. Основные определения и модели

В этом разделе мы кратко напомним постановку основных задач теории протекания, а также рассмотрим наиболее важные черты критического поведения моделей. Эти сведения понадобятся нам в дальнейшем.

Простейшие решеточные задачи теории протекания формулируются следующим образом. Пусть имеется решетка, рассматриваемая как совокупность узлов и связей. Каждый данный узел может быть помечен (скажем, покрашен в черный цвет) с вероятностью  $x$ . Совокупность связанных друг с другом черных узлов будем называть черным кластером. При  $x = 0$  в системе нет черных кластеров, при  $x \ll 1$  черные кластеры представляют собой в основном совокупности малого количества узлов — одиночные узлы, пары, тройки и т. д. С другой стороны, при  $x = 1$  все узлы черные: при  $1 - x \ll 1$  в системе имеется бесконечный черный кластер. Должна существовать критическая концентрация  $x_c$ , при которой происходит переход от одного режима к другому — впервые возникает бесконечный кластер. Аналогичным образом формулируется и задача связей — задача, в которой мы будем считать связь помеченной с вероятностью  $x$  и определять кластер как совокупность узлов, соединенных помеченными связями. Иногда, в применение к за-

дачам об электропроводности и случайных блужданиях, мы будем называть помеченный узел доступным, а помеченную связь — целой.

Образование бесконечного кластера есть фазовый переход; параметром порядка является мощность бесконечного кластера — это есть вероятность узлу принадлежать бесконечному кластеру. Критическое поведение этой величины при  $x \rightarrow x_c$ ,  $x > x_c$

$$P_\infty \propto (x - x_c)^\beta. \quad (2.1)$$

Поведение зависимости  $P_\infty(x)$  для различных решеток показано на рис. 1. В дальнейшем для «безразмерного» отклонения концентрации от критической мы будем использовать обозначение  $\tau = (x - x_c)/x_c$ . Подробное обсуждение критического поведения перколяционных моделей содержится

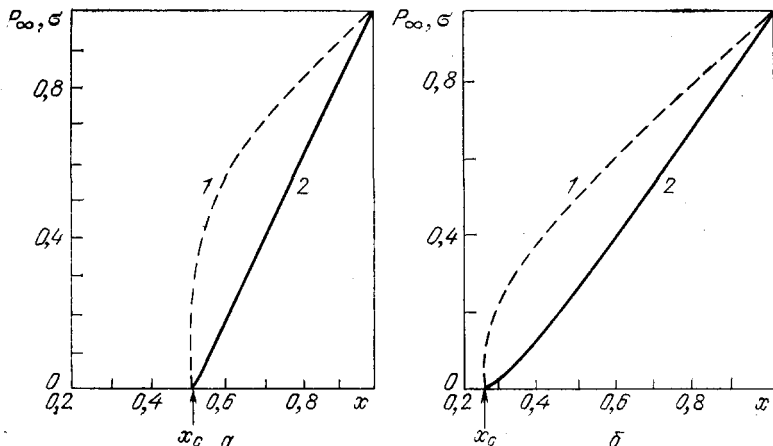


Рис. 1. Зависимость мощности бесконечного кластера (1) и проводимости перколяционной сетки (2) от концентрации <sup>40</sup>.

Задача связей. а — Квадратная решетка. б — Простая кубическая решетка

в <sup>3, 35</sup>, и мы ограничимся лишь тем объемом информации по этому вопросу, который совершенно необходим для дальнейшего.

Среднее число узлов конечного кластера (аналог восприимчивости) при  $\tau \rightarrow 0$  ведет себя как

$$s \propto |\tau|^{-\gamma}. \quad (2.2)$$

Введя аналог теплоемкости  $c$ , получим

$$c \propto |\tau|^{-\alpha}, \quad (2.3)$$

где  $c = \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \Big|_{h=0}$ ,  $F(p, h) = \sum_s n_s e^{-sh}$  ( $s$  — число узлов,  $n_s$  — доля кластеров с таким числом узлов,  $h$  — «внешнее поле», имеющее в теории протекания весьма специфический смысл <sup>38</sup>).

Характерный пространственный масштаб системы дает длина корреляции  $\xi$ , строгий смысл которой мы выясним в дальнейшем. Пока что мы можем считать, что  $\xi$  — это характерный размер черного кластера при  $x < x_c$ , а при  $x > x_c$  — характерный размер пустот в нем. Критическое поведение этой величины дается соотношением

$$\xi \propto |\tau|^{-\nu}. \quad (2.4)$$

Рассматривая случай  $h \neq 0$ , мы можем ввести еще один показатель  $\delta$ :

$$P_\infty(\tau = 0, h) = h^{1/\delta}. \quad (2.5)$$

Все введенные выше критические показатели (мы их будем называть термодинамическими) связаны между собой обычными соотношениями подобия<sup>3, 33, 39</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 - dv = 2 - 2\beta - \gamma, \\ \delta &= \frac{\gamma}{\beta} + 1, \\ \eta &= 2 - \frac{\gamma}{v}, \\ dv &= 2\beta + \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Эта система равенств соответствует так называемому двухпоказательному скейлингу: для получения значений всех введенных выше показателей достаточно знать значения двух из них. В качестве таких показателей мы будем использовать  $v$  и  $\beta$ . Некоторые из этих соотношений справедливы при любой размерности пространства  $d$ , другие — а именно те, что содержат  $d$ , — при размерности пространства ниже критической  $d \leq 6$ . Эти последние часто называются гиперскейлинговыми соотношениями. В классической области  $d \geq 6$  значения всех показателей даются системой (2.6) при  $d = 6$ ,  $\beta = 1$ ,  $v = 1/2$  и не зависят от  $d$ . Значения показателей  $\beta$ ,  $v$  и  $t$  (введенного ниже) даны в табл. I, основным источником которой является обзор<sup>3</sup>. Значения показателей  $v$  и  $\beta$  для  $d = 2$  выражаются рациональными числами: они получены в точно решаемой модели<sup>41,42</sup> (см. также гл. 12 монографии<sup>43</sup>), значения для  $d \geq 6$  даются приближением среднего поля или точно решаемой моделью на решетке Бете.

Таблица I

Основные критические показатели теории протекания

$d$	2	3	4	5	6
$v$	4/3	0,88	0,7	0,6	1/2
$\beta$	5/36	0,40	0,5	0,7	1
$t$	1,29	1,7	2,4	2,7	3

Нам понадобится еще один критический показатель. При  $\tau \neq 0$

$$n_s(\tau) = f(s) \exp(-As|\tau|^\Delta), \quad (2.7)$$

где  $f(s)$  — некоторая, растущая не быстрее степени  $s$ , функция. Показатель  $\Delta$  определяет характерный наибольший размер конечных кластеров. Кластеры с  $s_c \sim |\tau|^{-\Delta}$  называются критическими; большие кластеры экспоненциально маловероятны. Обратим внимание, что характерный пространственный масштаб критического кластера равен длине корреляции — по указанному выше ее смыслу. Для показателя  $\Delta$  справедливо гиперскейлинговое соотношение<sup>35</sup>

$$\Delta = dv - \beta. \quad (2.8)$$

Отметим, что все введенные выше обозначения для показателей, кроме  $\Delta$ , являются общепринятыми.

На этом мы закончим обзор термодинамических показателей. Все эти показатели полностью аналогичны показателям, вводимым в теории других фазовых переходов. При этом надо отметить, что из-за того, что внешнее поле в теории протекания может быть введено лишь формально, смысл некоторых из них не совсем прозрачен.

Важным свойством теории протекания является наличие в ней нетривиальных критических показателей, которые, наоборот, не имеют смысла в обычных моделях термодинамических фазовых переходов. Одним из приложений теории является рассмотрение вопроса об электропроводности случайных сеток (электропроводность смесей проводящих и диэлектрических частиц). В простейшем случае такая система моделируется задачей связей:

каждая целая связь имеет сопротивление  $r = 1$ , каждая разорванная —  $r = \infty$ . Сопротивление большого куска такой сетки, включенного между двумя идеально токопроводящими пластинами, ведет себя по закону

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \infty, & \tau \leq 0, \\ \mathcal{R}_0 \tau^{-t}, & \tau > 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Сопротивление случайной сетки, составленной из нормальных и сверхпроводящих проводников, взятых в концентрации  $x$  и  $(1 - x)$  соответственно, ведет себя как  $\mathcal{R} (x - x_c)^s$  <sup>44-46</sup>, где в двумерном случае  $S = t$  <sup>44</sup>. Значения  $t$  даны в табл. I. Аналогичные соотношения определяют поведение коэффициентов упругости случайной сетки (оборванные связи считаются не обладающими никакими упругими модулями). Поведение упругости такой сетки сильно зависит от свойств симметрии упругих сил, действующих между атомами (см. <sup>47</sup>). В частности, в рамках модели Борна существенно отличаются случаи изотропных и центральных взаимодействий. В первом случае критическое поведение такое же, как у электропроводности, во втором

$$E = \begin{cases} 0, & \tau' \leq 0, \\ E_0 \tau'^T, & \tau' > 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $T \neq t$ ; этот вопрос мы подробно обсудим в разделе 6.1. При  $d = 2$   $T = 2,4 \pm 0,4$ , при  $d = 3$   $T = 4,4 \pm 0,6$ . В работе <sup>48</sup> рассматривалась задача об упругости случайной сетки, в которой считалось, что связи могут изгибаться и имеют соответствующий упругий модуль. Есть подозрение, что показатель  $T_1$ , возникающий в этой задаче, отличен от  $T$  и  $t$ .

Отметим, что рассматривавшаяся в <sup>49</sup> модель с чисто центральным взаимодействием лишь ближайших соседей, является переупрощенной. В рамках такой модели квадратная и простая кубическая решетки, например, не обладают никакой сдвиговой упругостью. Поэтому в <sup>49</sup> исследовались треугольная и гранецентрированная кубическая решетки. В этом случае критическая концентрация  $x_c$ , при которой бесконечный кластер приобретает упругие свойства, отлична от перколяционной:  $x_c > x_c$ , так что в (2.10)  $\tau' = x - x_c \neq \tau$ . Это обстоятельство связано с тем, что при  $x_c < x < x_c$  бесконечный кластер содержит много одномерных извилистых цепочек, способных растягиваться без изменения длины составляющих их связей, а лишь за счет изменения углов между ними. Кластер приобретает упругость только тогда, когда такой механизм растяжения оказывается невозможным. Для треугольной решетки  $x_c = 0,58$  ( $x_c = 0,3473$ ), для г. ц. к. решетки  $x_c = 0,42$  ( $x_c = 0,119$ ).

Значительные усилия были потрачены (см. <sup>35</sup>) на то, чтобы выразить показатель  $t$  через  $\beta$  и  $\nu$  в рамках двухпоказательного скейлинга. Существование многих различных показателей  $t$ ,  $T$ ,  $T_1$  ставит задачу в более общей (и внушающей меньше энтузиазма) форме: как по виду соответствующего уравнения (см. раздел 6) определить показатель критического поведения интересующей нас величины. Возможно, что такого общего выражения не существует.

## 2.2. Универсальность. Подобие и самоподобие

Тот исключительный интерес, который вызывает исследование критических показателей, связан с их универсальностью — практически полной независимостью от многих грубых черт выбранной модели, и в то же время чувствительностью к таким тонким ее характеристикам, как симметрии, наличие дальнедействующих корреляций и т. п. При исследовании задачи о движении частицы в случайном потенциале с необходимостью возникают континуальные задачи протекания — задачи о случайной раскраске пространства в два цвета. Раскраска областей коррелирована на расстоянии  $\lambda_0$ ;

цвет малых областей, разделенных большим расстоянием, независим. Такая задача оказывается чрезвычайно полезной при теоретическом рассмотрении — граница кластера (т. е. связной области данного цвета) в ней есть непрерывная гладкая кривая, топологическая структура кластеров также наглядна.

Если рассматривать, скажем, поликристаллический материал или другую подобную систему, возникающую в результате кристаллизации, то вначале следует рассмотреть сам процесс кристаллизации. В рамках рассматривавшейся Мейерингом<sup>50</sup> модели он сводится к разбиению пространства на многогранники Вороного, соответствующие первоначальному расположению центров кристаллизации. Затем многогранникам придается случайная раскраска — некоторые из них считаются проводящими, другие — нет<sup>51</sup>. Существуют и другие нерешеточные модификации задач протекания — в частности, различные задачи на случайных узлах.

Утверждение об универсальности состоит в том, что все (перечисленные в разделе 2.1) критические показатели не зависят от выбора модели и определяются лишь размерностью пространства. Это утверждение, проверенное в очень большом ряде численных экспериментов, является основой теории.

Поведение системы определяется соотношением двух пространственных масштабов — минимальной длины  $a_0$  (постоянной решетки, масштаба  $\lambda_0$ , среднего расстояния между центрами кристаллизации) и длины корреляции  $\xi$ . При  $\tau \ll 1$ ,  $\xi \gg a_0$ , и существует область промежуточной асимптотики  $a_0 \ll l \ll \xi$ . В этой области все характеристики кластеров (измеренные на масштабе, меньшем  $\xi$ ) подобны их характеристикам в самой критической точке, когда  $\tau = 0$ ,  $\xi = \infty$ . Их свойства в этой области характеризуются самоподобием (масштабной инвариантностью). На масштабах, больших  $\xi$ , система является однородной; ее можно представить себе как состоящую из блоков размерами  $\xi \times \xi \times \xi \dots$ . При этом свойства блоков характеризуются поведением на промежуточной асимптотике. При  $\tau = 0$  масштабная инвариантность имеет место на всех масштабах  $l > a_0$ . Все эти утверждения давно известны и составляют основу теории подобия.

Для того, чтобы описать поведение системы вблизи  $\tau = 0$ , надо знать лишь длину корреляции  $\xi$  (т. е. один термодинамический показатель  $\nu$ ) и геометрические свойства бесконечного кластера или очень больших кластеров. При этом причиной подобия критических явлений является подобие (самоподобие) геометрических объектов. Характеристикой такого самоподобия является фрактальная размерность. Введение этого понятия и тщательное изучение размерностей кластеров и их подмножеств — границ, скелета и т. д. и связей между ними привело не только к расширению словарного запаса, но и к пониманию новых закономерностей.

Кроме того, исследование геометрического подобия есть исследование единичного объекта при  $\tau = 0$ . При этом исчезает необходимость в рассмотрении асимптотического поведения величин при  $\tau \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$ , где  $N$  — число узлов образца. Вместо двух предельных переходов надо рассмотреть лишь один — переход к термодинамическому пределу  $N \rightarrow \infty$ . Выгода этого с точки зрения эффективности и точности численного эксперимента в комментариях не нуждается.

### 3. РАЗМЕРНОСТИ: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные сведения о размерностях читатель может найти в монографии<sup>1</sup> и обзоре<sup>52</sup>. Обзор<sup>4</sup> также содержит все необходимые определения, а также рассматривает вопросы, связанные с вычислением размерностей различных множеств. Наличие этой литературы позволяет нам и здесь избежать подробного обсуждения деталей. Однако, как и в предыдущей главе, кажется разумным напомнить читателю основные понятия, а также ввести некоторые стандартные модели, никак не упомянутые в<sup>52</sup>. Отсылая читателя к упомя-

нутой обзорной литературе, мы не станем в этом параграфе давать ссылки на основные оригинальные работы.

