

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

535.312

**ПРЕДВЕСТНИК И БОКОВЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ
ИМПУЛЬСОВ ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД*****В. В. Курин, Б. Е. Нежцов, В. Я. Эйджан*****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	157
2. Падение на границу монохроматической плоской волны. Формулы Френеля	158
3. Падение на границу полубесконечного дельтаобразного пучка звуковых волн. Предвестник	159
4. Падение на границу цилиндрического возмущения	169
5. Падение на границу дельтаобразного сферического импульса	171
6. Заключение	178
Список литературы	179

1. ВВЕДЕНИЕ

Возможно, несколько странно, что до сих пор в литературе — как в оригинальных статьях, так и в монографиях — встречаются неточные, а зачастую и просто ошибочные высказывания по поводу той или иной особенности, возникающей при отражении импульсов какой-либо формы от границы раздела двух сред (см., например, ¹⁻⁴). Наибольшей популярностью здесь, по-видимому, пользуется вопрос о «предвестнике» или о кажущемся нарушении принципа причинности при решении задачи об отражении узкого импульса плоских звуковых волн от границы раздела двух сред под углом, бóльшим угла полного отражения. Этот вопрос связан с тем фактом, что при рассмотрении задачи в рамках приближения плоских волн отраженная волна появляется в точке наблюдения сколь угодно рано по сравнению с моментом прихода отраженного плоского импульса. Причиной появления предвестника является существующий во все времена контакт падающего импульса с границей раздела. Корректное рассмотрение причинно поставленной задачи ⁵, в которой падающий импульс касается границы в конечный момент времени, позволяет выяснить, что предвестник представляет собой задний фронт боковой волны, приходящий в точку наблюдения, естественно, за конечное время. Вторым моментом, о котором часто упоминается в работах, посвященных отражению звуковых импульсов от границы раздела двух сред, является интерпретация боковой волны. В большинстве этих работ считается, что боковая волна связана с квазистатической частью отраженного возмущения. Между тем, разумно ее связывать не с квазистатическим, а с волновым возмущением, возбуждаемым источником, движущимся по границе со скоростью, бóльшей скорости звука в среде. Идея такой интерпретации отраженных и прошедших волн была высказана Хевисайдом и Франком ^{6,7}. На волновой характер этого возмущения указывает, в частности, и тот факт, что существует область, где спадание с расстоянием возмущения в боковой волне такое же, как и для отраженной волны. Заметим, что само это обстоятель-

ство недостаточно четко отмечается в оригинальных работах ¹⁻³. Следующим моментом, на который также необходимо обратить внимание, является вопрос об особенностях отражения от границы сферического сосредоточенного возмущения. Как следует из работ, посвященных этому вопросу, и здесь имеется некоторая неясность (см., например, ⁸). Она связана с тем, что при падении на границу сферического дельтаобразного возмущения, т. е. возмущения, описываемого дельта-функцией аргумента $t - (R/c_1)$ (R — расстояние от источника начального возмущения до точки наблюдения, c_1 — скорость звука), в отраженном поле может присутствовать распределенное возмущение, описываемое формулой $p \sim [(t - (R/c_1))]^{-1}$. При этом для сферических возмущений произвольной формы отраженное поле описывается соответствующим интегралом в смысле главного значения вблизи особенности $t \rightarrow R/c_1$. В связи с этим очевидно, что для получения конечной величины отраженного сигнала форма падающего импульса должна описываться непрерывной функцией, причем с ростом крутизны фронтов этого импульса величина отраженного сигнала также растет (при конечном скачке функции, описывающей форму падающего импульса, величина отраженного поля обращается в бесконечность) ⁸⁻¹⁰. Аналогичная ситуация имеет место и при падении на границу плоского сосредоточенного импульса.

В настоящей работе мы предполагаем осветить рассматриваемую проблему именно с учетом отмеченных выше обстоятельств. В связи с этим в разделе 2 коротко рассматривается падение на границу плоской монохроматической волны. Необходимость сделать это в настоящем обзоре диктуется тем, что, по существу, все основные особенности, возникающие при отражении импульсов, заложены уже в более простом случае отражения монохроматических волн. Речь идет о том, что коэффициент отражения монохроматической волны для углов падения, превышающих угол полного внутреннего отражения, даже в отсутствие дисперсии в обеих средах зависит от угловой частоты, что приводит к сдвигу фаз фурье-гармоник, формирующих отраженный импульс. Этим и объясняется возникновение отраженного распределенного возмущения при сосредоточенном падающем.

В разделе 3 на основании работы ⁵ рассмотрен вопрос об отражении полубесконечного импульса и исследованы эффекты, обусловленные возможностью существования предвестника. В разделе 4 рассматривается вопрос об отражении цилиндрического возмущения. Эта задача решалась в ^{11,12} (см. также ^{5,13}). Для интерпретации особенностей этой системы возникла необходимость определить в некотором частном случае и поле прошедшей волны.

Наконец, в разделе 5 тем же способом, что и в предыдущих разделах, рассматривается задача об отражении сферического импульса. В этом случае определение отраженного поля связано с более громоздкими вычислениями, чем в предыдущих разделах. Возможно, что некоторые неточные и ошибочные заключения в ряде работ связаны с непониманием работ Сэведжа и Тауна ^{9,14}, где впервые было рассмотрено отражение сферического импульса от границы раздела двух жидкостей. В связи с этим в настоящем обзоре мы подробно рассмотрели случай сферического импульса другим способом, который представляется более простым и наглядным. Другое достоинство используемого рассмотрения обусловлено тем, что оно является естественным развитием метода, изложенного в предыдущих разделах настоящего обзора для более простых конфигураций.

2. ПАДЕНИЕ НА ГРАНИЦУ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ

В настоящем обзоре проблема отражения импульсов от границы раздела двух сред рассматривается на примере отражения звуковых волн от границы раздела двух жидкостей, расположенных сверху и снизу от плоскости $z = 0$ и характеризующихся плотностями ρ_1, ρ_2 и скоростями звука c_1 и c_2 соответ-

ственно. Будем считать, что звуковой сигнал падает со стороны среды с меньшей скоростью звука ($c_1 < c_2$), поскольку именно в такой ситуации и возникают особенности, связанные с полным отражением. Аналогичные эффекты имеют место и в случае отражения электромагнитных волн от границы раздела двух диэлектриков^{12,15-17}, а также отражения звуковых импульсов от границы раздела жидкость — твердое тело, твердое тело — твердое тело^{11,13,18}.

Как известно, отражение плоских монохроматических звуковых волн от границы раздела двух жидкостей описывается формулами Френеля для коэффициентов отражения V и прохождения W . Если давление p в падающей волне определяется действительной частью выражения $p_0 \exp \left\{ -i\omega \left[t - \left(\frac{y}{c_1} \right) \sin \mu + \left(\frac{z}{c_1} \right) \cos \mu \right] \right\}$, то

$$V = \frac{m \cos \mu - \sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}}{m \cos \mu + \sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}}, \quad W = \frac{2m \cos \mu}{m \cos \mu + \sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}}, \quad (2.1)$$

где $m = \rho_2/\rho_1$, $n = c_1/c_2$, μ — угол падения волны на границу, $\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu} = i \sqrt{\sin^2 \mu - n^2}$ при $\sin \mu > n$. При $\sin \mu > n = \sin \mu_0$ (угол падения больше угла полного внутреннего отражения) коэффициент отражения становится комплексным, причем, очевидно, $|V| = 1$. Для этого случая коэффициент отражения удобно представить в виде

$$V(\omega) = \exp(i\varphi \operatorname{sign} \omega), \quad (2.2)$$

$$\cos \varphi = \frac{m^2 \cos^2 \mu + n^2 - \sin^2 \mu}{m^2 \cos^2 \mu - n^2 + \sin^2 \mu}.$$

Указанная в (2.2) зависимость от частоты ω следует из требования действительности выражения для давления в отраженной волне либо из условия стремления к нулю давления в прошедшей волне при удалении точки наблюдения от границы в бесконечность. Коэффициент отражения (2.1), (2.2) обладает свойством эрмитовости: $V(\omega) = V^*(-\omega)$. При отражении волны от границы раздела двух сред в случае $\mu > \mu_0$ происходит изменение фазы отраженной волны. Если падает волна, описываемая выражением $p = p_0 \cos \omega \times \times [t + \left(\frac{z}{c_1} \right) \cos \mu - \left(\frac{y}{c_1} \right) \sin \mu] = p_0 \cos \omega \xi$, $\xi = t + \left(\frac{z}{c_1} \right) \cos \mu - \left(\frac{y}{c_1} \right) \sin \mu$, то давление в отраженной волне дается формулой

$$p_{\text{отр}} = p_0 \cos(\omega \xi_1 + \varphi), \quad \xi_1 = t - \frac{z}{c_1} \cos \mu - \frac{y}{c_1} \sin \mu.$$

Важным для последующего описания падения на границу сосредоточенных возмущений, как уже указывалось, является следующая из (2.2) неаналитическая зависимость V от ω при $\omega \rightarrow 0$. Последним обусловлена неприменимость метода перевала для определения отраженного поля в случае падения на границу сферического сосредоточенного импульса (ср. с²).

3. ПАДЕНИЕ НА ГРАНИЦУ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ДЕЛЬТАОБРАЗНОГО ПУЧКА ЗВУКОВЫХ ВОЛН. ПРЕДВЕСТНИК

Используя (2.2), можно легко получить выражение для отраженного поля узкого импульса плоских волн, в которое будет входить и выражение для предвестника, т. е. сигнала, приходящего в точку наблюдения сколь угодно рано по сравнению с моментом прихода туда отраженного сосредоточенного импульса. Именно на этом пути, по существу, и появилось в литературе понятие предвестника^{1,3,19}, хотя в причинно поставленной задаче, когда контакт падающего импульса с границей возникает в определенный

конечный момент времени $t = t_0$, разумеется, никаких предвестников не существует.