Все рассматриваемые нами объекты есть множества точек  $d$ -мерного евклидова пространства. Для любого такого множества может быть введена его топологическая размерность. Эта величина вводится следующим образом. Размерность любого конечного или счетного множества точек есть  $d_T = 0$ . Размерность любого связного множества есть  $d_T + 1$ , если оно может быть разрезано на две несвязанные части исключением из него как минимум  $d_T$ -мерного множества точек (проведением  $d_T$ -мерного разреза). Из самого определения топологической размерности следует, что она может быть только целым числом. Топологическая размерность прямой равна 1, плоскости и сферы — 2, шара — 3 и т. д.

Ни размерность евклидова пространства, ни топологическая размерность не имеют никакого отношения к самоподобию рассматриваемых множеств. Характеристикой такого самоподобия служит фрактальная размерность, а точнее, вводимые различным образом фрактальные размерности. Начнем с примера.

### 3.1. Размерность самоподобия.

#### Разветвленность и фазовые переходы

Рассмотрим квадрат (рис. 2). Проведя два разреза, его можно разделить на четыре подобных ему квадрата, со стороной вдвое меньшей. Размерность самоподобия его  $D = \ln N / \ln n$ . Здесь  $N$  — число подобных данному объектам, имеющих в  $n$  раз меньший, чем у данного, пространственный масштаб, из которых можно составить данный объект. В данном примере размерность самоподобия  $D = \ln 4 / \ln 2 = 2$ .

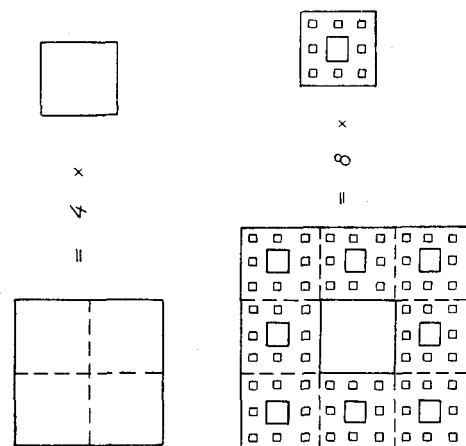


Рис. 2. Квадрат ( $D = 2$ ) и ковер Серпинского ( $D = 1,8817...$ )

Рассмотрим теперь следующее множество. Возьмем квадрат. Проведя четыре разреза, разделим его на 9 частей. Среднюю удалим. Аналогичным образом поступим с каждой из 8 оставшихся частей. Получившееся в результате множество — ковер Серпинского (универсальная кривая Серпинского) — имеет размерность самоподобия  $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,8817...$  Такие объекты с нецелой размерностью мы, вслед за Мандельбротом, будем называть фракталами \*).

При построении ковра Серпинского процесс выбрасывания середины квадрата продолжается бесконечно. В физической же системе всегда существует минимальный масштаб  $a_0$ , такой, что при меньших масштабах самоподобие уже не имеет места. Можно сказать, что система состоит из атомов размера  $a_0$ . Тогда при большом пространственном размере системы полное число атомов в ней (ее масса) растет с ростом линейного размера как

$$M \propto l^D, \quad (3.1)$$

так что размерность самоподобия имеет простой смысл некоторого (критического, поскольку в реальных системах самоподобие есть лишь в окрестности критической точки) показателя.

\*) Мы следуем тому написанию, в котором это слово впервые появилось в русской научной литературе — в сборнике <sup>53</sup>. В <sup>54</sup> и вслед за ней — в <sup>52</sup> используется другое написание — фракталь: с мягким знаком, но мужского рода.



Приведем в качестве иллюстрации еще несколько примеров регулярных фракталов. Это тем более уместно сделать, что эти объекты, устроенные очень просто, весьма интенсивно исследуются в качестве моделей кластеров и других самоподобных систем. Эти фракталы показаны на рис. 3. Рисунок следует понимать так: на нем показаны «элементарные ячейки» фракталов — каждая заштрихованная область представляет собой фрактал, подобный

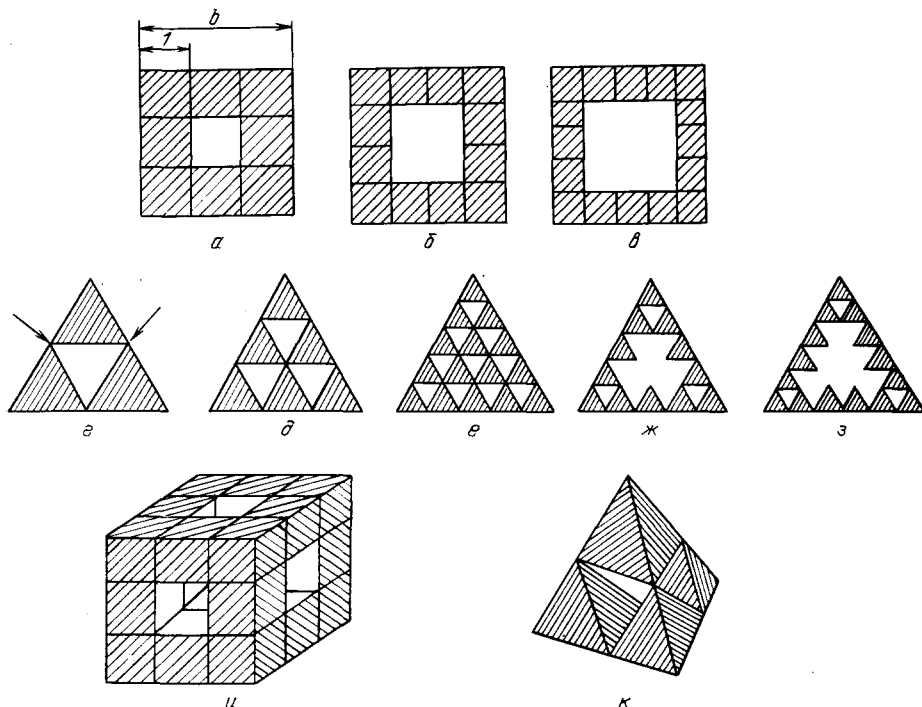


Рис. 3. Модели регулярных фракталов.

$a - e$  — Ковер Серпинского и другие фракталы, рассмотренные в <sup>55</sup>; см. табл. II;  $r = \infty$ .  $z$  — Треугольная кривая Серпинского.  $\delta - z$  — Другие «шахматные треугольники»;  $r < \infty$ .  $u, k$  — Обобщения  $a$  и  $z$  на трехмерный случай.

данному. Нетрудно убедиться, что таким образом можно построить фрактал с любой наперед заданной размерностью самоподобия.

Обратим внимание на одно отличие между объектами рис. 3,  $a - e$  и  $z - z$ , сразу бросающееся в глаза. Первые объекты состоят из элементарных ячеек, соединенных вершинами, во вторых ячейки соединены вдоль своих сторон. Этому отличию можно придать некую математическую форму. С топологической точки зрения все показанные на рис. 3 объекты одномерны: каждый из них можно разрезать на две несвязанные части исключением как максимум счетного множества точек. Минимальное число исключенных точек для разрезания объектов рис. 3,  $z - z$  конечно (для треугольной кривой Серпинского оно равно 2: эти точки указаны стрелками), а для объектов рис. 3,  $a - e$  бесконечно. Это минимальное число точек называется разветвленностью (ramification) фрактала  $r$ . Конкретное значение разветвленности несущественно, но некоторые свойства фракталов с конечной и бесконечной разветвленностью существенно различны.

Для фракталов, имеющих бесконечную разветвленность, мы можем ввести показатель разветвленности. Пусть имеется фрактальная решетка размера  $R$ . Под фрактальной решеткой мы понимаем систему, устроенную на больших масштабах так же, как соответствующий регулярный фрактал, а на минимальном масштабе каждая из заштрихованных областей на рис. 3

соответствует одному узлу решетки, соединенному связями с узлами, соответствующими соседним заштрихованным областям. Для разрезания этой решетки на две части требуется разорвать минимум  $N_{\min}$  связей. Показатель разветвленности тогда есть показатель

$$N_{\min} \propto R^D. \quad (3.2)$$

Наиболее интересным для нас свойством бесконечно разветвленных фрактальных решеток является то, что в отличие от решеток с конечной разветвленностью, на которых путь протекания разрушается при выбрасывании конечного числа узлов, на этих решетках существует самый настоящий перколяционный переход. В работе<sup>55</sup> рассматривалось семейство регулярных фракталов типа изображенных на рис. 2, а — в. Эти фракталы отличаются значением  $b$  — числа «элементарных ячеек» вдоль стороны квадрата. В табл. II

Таблица II

Критическая концентрация и критические показатели для модели протекания на бесконечно разветвленном фрактале

$b$	$D$	$\rho$	$x_c$	$\nu$	$\beta$
2	2	1	0,5	1,83	0,63
3	1,89	0,63	0,85	2,13	0,27
4	1,79	0,5	0,92	2,43	—
5	1,72	0,43	0,95	2,69	—
10	1,56	0,30	0,989	3,60	—
100	1,30	0,15	0,9999	6,79	—
$b \rightarrow \infty$	$1 + \frac{\ln 4}{\ln b}$	$\frac{\ln 2}{\ln b}$	$1 - \frac{1}{b^2}$	$\frac{\ln b}{\ln 2}$	$\frac{\ln b}{b^2 \ln 2}$

приведены величины фрактальной размерности  $D$ , показателя  $\rho$ , а также критической перколяционной концентрации  $x_c$  и показателей  $\beta$  и  $\nu$ , вычисленных с помощью стандартного ренормгруппового подхода<sup>56</sup>.

Отсутствие фазовых переходов на решетках с конечной разветвленностью и их возможность на бесконечно разветвленных решетках является, по-видимому, довольно общим фактом<sup>57</sup>: как известно, в евклидовых одномерных системах ( $r = 1$ ) фазовые переходы невозможны<sup>(58, § 163)</sup>, в евклидовых системах с  $d \geq 2$  ( $r = \infty$ ) фазовые переходы существуют.

Поскольку при  $\tau = 0$  выбрасывание конечной доли узлов бесконечного кластера приводит к разрушению протекания, мы вынуждены положить, что его разветвленность конечна. Поэтому в качестве модели кластера (точнее, его скелета) может использоваться треугольная кривая Серпинского и не может, скажем, ковер Серпинского.

Введенное выше определение размерности самоподобия годится, вообще говоря, лишь для регулярных геометрических объектов, обладающих самоподобием в строгом смысле. Такие объекты, как перколяционные кластеры, полимерные молекулы и т. д. обладают лишь статистическим самоподобием.

### 3.2. Более строгие определения

Строгое математическое определение аналогов размерности самоподобия приводит нас к понятиям емкости по Колмогорову и размерности Хаусдорфа — Безиковича.

Рассмотрим множество точек в  $d$ -мерном евклидовом пространстве и его покрытие  $d$ -мерными сферами. Определим  $N(\epsilon)$  — минимальное число сфер радиуса  $\epsilon$ , необходимых для покрытия. Если величина  $N(\epsilon)$  растет с убыванием  $\epsilon$  как  $\epsilon^{-D_c}$ , то  $D_c$  и есть колмогоровская емкость множества.

Строго говоря, эта величина должна определяться так: емкость есть такое число  $D$ , при котором существует и отличен от нуля предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \frac{\Gamma(D+1/2)}{\Gamma(1/2)^D} \varepsilon^D \quad (3.3)$$

В этом определении величина  $N(\varepsilon)$  просто умножается на величину, являющуюся обобщением формулы для объема  $d$ -мерной сферы на нецелые  $D$ . Рассматриваемый предел есть просто оценка сверху для  $D$ -мерного объема нашего множества.

Определение хаусдорфовой размерности отличается тем, что покрытие осуществляется сферами, радиус которых не превосходит  $\varepsilon$ , так что хаусдорфова мера есть

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\Omega_i} \frac{\Gamma(D+1/2)}{\Gamma(1/2)^D} r_i^D. \quad (3.4)$$

где сумма взята по всем сферам радиуса  $r_i \leq \varepsilon$ , образующим покрытие. Величина  $D$ , при которой этот предел отличен от 0 и  $\infty$ , есть хаусдорфова размерность множества.

Покрывание сферами здесь используется лишь для того, чтобы не говорить об ориентации. С тем же успехом мы можем осуществлять покрытие  $d$ -мерными кубами; член с  $\Gamma$ -функциями в (3.3), (3.4) тогда следует опустить. При экспериментальном определении  $D$  (см. раздел 4.1) предпочтение отдается именно этому способу.

Хаусдорфова размерность и емкость по Колмогорову могут различаться даже для очень простых множеств. Например, для множества точек прямой с координатами  $x_n = 1/n$  первая равна 0, вторая —  $1/2$ . Емкости, в отличие от размерностей, в частности хаусдорфовой, не остаются инвариантными при кусочно-гладком, возможно, имеющем особенности, преобразовании координат<sup>59</sup> — для величины, претендующей на название размерности, такая инвариантность необходима.

Во всех физических приложениях размерность *определяется* как показатель (3.1)<sup>60</sup>, и сказать, что она — хаусдорфова размерность или емкость, — не представляется возможным. Это связано с тем, что размерность описывает свойства промежуточной асимптотики, и переход к пределу, требуемый формальными определениями, невозможен. На малых масштабах система не является фрактальной — ее поведение описывается минимальным масштабом  $a_0$ .

### 3.3. Самоподобные кривые

Рассмотрим самоподобную кривую без возвратов и самопересечений. Пусть зависимость среднего расстояния между концами этой кривой от ее длины дается соотношением  $\langle r^2 \rangle^{1/2} \propto (l/a_0)^\varphi$ , где  $l$  — длина кривой (для длинной полимерной молекулы, например,  $\varphi \approx 4/3$  при  $d = 2$ ,  $\varphi \approx 7/6$  при  $d = 3$ <sup>31</sup>). Учитывая, что «масса» кривой пропорциональна  $l$  (для молекулы — числу мономеров, для случайного блуждания — числу шагов и т. п.), мы получим, что фрактальная размерность кривой<sup>5</sup>

$$D = \varphi^{-1} \quad (3.5)$$

Подойти к определению размерности кривой мы можем и иначе. Рассмотрим поведение кривой на масштабе, существенно большем минимального (само существование минимального масштаба при этом не обязательно — мы можем рассмотреть и «математический» фрактал). Будем измерять длину кривой с пространственным разрешением  $\lambda_0$  (рис. 4). Измеренная длина будет зависеть от  $\lambda_0$  как

$$\mathcal{L} \propto \lambda_0^{1-D}. \quad (3.6)$$

Действительно, на всем протяжении кривой она может быть разбита на  $N \sim \lambda_0^{-D}$  кусков (дуг, стягиваемых отрезками длины  $\lambda_0$ ), поскольку при изменении масштаба  $\lambda_0$  в  $a$  раз это число, по определению, изменяется в  $b$  раз — такое, что  $\ln b / \ln a = D$ . Полная измеренная длина кривой при этом  $\mathcal{L} \sim \lambda N$  выражается формулой (3.6).