Рассмотрим отражение дельтаобразного плоского импульса ($p = p_0 \delta(\xi)$, $\delta(\xi)$ — дельта-функция), падающего под углом, большим угла полного внутреннего отражения, причем будем здесь предполагать, что падающий импульс имеет постоянный контакт с границей во всем интервале времени $-\infty < t < \infty$ (непричинная постановка задачи)^{10, 20-24}. Тогда падающий сигнал описывается соотношением

$$p = \frac{p_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\xi} d\omega = \frac{p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega\xi d\omega, \quad (3.1)$$

а отраженное поле, в соответствии с (2.2), есть

$$p_{отр} = \frac{p_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\xi_1} V(\omega) d\omega = \frac{p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega\xi_1 + \varphi) d\omega = p_0 \left[\cos \varphi \delta(\xi_1) - \frac{\sin \varphi}{\pi} \frac{P}{\xi_1} \right], \quad (3.2)$$

где P/ξ_1 определяет главное значение соответствующего интеграла при $\xi_1 \rightarrow 0$, т. е.

$$\int \frac{P}{\xi_1} f(\xi_1) d\xi_1 = \oint \frac{f(\xi_1)}{\xi_1} d\xi_1,$$

$f(\xi_1)$ — непрерывная функция (при $\xi_1 \rightarrow 0$). Заметим, что если умножить (3.2) на $e^{-i\omega_0 t}$ ($\omega_0 > 0$) и заменить t на $t - t_1$, а затем проинтегрировать полученное выражение по t_1 в пределах $-\infty < t < \infty$, то, разумеется, для отраженного поля получается формула, отвечающая случаю падения плоской монохроматической волны на границу, т. е.

$$P_{отр} = P_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{y}{c_1} \sin \mu - \frac{z}{c_1} \cos \mu \right) + i\varphi \right].$$

Первое слагаемое в (3.2), описываемое дельта-функцией, относится к сосредоточенному отраженному импульсу, который имеет ту же форму, что и падающий импульс. Хотя в обеих средах нет дисперсии, при $\mu > \mu_0$ граница «перерабатывает» падающий сигнал таким образом, что в отраженном поле появляется распределенное возмущение — предвестник, которому отвечает второе слагаемое в (3.2): $Y = -\left(\frac{P_0 P}{\pi \xi_1}\right) \sin \varphi$, существующее во всем временном интервале $-\infty < t < \infty$, т. е. «приходящее» в точку наблюдения сколь угодно быстрее, чем туда приходит отраженный сосредоточенный сигнал. Более того, величина возмущения в предвестнике может достигать больших значений при малых ξ_1 , т. е. граница при $\mu > \mu_0$ оказывает в каком-то смысле фокусирующее действие на падающий сосредоточенный импульс.

Конечно, если на границу падает не дельтаобразный импульс, а импульс, как-то распределенный в пространстве (и времени), причем форма этого импульса описывается непрерывной функцией $f(\xi)$, то отраженное поле не имеет особенностей. В этом случае отраженное возмущение описывается некоторой интегральной формулой, в которую выражение типа (3.2) входит как функция Грина, а наличие особенности при $\xi_1 \rightarrow 0$ под знаком интеграла приводит к тому, что последний следует понимать в смысле главного значения^{10, 20, 21}. Сказанное относится и к случаю падения на границу сферического импульса, где это обстоятельство будет рассмотрено подробнее в разделе 5. Не следует думать, что выражение (3.2) лишено всякого смысла. Напротив, как будет ясно из дальнейшего, оно является следствием причинно поставленной задачи, когда момент касания падающего плоского импульса границы $t_0 \rightarrow -\infty$ (см. также⁵). Между тем в ряде работ сделаны попытки как-то подправить (3.2), не обращаясь к причинной постановке задачи. Так, в из-

вестной монографии ⁴ утверждается, что выражение типа (3.2) можно учитывать при описании отраженной волны только при $t > (y \sin \mu + z \cos \mu)/c_1$. В ¹ для падающего плоского импульса, имеющего контакт с границей во всем бесконечном интервале времени, конструируется решение, отличное от описываемого (3.2) и не содержащее выражения, отвечающего предвестнику. Однако такое решение, по-видимому, малоинтересно, ибо, как легко показать, оно соответствует заданию определенного возмущения (не связанного с падающим импульсом, распространяющимся в первой среде) и во второй среде. Следует указать, что в ^{1,2} необходимо уточнить путь интегрирования L_ω в комплексной плоскости ω для выражения, описывающего отраженный сигнал, распространив L_ω симметричным относительно оси $\text{Re } \omega = 0$ образом на область $\text{Re } \omega < 0$ (более подробно см. ⁵).

Для того чтобы выяснить смысл появления сигналов типа предвестника, необходимо рассмотреть систему, в которой полубесконечный пучок звуковых волн, распространяющийся в первой среде по направлению к границе, касается границы своим краем в некоторый момент времени $t = t_0$ (см. ⁵).

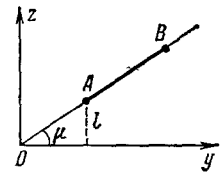


Рис. 1

Пусть, так же как в разделе 2, c_1, c_2, ρ_1, ρ_2 — скорости звука и плотности соответственно в верхней ($z > 0$) и нижней ($z < 0$) средах, причем скорость звука в нижней среде больше, чем в верхней, поскольку именно в такой постановке и возникают особенности, связанные с преломлением волн, падающих под углами, большими угла полного внутреннего отражения. Предположим, что до момента времени $t = 0$ во всем пространстве звуковых возмущений нет. Далее, допустим, что при $t = 0$ давление в верхней среде описывается формулой:

$$p = \frac{A}{\pi} \frac{\lambda}{(y - z \operatorname{ctg} \mu)^2 + \lambda^2} \Pi(z - l) e^{-\varepsilon z}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

где

$$\Pi(z - l) = \begin{cases} 1, & z > l, \\ 0, & z < l, \end{cases}$$

y, z — координаты точки наблюдения, μ — угол между плоскостью локализации наибольших начальных возмущений и границей (линия AB на рис. 1), λ характеризует ширину начального возмущения (см. (3.14) и замечания к этой формуле). Ниже, везде, где это возможно, будет положено $\varepsilon = 0$. Требуется найти поле давлений в обеих средах, т. е. найти решение волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} \right) = \frac{A}{\pi} \frac{\lambda \delta'(t) \Pi(z - l)}{(y - z \operatorname{ctg} \mu)^2 + \lambda^2} e^{-\varepsilon z}, \quad z > 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} \right) = 0, \quad z < 0, \quad (3.5)$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$p_1 = p_2, \quad (3.6)$$

$$m \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{\partial p_2}{\partial z}; \quad (3.7)$$

здесь $\delta'(t) = d\delta/dt$ — производная дельта-функции по времени, p_1, p_2 — давление волны в первой и второй средах. При этом основное внимание будем уделять определению $p_1 = p + p_{\text{отр}}$, $p, p_{\text{отр}}$ — соответственно давление в падающем и отраженном возмущении. Представим выражение для поля падающей волны в виде интеграла Фурье:

$$p = \frac{A}{(2\pi)^3} \iiint \frac{\omega \exp[-i\omega t + ik_z(z - l) + ik_y(y - l \operatorname{ctg} \mu) - \lambda |k_y|]}{(k_z + k_y \operatorname{ctg} \mu - i\varepsilon)[\omega^2 - c_1^2(k_y^2 + k_z^2)]} d\omega dk_y dk_z, \quad (3.8)$$

где обычным образом из условия $p(t < 0) = 0$ следует, что при интегрировании по ω особые точки обходятся сверху ($\text{Im } \omega > 0$). При интегрировании по k_z полюс $k_z = -k_y \text{ctg } \mu$ обходится снизу ($\varepsilon \rightarrow +0$), поэтому при $z < l$ вклад в (3.8) дает лишь полюс $k_z = -\sqrt{(\omega^2/c_1^2) - k_y^2}$, $\text{Im } k_z < 0$ ($\text{Im } \omega > 0$). Учитывая сказанное, получаем

$$p = -\frac{iA}{8\pi^2 c_1^2} \iint \frac{\omega \exp[-i\omega t + i\sqrt{(\omega^2/c_1^2) - k_y^2}(l-z) + ik_y(y-l \text{ctg } \mu) - \lambda |k_y|]}{[k_y \text{ctg } \mu - \sqrt{(\omega^2/c_1^2) - k_y^2}] \sqrt{(\omega^2/c_1^2) - k_y^2}} \times \\ \times d\omega dk_y. \quad (3.9)$$

Будем искать поле отраженной волны в виде

$$p_{\text{отр}} = \iint F(\omega, k_y) \exp\left(-i\omega t + i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_y^2} z + ik_y y\right) d\omega dk_y, \quad z > 0, \quad (3.10)$$

а прошедшей — в виде

$$p_{\text{пр}} = \iint G(\omega, k_y) \exp\left(-i\omega t - i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - k_y^2} z + ik_y y\right) d\omega dk_y, \quad z < 0. \quad (3.11)$$