Для кривых без возвратов и самопересечений использование обоих способов определения  $D$  не вызывает вопросов. В случае же наличия возвратов мы вправе наряду с хаусдорфовой размерностью рассмотреть размерности,

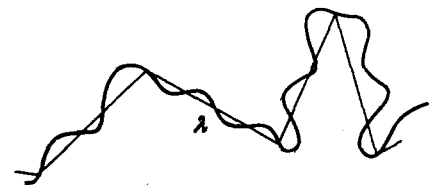


Рис. 4. Измерение длины кривой с масштабом  $\lambda$

определенные несколько по-другому. Если на кривой имеются возвраты или самопересечения (т. е. многократно проходимые куски), возникает вопрос, сколько раз при измерении длины следует учесть такой отрезок. Стандартное определение емкости или размерности утверждает, что только один раз: данная точка при любом ее прохождении окажется покрытой одной и той же сферой. Мы вправе изменить наше определение (3.4), учтя многократно пройденную точку столько раз, сколько она была пройдена. В этом случае введенная нами мера отлична от хаусдорфовой.

Рассмотрим некоторую параметризацию кривой, например ее естественную параметризацию, при которой параметром является  $l$  — длина (с учетом возвратов) от начальной точки или  $t$  — время движения точки с постоянной скоростью вдоль кривой. Учтявая для каждой сферы весовой множитель  $p(\Omega_i)$ , равный доле времени, которое точка проводит внутри сферы, или вероятности найти движущуюся точку внутри данной сферы, мы можем определить размерность  $D'$  как такое число, что

$$0 < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\Omega_i} \frac{\Gamma(D' + 1/2)}{\Gamma(1/2)^{D'}} p(\Omega_i) r_i^{D'} < \infty. \quad (3.7)$$

Заменив в (3.7) суммирование по сферам  $\Omega_i$  радиуса  $r_i \leq \varepsilon$  суммированием по сферам равного радиуса, получим соответствующую емкость. Определенная с таким весом размерность есть величина, аналогичная той, что в <sup>52</sup> названа внутренней размерностью кривой. В <sup>4</sup> для размерности  $D'$  употреблено название размерности натуральной меры. Такая размерность определяет, например, зависимость «массы» случайных блужданий от времени, если приписать каждому узлу массу, равную числу его посещений. Величина  $1/\varphi$  дает для такого блуждания именно значение  $D'$ , а не  $D$ .

Для других приложений могут быть введены другие весовые множители: часто, например, в теории странных аттракторов оказывается полезным понятие информационной размерности  $D_i$ , для которой весовой множитель равен  $|\mu(\Omega_i)| = -p(\Omega_i) \ln p(\Omega_i)$ .

Задача об измерении длины кривой в виде задачи об измерении длины побережья по все более и более подробной карте, была, по-видимому, первой практической задачей, в которой исследователи столкнулись с фрактальными кривыми. Историю вопроса, цифры и прекрасные иллюстрации можно найти в <sup>1</sup>. Граница перколяционного кластера в двумерной континуальной модели также является фрактальной кривой. К этому вопросу мы вернемся ниже.

Для любой кривой, заданной на двумерном многообразии (плоскости, сфере), фрактальная размерность будет удовлетворять неравенству  $1 \leq D \leq 2$ . Фрактальная размерность западного побережья Британии  $D \approx 1,24$ , побережья Австралии —  $D \approx 1,13$ ; размерности большинства побережий довольно близки к единице. В то же время фрактальная размерность границы перколяционного кластера, которую можно рассматривать как некото-

рую линию уровня случайного рельефа, равна  $D_h \approx 1,74$ , т. е. гораздо ближе к двойке. Фрактальная размерность границы кластера с  $s \gg s_c$  (lattice animal) приблизительно равна  $1,5^3$ . Побережья островов и континентов — не случайные линии уровня: они возникли в результате сложного взаимодействия моря и суши.

#### 4. РАЗМЕРНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ КЛАСТЕРОВ

##### 4.1. Однородные фракталы и размерность кластера

Вернемся к задачам протекания и вычислим фрактальную размерность перколяционного кластера (очень большого или бесконечного). Эта размерность легко выражается через термодинамические критические показатели.

Как мы уже говорили, вблизи критической точки систему можно рассматривать как фрактальную, самоподобную, на масштабах  $a_0 \ll l < \xi$ , где  $\xi$  — длина корреляции, и как однородную на больших масштабах. Представление о том, как может выглядеть такая система, можно получить, если замостить плоскость коврами Серпинского с длиной стороны, равной  $\xi$ : на масштабах, меньших  $\xi$ , система самоподобна, на больших — однородна. При наличии в системе минимального масштаба зависимость ее массы от масштаба  $l$  дается формулой (3.4) при  $l < \xi$  и соотношением  $M \propto l^d$  при  $l > \xi$ . Введя плотность

$$\rho = \frac{M}{l^d} = \begin{cases} l^{D-d}, & l < \xi, \\ \text{const.} & l > \xi, \end{cases} \quad (4.1)$$

мы увидим, что  $\xi$  есть тот масштаб, при котором плотность становится постоянной. В двойном логарифмическом масштабе поведение плотности показано на рис. 5. Аналогичное поведение имеет место для любой интенсивной величины, характеризующей поведение такой системы. Во фрактальном режиме такая величина  $Y$  ведет себя как  $Y \sim l^\lambda$ , где  $\lambda$  — некоторый показатель степени, в однородном — становится постоянной.

Структуры, которые ведут себя как фрактальные на малых и как однородные на больших масштабах часто называются однородными фракталами. В частности, именно такими объектами, как уже говорилось, являются перколяционные кластеры при  $x \neq x_c$ . Мощность бесконечного кластера, т. е. доля узлов или объема, принадлежащих кластеру, ведет себя с изменением концентрации как  $P_\infty \propto \tau^\beta$ . Эта величина, собственно, и есть плотность кластера. Ясно, на каком масштабе определена эта величина: бесконечный кластер является фрактальным объектом при  $l < \xi \propto \tau^{-\nu}$  и однородным на больших масштабах. При изменении характерного масштаба  $\xi$ , т. е. концентрации  $x$ , эта плотность меняется как  $\rho(\xi) \propto \xi^{-\beta/\nu}$ . Учитывая, что  $\rho(\xi) \propto \xi^{D-d}$ , получим <sup>2, 3, 61</sup>

$$D = d - \frac{\beta}{\nu}. \quad (4.2)$$

К соотношению (4.2) мы еще вернемся, а пока заметим, что приведенный здесь способ рассуждений является стандартным: таким же образом устанавливается связь с термодинамическими и других геометрических показателей.

Пусть нас интересует поведение какой-либо величины  $Y$ , связанной с нашим однородным фракталом, например, проводимости (раздел 5.1). Преж-

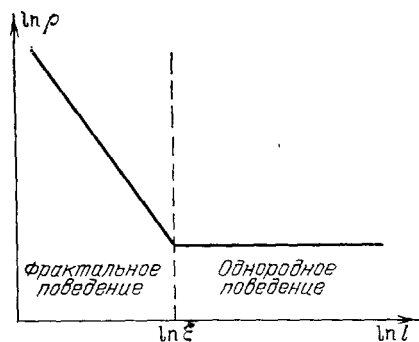


Рис. 5. Поведение плотности однородного фрактала

де всего, надо ввести интенсивную величину  $y$ , связанную с  $Y$ . Для проводимости такой величиной, естественно, будет удельная электропроводность. Такая интенсивная величина в однородном режиме не зависит от масштаба  $l$ . Во фрактальном режиме при  $l \leq \xi$  она ведет себя как  $l^\lambda$ . Следовательно, значение  $y$  в однородном режиме  $y \propto \xi^\lambda$ . Зависимость  $y$  от управляющего параметра  $\tau$  при этом появляется только в силу зависимости от  $\tau$  длины  $\xi$ , так что  $y(\tau) \propto \xi(\tau)^\lambda \propto \tau^{-\nu\lambda}$ . Значит, термодинамический показатель  $\lambda'$  ( $y \propto \tau^{\lambda'}$ ) связан с  $\lambda$  соотношением  $\lambda' = -\nu\lambda$ . Этот способ рассуждения мы будем постоянно использовать в настоящем обзоре.

Существуют также другие способы рассуждений, приводящие к (4.2). Результат (4.2) подтвержден в двумерном случае независимыми измерениями

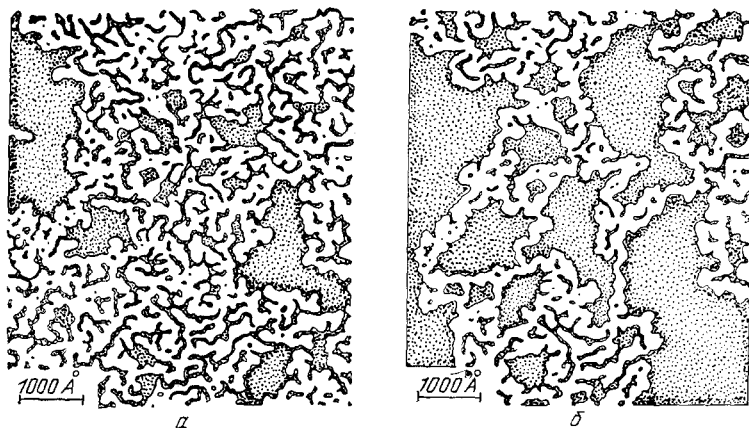


Рис. 6. Микрофотографии островковой металлической пленки при  $x = x_c$ <sup>63</sup>.  
а — Выделен бесконечный кластер. б — Выделен скелет бесконечного кластера

$D$ ,  $\beta$  и  $\nu$ <sup>61</sup>. Среди экспериментов, подтверждающих (4.2), особо отметим реальные эксперименты на островковых металлических пленках. В<sup>62</sup> исследовались пленки свинца, в<sup>63</sup> — золота. Полученные значения  $D \approx 1,9$  (рис. 6—8). Стандартный способ определения фрактальных размерностей реальных объектов заключается в получении их (микро)фотографий, выполненных с различным увеличением, нанесении на фотографии квадратной сетки и подсчете числа квадратов, в которые попали точки объекта. После этого фрактальная размерность определяется как наклон прямой, выражающей зависимость числа таких квадратов от коэффициента увеличения, построенную в двойном логарифмическом масштабе. В работе<sup>64</sup>, например, таким образом определялась фрактальная размерность границы облаков, определяемая турбулентной диффузией водяного пара в атмосфере<sup>65</sup>.

Соотношение (4.2) содержит  $d$  и справедливо в гиперскейлинговом режиме, т. е. при  $d \leq 6$ . При  $d > 6$  показатель  $D$  принимает постоянное значение, как и многие другие критические показатели в классической области. Это значение  $D = 4$ . Формула, дающая значение  $D$  при любой размерности пространства, имеет вид<sup>66</sup>

$$D = \frac{\beta + \gamma}{\nu} \quad (4.3)$$

Исключая из (4.3)  $\gamma$  с помощью гиперскейлингового соотношения  $d\nu = 2\beta + \gamma$ , получим (4.2).

При рассмотрении вопроса о числе бесконечных перколяционных кластеров было строго доказано, что это число равно  $n_\infty = 0, 1$  или  $\infty$ . 0, естественно, соответствует отсутствию протекания, 1 или  $\infty$  — наличию<sup>67,68</sup>.

При  $d < 6$  реализуются первые две возможности, при  $d = \infty$  (решетка Бете) — первая и третья. Неоднократно высказывалась гипотеза, что при  $d > 6$  также возможно  $n_\infty = \infty$ <sup>67,68</sup>. Если это действительно так, то расхождение между формулами (4.2) и (4.3) и вообще нарушение гиперскейлинговых соотношений становится понятным: эти формулы дают размерности различных

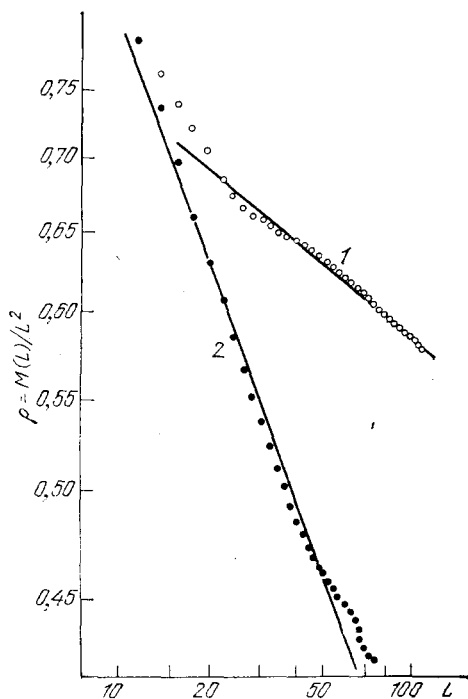


Рис. 7. Зависимость плотности бесконечного кластера (1) и плотности его скелета (2) от линейного размера исследуемого образца<sup>68</sup>.

$x = x_c$ , двойной логарифмический масштаб

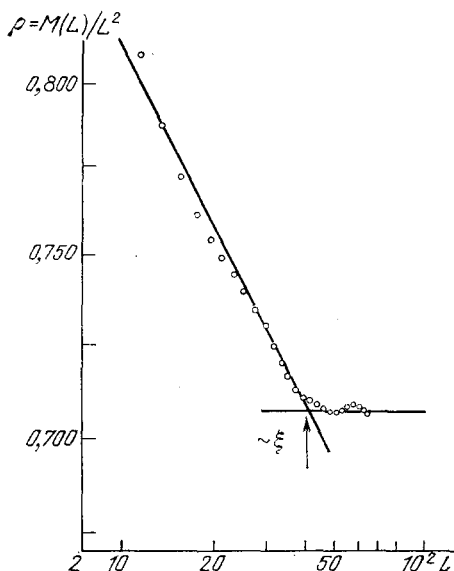


Рис. 8. Зависимость  $\rho(L)$  при  $x > x_c$ <sup>68</sup>.

Эта кривая является экспериментально полученным аналогом рис. 4

множеств. (4.2) определяет размерность множества всех бесконечных кластеров, (4.3) — размерность одного кластера. При  $d < 6$ , когда при  $x > x_c$   $n_\infty = 1$ , эти множества, естественно, совпадают. Какие-либо доказательства или опровержения гипотезы о том, что при  $d \geq 6$   $n_\infty = \infty$ , автору не известны.

Наряду с размерностью самого кластера представляет интерес размерность его токонесущей части — скелета. Скелет бесконечного кластера есть множество узлов, принадлежащих бесконечным в обоих направлениях путям по кластеру. Считалось, что знание этой размерности поможет разобраться с вопросом об электропроводности перколяционной сетки. Размерность скелета определяется формулой

$$D_b = d - \frac{\beta_b}{\nu} \quad (4.4)$$

аналогичной (4.2) с тем только отличием, что  $\beta_b$  есть критический показатель мощности скелета кластера: вероятность того, что данный узел принадлежит скелету, равна  $P_b \propto \tau |\beta_b|$ . Эта размерность определена в работе<sup>69</sup> и равна  $1,67 \pm 0,17$  для  $d = 2$  и  $1,68 \pm 0,14$  для  $d = 3$ . Она не сильно отличается от размерности треугольной кривой Серпинского, которая поэтому часто использовалась в качестве модели скелета<sup>70,71</sup>.

#### 4.2. Химическая размерность и скорость распространения возбуждений

Наряду с фрактальной размерностью кластера представляет интерес его химическая размерность<sup>72,73</sup>. Рассмотрим, например, задачу узлов. Определим химическое расстояние  $R_c$  между узлами  $i$  и  $j$  как минимальное число

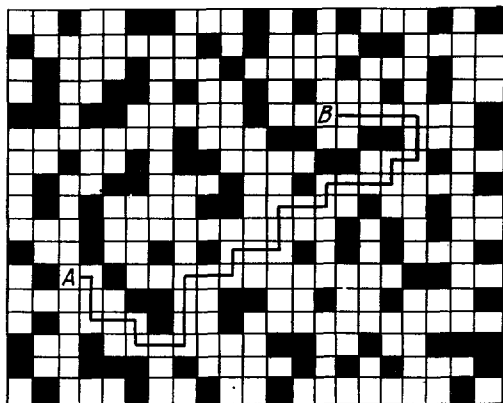


Рис. 9. Химическое расстояние на перколяционном кластере

шагов, за которое мы можем попасть из  $i$  в  $j$ , проходя только по доступным узлам (рис. 9). Определив шар  $B_c$  как множество узлов, для которых  $R_c \leq n$ , мы можем определить химическую размерность как показатель  $D_c$  такой, что число  $N$  узлов, принадлежащих  $B_c$ , растет с ростом  $n$  как

$$N \propto n^{D_c}. \quad (4.5)$$

Эта величина определена численно для двумерного случая и равна  $D_c \approx 1,72$ . Величина  $D_c$  есть отношение двух размерностей — размерности кластера  $D$  и размерности  $D_R$  кривой, длина которой дает нам химическое расстояние. Размерность этой «геодезической» равна  $D_R = D/D_c \approx 1,10$  —

видно, что это не слишком изломанная линия. Эта терминология связана со следующим приложением теории протекания. Рассмотрим перколяционный кластер как решеточную модель ветвящейся полимерной молекулы. Узлы решетки при этом соответствуют мономерам, связи — химическим связям между ними. Число шагов по кластеру — число химических связей вдоль пути по молекуле от  $i$ -го мономера к  $j$ -му — вполне естественно назвать химическим расстоянием, а связанную с ним размерность — химической. Другое название этой размерности — размерность связности.

Обсудим подробнее смысл связанного с  $D_R$  термодинамического показателя  $\psi = (D_R - 1) \nu$ <sup>74</sup>.

Пусть имеется некоторое возмущение, которое распространяется следующим образом. Если в момент времени  $t$  возбужден узел  $i$ , то в момент времени  $t + 1$  возбуждаются все соседние с  $i$  доступные узлы. Узел, который когда-либо был возбужден, остается возбужденным во все последующие моменты времени. Пусть в момент времени  $t = 0$  мы возбудили узел 0. Фронт возбуждения в момент времени  $t$  представляет собой совокупность узлов, химическое расстояние от которых до узла 0 равно  $t$ .

Такая модель описывает, например, распространение болезни деревьев<sup>36</sup> или лесного пожара, используется также (в рамках модели, рассмотренной в<sup>75</sup>) для описания распространения нервного импульса в миокарде<sup>74</sup>.

При  $x < x_c$  возмущение в системе не распространяется. При любом  $x > x_c$  асимптотическое поведение фронта описывается в пределе больших времен некоторой, зависящей от  $x$ , скоростью. При приближении  $x$  к  $x_c$  сверху эта скорость уменьшается: имеет место критическое замедление. При  $x = x_c$  скорость возмущения обращается в 0.

Пусть концентрация доступных узлов равна  $x > x_c$ . Длина корреляции в такой системе равна  $\xi = \tau^{-\nu}$ . Во фрактальном режиме время, за которое фронт возмущения переместится на расстояние  $R$ , равно  $t \propto R^{D_R}$ , в частности, расстояние  $\xi$  будет преодолено за время  $t_\xi \propto \xi^{D_R} \propto \tau^{-D_R \nu}$ . На больших масштабах поведение системы становится однородным. При этом  $t/t_\xi =$



$= R/\xi$ . Таким образом, за время  $t \gg t_\xi$  фронт возмущения распространится на расстояние  $R \propto (\xi/t_\xi)t$ ; эффективная скорость его распространения  $v \propto \frac{\xi}{t_\xi} \propto \tau^{(D_R-1)v}$ . Показатель  $\psi = (D_R - 1)v$  эффективной скорости определяет величину критического замедления. При  $d = 2$   $\psi = 0,13 \pm 0,06$ , при  $d = 3$   $\psi = 0,31 \pm 0,06$ . В классической области  $\psi = 0,5$ .

#### 4.3. Границы перколяционных кластеров

Исследован также вопрос о размерности внешней границы критического перколяционного кластера. Размерность всей границы кластера — внешней и внутренней — совпадает с размерностью самого кластера, так как число узлов, принадлежащих границе (периметру), пропорционально полному числу узлов кластера:  $l \sim s^p$ , где  $p = 1^3, 76$ . Размерность внешней границы большого двумерного кластера исследовалась в работе <sup>77</sup> и равна  $D_h = 1,72$  —  $1,74$  (рис. 10). Рассмотрим связь этой величины с другими критическими показателями <sup>78</sup>. Возьмем критический кластер. Его граница есть самоподобная кривая; при длине кривой порядка полной длины границы кластера (скажем, порядка  $l/2$ ), уход ее от начальной точки составляет величину порядка размера кластера, т. е. длины корреляции  $\xi$ . Характерное число узлов критического кластера составляет  $s_c \propto \tau^{d\nu-\beta}$ , а связь длины внешней границы кластера с числом узлов в нем определяется соотношением  $l \propto s_c^{p+\kappa}$ , где  $\kappa \leq 0$  — показатель, определяющий критическое поведение отношения внешнего и внутреннего периметров. Величина  $\kappa$  для двумерного случая численно определялась в <sup>76</sup>, в <sup>79</sup> для нее было получено в двумерном случае выражение через  $d = 2$ ,  $D$  и термодинамические показатели:

$$\kappa = \frac{d}{D} \left\{ - \left[ \frac{1 - (D/d)}{dv} \right]^{1/2} + 1 - \frac{D}{d} p \right\}. \quad (4.6)$$

Величина  $\kappa$  имеет очень малое значение  $\kappa \approx -0,1$ . Определяя  $D_h$  из соотношения  $D_h = 1/\varphi$ , где  $\varphi$  — показатель  $\xi = \mathcal{L} \propto l^\varphi$ , и вспоминая, что  $\xi \propto \tau^{-\nu}$ ,  $l \propto \tau^{(d\nu-\beta)(p+\kappa)}$ , получим

$$D_h = \left( d - \frac{\beta}{\nu} \right) (p + \kappa) = D(p + \kappa). \quad (4.7)$$

Сама по себе формула (4.7) остается справедливой и при  $d > 2$ , если под периметром (границей) кластера понимать соответствующую (гипер)поверхность.

В <sup>80</sup> исследовалась задача о некотором специальном типе диффузии испускаемых линейным источником частиц. При этом утверждалось наличие аналогии между возникающим в этой задаче диффузионным фронтом и границей перколяционного кластера. На основании такой аналогии (как и (4.6), непригодной в трехмерном случае) было получено значение  $D_h = 1 + (1/\nu)$ . В работе <sup>81</sup>, в которой проводилось численное моделирование границы кластера с помощью некоторого случайного блуждания, была получена близкая к этой величине оценка  $D_h = 1,751 \pm 0,002$ .

В <sup>78</sup> делается вывод о том, что при  $d \geq 3$  конечная доля периметра кластеров принадлежит их внешней границе, т. е.  $\kappa = 0$ . Размерности границы

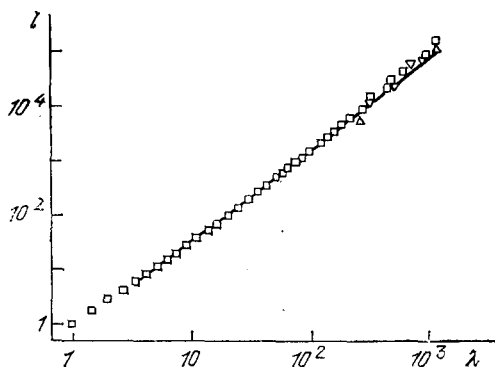


Рис. 10. Зависимость периметра перколяционного кластера от его поперечного размера <sup>77</sup>. Двойной логарифмический масштаб

кластера и самого кластера в этом случае совпадают. Причиной различия случаев  $d = 2$  и  $d \geq 3$  является существенное отличие топологии границ кластеров: в двумерном случае внешняя граница односвязна, при  $d \geq 3$  — неодносвязна.

## 5. РАЗМЕРНОСТИ И КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

### 5.1. Проводимость и упругость фрактальных сеток

Рассмотрим геометрические критические показатели, связанные с термодинамическим показателем  $t$ . Фиксируем  $\tau \neq 0$ . В однородной области масштабов систему можно рассматривать как состоящую из блоков размера  $\xi$ . Пусть характерный пространственный размер системы равен  $L > \xi$ ; для

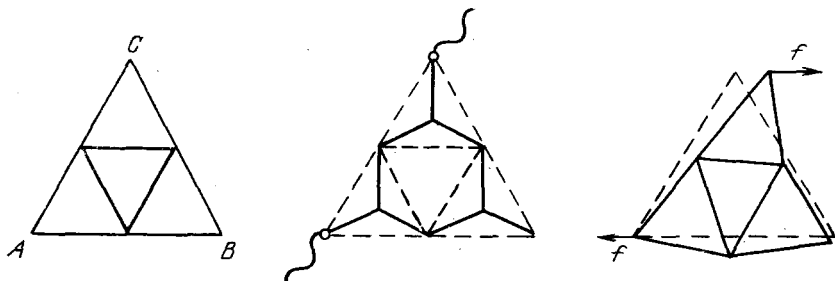


Рис. 11. К вычислению проводимости и упругости фрактальной решетки

определенности будем считать, что образец имеет форму  $d$ -мерного куба. Сопротивление его будем измерять, присоединив к противоположным граням куба идеально проводящие  $d - 1$ -мерные электроды.

Если сопротивление между двумя гранями кубика со стороной  $\xi$  равно  $\mathcal{R}_0$ , то сопротивление всей системы будет

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \left( \frac{L}{\xi} \right)^{-d+2}. \quad (5.1)$$

Действительно, в силу одинаковости кубиков, токи через их боковые грани не текут, сопротивление одного столбика кубиков, соединяющих электроды, равно  $\mathcal{R}_0(L/\xi)$ ; всего таких параллельно соединенных столбиков  $(L/\xi)^{d-1}$  штук, так что в результате получаем (5.1). Это известное соотношение, показывающее, что сопротивление проволоки растет пропорционально ее длине, сопротивления подобных плоских фигур одинаковы и т. д.

Если величина  $\mathcal{R} \propto \tau^{-t}$ , то, следовательно,  $\mathcal{R}_0(\xi) = (\mathcal{R}_0(L/\xi))^{-d+2} \mathcal{R}(\tau(\xi)) \propto \xi^{d-2+(t/\nu)}$ . Считая, что эта зависимость  $\mathcal{R}_0(l)$  имеет место на любом масштабе в самоподобном режиме, мы приходим к выводу, что сопротивление перколяционного кластера при  $l \leq \xi$  ведет себя в зависимости от расстояния между электродами как

$$\mathcal{R}(l) \sim l^{\frac{t}{\nu}}, \quad \text{где} \quad \frac{t}{\nu} = d - 2. \quad (5.2)$$

Впервые такой показатель был введен в <sup>82</sup>. Показатель  $\xi$  есть уже геометрический показатель, характеризующий свойства кластеров в самоподобном режиме. Этот показатель описывает скорость роста сопротивления фрактала с ростом его пространственного масштаба:  $\xi = \ln c / \ln a$ , где  $c$  — отношение сопротивлений, измеренных между подобными точками фракталов, пространственные масштабы которых различаются в  $a$  раз. В ранней работе <sup>83</sup> по вычислению  $t$  методом подобия постулировалось  $\xi = 1$ . Это предположение не является естественным, хотя, возможно, справедливо при  $d = 2$  <sup>84</sup>.

Значение  $\zeta$  нетрудно вычислить для простейших семейств регулярных фракталов. Проведем такое вычисление для треугольной кривой Серпинского<sup>63</sup>. Этот фрактал состоит из трех аналогичных ему фракталов вдвое меньшего масштаба, и, следовательно, имеет  $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,585$ . Для вычисления положим сопротивление между вершинами каждого из малых треугольников равным 1 и, заменяя каждый из них звездой по обычным правилам (рис. 11), получим, что сопротивление между вершинами большого треугольника равно  $R = 4/3$ , так что  $\zeta = \ln (4/3) / \ln 2 = 0,7370$ . Этот фрактал был выбран потому, что его фрактальная размерность близка к размерности скелета бесконечного кластера, так что он до некоторой степени моделирует его токонесящую часть. Значения  $\zeta$  для этих объектов также отличаются не слишком сильно. Рассматривая фракталы типа «шахматных треугольников» и откладывая на графике величину показателя  $\zeta$  в зависимости от фрактальной размерности, мы увидим, что получающиеся точки группируются вдоль какой-то кривой, хотя и не лежат точно на ней (рис. 12). Можно, однако, построить фракталы, для которых отклонение от этой кривой будет значительным: универсальной зависимости  $\zeta$  от  $D$  не существует. К этому важному вопросу мы еще вернемся в дальнейшем.

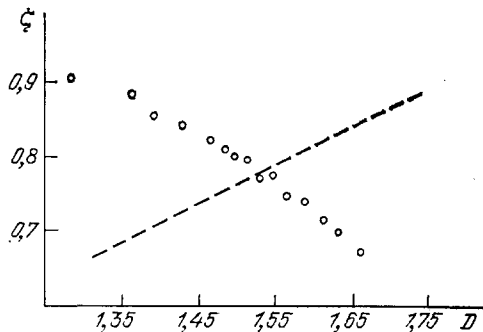


Рис. 12. Значения показателя  $\zeta$  для фракталов типа «шахматных треугольников»

Штриховая линия —  $\zeta = D/2$

Представляет также интерес поведение показателя упругости  $T$ . Для этой величины, по аналогии с  $\zeta$ , можно ввести геометрический показатель  $Z = (T/\nu) + d - 2$ . При моделировании упругости случайной сетки следует, как уже отмечалось, рассматривать по отдельности случаи изотропных и центральных сил упругости. Для случая изотропных сил упругости потенциальная энергия при смещении узлов решетки есть просто сумма вкладов, соответствующих смещениям по осям:

$$U = \sum_{\alpha=1}^d \frac{k}{2} (\Delta x^{\alpha})^2.$$

Соответствующие условия равновесия имеют вид<sup>31</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sum_m k (x_m - x_m, 0) &= 0, \\ \sum_m k (y_m - y_m, 0) &= 0. \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

(суммирование ведется по целым связям  $m$  перколяционной решетки, каждой из которых сопоставляется коэффициент упругости  $k$ ). Эта система представляет собой повторенную  $d$  раз (для каждой из осей) систему уравнений Кирхгофа для электрических токов в сетке, и, следовательно, в однородном случае  $T = t$ .