Тогда, после подстановки этих выражений в граничные условия (3.6), (3.7), получим, что поля отраженной и прошедшей волн суть

$$p_{\text{отр}} = -\frac{iA}{8\pi^2 c_1^2} \iint \left(m \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_y^2} - \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - k_y^2}\right) \omega \times \\ \times \exp\left(-i\omega t + i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_y^2} z' + ik_y y' - \lambda |k_y|\right) \times \\ \times \left[\left(m \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_y^2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - k_y^2}\right) \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_y^2} (k_y \text{ctg } \mu - \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_y^2})\right]^{-1} \times \\ \times d\omega dk_y, \quad (3.12)$$

$$p_{\text{пр}} = -\frac{iAm}{4\pi^2 c_1^2} \times \\ \times \iint \frac{\omega \exp[-i\omega t + i\sqrt{(\omega^2/c_1^2) - k_y^2} l - i\sqrt{(\omega^2/c_2^2) - k_y^2} z + ik_y y' - \lambda |k_y|]}{(m \sqrt{(\omega^2/c_1^2) - k_y^2} + \sqrt{(\omega^2/c_2^2) - k_y^2}) (k_y \text{ctg } \mu - \sqrt{(\omega^2/c_1^2) - k_y^2})} d\omega dk_y, \\ z' = z + l, \quad y' = y - l \text{ctg } \mu.$$

Произведем в (3.12) замену переменных:

$$\omega = c_1 k'_y x, \quad k_y = k'_y. \quad (3.13)$$

Из (3.13) видно, что $\text{Im } x > 0$ при $k_y > 0$ и $\text{Im } x < 0$ при $k_y < 0$ (напомним, что $\text{Im } \omega > 0$). Далее, заметим, что для сходимости интегралов (3.12) по k_y на величину мнимой части x при $c_1 t > z + l$ необходимо наложить следующее условие ($x = x_1 + ix_2$):

$$0 < x_2 < \frac{\lambda}{\beta}, \quad k_y > 0, \\ -\frac{\lambda}{\beta} < x_2 < 0, \quad k_y < 0, \quad \beta = c_1 t - \frac{z' x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}} > 0. \quad (3.14)$$

При $\beta < 0$ x_2 может быть выбрано произвольно. Условия (3.14) указывают на то, что, в отличие от пути интегрирования L_ω , который может проходить произвольно в плоскости ω , лишь бы обходить особые точки подынтегрального выражения (3.12) сверху, путь интегрирования L_x зажат (при $\lambda \rightarrow 0$) около действительной оси x_1 . Важно отметить, что именно введение конечной ширины источника λ в начальное возмущение (3.3) делает непротиворечи-

выми условия (3.14), а, значит, и замену переменных (3.13). Если же с самого начала положить $\lambda = 0$, то после замены (3.13) интегралы по k_y будут расходиться.

Выполняя интегрирование по k_y , приходим к соотношению

$$P_{отр} = - \frac{A}{8\pi^2} \int_{L_x} \frac{xV(x) dx}{\sqrt{x^2-1} (\operatorname{ctg} \mu - \sqrt{x^2-1}) (c_1 t x - \sqrt{x^2-1} z' - y' - i\lambda)} + \text{к.с.}; \quad (3.15)$$

здесь

$$V(x) = \frac{m \sqrt{x^2-1} - \sqrt{n^2 x^2 - 1}}{m \sqrt{x^2-1} + \sqrt{n^2 x^2 - 1}},$$

контур интегрирования L_x лежит выше действительной оси $[-\infty + ix_2, \infty + ix_2]$, $0 < x_2 < \lambda/\beta$, $n = c_1/c_2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2-1} = x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 x^2 - 1} = nx$, $x_2 > 0$.

В интеграле (3.15) удобно сделать еще одну замену:

$$\theta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}, \quad \sqrt{1-\theta^2} = -i\theta. \quad (3.16)$$

Тогда давление в отраженной волне определяется выражением

$$P_{отр} = - \frac{A}{8\pi^2} \oint_{L_\theta} \frac{V(\theta) d\theta}{\sqrt{1-\theta^2} (\sqrt{1-\theta^2} \operatorname{ctg} \mu - \theta) (c_1 t - \theta z' - (y' + i\lambda) \sqrt{1-\theta^2})} + \text{к.с.}; \quad (3.17)$$

здесь

$$V(\theta) = \frac{m\theta - \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}}{m\theta + \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}}, \quad 0 < \alpha^2 \equiv 1 - n^2 < 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \sqrt{\theta^2 - \alpha^2} = \theta. \quad (3.18)$$

Контур L_θ состоит из петли, охватывающей точку $\theta = 1$, отрезков, идущих вдоль мнимой оси, и полуокружности бесконечно большого радиуса (см. рис. 2). Соотношение (3.17) можно интерпретировать как разложение отраженного сигнала по плоским волнам. Переменная интегрирования θ представляет собой косинус угла падения плоской волны, причем действительные значения θ соответствуют однородным плоским волнам, комплексные — неоднородным.

В (3.17) $\theta_{1,2,3,4} = \pm 1, \pm \alpha$ — точки ветвления. Проведем разрез от $\theta = -1$ до $\theta = 1$ ниже действительной оси; тогда $\theta_5 = \cos \mu$ будет полюсом. Если же провести разрез, соединяющий точки $\theta = \pm 1$, выше действительной оси (см. (3.17)), то полюсом будет $\theta_6 = -\cos \mu$. Вклад в (3.17) вносят только полюсы, определяемые уравнением

$$c_1 t - \theta z = (y + i\lambda) \sqrt{1 - \theta^2}, \quad (3.19)$$

поскольку только они лежат внутри контура L_θ .

Как показывает детальный анализ, корни уравнения (3.19), лежащие на выбранном листе римановой поверхности (см. (3.18)), суть

$$\theta_7 = \frac{c_1 t z' + (y' + i\lambda) \sqrt{R^2 - c_1^2 t^2}}{R^2}, \quad y' > 0, \quad t > \frac{z'}{c'}, \quad (3.20)$$

$$\theta_7 = \frac{c_1 t z' - (y' + i\lambda) \sqrt{R^2 - c_1^2 t^2}}{R^2}, \quad y' < 0, \quad t > \frac{z'}{c_1}; \quad (3.21)$$

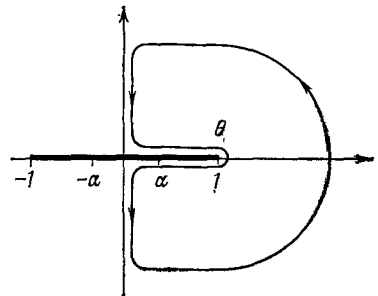


Рис. 2 ($\theta = \theta_7$)

здесь $R^2 = (y + i\lambda)^2 + z'^2$, а корни следует понимать в следующем смысле: когда $R_0^2 \equiv y'^2 + z'^2 > c_1^2 t^2$, то реальные части корней в (3.20), (3.21) положительны, а когда $R_0^2 < c_1^2 t^2$, то, как для случая $y' > 0$, так и для случая $y' < 0$, решение уравнения (3.19) представляется в виде

$$\theta_7 = \frac{c_1 t z' + i \sqrt{c_1^2 t^2 - R^2} (y' + i\lambda)}{R^2}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{c_1^2 t^2 - R^2} > 0. \quad (3.22)$$

Из анализа уравнения (3.19) следует также, что при $c_1 t < z'$ полюсы лежат на другом листе римановой поверхности, причем особых точек подынтегрального выражения в (3.17) внутри контура L_0 нет и (3.17) обращается в нуль. Укажем далее, что полюсы, определяемые (3.20), (3.24), расположены внутри контура L_0 по разные стороны от действительной оси $\operatorname{Re} \theta$ (при $y' > 0$ $\operatorname{Im} \theta_7 > 0$). Вычисляя далее интеграл (3.16), получаем окончательный ответ:

$$P_{\text{отр}} = -\frac{iA}{4\pi} \frac{V(\theta_7)}{(\sqrt{1-\theta_7^2} \operatorname{ctg} \mu - \theta_7) \Omega} + \text{к.с.}, \quad z > 0, \quad (3.23)$$

где

$$\Omega = \begin{cases} \sqrt{R^2 - c_1^2 t^2} \operatorname{sign} y, & R_0 > c_1 t, \\ i \sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}, & R_0 < c_1 t, \end{cases}$$

а θ_7 определяется выражениями (3.20)–(3.22).

Приведем здесь также формулу для давления в падающей волне, которая получается аналогично (3.23)

$$p = -\frac{iA}{4\pi} \frac{1}{(\sqrt{1-\theta_7^2} \operatorname{ctg} \mu - \theta_7) \Omega} + \text{к.с.}, \quad z < l, \quad (3.24)$$

где по сравнению с (3.23) следует заменить в выражениях для θ_7 и Ω : z' на $z_1 = l - z$. Таким образом, для давления в отраженной волне получили точное выражение в элементарных функциях.

Проанализируем (3.23) в простом предельном случае $l = 0$, т. е. $t_0 = 0$. Пусть $y > 0$ и точка наблюдения лежит вблизи границы, т. е. $z \rightarrow 0$; тогда выражение для поля отраженной волны упрощается:

$$P_{\text{отр}} = -\frac{iA}{4\pi} \frac{V(\theta_7)}{(\sqrt{1-\theta_7^2} \operatorname{ctg} \mu - \theta_7) \sqrt{(y+i\lambda)^2 - c_1^2 t^2}} + \text{к.с.}, \quad (3.25)$$

$$\theta_7 = \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{(y+i\lambda)^2}}.$$

При $t \rightarrow y/c_1$ в (3.25) имеется особенность типа $(y - c_1^2 t^2)^{-1/2}$, что соответствует отражению цилиндрической волны, возбуждаемой краем начального возмущения. До момента времени $\tau = \min \{t_1, t_2\}$, $t_1 = \frac{y}{c_1} \sin \mu$, $t_2 = \frac{y}{c_2}$ поле отраженной волны $\sim \lambda$ и при $\lambda \rightarrow 0$ исчезающе мало (в этом случае (3.25) приближенно представляет из себя при $\lambda \rightarrow 0$ сумму двух комплексно сопряженных мнимых величин). При $t > \tau$ появляется поле отраженной волны. Здесь следует различать два случая: а) $t_1 < t_2$, $\sin \mu < c_1/c_2$ (угол падения меньше угла полного внутреннего отражения) и б) $\sin \mu > c_1/c_2$ (угол падения больше угла полного внутреннего отражения).

Рассмотрим сначала случай, когда $\sin \mu < c_1/c_2$. Выражение (3.25) имеет особенность при $t \rightarrow t_1$, $\lambda \rightarrow 0$. Для выделения этой особенности необходимо в (3.25) в выражениях, не имеющих особенностей при $t \rightarrow t_1$, $\lambda \rightarrow 0$, положить $\lambda = 0$, $\theta_7 = \cos \mu$, а соотношение $c_1 t \operatorname{ctg} \mu - \sqrt{(y+i\lambda)^2 - c_1^2 t^2}$ следует разложить по степеням λ . Опуская простые вычисления, с помощью формулы

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$$

получим

$$p_{отр} = \frac{1}{2} AV (\cos \mu) \delta \left(y - \frac{c_1 t}{\sin \mu} \right). \quad (3.26)$$

Перейдем к описанию особенностей случая, когда угол падения больше угла полного внутреннего отражения, т. е. $\sin \mu > c_1/c_2 = n$ ($t_1 > t_2$). При $t < t_2$ $\text{Im } V(\theta) \sim \lambda$ и, поскольку при этом поле $\sim iV(\theta) + \text{к.с.}$, то возмущение в этом интервале времени мало ($p_{отр} \sim \lambda$). При $t > t_2$ коэффициент отражения комплексен и поле отраженной волны становится отличным от нуля, хотя сосредоточенное возмущение, расположенное на линии $y = c_1 t / \sin \mu$, движущейся по границе со скоростью $c_1 / \sin \mu$, еще не подошло к рассматриваемой точке. Указанное возмущение частично обусловлено тем, что от края плоского начального возмущения распространяется цилиндрическая волна, при контакте которой с границей возбуждается боковая волна, причем момент ее прихода в данную точку границы характеризуется равенством $t = t_2$. Кроме отмеченного механизма, вклад в боковую волну дает распределенное возмущение, возбуждаемое во второй среде ($z < 0$) источником, сосредоточенным на линии $y = c_1 t / \sin \mu$, $z = 0$, $t > t_0 = 0$. Выражение для поля боковой волны легко найти из (3.25):

$$p_6 = -\frac{A}{\pi y} \frac{m \sqrt{\sin^2 \chi - n^2}}{(m^2 \cos^2 \chi + \sin^2 \chi - n^2) (\sin \chi \text{ctg} \mu - \cos \chi)}, \quad (3.27)$$

$$\sin \chi = \frac{c_1 t}{y}, \quad t_2 < t < t_1.$$

При $|t - t_1| \ll t_1$, $y \gg \lambda \rightarrow 0$ ограничиваясь, где это необходимо, лишь величинами порядка $(t - t_1)/t$, λ/y , находим после некоторых преобразований

$$p_{отр} = \frac{A}{2\pi} \frac{1}{m^2 \cos^2 \mu + \sin^2 \mu - n^2} \left[\frac{(m^2 \cos^2 \mu - \sin^2 \mu + n^2) \lambda}{\lambda^2 + a^2} - \frac{2m \cos^2 \mu \sqrt{\sin^2 \mu - n^2} a}{\lambda^2 + a^2} \right], \quad \lambda \rightarrow 0, \quad t > t_1, \quad (3.28)$$

где $a = (t - t_1) c_1 / \sin \mu$, $\sin \mu > n$.

При $t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ область, где справедлива формула (3.28), становится сколь угодно велика. Сравнивая (3.28) для указанных значений t , y ($t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$) с выражением (3.2), полученным при использовании не причинной постановки задачи, видим, что эти формулы совпадают. Отмеченный факт дает основание утверждать, что предвестник, получаемый в не причинной постановке задачи, когда контакт плоского сосредоточенного возмущения с границей постоянен во всем интервале времени $-\infty < t < \infty$, вполне разумен и отвечает асимптотическому (при $t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$) решению причинной задачи, когда контакт падающего возмущения с границей возникает в конечный момент времени $t = t_0$. Таким образом, предвестник представляет собой задний фронт боковой волны (3.28), возбуждаемой при контакте падающего излучения с границей раздела.

Из (3.28) следует, что отраженное волновое поле представляется в виде двух частей: сосредоточенного возмущения, описываемого дельта-функцией, и распределенного возмущения, описываемого вторым слагаемым в (3.28). Аналогичная ситуация имеет место и при отражении сферического импульса^{8,9,14}. Если использовать (3.28) как функцию Грина для начального распределения давления произвольной формы, то очевидно, что это распределение должно описываться непрерывными функциями координат (поскольку интеграл от выражения типа (3.28) следует понимать как интеграл в смысле главного значения при $a \rightarrow 0$). Это означает, что для начальных полей, у которых крутизна фронтов растет, отраженная волна будет логарифмически расти в соответствующей области^{8-10,20,21}.

Остановимся коротко на описании полей в области $y < 0$. В этой области первой в точку наблюдения приходит боковая волна, существующая при

$c_1 t < |y| < c_2 t$, затем цилиндрическая ($c_1 t > |y|$), а плоской волны здесь нет. Эта боковая волна обязана тем же факторам, что и боковая волна, существующая в области $y > 0$. Приведем выражение для боковой волны

$$p_6 = \frac{A}{\pi} \frac{m \cos \chi \sqrt{\sin^2 \chi - n^2}}{(\cos \chi \operatorname{ctg} \mu + \sin \chi) (m^2 \cos^2 \chi + \sin^2 \chi - n^2) \sqrt{y^2 - c_1^2 t^2}}, \quad (3.29)$$

$$y < 0, \quad \sin \chi = \frac{c_1 t}{|y|}, \quad \frac{|y|}{c_2} < t < \frac{|y|}{c_1}.$$

Положение возмущений в пространстве иллюстрирует рис. 3 ($\lambda \rightarrow 0$). Прямые 1, 2 определяют соответственно положение падающего и отраженного сосредоточенных плоских возмущений. Полуокружность 5 определяет границу цилиндрического возмущения, обязанного краю плоского начального распределения. Прямые 3 и 4 изображают границу области существования боковой волны.

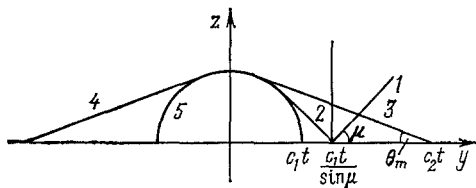


Рис. 3

В связи с рис. 3 заметим следующее. Возмущения, отвечающие отраженному и прошедшему полям, разумеется, можно получить, рассма-

тривая излучение источников, наводимых падающей волной на границе. Выражения для этих источников нетрудно привести, если заметить, что падающая волна задана только в области $z > 0$, т. е. $p_{\text{пад}} = \Pi(z) p(t, y, z)$, где $p(t, z, y)$ определяется (3.24). Тогда $p_{\text{отр}}$ и $p_{\text{пр}}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 p_{\text{отр}}}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta p_{\text{отр}} = c_1^2 [-\delta'(z) p_0(t, y) - 2\delta(z) p'_{0z}(t, y)] = J, \quad z > 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 p_{\text{пр}}}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta p_{\text{пр}} = J, \quad z < 0, \quad (3.31)$$

$$p_0 \equiv p(t, y, 0), \quad p'_{0z} = \frac{\partial p}{\partial z}(t, z, y)|_{z=0},$$

с граничными условиями (3.6), (3.7), причем, разумеется,

$$p_{\text{отр}}(t < t_0, y, z) = p_{\text{пр}}(t < t_0, y, z) = 0, \quad t_0 = \frac{l}{c_1}.$$

Как показывает анализ, аналогичный предыдущему, J состоит из двух разных частей. Первая часть отвечает сосредоточенному на линии $y = c_1 t / \sin \mu$ источнику, величина которого в сопровождающей системе координат неизменна. Такой источник возникает из-за пересечения плоским падающим возмущением границы раздела (см. рис. 3). Второй источник распределен на границе и локализован в полосе $|y| < c_1 t$ (здесь считается, что $l = 0$ и момент касания цилиндрического возмущения границы $t_0 = 0$). Этот источник отвечает пересечению распределенным цилиндрическим импульсом, распространяющимся от края плоского возмущения границы раздела (как известно, цилиндрический сигнал распределен в пространстве и в том случае, если начальное возмущение было локализовано на прямой линии). Используя введенные выше источники, легко объяснить некоторые особенности рассматриваемой системы. Во-первых, если $c_1 / \sin \mu < c_2$ (угол падения больше угла полного внутреннего отражения), то сосредоточенным на линии $y = c_1 t / \sin \mu$ источник дает излучение Маха только в первую среду (отраженный сосредоточенный импульс с углом отражения, равным углу падения), а прошедшего сосредоточенного импульса в этом случае не существует (не выполнено условие сверхзвукового движения источника). Распределенный источник из-за цилиндрической расходимости зависит от времени и поэтому дает излучения в обе среды, причем это излучение во второй среде