Для случая центральных сил

$$U = \sum_{i,j} \frac{k_{ij}}{2} (\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{ij,0})^2,$$

и условия равновесия имеют иной вид, чем система уравнений Кирхгофа — в них перепутываются члены, соответствующие смещениям по разным осям. Для простейших фракталов — треугольной кривой Серпинского и ее обобщений на пространства большого числа измерений — этот показатель вычислен в работе <sup>85</sup>. При этом считается, что каждая из частей, из которых состоит фрактал, представляет собой жесткую фигуру с известными модулями растяжения и сдвига, а в точках соединения эти фигуры соединены шарнирно (рис. 11). Определяя в первом порядке по смещению вершин большого фрактала действующие на них силы, мы получим, что модули сжатия и сдвига ведут себя одинаково:  $K \propto \mu \propto l^z$ ,  $z = d - 1$ , а их отношение равно  $K/\mu = 4/d$ .

Таким образом, задачи об упругости полимерной сетки в случае изотропных и центральных сил упругости могут принадлежать различным классам универсальности. То, что это действительно так, показано в численном эксперименте <sup>49</sup>. В этой же работе рассмотрен случай сил, имеющих однородный и центральный вклады и исследован кроссовер от одного типа поведения к другому.

## 5.2. Показатель проводимости, аномальная диффузия и внутренняя размерность блужданий по кластеру

Величина показателя  $\zeta$  напрямую связана с некоторыми размерностными характеристиками фракталов, точнее, множеств, порожденных случайными блужданиями по исходному фракталу.

Рассмотрим точку, совершающую случайные блуждания по упорядоченной  $d$ -мерной решетке. Зависимость среднего квадрата расстояния, на которое уходит точка за  $N$  шагов (дискретное время  $t$ ), при этом будет

$$\langle r^2 \rangle \propto N, t, \quad (5.4)$$

причем этот асимптотический закон никак не зависит от размерности пространства. При блуждании на фрактальной решетке зависимость  $\langle r^2(t) \rangle$  будет иной <sup>86-91</sup>:

$$\langle r^2 \rangle \propto N^{2\theta} = N^{2/(2+\theta)}, \quad (5.5)$$

где величина  $\theta \neq 0$  называется иногда показателем аномальной диффузии. Выражение (5.5) можно рассматривать как описывающее диффузию в среде с переменным, зависящим от расстояния коэффициентом диффузии:

$$\mathcal{K}(r) \propto r^{-\theta}. \quad (5.6)$$

Фрактальные свойства среды проявляются в том, что такая зависимость  $\mathcal{K}(r)$  реализуется при любой начальной точке блуждания.

Кажется довольно удивительным, что фрактальная структура множества нарушает такой универсальный закон, как (5.4). Поэтому приходит в голову соображение, что, хотя расстояние, измеренное во внешнем пространстве, не подчиняется (5.4), среднее расстояние внутри системы, т. е. химическое расстояние, подчиняется этому закону. Это соображение справедливо лишь для фрактальных линий. Рассматривая такую линию — сильно извилистую одномерную решетку <sup>86</sup>, — мы можем сказать, что за  $N$  шагов блуждание уйдет в среднем на  $N_c \propto N^{1/2}$ . В евклидовом пространстве это расстояние будет соответствовать уходу на  $r \sim N_c^{1/D}$ , так что  $\langle r^2 \rangle \propto N^{1/D}$ . При этом

$$\theta = 2D - 2. \quad (5.7)$$

Формула (5.7), однако, несправедлива для объектов с разветвленностью больше 1. Причина этого кроется в том, что фрактальная структура кластера сказывается не только на том, что длинный путь блуждания по фракталу соот-

ветствует малому смещению в окружающем евклидовом пространстве. Сложная структура путей блуждания и неоднородность распределения точек их пересечения приводит к нарушению самого соотношения  $N_c \sim N^{1/2}$ .

Рассмотрим случайную сетку. На минимальном масштабе мы можем считать, что она образована обычными проводниками, сопротивлением  $R$  каждый, а можем полагать, что заданы вероятности перескоков электронов между узлами:  $w_{ij} = w$  для любой целой связи и  $w_{ij} = 0$  для разорванной. При  $\tau > 0$  в любом из этих случаев на больших масштабах поведение частиц является диффузионным. Проводимость системы пропорциональна подвижности носителей тока, которая, в свою очередь, пропорциональна коэффициенту диффузии — вследствие фундаментального соотношения Эйнштейна. Поскольку коэффициент диффузии  $\mathcal{K}(\tau)$  определен лишь на бесконечном кластере, которому принадлежит доля  $P_\infty(\tau)$  узлов, это соотношение имеет вид <sup>86,91</sup> (см. также <sup>92</sup>)

$$\sigma(\tau) \propto \mathcal{K}(\tau) P_\infty(\tau). \quad (5.8)$$

Для вычисления асимптотики поведения  $\mathcal{K}(\tau)$  воспользуемся нашим стандартным рассуждением. Коэффициент диффузии есть интенсивная величина. Ее значение  $\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(r = \xi) \propto \tau^\theta$ . Подставляя это в (5.8), для  $\theta$  получим

$$\theta = \frac{t-\beta}{\nu}. \quad (5.9)$$

Соотношение, аналогичное (5.9), впервые появилось в <sup>93</sup> и стало интенсивно использоваться после появления работ <sup>86,91</sup>. Подтверждение этого соотношения в рамках более строгого подхода читатель найдет в <sup>94</sup>. Перепишем (5.9), используя (5.2):

$$\zeta = (\theta + 2) - \left(d - \frac{\beta}{\nu}\right). \quad (5.10)$$

Рассмотрим связь показателя  $\zeta$  с размерностными характеристиками. Смысл второго члена в формуле (5.10) нам уже известен — это фрактальная размерность самого кластера.

Рассмотрим линию (с возвратами и самопересечениями), которую описывает совершающая случайные блуждания по кластеру точка. Длина  $l$  этой кривой пропорциональна числу шагов  $N$ . Показатель  $\varphi$  для этой кривой, определенный формулой  $\langle r^2 \rangle^{1/2} \propto l^\varphi$ , равен  $\varphi = 1/(2 + \theta)$ , и, следовательно, ее размерность  $D'_W = 2 + \theta$ . Поскольку  $\theta > 0$ , при блуждании на любом фрактале  $D'_W > 2$ . Таким образом, выражение для показателя  $\zeta$  мы можем переписать как

$$\zeta = D'_W - D, \quad (5.11)$$

где  $D$  — размерность множества, а  $D'_W$  — внутренняя размерность случайного блуждания по нему. На любой регулярной решетке  $\theta = 0$ ,  $D'_W = 2$ ,  $D = d$ , так что  $\zeta = 2 - d$ : это известный показатель для связи сопротивления системы с ее удельным сопротивлением.

Тот факт, что  $D'_W > 2$ , означает, что блуждающая точка совершает много возвратов. Это непосредственно видно из рис. 13, представляющего результат численного моделирования случайного блуждания по фракталу <sup>14</sup>.

Рассмотрим скелет бесконечного кластера. Поскольку сопротивление кластера равно сопротивлению его скелета (если электроды расположены достаточно далеко друг от друга), то показатели для всего кластера и его скелета совпадают. При этом, рассматривая блуждание на скелете, в полной аналогии с (5.10) получаем

$$\zeta = (\theta_b + 2) - \left(d - \frac{\beta_b}{\nu}\right), \quad (5.12)$$

где  $\theta_b$  — показатель аномальной диффузии на скелете кластера. Приравняв (5.10) и (5.12), получим <sup>60</sup>

$$D'_{W,b} - D_b = D'_W - D. \quad (5.13)$$

Внутренняя размерность блужданий на скелете меньше внутренней размерности блужданий на всем кластере: она ближе к двойке — размерности обычных случайных блужданий. Это связано с изменением характера возвратов:



Рис. 13. Блуждание из 2500 шагов на фрактале из 1000 узлов (дендрите) <sup>14</sup>

блуждания по мертвым концам приводили к многократным прохождением узлов, близких к точке их присоединения к скелету, при рассмотрении только скелета этот вклад исключается.

Исследовались и другие типы блужданий. Например, диффузия на lattice animals рассмотрена в <sup>95</sup>, в <sup>92, 96, 97</sup> исследовались самоизбегающие блуждания на фрактальных решетках.

### 5.3 Уравнение диффузии на фрактале

В предыдущих разделах мы имели дело лишь с асимптотиками поведения различных величин. Может быть поставлен вопрос: как выглядит уравнение диффузии на фрактале, каково его решение? В этом разделе мы будем следовать изложению работ <sup>98, 99</sup>, посвященных именно этому вопросу.

Рассмотрим плотность вероятности  $p(r, t)$  найти частицу, помещенную в момент времени  $t = 0$  в точку 0, в точке  $r$  в момент времени  $t$ . Как показывают вычисления для регулярного фрактала — треугольной кривой Серпинского — функция  $p(r, t)$  является неаналитической, имеющей особенности на всех масштабах. Мы можем рассмотреть плавную огибающую этой функции —  $P(r, t)$ . Для функции  $P(r, t)$  справедливо уравнение

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mathcal{K} r^{D-1-\theta} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right] \quad (5.14)$$

(уравнение записано в сферических координатах). Величина  $\mathcal{K}$  есть обобщенный коэффициент диффузии. Решение этого уравнения

$$P(r, t) = \frac{2+\theta}{\Gamma(D/(2+\theta))} \left[ \frac{1}{\mathcal{K}^*(2+\theta)^2 t} \right]^{D/(2+\theta)} \exp \left[ -\frac{r^2+\theta}{\mathcal{K}^*(2+\theta)^2 t} \right] \quad (5.15)$$

дает

$$\langle r^2(t) \rangle = \frac{[\mathcal{K}^*(2+\theta)^2 t]^{2/(2+\theta)} \Gamma((D+2)/(\theta+2))}{\Gamma(D/(2+\theta))} \quad (5.16)$$

$$P(0, t) = \frac{2+\theta}{\Gamma(D/(2+\theta))} [\mathcal{K}^*(2+\theta)^2 t]^{-D/(2+\theta)}. \quad (5.17)$$

Выражение (5.15) прекрасно согласуется с результатами точных вычислений для треугольной кривой Серпинского. Другой подход, приводящий к тем же результатам и основанный на формализме интегралов по траекториям, изложен в <sup>100</sup>. Уравнение (5.14) является аналогом записанного в сферических координатах уравнения диффузии в евклидовом пространстве

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = \frac{\mathcal{K}^*}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^{d-1} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right]. \quad (5.18)$$

Вывод (5.14) основан на связи между диффузией и проводимостью и не выходит за рамки наших стандартных рассуждений. Вероятность найти частицу в сферическом слое между  $r$  и  $r + dr = m(r, t) dr$  подчиняется соотношению

$$\frac{\partial m(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} I(r, t), \quad (5.19)$$

где  $I(r, t)$  — поток вероятности. Величина  $m(r, t)$  связана с  $P(r, t)$  и числом узлов  $N(r)$  внутри слоя:

$$m(r, t) = P(r, t) N(r). \quad (5.20)$$

Чтобы замкнуть систему, запишем уравнение, линейно связывающее  $I(r, t)$  с  $\nabla P(r, t)$ :

$$I(r, t) = \sigma(r) \frac{\partial P(r, t)}{\partial r}, \quad (5.21)$$

где коэффициент  $\sigma(r)$  пропорционален полной (проинтегрированной по углам) проводимости на расстоянии  $r$ . Используя (5.19)–(5.21), получаем

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = N^{-1}(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sigma(r) \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right] \quad (5.22)$$

Величина  $N(r) = \frac{\partial n(r)}{\partial r}$ , где  $n(r)$  — число узлов, заключенных внутри сферы радиуса  $r$ : если  $a_0 = 1$ , то  $N(r) = Dr^{D-1}$ . Введем вместо  $\sigma$  удельную «проводимость» на узел, пропорциональную коэффициенту диффузии:  $\sigma(r) = \mathcal{K}(r) N(r)$ . Для  $\mathcal{K}(r)$  справедливо уже упоминавшееся выражение  $\mathcal{K}(r) = \mathcal{K}r^{-\theta}$ . Подставляя все это в (5.22), получим уравнение (5.14).

Сделаем еще одно замечание. В евклидовом пространстве случай изотропного коэффициента диффузии является не слишком общим. В отличие от этого, на фракталах коэффициент диффузии в типичном случае изотропен.

Начнем с примера. Рассмотрим треугольную кривую Серпинского. Пусть на наименьшем масштабе сопротивление между вершинами  $A$  и  $B$  элементарной ячейки равно  $r_x$ , между  $A$  и  $C$  и  $B$  и  $C$  —  $r_y$ . Заменяя, как обычно, треугольник звездой, получим, что перенормированные сопротивления (т. е. сопротивления на масштабе  $2a_0$ ) равны

$$\begin{aligned} r_x &= r_{AB} = r_x + \frac{2r_x r_y}{r_x + 2r_y}, \\ r_y &= r_{AC} = r_y + \frac{r_y (r_x + r_y)}{r_x + 2r_y}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Отношение этих сопротивлений — величина анизотропии сопротивления  $X$  — перенормируется по закону

$$X' = \frac{r'_x}{r'_y} = g(X) = X \frac{X+4}{2X+3} \quad (5.24)$$

Преобразование  $X' = g(X)$  имеет одну устойчивую неподвижную точку  $X^* = 1$ , и, следовательно, как бы ни были выбраны сопротивления связей элементарной ячейки фрактала, на больших масштабах сопротивления между всеми вершинами фрактала одинаковы. На больших масштабах ( $X \approx 1$ ) величина  $\Delta = X - 1$  перенормируется по закону  $\Delta' = g'(1) \Delta = 4\Delta/5$ . Соответствующий геометрический показатель равен  $\ln(4/5)/\ln 2 = -0,322$ .

Такое поведение — изотропизация проводимости — вообще типично для фракталов. Рассмотрим какую-либо изотропную по конструкции, но имеющую разные сопротивления связей самоподобную систему. Пусть проводимости каких-либо связей, скажем, параллельных оси  $OX$ , равны  $\sigma_x$ , остальных —  $\sigma_y$ . Масштабное преобразование (т. е. переход к фракталу в  $n$  раз большего масштаба) перенормирует эти проводимости:

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= f_x(\sigma_x, \sigma_y), \\ \sigma'_y &= f_y(\sigma_y, \sigma_x). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Пусть все связи нашего фрактала являются токонесущими. Тогда функции  $f_x$  и  $f_y$  обладают свойствами монотонности по каждому из аргументов: из  $a > b$  следует  $f_{x,y}(a, c) > f_{x,y}(b, c)$ ,  $f_{x,y}(c, a) > f_{x,y}(c, b)$ . Увеличение проводимости каких-либо связей не может привести к уменьшению проводимости системы в целом.