вблизи границы локализовано в полосе $|y| < c_2 t$ ($l = 0$). Таким образом, по границе первой среды движется возмущение со скоростью c_2 , большей c_1 , которое и приводит к появлению отраженного сигнала, распространяющегося со скоростью, большей скорости звука в первой среде. Границы области локализации этого возмущения, как и должно быть, наклонены к плоскости $z = 0$ под углом Маха $\sin \theta_m = c_1/c_2$ (см. рис. 3). В свете сказанного становится очевидной и природа появления в рассматриваемой системе сигнала типа предвестника, который не убывает при $t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$. Поскольку сосредоточенный при $y = c_1 t / \sin \mu$ источник движется по границе со скоростью, меньшей скорости звука во второй среде, то в ней от этого источника при $t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ сформируется квазистатическое возмущение, движущееся вместе с источником со скоростью $c_1 / \sin \mu$ *). Этот сигнал, как уже отмечалось, в сопутствующей системе координат ($y' = y - (c_1 t') \sin \mu$) не зависит от времени и вблизи границы $p \sim 1/y'$. В свою очередь, указанное возмущение, двигаясь по границе со скоростью $c_1 / \sin \mu$, большей скорости звука в первой среде, дает в нее распределенное (из-за распределенности $p \sim 1/y'$) излучение Маха под углом, равным углу отражения. Следует заметить, что для плоского источника вида $J = J(y - (c_1 t / \sin \mu))$, движущегося вдоль этой плоскости в направлении, перпендикулярном оси y , излучения Маха от отдельных элементарных полос Δy , составляющих источник, не интерферируют между собой. В этом случае величина излучения Маха прямо следует за величиной источника (конечно, существенным моментом здесь является то, что источник зависит только от комбинации $y - (c_1 t / \sin \mu)$). Остается пояснить еще, с чем конкретно связана указанная выше форма предвестника для сосредоточенного падающего возмущения (см. (3.2), (3.28)). Для этого найдем вынужденное решение $p_{в.пр}$ уравнения (3.31), отвечающее полю, возбуждаемому источником, образующимся от пересечения падающего импульса с границей. Для предвестника достаточно учесть лишь падающий плоский импульс, т. е.

$$p_0 = A \frac{\lambda_0}{\lambda_0^2 + \xi_0^2}, \quad \xi_0 = t - \frac{y}{v}, \quad v = \frac{c_1}{\sin \mu},$$

$$p'_{0z} = -\frac{2A}{v_1} \frac{\lambda_0 \xi_0}{(\lambda_0^2 + \xi_0^2)^2}, \quad v_1 = \frac{c_1}{\cos \mu}, \quad \lambda_0 \rightarrow 0.$$

Тогда можно искать решение (3.31) в виде $p_{в.пр}(z, \xi_0)$, т. е. это решение в движущейся со скоростью v системе координат является статическим (не зависящим от времени) и

$$p_{в. пр} = \int J_{k_z, k_\xi} \exp(ik_z z + ik_\xi \xi) \left[k_z^2 c_2^2 + k_\xi^2 \left(\frac{c_2^2}{v^2} - 1 \right) \right]^{-1} dk_z dk_\xi,$$

где

$$J_{k_z, k_\xi} = \frac{iAc_1^2}{4\pi} \begin{cases} \left(k_z + \frac{k_\xi}{v_1} \right) e^{-k_\xi \lambda_0}, & k_\xi > 0, \\ \left(k_z + \frac{k_\xi}{v_1} \right) e^{k_\xi \lambda_0}, & k_\xi < 0. \end{cases}$$

После несложных вычислений найдем

$$p_{в. пр} = \frac{Ac_1^2}{2\pi c_2^2} \frac{(-\lambda_0 + \sqrt{\gamma} z) + (2\xi_0 / \sqrt{\gamma} v_1)}{(-\lambda_0 + \sqrt{\gamma} z)^2 + \xi_0^2}, \quad (3.32)$$

$$\gamma \equiv v^{-2} - c_2^{-2}, \quad z < 0.$$

Возмущение такого вида, двигаясь как целое по границе со скоростью $c_1 / \sin \mu > c_1$, дает излучение Маха в первую среду, причем форма этого

*) Ситуация здесь, по существу, аналогична электродинамической задаче о формировании квазистатического поля зарядом, который появляется в некоторый момент времени $t = 0$ и затем начинает двигаться с постоянной скоростью, меньшей скорости света.

излучения, описываемая (3.28), воспроизводит граничное значение $p_{в.пр}$ без искажения. К (3.32) следует добавить решение однородного уравнения (3.31), по форме такое же, как и (3.32). Далее, используя граничные условия (3.6) и (3.9), можно найти $p_{пр}$.

Детальный анализ прошедшего импульса для различных форм падающего сигнала проведен в работе ²⁵. В этой работе отмечается плодотворность представления прошедших волн в виде полей излучения источника, движущегося вдоль границы раздела. Действительно, асимптотическое выражение поля прошедшей волны для углов, больших угла полного внутреннего отражения, пропорционально $(A_1/r) + (B/r_2)$, где r — расстояние от источника до точки наблюдения,

$$A_1 \sim \int_{-\infty}^{\infty} p_{пад} dt, \quad B \sim \int_{-\infty}^{\infty} t p_{пад} dt.$$

Такого рода разложения соответствуют представлению полей источников в виде ряда мультиполей, причем роль заряда играет полный импульс падающей волны. Написанное выше разложение соответствует квазистатическим полям нитевидного источника, который, не изменяя своей формы, движется со скоростью $c_1/\sin \mu$, меньшей скорости звука во второй среде.

Решение задачи для колоколообразной формы падающего плоского возмущения выполнено в ^{3,26}. Как следует из (3.32), при $z = 0$ поле давления состоит из двух частей: сосредоточенного возмущения, описываемого $\delta(\xi_0)$, и распределенного возмущения, связанного с выражением P/ξ_0 . Легко видеть, сравнивая (3.2) и (3.28) с (3.32), что форма предвестника полностью повторяет форму статического распределенного возмущения, движущегося по границе с постоянной скоростью $c_1/\sin \mu$.

Перейдем к описанию областей локализации боковых волн в рассматриваемой системе. В случае начальных условий (3.3), как уже отмечалось, существуют две падающие волны (плоская и цилиндрическая от края плоского возмущения). Поэтому существуют и два вида боковых волн. В области, ограниченной плоскостями $z = -(y - c_2 t) \operatorname{tg} \theta_m$, $z = -[y - (c_1 t/\sin \mu)] \operatorname{tg} \mu$ (линии 2, 3 на рис. 3), присутствуют боковые волны от обоих источников: не убывающее при $t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, $y - (c_1 t/\sin \mu) = \text{const}$ возмущение, связанное с источником, локализованным при $y = c_1 t/\sin \mu$, $z = 0$ (см. (3.2), (3.28)), и убывающее как y^{-1} при $t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ цилиндрическое возмущение, связанное с цилиндрической падающей волне (источник локализован при $|y| < c_1 t$, $z = 0$). В областях, ограниченных плоскостями $z = -[y - (c_1 t/\sin \mu)] \operatorname{tg} \mu$, $z = (y + c_2 t) \operatorname{tg} \theta_m$ и цилиндрической поверхностью $y^2 + z^2 = c_1^2 t^2$, существует цилиндрическая боковая волна. В областях, ограниченных плоскостями 2, 4 и цилиндрической поверхностью 5 (см. рис. 3), наряду с боковой цилиндрической волной существует возмущение от сосредоточенного источника, локализованного при $y = c_1 t/\sin \mu$.

Остановимся теперь коротко на случае, когда угол падения меньше угла полного внутреннего отражения. Если $c_2 < c_1/\sin \mu$, то скорость сосредоточенного источника $v = c_1/\sin \mu$, движущегося по границе, больше скорости звука во второй среде, и квазистатическое возмущение, которое двигалось бы вместе с источником, сформироваться не может. В то же время появляется возможность излучения Маха, идущего под углом преломления (на это обращено внимание впервые Хевисайдом ⁶). В силу сказанного, отраженное поле сохраняет характер сосредоточенного импульса, повторяющего форму падающего сигнала. Аналогично (3.28) при $t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ будем иметь

$$p = A\delta\left(t - \frac{y \sin \mu - z \cos \mu}{c_1}\right), \quad p_{отр} = AV\delta\left(t - \frac{y \sin \mu + z \cos \mu}{c_1}\right), \quad (3.33)$$

а затем из граничных условий (3.6) находим

$$p_{\text{пр}} = AW\delta\left(t - \frac{y \sin \mu_1 - z \cos \mu_1}{c_2}\right), \quad (3.34)$$

где $\sin \mu_1 = c_2 \sin \mu / c_1$, V , W определяются (2.1). Разумеется, формулы (3.33), (3.34) легко найти непосредственно из уравнений (3.4), (3.5) без правых частей и граничных условий (3.6), (3.7). При $c_2 < c_1 / \sin \mu$ (см. рис. 3) связанная с цилиндрическим возмущением боковая волна существует в области, ограниченной плоскостью $z = (y - c_2 t) \operatorname{tg} \theta_m$ и цилиндрической поверхностью $z^2 + y^2 = c_1^2 t^2$ ($c_1 < c_2$), причем, в отличие от предыдущего случая ($c_2 > c_1 / \sin \mu$), в этой области нет возмущений, не связанных с боковой волной. Интересно отметить, что боковая волна приходит в точку наблюдения позже, чем плоская (точка $c_2 t$ находится слева от точки $c_1 t / \sin \mu$). Именно поэтому в приближении плоских волн не возникает кажущихся нарушений причинности.

4. ПАДЕНИЕ НА ГРАНИЦУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ^{5,11,15}

Как известно, при рассмотрении задачи о падении сферического импульса на границу раздела двух недиспергирующих сред имеются известные трудности в интерпретации получаемых результатов, которые связаны, по-видимому, с относительной сложностью выражений для отраженного поля^{9,14}. В то же время для случая цилиндрического возмущения выражение, описывающее давление в отраженном поле, содержит лишь элементарные функции, и все особенности процесса (во многих случаях аналогичные сферическому импульсу) могут быть легко прослежены. Разумеется, задача об отражении цилиндрического возмущения представляет и самостоятельный интерес и содержит некоторые особенности по сравнению со случаем сферического импульса.