При совпадающих аргументах

$$f_{x,y}(\sigma, \sigma) = n^t \sigma,$$

где  $n$  — коэффициент преобразования масштаба. Пусть для определенности  $\sigma_x > \sigma_y$ . Тогда

$$\frac{\sigma'_x}{\sigma'_y} = X' = \frac{f_x(\sigma_x, \sigma_y)}{f_y(\sigma_y, \sigma_x)} < \frac{f_x(\sigma_x, \sigma_x)}{f_y(\sigma_y, \sigma_y)} = X. \quad (5.26)$$

Таким образом, если изначальное значение  $X > 1$ , при последующих итерациях значения  $X$  будут уменьшаться, приближаясь к единице. При  $X < 1$  величина  $X$  при итерациях будет увеличиваться, пока также не достигнет единицы. Исключение составляет лишь случай, когда строгое неравенство не имеет места, т. е. при независимости обеих функций  $f_x$  и  $f_y$  от второго своего аргумента. Зависимость  $X'$  от  $X$  дается при  $X \rightarrow 1$  некоторой функцией  $g(X)$ , производная которой при  $X = 1$  определяет соответствующий геометрический показатель

$$\omega = \frac{\ln g'(1)}{\ln n}. \quad (5.27)$$

Исчезновение анизотропии при приближении к критической точке давно известно для перколяционных задач: в рамках приближения эффективной среды это явление исследовалось в <sup>101</sup>, критическое поведение анизотропии  $X$  впервые рассмотрено в <sup>102</sup>. Поведение анизотропии проводимости вблизи перколяционного перехода исследовано численно в работах <sup>102-105</sup> и в реальном эксперименте в <sup>106</sup>. Соответствующий термодинамический показатель  $\Lambda = -\omega n : X \sim \tau^\Lambda$ . Для двумерного случая он примерно равен 0,86, для трехмерного — близок к 1/3.



## 6. СПЕКТРАЛЬНАЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

## 6.1. Спектральная размерность: размерность множества возвратов и размерность блужданий

С характеристиками случайных блужданий по кластеру связан еще один очень важный показатель, носящий название размерности — спектральная, или фрактонная, размерность<sup>86,107</sup>. Рассмотрим балансное уравнение, описывающее случайное блуждание частицы:

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = \sum_j V_{ij} [p_j(t) - p_i(t)], \quad (6.1)$$

где  $p_i(t)$  — вероятность найти частицу на узле  $i$  в момент времени  $t$ ,  $V_{ij}$  — вероятность перехода с узла  $i$  на узел  $j$  в единицу времени. Мы будем полагать, что  $V_{ij} = 1$  для соседних узлов, соединенных целой связью, и  $V_{ij} = 0$  во всех остальных случаях. Это уравнение лишь порядком производной отличается от уравнения, описывающего колебания случайной сетки:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_i(t) = \sum_j \omega_{ij} [x_j(t) - x_i(t)]; \quad (6.2)$$

здесь  $\omega_{ij} = 1$ , если данная связь цела. Силы упругости при этом считаются изотропными — смещение является скалярной величиной. Уравнение типа (6.1) описывает также электронные свойства такого случайного кристалла в приближении сильной связи с коррелированным диагональным и недиагональным беспорядком, описываемого гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_j |j\rangle e_j \langle j| + \sum_{i,j} |i\rangle V_{ij} \langle j|, \quad (6.3)$$

где  $e_i = -\sum_j V_{ij}$ ;  $V_{ij} = 1$  для целой и  $V_{ij} = 0$  для разорванной связи. Как обычно, мы можем ввести функцию Грина соответствующих уравнений во временном или энергетическом представлении. Во временном представлении  $G_{ik}(t)$  есть решение, например (6.1), с начальным условием  $G_{ik}(t=0) = \delta_{ik}$ . Диагональный матричный элемент  $G_{kk}(t)$  имеет просто смысл вероятности оказаться на исходном узле  $k$  в момент времени  $t$ . Для регулярных фракталов соответствующие функции могут быть вычислены точно<sup>108</sup>. Рассматривая фурье-образ этой функции, найдем плотность собственных состояний соответствующего уравнения:

$$N(\mathcal{E}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \langle G_{00}(\mathcal{E} + i0) \rangle. \quad (6.4)$$

В задаче о колебаниях решетки, отличающейся от задачи о диффузии и об электронном спектре заменой первой производной на вторую, т. е.  $\mathcal{E}$  на  $\omega^2$ , плотность состояний равна

$$\mathcal{N}(\omega) = \omega N(\omega^2). \quad (6.5)$$

Чтобы установить связь этого рассмотрения с изложенными ранее подходами, определим асимптотическое поведение  $G_{00}(t)$  при блуждании на перколяционном кластере или другой фрактальной решетке. Пусть в момент времени  $t = 0$  частица находилась на узле 0. Сделав  $n \gg 1$  шагов, она окажется в среднем на расстоянии  $l \propto n^{1/(2+\theta)}$  от исходного узла. Рассмотрев сферу с таким радиусом, мы увидим, что внутри нее находится  $\propto l^D$  узлов решетки. Считая для простоты, что внутри этой сферы попадание конечной точки блужданий в любой узел равновероятно, получим, что вероятность того, что по прошествии времени  $t$  частица окажется на исходном узле, равна

$$P_0(t) \propto t^{-D/(2+\theta)}. \quad (6.6)$$

Зная асимптотику вероятности остаться на исходном узле, мы можем определить асимптотический вид плотности состояний: для задачи о диффузии и задачи об уравнении Шрёдингера случайного кристалла с коррелированным диагональным и недиагональным беспорядком асимптотика  $N(\xi)$  при  $\xi \rightarrow 0$  есть

$$N(\xi) \propto \xi^{D/(2+\theta)-1}, \quad (6.7)$$

для задачи о колебаниях решетке

$$\mathcal{N}(\omega) \propto \omega^{[2D/(2+\theta)]-1} \quad (6.8)$$

Рассмотрим регулярную решетку в евклидовом пространстве любой размерности  $d$ . Для нее плотность фононных состояний (для однородной решетки имеется только акустическая мода) имеет при  $\omega \rightarrow 0$  асимптотику

$$\mathcal{N}(\omega) \propto \omega^{d-1}. \quad (6.9)$$

Для фрактальной структуры (перколяционного кластера, геля на пороге гелеобразования) величина

$$D_f = 1 + \lim_{\omega \rightarrow 0} \ln \mathcal{N}(\omega) = \frac{2D}{2+\theta} = 2 \frac{D}{D_w} \quad (6.10)$$

есть важная характеристика колебательных спектров объекта, переходящая в евклидову размерность в случае регулярной решетки. Эта величина называется спектральной, или фрактонной, размерностью системы. Слово «размерность» в данном случае не означает, что существует какое-либо множество, размерностью которого (в одном из упомянутых в разделе 3.2 смыслов) она является. Величина спектральной размерности может быть определена и для более общего случая: как для неизотропных сил упругости<sup>109</sup>, так и для дальнедействующих взаимодействий<sup>110</sup>. Рассмотренный выше случай, однако, является наиболее важным. В этом случае величина  $D_f$  связана с размерностью  $D_{\text{rec}}$  множества моментов времени  $t_i$ , в которые блуждание вернулось в исходную точку  $O$ <sup>111,112</sup> и фрактальной (хаусдорфовой) размерностью блуждания. Первая связь дается соотношением

$$D_{\text{rec}} = 1 - \frac{D_f}{2}. \quad (6.11)$$

справедливым, если  $D_f < 2$  (как это всегда имеет место для перколяционных кластеров; см. раздел 6.3). Если рассмотреть блуждание на каком-либо множестве с  $D_f > 2$ , значение  $D_{\text{rec}}$  окажется равным нулю.

Для регулярных решеток в пространстве  $d$  измерений  $D_{\text{rec}}(d)$  ведет себя следующим образом:  $D_{\text{rec}}(1) = 1/2$ ,  $D_{\text{rec}}(d \geq 2) = 0$ ; в пространстве 2 измерений число возвратов пропорционально  $\ln t$ , в пространстве с  $d \geq 3$  блуждания невозвратны<sup>113</sup>.

Прямой смысл имеет также величина  $D_w = D_s/2$ . Число различных узлов, посещенных блужданием из  $n$  шагов, равно  $S_n \propto n^{D_s/2}$ <sup>114</sup> (рис. 14), так что  $D_w$  есть фрактальная размерность блуждания, в отличие от его внутренней размерности  $D'_w = 2D/D_f = D/D_w$ .

Рассмотренный выше показатель  $D_{\text{rec}}$  непосредственно связан с кинетикой фрактальных реакций и может быть измерен в эксперименте. В качестве примера рассмотрим работу<sup>115</sup>. Объектом исследования является твердый раствор замещения нафталина  $C_{10}H_8$  в  $C_{10}D_8$ . Рассматривается перенос энергии триплетными экситонами  $T$ , излучательный распад которых запрещен по спину<sup>116</sup>. Механизм некогерентного переноса энергии связан со случайными перескоками экситонов с одной молекулы  $C_{10}H_8$  на другую, находящуюся не слишком далеко от первой. Критическая перколяционная концентрация  $C_{10}H_8$  составляет около 8 %.

Попав на один и тот же узел, два триплетных экситона образуют один синглетный:



который распадается излучательным образом. Скорость реакции, пропорциональная вероятности встречи двух экситонов, в однородном режиме подчиняется уравнению

$$\frac{dn_S}{dt} = n_T^2, \quad (6.13)$$

где  $n_S$  и  $n_T$  — концентрации триплетных и синглетных экситонов соответственно. Во фрактальном режиме уравнение видоизменяется:

$$\frac{dn_S}{dt} = n_T^2 t^{-D_{\text{rec}}}, \quad (6.14)$$

появляется явная зависимость от времени. При  $D_{\text{rec}} = 0$ , т. е. на многомерной регулярной решетке, это уравнение переходит в предыдущее. Экспериментатор имеет возможность следить за всеми величинами, входящими в

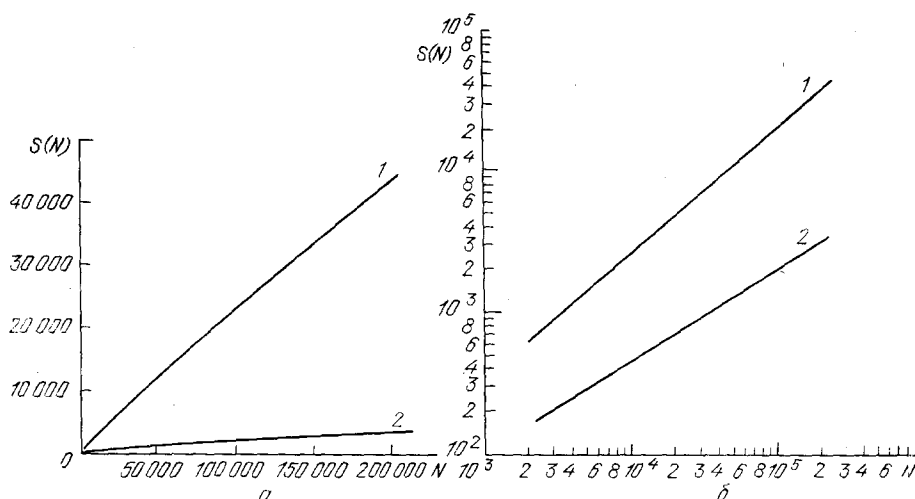


Рис. 14. Зависимость числа посещенных блужданием различных узлов от числа шагов  $N$  <sup>113</sup>.

Линейный (а) и двойной логарифмический (б) масштаб. 1 — Евклидова решетка; 2 — перколяционный кластер

(6.14):  $dn_S/dt$  пропорционально интенсивности флуоресценции образца  $I_f(t)$ ,  $n_T$  — интенсивности фосфоресценции  $I_{ph}(t)$  (на другой частоте), связанной с поглощением триплетных экситонов примесями (центрами люминесценции).

При концентрации  $C_{10H_8}$ , равной 8 — 12%, было получено значение  $D_{\text{rec}} \approx 0,35$ , в хорошем согласии с теоретическим значением.

Мы подробно остановились на этой работе, поскольку задачи о люминесценции смешанных молекулярных кристаллов и красителей в пористых матрицах представляют сейчас большой интерес с точки зрения экспериментального исследования фрактальной динамики. Этим вопросам посвящены работы <sup>117-126</sup>, в которых рассматривались как бинарные химические реакции, так и захват блуждающих частиц неподвижными ловушками.

## 6.2. Собственные состояния на фракталах.

### Модель квантовой перколяции

Скажем несколько слов о виде собственных функций уравнений (6.1) — (6.3) на фрактальных решетках. Эти функции соответствуют локализованным состояниям, названным фрактонами. Вопрос о локализации и кроссовере фрактонного и фоновонного поведения рассмотрен в <sup>107</sup>. Локализация колебательных и электронных состояний доказана для некоторых моделей

регулярных фракталов<sup>127,128</sup>. В работах<sup>7,91</sup> утверждение о локализации подтверждалось следующими аргументами. Рассмотрим  $\beta$ -функцию, аналогичную рассматриваемой в скейлинговой теории локализации<sup>129</sup>:

$$\beta(g) = \frac{d \ln g(L)}{d \ln L}, \quad (6.15)$$

где  $g$  — безразмерная проводимость, т. е. величина порядка  $\sigma L^{d-2}$ . В нашем случае  $\beta_1(g) = -\zeta = \text{const}$ . Из соотношения  $\beta(g) < 0$  при этом, по аналогии с<sup>129</sup>, делается вывод о локализации. Этот вывод основан на связи  $g(L)$  с чувствительностью волновых функций к изменению граничных условий, т. е. с одним из определений локализации<sup>33,130</sup>.

$\beta$ -функция, однако, есть усредненная, и, следовательно, слишком грубая характеристика системы. Естественно, что тонкие и наиболее интересные стороны проблемы остаются при таком рассмотрении «за кадром».

Надо отметить, что сам вопрос о локализации собственных состояний на фрактальной решетке — перколяционном кластере — исследуется давно,

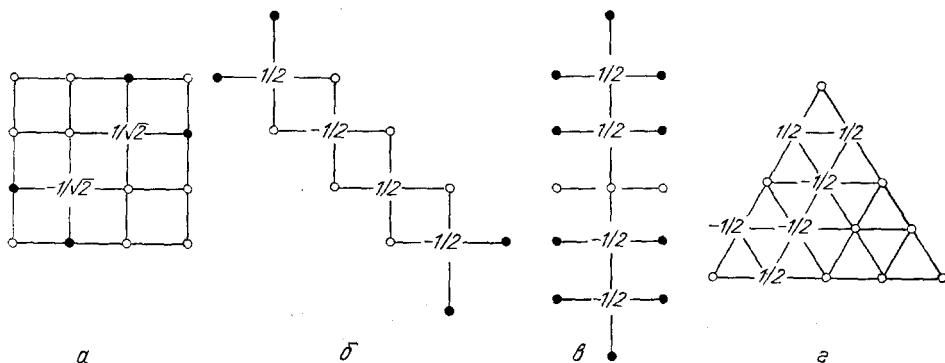


Рис. 15. Простейшие киркпатрик-эггартеровские состояния на квадратной решетке (а — в) и на наименьшем масштабе треугольной кривой Серпинского (г)

по крайней мере с 1972 г., в связи с так называемой задачей квантовой перколяции<sup>131-139</sup>. Это задача о модельном бинарном сплаве сильно различающихся компонент, в которой предполагается, что атомы типа А образуют сплав замещения с веществом В, причем уровни энергии этих атомов отличаются настолько сильно, что при исследовании зоны, образованной уровнями атомов одного типа, наличием атомов другого типа можно пренебречь. Эта модель описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_{i,j} V_{ij} |i\rangle \langle j|, \quad (6.16)$$

отличающимся от (6.3) отсутствием диагональных матричных элементов. Для этой задачи известно, что вблизи  $x = x_c$ , когда уже образовался бесконечный кластер атомов типа А, состояния локализованы на малых совокупностях атомов, принадлежащих этому кластеру, — проводимости по кластеру нет.