Предположим, что источник, представляющий собой бесконечно длинную нить, параллельную границе, расположен от нее на расстояние l в первой среде ($z > 0$) (см. предыдущий раздел). Для нахождения звукового поля следует исходить из волновых уравнений (3.4), (3.5) и граничных условий (3.6), (3.7) при $p_i(t < 0) = 0$, $i = 1, 2$, с заменой правой части (3.4) на источник, отвечающий цилиндрическому возмущению вида

$$J = \frac{A}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + y^2} \delta(z - l) \delta(t). \quad (4.1)$$

Сравнивая (4.1) с правой частью (3.4), видим, что решение уравнений (3.4), (3.5) с источником (4.1) можно получить непосредственно из результатов предыдущего раздела, если в соответствующих формулах положить $\mu = \pi/2$, $\operatorname{ctg} \mu = 0$ и умножить подынтегральные выражения для p , $p_{\text{отр}}$, $p_{\text{пр}}$ на $-k_z/\omega = -\theta/c_1$. Таким образом, например, из (3.20) — (3.24) имеем для давления в отраженной волне

$$p_{\text{отр}} = -\frac{iA}{4\pi c_1} \frac{V(\theta_7)}{\sqrt{R^2 - c_1^2 t^2}} + \text{к. с.}, \quad y > 0, \quad t > 0, \quad (4.2)$$

где θ_7 определяется по-прежнему формулами (3.20) — (3.22) с заменой y' на y , $R^2 = (y + il)^2 + z'^2$. Если в (4.2) положить $\lambda = 0$, то получается совсем простое выражение

$$p_{\text{отр}} = -\frac{iA}{4\pi c_1} \frac{V(\theta_0)}{\sqrt{R_0^2 - c_1^2 t^2}} + \text{к. с.}, \quad y > 0, \quad (4.3)$$

$$\theta_0 = \frac{c_1 t z' + y \sqrt{R_0^2 - c_1^2 t^2}}{R_0^2}, \quad R_0^2 = z'^2 + y^2, \quad t > 0.$$

Из (4.3) видно, что отраженный сигнал в некоторой точке пространства существует только тогда, когда для нее выражение $V(\theta_0)/\sqrt{R_0^2 - c_1^2 t^2}$ комплексно.

Это возможно по двум причинам: либо $\theta_0 < \alpha$, т. е. угол падения больше угла полного внутреннего отражения и коэффициент $V(\theta_0)$ комплексен (область существования боковой волны при $R_0 > c_1 t$), либо при $t > R_0/c_1$ (область существования отраженной цилиндрической волны). Момент появления в данной точке пространства боковой волны t_6 определяется из условия $\theta_0 = \alpha$, что дает

$$t_6 = \frac{z' + y \operatorname{tg} \theta_m}{c_1} \cos \theta_m, \quad y > 0, \quad (4.4)$$

$$\sin \theta_m = \frac{c_1}{c_2} = n.$$

Формула (4.4) отвечает условию Маха для источника, сосредоточенного в плоскости $z = 0$, $|y| < c_2 t$, границы которого движутся со скоростью $c_2 > c_1$. Поскольку отраженная цилиндрическая волна приходит в данную точку пространства в момент времени $t = R_0/c_1$, то, как видно из (4.4), боковая волна приходит в точку наблюдения раньше, чем отраженная цилиндрическая волна. Выражение для давления в боковой волне есть

$$p_{\text{отр. б}} = -\frac{Am}{\pi c_1} \frac{\theta_0 \sqrt{\alpha^2 - \theta_0^2}}{\sqrt{R_0^2 - c_1^2 t^2} [\theta_0^2 (m^2 - 1) + \alpha^2]}, \quad (4.5)$$

$$\theta_0 < \alpha, \quad y > 0, \quad R_0/c_1 > t > t_6.$$

Интересно отметить, что при $R_0 \gg c_1 t$ $p_{\text{отр. б}}$ не зависит от времени. Так, при $y \gg z'$

$$p_{\text{отр. б}} \approx -\frac{Am}{\pi c_1 R_0^2} \frac{y \sqrt{\alpha^2 - y^2/R_0^2}}{\alpha^2 + [y^2(m^2 - 1)/R_0^2]}, \quad (4.6)$$

$$y > 0, \quad R_0 \gg c_1 t, \quad t > t_6, \quad \theta_0 < \alpha.$$

При $R_0 \rightarrow c_0 t$ ($\lambda = 0$) выражение для $p_{\text{отр. б}} \rightarrow \infty$ как $(R_0^2 - c_1^2 t^2)^{-1/2}$. Такая же особенность имеется и у выражения для отраженной цилиндрической волны, которая описывается формулой (см. (4.3))

$$p_{\text{отр}} = -\frac{A}{2\pi c_1} \frac{\theta_0^2 (m^2 + 1) - \alpha^2}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R_0^2} [\theta_0^2 (m^2 - 1) + \alpha^2]}, \quad (4.7)$$

$$\theta_0 < \alpha, \quad c_1 t > R_0 \quad (c_1 t \rightarrow R_0).$$

Отмеченное обстоятельство связано с тем, что, в отличие от плоского и сферического случаев, для которых в среде могут распространяться сосредоточенные возмущения соответственно типов: $\delta(\xi)$, $\xi = t - (y/c_1) \sin \mu + (z/c_1) \cos \mu$ и $\delta(t - R/c_1)/R$, для цилиндрической симметрии невозможно существование сосредоточенных возмущений типа $\delta(t - R/c_1) f(R)$ ($R = \sqrt{y^2 + z^2}$, $f(R)$ — произвольная функция). Так, в рассматриваемом случае давление в падающей волне есть

$$p = -\frac{iA}{4\pi c_1} \frac{1}{\sqrt{y^2 + (z-l)^2 - c_1^2 t^2}} + \text{к. с.}$$

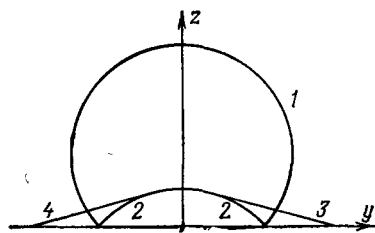


Рис. 4

На рис. 4 часть окружности 1, уравнение которой $y^2 + (z - l)^2 = c_1^2 t^2$, определяет границу падающей волны, часть окружности 2 ($y^2 + (z + l)^2 = c_1^2 t^2$) указывает границу отраженной цилиндрической волны, прямые 3, 4, уравнения которых $(z + l \pm$

$\pm y \operatorname{tg} \theta_m) \cos \theta_m = c_1 t$, определяют границу существования боковой волны.

При рассматриваемой здесь симметрии легко найти и прошедшую волну¹¹⁻¹³. Остановимся коротко на этом вопросе. Аналогично формуле (3.17),

из (3.12), положив $\mu = \pi/2$ и умножив подынтегральное выражение на $-k_z/\omega$, будем иметь

$$p_{\text{пр}} = -\frac{A}{8\pi^2 c_1} \oint_{L_0} \frac{W(\theta) d\theta}{\sqrt{1-\theta^2} [c_1 t + \sqrt{\theta^2 - \alpha^2} z - \theta l - (y + i\lambda) \sqrt{1-\theta^2}]}, \quad z < 0, \quad (4.8)$$

где путь интегрирования тот же, что и в (3.17), $W(\theta) = \frac{2m\theta}{m\theta + \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}}$. В дальнейшем положим $l = 0$; тогда вклад в (4.8) дает только полюс подынтегрального выражения, определяемый из уравнения

$$c_1 t + \sqrt{\theta^2 - \alpha^2} z = (y + i\lambda) \sqrt{1 - \theta^2}, \quad (4.9)$$

откуда, как можно показать, существенным оказывается лишь одно значение

$$\theta_n = \sqrt{\frac{1}{R^4} [-c_1 t z + (y + i\lambda) n \sqrt{R^2 - c_2^2 t^2}]^2 + \alpha^2}, \quad (4.10)$$

$$y > 0, \quad |z| < c_2 t, \quad z < 0, \quad \text{Re } \theta_n > 0, \quad \text{Im } \theta_n > 0, \quad R^2 = z^2 + (y + i\lambda)^2.$$

Используя (4.10) и устремляя λ к нулю, находим

$$p_{\text{пр}} = -\frac{iA}{4\pi c_1} \frac{W(\theta_n) \sqrt{\theta_n^2 - \alpha^2}}{n\theta_n \sqrt{R_0^2 - c_2^2 t^2}} + \text{к. с.}, \quad R_0^2 = z^2 + y^2. \quad (4.11)$$

Как следует из (4.11), $p_{\text{пр}} = 0$ при $R_0 > c_2 t$, так как в этом случае $\theta_n > \alpha$ (см. (4.10)). Вблизи границы при $z \rightarrow 0$

$$p_{\text{пр}} = -\frac{iA}{2\pi c_1} \frac{m}{m \sqrt{y^2 - c_1^2 t^2} + n \sqrt{y^2 - c_2^2 t^2}} + \text{к. с.} \quad (4.12)$$

Часть прошедшей волны, существующая в области $c_1 t < y < c_2 t$, формирует боковую волну.

Обратим внимание на то, что, в отличие от поля падающей и отраженной волн, давление в прошедшей волне конечно при $R = c_1 t$ и определяется формулой

$$p_{\text{пр}} = -\frac{Am}{\pi c_1 \alpha y}. \quad (4.13)$$

Разумеется, этот вывод следует также и из того, что при $z \rightarrow +0$, $y \neq 0$ величина суммарного давления $p + p_{\text{отр}}$ в верхней среде не содержит особенностей при $y \rightarrow c_1 t$ и равна $-Am/\pi c_1 \alpha y$.

5. ПАДЕНИЕ НА ГРАНИЦУ ДЕЛЬТАОБРАЗНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА^{8,9,14}

В этом разделе рассмотрим случай, когда на границу раздела двух сред падает сосредоточенный сферический импульс. По-видимому, этот случай наиболее сложен для исследования из всех рассмотренных в настоящем обзоре. Как уже упоминалось, задача об отражении сферического импульса от границы раздела двух сред впервые была решена Сэведжем⁹, а затем, более детально, — Тауном¹⁴. В настоящем обзоре мы приведем решение этой задачи другим способом, а именно, будем использовать метод непосредственного вычисления интеграла для $p_{\text{отр}}$, который применялся в предыдущих разделах для других видов начальных возмущений. Такой подход представляется более простым и наглядным, чем используемые ранее (см. ¹⁴).

В свете вопросов, рассматриваемых в настоящей работе, случай сферической симметрии интересен еще и тем, что предельным переходом при $l \rightarrow \infty$ (l — расстояние от границы до точки локализации начального возмущения) можно получить решение задачи об отражении плоского возмущения, падающего на границу. Поэтому представляет интерес выявить и на этом пути особенности, связанные с появлением предвестника¹⁹.

В соответствии со сказанным, будем предполагать, что в начальный момент в верхней среде ($z > 0$) создано сосредоточенное звуковое возмущение на расстоянии l от границы.

Тогда для отыскания звукового поля необходимо исходить из уравнений (3.4), (3.5) и граничных условий (3.6), (3.7) при $p_i(t < 0) = 0$, $i = 1, 2$, причем правую часть уравнения (3.4) следует заменить на источник, отвечающий сосредоточенному вблизи точки $\rho = 0$, $z = l$ начальному возмущению:

$$J = \frac{-Ac_1^2}{2\pi} \delta(t) \delta(z-l) \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \rho^2)^{3/2}}, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (5.1)$$

Здесь мы использовали известное представление двумерной дельта-функции: $\delta(\rho)/2\pi\rho = (2\pi)^{-1} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda (\lambda^2 + \rho^2)^{-3/2}$. Необходимость представления источника в таком виде диктуется применяемым в дальнейшем способом вычислений (см. (5.9) и замечания к формуле (3.14)). Таким образом, для фурье-компоненты падающей волны

$$p(\omega, k) = \int p(t, r) e^{i(\omega t - kr)} dt dr, \quad r = \{x, y, z\},$$

будем иметь:

$$p(\omega, k) = \frac{Ae^{-ik_z l}}{\omega^2/c^2 - k^2 - k_z^2} \int_0^\infty \frac{\rho \lambda J_0(\kappa \rho) d\rho}{(\lambda^2 + \rho^2)^{3/2}}, \quad (5.2)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, $J_0(\kappa \rho)$ — функции Бесселя.

Используя известную формулу

$$\int_0^\infty \frac{\rho \lambda J_0(\kappa \rho) d\rho}{(\lambda^2 + \rho^2)^{3/2}} = e^{-\lambda \kappa}, \quad (5.3)$$

при помощи (5.2) получаем для давления в падающей волне выражение

$$p(t, r) = \frac{A}{(2\pi)^3} \int_{L_\omega} d\omega \int_{-\infty}^\infty dk_z \int_0^\infty \frac{\exp[t(-\omega t - k_z z_1) - \lambda \kappa] \kappa J_0(\kappa \rho)}{\omega^2/c_1^2 - k^2 - k_z^2} d\kappa, \quad (5.4)$$

$$z_1 = -z + l.$$

Здесь из условия $p(t < 0) = 0$ на пути интегрирования L_ω $\text{Im } \omega > 0$. Для области $z < l$ легко выполнить в (5.4) интегрирование по k_z . В результате найдем

$$p(t, r) = -\frac{iA}{8\pi^2} \int_{L_\omega} d\omega \int_0^\infty \frac{\kappa \exp[-i\omega t + i\sqrt{(\omega^2/c_1^2) - \kappa^2} z_1 - \lambda \kappa] J_0(\kappa \rho) d\kappa}{\sqrt{(\omega^2/c_1^2) - \kappa^2}}, \quad (5.5)$$

$\sqrt{(\omega^2/c_1^2) - \kappa^2} \rightarrow \omega/c_1$ при $\omega \rightarrow \infty$, $\omega_2 > 0$, разрезы в плоскости ω проведем следующим образом: $|\omega_1| > \kappa c_1$, $\omega_2 = 0$.

Так же как в предыдущих разделах, в (5.5) произведем замену переменных, аналогичную (3.13), т. е. $\omega = c_1 \kappa' x$, $\kappa = \kappa'$. Тогда

$$p(t, r) = \frac{A}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_x} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} \int_0^\infty J_0(\kappa \rho) \exp[+i\kappa (\sqrt{x^2 - 1} z_1 - c_1 t x) - \lambda \kappa] d\kappa =$$

$$= \frac{A}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_x} f_1(x) dx, \quad (5.6)$$

где разрезы в плоскости x характеризуются следующими условиями: $|x_1| > 1$, $x_2 = 0$, $x = x_1 + ix_2$. Из (5.6) следует, что контур интегрирования

лежит выше действительной оси, но, в отличие от интегрирования по ω , путь интегрирования по x не может проходить произвольно в области $\text{Im } x > 0$. Для уточнения этого обстоятельства рассмотрим подробнее внутренний интеграл по κ в (5.6). Используя формулу

$$J_0(\kappa\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\kappa\rho \sin \theta) d\theta,$$

имеем

$$I(b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\zeta \int_0^{\infty} d\kappa \exp(i\kappa\rho \sin \zeta - b\kappa), \quad b = i(c_1 t x - \sqrt{x^2 - 1} z_1) + \lambda. \quad (5.7)$$

Условие сходимости интеграла (5.7)

$$\text{Re } b > 0 \quad (5.8)$$

накладывает ограничение на значение x , т. е. на выбор пути интегрирования L_x , а именно, считая на L_x $x_2 \rightarrow 0$, $x_2 > 0$ ($x = x_1 + ix_2$), получаем из (5.8), что должно соблюдаться условие

$$0 < x_2 < \frac{\lambda}{c_1 t - (x_1 z_1 / \sqrt{x_1^2 - 1})} \quad \text{при } |x_1| > \frac{c_1 t}{\sqrt{s}}, \quad s = c_1^2 t^2 - z_1^2. \quad (5.9)$$

Если $|x_1| < c_1 t / \sqrt{s}$, $|x_1| \ll x_2$, то неравенство $\text{Re } b > 0$ соблюдается автоматически. Условие (5.9) непротиворечиво только при $\lambda \neq 0$. Именно в связи с этим в используемом нами представлении источника в виде (5.1) нельзя с самого начала положить $\lambda = 0$.

Предполагая теперь (5.8) выполненным и вводя новую переменную интегрирования $Y = e^{i\zeta}$, найдем

$$I(b) = \frac{i}{\pi\rho} \int_{|Y|=1} \frac{dY}{Y^2 - (2bY/\rho) - 1} = - \frac{1}{\rho \sqrt{a^2 + 1}}, \quad a = \frac{b}{\rho}. \quad (5.10)$$

Вклад в $I(b)$ дает тот полюс подынтегрального выражения в (5.10)

$$Y_0 = a + \sqrt{a^2 + 1}, \quad (5.11)$$

у которого $|Y_0| < 1$, чем и определяется знак $\sqrt{a^2 + 1}$.

Следует указать, что условие (5.9) определяет положение особых точек в комплексной плоскости x относительно контура интегрирования. Действительно, точки ветвления $x^{1,2} = \pm 1$ лежат ниже контура L_x . Точки ветвления, определяемые из соотношений $a = \pm i$ или

$$c_1 t x \pm \rho - i\lambda = \sqrt{x^2 - 1} z_1, \quad (5.12)$$

имеют малые мнимые части при $R_0 = \sqrt{\rho^2 + z_1^2} > c_1 t$:

$$x_2 = \frac{\lambda}{c_1 t - (x_1 z_1 / \sqrt{x_1^2 - 1})}. \quad (5.13)$$

Учитывая положение разрезов в (5.6) в плоскости x , найдем, что уравнение (5.12) имеет только два корня, которые локализованы в областях $x_2 > 0$, $|x_1| > c_1 t / \sqrt{s}$. Поэтому из условия (5.9) следует, что обе точки ветвления, определяемые (5.12), лежат выше пути интегрирования L_x . При выполнении условия $c_1 t > R_0$ мнимые части точек ветвления, определяемых (5.12), имеют конечную при $\lambda \rightarrow 0$ мнимую часть:

$$|x_2| = \frac{z_1}{s} \sqrt{c_1^2 t^2 - R_0^2}, \quad (5.14)$$

$$R_0 < c_1 t, \quad \lambda \ll \rho, \quad \lambda \ll c_1 t |x|, \quad |x| z_1 \gg \lambda,$$

и поэтому их положение относительно L_x также определено. (Контур L_x сильно прижат к оси $x_2 = 0$.)