Нет ничего удивительного в локализации собственных состояний в такой модели — это предельный случай обычной андерсоновской локализации в сплаве<sup>33</sup>. Факт локализации собственных состояний на регулярных фракталах, которые на первый взгляд кажутся весьма упорядоченными структурами, представляется несколько более удивительным. Впрочем, его причиной, как обычно, является отсутствие трансляционной инвариантности. Несмотря на исключительную близость задач, случаи перекрестного цитирования работ по квантовой перколяции и по вычислению фрактонных характеристик автору не известны.

Ниже мы рассмотрим подробнее вопросы о типах локализованных состояний на фрактальных решетках, их поведении при переходе к однородному режиму и о чертах отличия между случайными и регулярными фракталами, которые в данном случае оказываются существенными.

Начнем с изложения некоторых результатов модели квантовой перколяции. Наиболее яркой отличительной чертой этой задачи является наличие особого типа локализованных состояний, имеющих на бесконечном кластере, — так называемых состояний Киркпатрика — Эггартера<sup>131</sup>. На рис. 15 показаны простейшие конфигурации, приводящие к появлению таких состояний. Черными кружками показаны атомы типа В, на месте атомов типа А указана амплитуда волновой функции соответствующего состояния<sup>132</sup>. Наличие таких состояний и их энергии никак не зависят от конфигурации остальных узлов системы; они абсолютно нечувствительны к граничным условиям и могут сосуществовать с экспоненциально (по Андерсону) локализованными и делокализованными состояниями. В спектре плотности состояний соответствующие уровни образуют тонкую структуру в виде  $\delta$ -образных пиков.

Локализация и спектр собственных состояний для регулярных фракталов были исследованы в работах<sup>127, 128</sup>. В работе<sup>128</sup> рассматривалась треугольная кривая Серпинского, в<sup>127</sup> — она же и еще одна регулярная модель. В основных выводах результаты этих работ совпадают. В обеих работах отмечается наличие на регулярных фракталах состояний, аналогичных киркпатрик-эггартеровским (в<sup>128</sup> они названы молекулярными). Пример такого состояния на наинизшем масштабе треугольной кривой Серпинского показан на рис. 15. Аналогичные состояния существуют и на больших масштабах. Для кривой Серпинского и ее аналогов в пространствах большего числа измерений доля таких состояний равна  $d/(d+1)$ . Остальная доля  $1/(d+1)$  состояний принадлежит иерархическим состояниям, амплитуды которых

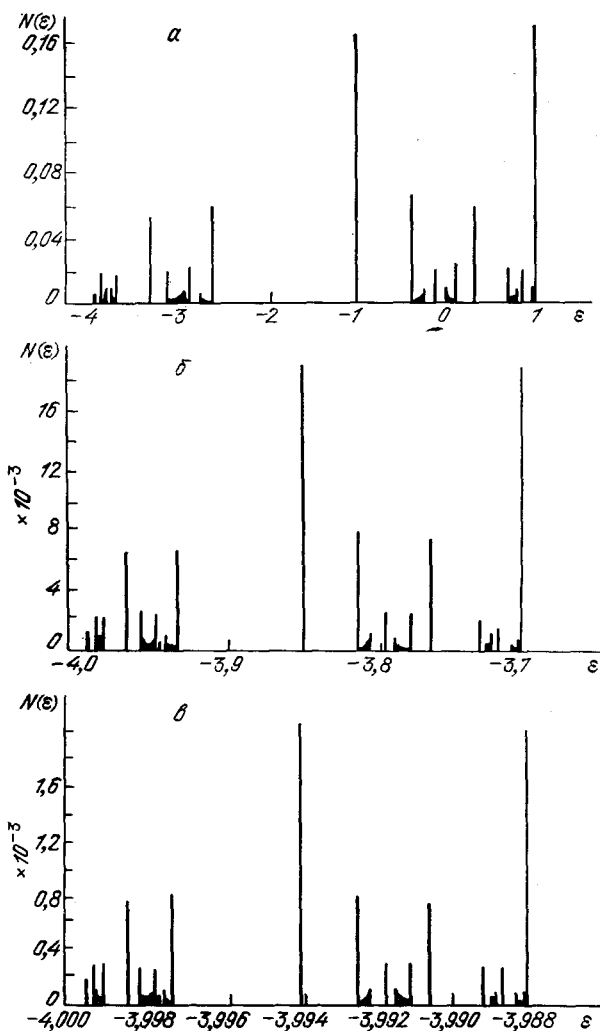


Рис. 16. Спектр плотности собственных состояний уравнения Шрёдингера на треугольной кривой Серпинского<sup>127</sup>.

а — Плотность состояний. б — Тонкая структура одного из пиков на рис. а. в — Тонкая структура одного из пиков на рис. б; видна масштабно-инвариантная структура пиков

отличны от нуля на всех масштабах, но средняя длина локализации хорошо определена. Средняя длина локализации всех состояний, кроме соответствующих  $E = 0$ , конечна, состояние с  $E = 0$  является единственным делокализованным состоянием. Иерархические состояния, по-видимому, полностью аналогичны состояниям, локализованным по Андерсону в модели квантовой перколяции.

В работе <sup>127</sup> исследован переход к однородному режиму. Рассматривалась система из кривых Серпинского  $n$ -го поколения (т. е. масштаба  $a_0 \cdot 2^n$ ), образующих регулярную треугольную решетку. При этом по-прежнему большая часть состояний нечувствительна к граничным условиям, однако, появляются и делокализованные состояния, составляющие  $(\sim 2/3)^n$  от полного числа состояний. Естественно предположить, что узкие зоны этих делокализованных состояний образуются из иерархических состояний и киркпатрик-эггартеровских состояний большой протяженности.

Интересна тонкая структура плотности состояний на регулярных фракталах (см. рис. 16). Поскольку все состояния локализованы, непрерывная компонента в спектре отсутствует. Дискретные уровни группируются в последовательность «гнезд», внутри которых структура уровней точно такая же: спектр имеет фрактальную структуру, похожую на структуру плотности состояний в одномерных системах (например, <sup>140</sup>). В каждом из «гнезд» скейлинговое поведение описывается своим собственным показателем. Показатель фрактальной размерности есть соответствующий показатель для усредненной плотности состояний в «гнезде» уровней, группирующихся вблизи  $E = 0$ .

Между моделями регулярных фракталов и моделью квантового протекания имеется существенное различие, связанное с тем, что в последней координационное число (число узлов, с которыми связан данный узел решетки  $Z$ ) является случайной величиной. В силу этого:

1) на регулярном фрактале уравнения (6.3) и (6.16) отличаются лишь сдвигом начала отсчета энергии на величину  $ZV$ , в то время как в неупорядоченном случае электронная и фононная задачи отличаются отсутствием или наличием диагонального беспорядка и могут принадлежать разным классам универсальности;

2) на регулярных фрактальных решетках, рассмотренных в <sup>127, 128</sup>, отсутствуют мертвые концы. Решетка из треугольных кривых Серпинского есть, в сущности, регулярная треугольная решетка со сложным базисом, поэтому неудивительно, что при любом  $n$  (т. е. при сколь угодно большой длине кроссовера  $\xi$ ) в системе имеются делокализованные состояния. На перколяционном же кластере первые делокализованные состояния появляются, когда  $x$  заметно превосходит  $x_c$ ; длина корреляции  $\xi$  при этом не так уж велика. Причина этого заключается именно в наличии мертвых концов <sup>136, 141</sup>. Существование в регулярной модели единственного делокализованного состояния с  $E = 0$  при  $Z = \text{const}$  и отсутствие такого состояния в модели квантовой перколяции также по-видимому является следствием беспорядка в  $Z$ .

### 6.3. «Суперуниверсальность» спектральной размерности

Вычисленная по известным значениям  $t$ ,  $\beta$  и  $\nu$  величина фрактальной размерности оказалась очень близка к  $4/3$  для любой размерности пространства  $2 \leq d \leq 6$ . Для решетки Бете, т. е. в классической области, равенство  $D_f = 4/3$  является точным. Было сделано предположение, что равенство является точным при любой размерности пространства (гипотеза Александера — Орбаха <sup>86, 142</sup>), т. е. величина фрактальной размерности является суперуниверсальной.

Гипотеза Александера — Орбаха сразу привлекла к себе пристальное внимание. Действительно, это предположение постулирует универсальную

связь между динамическим показателем  $t$  и статическими  $\beta$  и  $\nu$ : из него и формул (4.3), (5.9) и (6.10) следует гиперскейлинговое соотношение

$$t = \frac{1}{2} [(3d - 4)\nu - \beta]. \quad (6.17)$$

Подстановка в него значений из табл. I показывает, что оно выполняется по крайней мере неплохо и вполне пригодно в качестве приближенного правила.

Является ли соотношение между  $t$  (или, лучше,  $\zeta = (t/\nu) - d + 2$ ) и  $\nu$  и  $\beta$  общим свойством фрактальной геометрии или оно присуще лишь специальным классам фракталов? При  $d = 2$  из (6.17) следует  $\zeta = D/2$ . Вернемся к рис. 11. Соответствующая зависимость показана на нем штриховой линией. Видно, что даже наклоны этой прямой и линии, вдоль которой группируются точки, имеют разный знак. Для бесконечно разветвленных моделей регулярных фракталов соответствующие вычисления проделаны в <sup>55</sup>, <sup>143</sup>. Для случайно выбранной модели регулярного фрактала соотношение Александра — Орбаха несправедливо.

Гипотеза Александра — Орбаха сразу же встретила серьезную критику <sup>144</sup> <sup>145</sup>. Вопрос, для каких классов фракталов суперуниверсальность вообще может иметь место и относится ли к этому классу перколяционные кластеры, исследовался в <sup>84</sup>, <sup>146</sup>, <sup>147</sup>. В частности, в <sup>84</sup> был сделан вывод, что она может иметь место для перколяционных кластеров при  $d \geq 3$ , а при  $d = 2$   $\zeta = 1$ , а не  $D/2$ . Все эти работы опираются на некоторые правдоподобные рассуждения. Обратимся, однако, к более строгим расчетам и численным экспериментам.

В работе <sup>148</sup> исследовалось поведение показателя  $\zeta$  с помощью  $\varepsilon$ -разложения. Для величины  $\zeta' = \zeta/\nu$  было получено разложение  $\zeta' = 1 + \varepsilon/42 + O(\varepsilon^2)$ , где  $\varepsilon = 6 - d$ , в то время как соотношение Александра — Орбаха дает  $\zeta' = 1 + O(\varepsilon^2)$ . Таким образом, это соотношение нарушается уже в первом порядке по  $\varepsilon$ . Это нарушение (как и результаты, полученные в любом конечном порядке по  $\varepsilon$ ) ничего не говорит о точности выполнения (6.17) как приближенного соотношения.

Для  $d = 2$  было сделано несколько экспериментов по численному моделированию перколяционной проводимости с целью возможно точнее определить отношение  $t/\nu$  и, следовательно,  $\zeta$ . Такие работы требуют большой точности вычислений и мощности компьютера: требуется определить различие в третьем знаке показателя степени. В <sup>149</sup> при численном моделировании проводимости случайной сетки в виде полосы размером до  $350 \times 10^6$  узлов методом конечного скейлинга было получено значение  $t/\nu = 0,973 \pm 0,005$ , что соответствует  $D_t = 1,332 \pm 0,003$  (это значение отличается от  $4/3$  менее чем на 1%). Расчеты проводились на векторном компьютере CDC-205. В работе <sup>150</sup> с помощью прямого подсчета случайных блужданий получено  $t/\nu = 0,970 \pm 0,009$ , в работе <sup>151</sup>, где исследовалась модель со сверхпроводящими связями, результат был  $S/\nu = 0,977 \pm 0,010$ . В последней работе было проделано и моделирование трехмерного случая. Получение соответствующей кривой для этого случая потребовало 30 час. машинного времени на CRAY-1. Более подробные обсуждения этих численных экспериментов можно найти в <sup>107</sup>.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели основные размерностные свойства перколяционных кластеров. Поскольку фазовый переход в моделях протекания имеет чисто геометрический характер, естественно, что показатели критического поведения различных величин определяются геометрическими характеристиками системы. Свойства, связанные с самоподобием кластеров, определяются их фрактальной размерностью, максимальная скорость распространения возмущений — химической размерностью, поведение коэффициента диффузии,

проводимости, асимптотики спектра плотности состояний — спектральной (фрактонной) размерностью. Выяснена связь между многими из критических показателей.

Основные размерностные характеристики кластеров и соотношения между ними приведены в табл. III. Все соотношения, дающие связь размерностей друг с другом и с другими показателями (кроме помеченного звездочкой постулированного в <sup>80</sup> и заведомо неприменимого при  $d \neq 2$ ), справедливы при любой размерности пространства, не превосходящей 6. Числовые

Таблица III

Размерностные характеристики перколяционных кластеров  
(двумерный случай)

Наименование величины	Обозначение	Связь с другими показателями	Числовое значение
Размерность кластера	$D$	$D = d - \frac{\beta}{\nu} = \frac{\beta + \gamma}{\nu}$	$\frac{91}{48} = 1,896$
Размерность скелета	$D_b$	$D_b = d - \frac{\beta_b}{\nu}$	$1,67 \pm 0,17$
Химическая размерность	$D_c$	?	$1,72 \pm 0,02$
Размерность «геодезической»	$D_R$	$D_R = \frac{D}{D_c}$	$1,10 \pm 0,02$
Размерность внешней границы	$D_h$	$D_h = D(p + \kappa)$ $D_h = 1 + \frac{1}{\nu}^*$	$1,72 - 1,76$ $1,751 \pm 0,002^*$ $1,720 \dots^{**}$
Размерность блужданий	$D_w$	$D_w = \frac{D_f}{2} = \frac{D}{2 + \theta}$	0,67
Внутренняя размерность блужданий	$D'_w$	$D'_w = D + \zeta = 2 + \theta$	$2,846 \pm 0,006$
Фрактонная (спектральная) размерность	$D_f$	$D_f = \frac{2D}{2 + \theta} = \frac{2D}{D_w}$	1,33

значения даны для наиболее исследованного двумерного случая. Ссылки на соответствующие работы приведены в тексте обзора. Большинство этих значений получено в экспериментах по прямому численному моделированию. Существенный разброс имеется лишь для достаточно плохо исследованной величины  $D_h$ . Помеченное звездочкой значение получено при моделировании границы кластера с помощью случайного блуждания, помеченное двумя звездочками — вычислено с помощью формулы (4.6).

Введение в конце 70-х годов нового понятия — понятия размерности — стимулировало исследования критического поведения перколяционных моделей. Эти исследования прояснили многие черты поведения таких систем, позволили сформулировать новые модели и достичь более глубокого, хотя, как мы убедились, еще не окончательного, понимания многих давно изучаемых свойств критического поведения — например, критического поведения проводимости. Решены, однако, не все вопросы.

На настоящий момент не ясна связь показателя  $D_c$  — химической размерности — с обычными термодинамическими показателями, в частности, неизвестно, выражается ли он через  $\beta$  и  $\nu$  в рамках двухпоказательного скейлинга. Не выяснено окончательно значение размерности границы  $D_h$ . Не является до конца решенным вопрос о поведении размерностей в классической области  $d \geq 6$  (интересной с практической точки зрения, например, в связи с моделированием сложных сетей связи). Что касается фрактонной размерности, то этот показатель скорее всего является независимым и не выражается через  $\beta$  и  $\nu$ . Так ли это на самом деле? Таковы вопросы, стоящие перед теорией. Естественно, рассмотрение критического поведения новых величин или введение других моделей поставит новые вопросы.



Как уже говорилось, теория протекания является адекватной моделью многих экспериментальных ситуаций. Число экспериментальных работ, в которых измерялась бы какая-нибудь размерность, кроме фрактальной, однако, невелико. По-видимому, их количество будет расти. С экспериментальной точки зрения сам факт самоподобия не представляется слишком интересным в сравнении с теми особенностями поведения электропроводности, коэффициента диффузии, упругости, их анизотропии, а также теплоемкости, которые могут наблюдаться во фрактальных системах. Реальные системы, в которых имеются дальнोдействующие силы и различные корреляции, могут оказаться значительно сложнее рассмотренных нами простейших моделей. Размерностные характеристики в этом случае не будут статическими, а будут зависеть от управляющих параметров, что делает задачи еще более интересными. Сказанное о перколяционных моделях следует отнести и к другим перечисленным во введении системам с фрактальной геометрией.

Автор благодарен П. В. Елютину и Л. В. Келдышу за обсуждение многих затронутых в обзоре вопросов.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B. B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*.— San Francisco: Freeman, 1977.
2. Stanley H. E.//*J. Phys. Ser. A*. 1977. V. 10. P. L211.
3. Stauffer D.//*Phys. Rept.* 1979. V. 54. P. 1.
4. Farmer J. D., Ott E., Yorke J. E.//*Physica. Ser. D*. 1983. V. 7. P. 153.
5. Havlin S., Ben-Avraham D.//*J. Phys. Ser. A*. 1982. V. 15. P. L311.
6. Cates M. E.//*Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 926.
7. Alexander S., Laermans G., Orbach R., Rosenberg H. M.//*Phys. Rev. Ser. B*, 1983. V. 28. P. 4615.
8. Stapleton H. J., Allen J. P., Flynn C. P., Stinson D. J., Kurtz S. R.//*Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 1456.
9. Allen J. P., Colvin J. T., Stinson D. G., Flynn C. P., Stapleton H. J.//*Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 38. P. 299.
10. Pfeifer P. D., Avnir D.//*J. Chem. Phys.* 1983. V. 79. P. 3558.
11. Avnir D., Farin D., Pfeifer P.//*Ibidem.* P. 3566.
12. Even U., Rademan K., Jortner J., Manor N., Reibfeld R.//*Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 52. P. 2164.
13. Meakin P.//*Ibidem.*, 1983. V. 51. P. 1119.
14. Meakin P., Stanley H. E.//*Ibidem.* P. 1457.
15. Meakin P.//*Phys. Rev. Ser. A*. 1983. V. 27. P. 604.
16. Meakin P.//*Ibidem.* P. 1495.
17. Tokuyama M., Kawasaki R.//*Phys. Lett. Ser. A*. 1984. V. 100. P. 337.
18. Weitz D. A., Huang J. S., Lin M. J., Sung J.//*Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 1656.
19. Hentschel H. G. E., Deutch J. M.//*Phys. Rev. Ser. A*. 1984. V. 29. P. 1609.
20. Turban L., Debierre J. M.//*J. Phys. Ser. A*. 1984. V. 17. P. L289.
21. Vicsek T.//*Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 2281.
22. Hong D. C., Jan N., Stanley H. E., Lookman T., Pink D. A.//*J. Phys. Ser. A*. 1984. V. 17. P. L433.
23. Green J. E.//*Ibidem.* P. L437.
24. Hentschel H. G. E.//*Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 52 P. 212.
25. Cates M. E.//*J. Phys. Ser. A*. 1984. V. 17. P. L487.
26. Schaefer D. W., Martin J. E.//*Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 52. P. 2457.
27. Обухов С. П.//ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 2024.
28. Broadbent S. R., Hammersley J. H.//*Proc. Cambr. Phil. Soc.* 1957. V. 53. P. 629.
29. Deutcher G.//*Lect. Not. Phys.* 1981. V. 149. P. 26.
30. Robinson P. C.//*J. Phys. Ser. A*. 1983. V. 16. P. 605.
31. Де Жен П. Идея скейлинга в физике полимеров.— М.: Мир, 1982.
32. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.//УФН. 1975. Т. 117. С. 401.
33. Thouless D. J.//*Phys. Rept.* 1974. V. 13. P. 93.
34. Эфрос А. Л.//УФН. 1978. Т. 126. С. 41.
35. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников.— М.: Наука, 1979.

36. Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка. — М.: Наука, 1981.
37. Essam J. W. // Rept. Prog. Phys. 1980. V. 43. P. 833.
38. Kasteleyn P. W., Fortuin C. M. // J. Phys. Soc. Japan. Suppl. 1969. V. 26. P. 11.
39. Ма И. Современная теория критических явлений. — М.: Мир, 1980.
40. Kirkpatrick S. // Rev. Mod. Phys. 1973. V. 45. P. 574.
41. Den Nijs M. P. M. // J. Phys. Ser. A. 1979. V. 12. P. 1857.
42. Pearson R. // Phys. Rev. Ser. B. 1980. V. 22. P. 2579.
43. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. — М.: Мир, 1985.
44. Straley J. P. // Phys. Rev. Ser. B. 1977. V. 15. P. 5733.
45. Ohtsuki T., Keyes T. // J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L559.
46. Herrmann H. J., Derrida B., Vannimenus J. // Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 30. P. 4080.
47. Борн М., Хуанг Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. — М.: ИЛ, 1958.
48. Feng S., Sahimi M. // Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 1671.
49. Feng S., Sen P. N. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 216.
50. Meijering J. L. // Phil. Res. Rept. 1953. V. 8. P. 270.
51. Winterfeld P. H., Scriven J. E., Davis H. T. // J. Phys. Ser. C, 1981. V. 14. P. 2361.
52. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. // УФН. 1985. Т. 146. С. 492.
53. Странный аттрактор/Под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1979.
54. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
55. Ben-Avraham D., Havlin S., Movshovitz D. // Phil. Mag. 1984. V. 50. P. 297.
56. Reynolds P., Stanley H. E., Klein N. // Phys. Rev. Ser. B. 1980. V. 21. P. 1233.
57. Gefen Y., Mandelbrot B., Aharony A. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 855.
58. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. — М.: Наука, 1976.
59. Ott E., Withers W. D., Yorke J. A. // J. Stat. Phys. 1984. V. 36. P. 687.
60. Stanley H. E. // Ibidem. P. 843.
61. Kapitulnik A., Aharony A., Deutcher G., Stauffer D. // J. Phys. Ser. A. 1983. V. 16. P. L269.
62. Kapitulnik A., Deutcher G. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1444.
63. Voss R. F., Laiboritz R. B., Alessandrini E. I. // Ibidem. P. 1441.
64. Lovejoy S. // Science. 1982. V. 216. P. 185.
65. Procaccia I. // J. Stat. Phys. 1984. V. 36. P. 649.
66. Kapitulnik A., Gefen Y., Aharony A. // Ibidem. P. 807.
67. Newman C. M., Schulman L. S. // J. Phys. Ser. A. 1981. V. 14. P. 1735.
68. Зуев С. А., Сидоренко А. Ф. // ТМФ. 1985. Т. 62. С. 253.
69. Herrmann H. J., Stanley H. E. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 121.
70. Gefen Y., Aharony A., Mandelbrot B., Kirkpatrick S. // Ibidem. 1981. V. 47. P. 1771.
71. Aharony A., Gefen Y., Mandelbrot B., Kirkpatrick S. // Lect. Not. Phys. 1981. V. 149. P. 56.
72. Havlin S., Nossal R. // Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L427.
73. Rammal R., Angeles d'Auriac J. C., Benoit A. B. // J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L491.
74. Ritzenberg A. L., Cohen R. J. // Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 30. P. 4038.
75. Smith J. M., Cohen R. J. // Proc. Natl. Acad. Sci. 1984. V. 81. P. 233.
76. Leath P. L., Reich G. R. // J. Phys. Ser. C. 1978. V. 11. P. 4017.
77. Voss R. F. // Ibidem. Ser. A. 1984. V. 17. P. L373.
78. Соколов И. М. // ДАН СССР. 1986. Т. 288. С. 360.
79. Соколов И. М. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3 «Физика, астрономия». 1985. Т. 26. № 1. С. 87.
80. Sarpoul B., Rosso M., Gouyet J. F. // J. de Phys. Lett. 1985. V. 46. P. L149.
81. Ziff R. M. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 545.
82. Скал А. С., Шкловский Б. И. // ФТП, 1974. Т. 8. С. 1586.
83. Левинштейн М. Е., Шур М. С., Эфрос А. Л. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69, С. 2203.
84. Aharony A., Stauffer D. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 2368.
85. Bergman D. J., Kantor Y. // Ibidem. V. 53. P. 511.
86. Alexander S., Orbach R. // J. de Phys. Lett. P. 1982. V. 43. P. L625.
87. Ben-Avraham D., Havlin S. // J. Phys. Ser. A. 1982. V. 15. P. L691.
88. Pendey R. B., Stanffer D. // Ibidem. 1983. V. 16. P. L511.
89. Given J. A., Mandelbrot B. B. // Ibidem. P. L565.
90. Given J. A., Mandelbrot B. B. // Ibidem. 1984. V. 17. P. 1937.
91. Rammal R., Toulouse G. // J. de Phys. Lett. 1983. Т. 44. P. L13.

92. Rammal R.//J. Stat. Phys. 1984. V. 36. P. 547.
93. Shender E. F.//J. Phys. Ser. C. 1976. V. 9. P. L309.
94. Guyer R. A.//Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 29. P. 2751.
95. Wilke S., Gefen Y., Ilkovic V. Aharony A., Stanffer D.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. 647.
96. Rammal R., Toulouse G., Vannimenus J.//J. de Phys. 1984. V. 45. P. 389.
97. Sahimi M.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L379.
98. O'Shanghnessy B., Procaccia I.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 455.
99. O'Shanghnessy B., Procaccia I.//Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 32. P. 3073.
100. Banavar J. R., Willemsen J. F.//Ibidem. Ser. B. 1984. V. 30. P. 6778.
101. Bernasconi J.//Ibidem. 1974. V. 9. P. 4575.
102. Shklovskii B. I.//Phys. Stat. Sol. Ser. b. 1978. V. 85. P. K111.
103. Sarychev A. K., Vinogradoff A. P.//J. Phys. Ser. C, 1979. V. 12. P. L681.
104. De Magalhães A. C. N., Tsallis C., Schwachkeim G.//Ibidem. 1981. V. 14. P. 1393.
105. Lobb C. J., Frank D. J., Tinkham M.//Phys. Rev. Ser. B. 1981. V. 23. P. 2262.
106. Mendelson K. S., Karioris F. G.//J. Phys. Ser. C. 1980. V. 13. P. 6197.
107. Orbach R.//J. Stat. Phys. 1984. V. 36. P. 735.
108. Guyer R. A.//Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 32. P. 2324.
109. Liu S. H., Liu A. J.//Ibidem. Ser. B. 1985. V. 32. P. 4753.
110. Maritan A., Stella A. Padova preprint DFPD 17/85.— 1985.
111. Mandelbrot B. B.//J. Stat. Phys. 1984. V. 36. P. 541.
112. Newhouse J. S., Kopelman R.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 1677.
113. Спитцер Ф. Принципы случайного блуждания.— М.: Мир, 1969.
114. Argyrakis P., Anacker L. W., Kopelman R.//J. Stat. Phys. 1984. V. 36. P. 579.
115. Anacker L. W., Klymko P. W., Kopelman R.//J. Luminescence. 1984. V. 31—32. P. 648.
116. Агранович В. М. Теория экситонов.— М.: Наука, 1968.
117. Webman I.//J. Stat. Phys. 1984. V. 36. P. 603.
118. Webman I.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 220.
119. Argyrakis P., Kopelman R.//J. Luminescence. 1984. V. 31. P. 654.
120. Newhouse E. J., Kopelman R.//Ibidem. P. 651.
121. Newhouse J. S., Kopelman R.//Ibidem. P. 657.
122. Klafter J., Blumen A., Zumofen G.//Ibidem. P. 627.
123. Blumen A., Klafter J., White B. S., Zumofen G.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 53. P. 1301.
124. Anacker L. W.//Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 29. P. 3747.
125. Newhouse J. S., Kopelman R.//Ibidem. 1985. V. 31. P. 1677.
126. Phatak S. M., Kenkre V. M.//Ibidem. P. 6435.
127. Domany E., Alexander S., Bensimon D., Kadanoff L. P.//Ibidem. 1983. V. 28. P. 3110.
128. Rammal R.//Ibidem. P. 4871.
129. Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V.//Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 673.
130. Lee P. A., Ramakrishnan T. V.//Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 287.
131. Kirkpatrick S., Eggarter T. P.//Phys. Rev. Ser. B. 1972. V. 6. P. 3598.
132. Srivastava V., Weaire D.//Ibidem. 1978. V. 18. P. 6635.
133. Odagaki T., Ogita N., Matsuda H.//J. Phys. Ser. C. 1980. V. 13. P. 189.
134. Mattis D., Raghavan R.//Physica Ser. B + C. 1981. V. 107. P. 671.
135. Хмельницкий Д. Е.//Письма ЖЭТФ, 1980. Т. 32. С. 248.
136. Harris A. B.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 296.
137. Shapir Y., Aharony A., Harris A. B.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 486.
138. Harris A. B.//Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 29. P. 2519.
139. Srivastava V., Chaturvedi M.//Ibidem. V. 30. P. 2238.
140. Займан Дж. Модели беспорядка.— М.: Мир, 1982.
141. Соколов И. М. Локализация в некоторых моделях неупорядоченных систем: Автореферат канд. диссертации.— М., МГУ, 1984.
142. Rammal R. et al.//Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 30. P. 4087.
143. Ben-Avraham D., Havlin S.//J. Phys. Ser. A. 1983. V. 16. P. L559.
144. Daoud H.//J. de Phys. Lett. 1983. T. 44. P. 925.
145. Family F.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L285.
146. Sahimi M., Jaraud G. R.//Ibidem. P. L165.
146. Leyvraz F., Stanley H. E.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2048.
147. Harris A. B., Kim S., Lubensky T. C.//Ibidem. 1984. V. 53. P. 743.
149. Zabolitzky J. C.//Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 30. P. 4077.
150. Hong D. C., Havlin S. et al.//Ibidem. P. 4083.
151. Lobb C. J., Frank D. J.//Ibidem. P. 4090.