Используя (5.6), (5.7), (5.10), находим

$$p(t, r) = \frac{A}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_x} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{\rho^2 - (\sqrt{x^2 - 1} z_1 - c_1 t x + i\lambda)^2}}, \quad (5.15)$$

$$\sqrt{x^2 - 1} \rightarrow x \text{ при } x_2 > 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \sqrt{\rho^2 - (\sqrt{x^2 - 1} z_1 - c_1 t x + i\lambda)^2} = R_0 \\ \text{при } x = 0, \quad \lambda = 0.$$

Производя замену переменных (3.16), будем иметь

$$p(t, r) = \frac{iA}{8\pi^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_\theta} \frac{d\theta}{e(\theta)} = \frac{A}{8\pi^2 R_0} \frac{\partial I(t, r)}{\partial t}, \quad (5.16)$$

$$e(\theta) = \sqrt{(\theta - \psi_1)(\theta - \psi_2) + 2i(\lambda/R_0)(\theta \cos \delta - \cos \delta_1) \sqrt{1 - \theta^2}},$$

$$\psi_{1,2} = \frac{1}{R_0^2} (c_1 t z_1 \pm \rho \sqrt{R_0^2 - c_1^2 t^2}) = \cos(\delta \mp \delta_1), \quad (5.17)$$

$$\cos \delta = \frac{z_1}{R_0}, \quad \cos \delta_1 = \frac{c_1 t}{R_0}.$$

Особыми точками подынтегрального выражения являются точки ветвления, которые при $c_1 t > z_1$, $R_0 > c_1 t$ определяются соотношениями

$$\theta_{1,2} = \cos(\delta - \delta_1) \pm i \frac{\lambda}{R_0} \frac{\sin^2(\delta \mp \delta_1)}{\sin \delta_1} \quad (5.18)$$

(разрез, соединяющий точки $\theta = \pm 1$, идет по действительной оси). Если же $c_1 t < z_1$, то особых точек в подынтегральном выражении (5.16) нет (они лежат на другом листе римановой поверхности и $p(c_1 t < z_1) = 0$). При $R_0 < c_1 t$, $|\sqrt{R_0^2 - c_1^2 t^2}| \gg \lambda$, $z_1 \gg \lambda$, $\rho \gg \lambda$ точки ветвления совпадают с $\psi_{1,2}$ (см. (5.17)).

В (5.16), как показывает несложный анализ, контур интегрирования L_θ можно провести так же, как и в (3.17) (см. рис. 2). Напоминаем, что переменная интегрирования θ имеет смысл косинуса угла падения однородных и неоднородных плоских импульсов. На рис. 5 указаны положения точек ветвления подынтегрального выражения (5.16) относительно L_θ при $R_0 > c_1 t$.

При $R_0 > c_1 t$ интеграл (5.16) сводится к интегрированию по берегам разреза, соединяющего точки θ_1 и θ_2 (см. рис. 5). В результате найдем

$$I(t, r) \approx 2i \int_{\substack{1 \\ 0 < \text{Im } \theta \rightarrow 0}}^{\theta_1} \frac{d\theta}{e(\theta)} + 2i \int_{\substack{1 \\ 0 > \text{Im } \theta \rightarrow 0}}^{\theta_2} \frac{d\theta}{e(\theta)} = 2i \int_1^{\theta_1} \frac{d\theta}{e(\theta)} + \text{к. с.} \approx O(\lambda, t), \quad (5.19)$$

$$\theta_1 \approx \theta_2, \quad O(\lambda, t) \sim \lambda, \quad \left| 1 - \frac{c_1^2 t^2}{R_0^2} \right| \gg \frac{\lambda}{R_0}, \quad \frac{\lambda}{R_0} \ll 1,$$

так как пути интегрирования в обоих интегралах можно выбрать идущими по разные стороны от действительной оси сколь угодно близко к последней ($\lambda \rightarrow 0$). При $R_0 < c_1 t$ точки ветвления $\theta_{1,2}$ также находятся внутри L_θ . В этом случае, точнее при $\sqrt{c_1^2 t^2 - R_0^2} \gg \lambda$, $\rho \gg \lambda$, $z_1 \gg \lambda$, как уже отмеча-

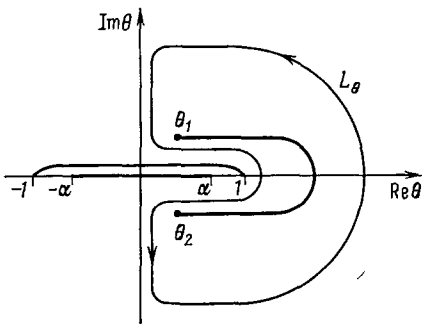


Рис. 5

лось, в (5.16) можно опустить выражения порядка λ , а тогда

$$I(t, r) = -2\pi, \quad R_0 < c_1 t. \quad (5.20)$$

Учитывая (5.19), (5.20), получаем, что давление в падающем возмущении описывается следующим выражением:

$$p(t, R) = -\frac{A}{4\pi R_0} \delta\left(t - \frac{R_0}{c_1}\right). \quad (5.21)$$

Конечно, функцию Грина волнового уравнения в безграничном пространстве можно найти и другими способами. Достоинство приведенного метода состоит в том, что он оказывается очень удобным для нахождения поля отраженной волны. Чтобы получить выражение для отраженной волны, необходимо в (5.16) умножить подынтегральное выражение на коэффициент Френеля $V(\theta)$ (см. (3.18)) и заменить z_1 на $z' = z + l$. Таким образом, получим

$$p(t, r) = \frac{iA}{8\pi^2 R_1} \frac{\partial}{\partial t} \oint \frac{V(\theta) d\theta}{e_1(\theta)} = \frac{iA}{8\pi^2 R_1} \frac{\partial}{\partial t} J_1(t, r), \quad (5.22)$$

где $R_1 = \sqrt{z'^2 + \rho^2}$, $\cos \delta^{(1)} = z'/R_1$, $\cos \delta_1^{(1)} = c_1 t/R_1$, $\psi_{1,2}^{(1)} = \cos(\delta^{(1)} \mp \delta_1^{(1)})$,

$$e_1(\theta) = \sqrt{(\theta - \psi_1^{(1)})(\theta - \psi_2^{(1)}) + 2i(\lambda/R_1)(\theta \cos \delta^{(1)} - \cos \delta_1^{(1)}) \sqrt{1 - \theta^2}},$$

разрез, соединяющий точки ветвления $\theta = \pm \alpha$, идет по действительной оси (см. рис. 5).⁴ При $z' > c_1 t$ $p_{\text{отр}} = 0$, так как в этом случае внутри L_0 нет особых точек.

Рассмотрим область, расположенную перед сферическим фронтом $R_1 = c_1 t$. Для области $R_1 > c_1 t$ выражение для $p_{\text{отр}}$, как легко видеть, аналогично (5.19), т. е.

$$p_{\text{отр}} = \frac{iA_1}{4\pi^2 R_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\substack{0 < \text{Im } \theta \rightarrow 0 \\ 1}}^{\theta_1(z')} \frac{V(\theta) d\theta}{e_1(\theta)} + \int_{\substack{\theta_2(z') \\ 0 > \text{Im } \theta \rightarrow 0}}^1 \frac{V(\theta) d\theta}{e_1(\theta)} \right), \quad (5.23)$$

где $|1 - (c_1^2 t^2/R_1^2)| \gg \lambda/R_1$, $\lambda/R_1 \ll 1$, $\theta_1(z')$, $\theta_2(z')$ определяются (5.18) с заменой z_1 на z' . Как и в (5.18), при $\alpha < \text{Re } \theta_1(z')$, $p_{\text{отр}}(R_1 > c_1 t) \simeq O(\lambda)$, а при $\alpha > \text{Re } \theta_1$ оба интеграла в (5.23) на отрезке $\alpha < \theta < 1$ компенсируют друг друга, а на отрезке $\text{Re } \theta_1(z') < \theta < \alpha$ компенсации не происходит. Это связано с тем, что корень $\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}$, входящий в коэффициент отражения $V(\theta)$ (см. (3.18)) на отрезке $\text{Re } \theta_1(z') < \theta < \alpha$ (в первом интеграле (5.23)), определен как $i|\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}|$ (верхний берег разреза $-\alpha < \theta < \alpha$), а во втором интеграле (5.23) — как $-i|\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}|$ (нижний берег разреза $-\alpha < \theta < \alpha$). Учитывая вышесказанное и опуская все величины порядка λ в (5.23), получим выражение для отраженной волны ($\lambda/R_1 \ll |1 - c_1 t/R_1|$)

$$p_{\text{отр}} \approx -\frac{Am\Pi(\alpha - \Psi_1^{(1)})}{\pi^2 R_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Psi_1^{(1)}}^{\alpha} \frac{\theta \sqrt{\alpha^2 - \theta^2} d\theta}{[\theta^2(m^2 - 1) + \alpha^2] \sqrt{(\theta - \Psi_1^{(1)})(\theta - \Psi_2^{(1)})}}, \quad (5.24)$$

$$\alpha > \Psi_1^{(1)}, \quad \Pi(\alpha - \Psi_1^{(1)}) = \begin{cases} 1, & \alpha > \Psi_1^{(1)}, \\ 0, & \alpha < \Psi_1^{(1)}. \end{cases}$$

Возмущение, описываемое (5.24), приходит в точку наблюдения раньше, чем отраженный сферический фронт, характеризуемый $R_1 = c_1 t$. Поэтому выражение (5.24) отвечает боковой волне. Момент ее появления t_6 в точке наблюдения определяется из условия $\theta_1(z') = \alpha$, откуда следует, что

$$t_6 = \cos(\delta_1^{(1)} - \theta_m) \frac{R_1}{c_1}, \quad \frac{z'}{R_1} < \cos \theta_m, \quad (5.25)$$

где $\sin \theta_m = n$. Таким образом, боковая волна существует в интервале времени $t_6 < t < R_1/c_1$.

Используя (5.24), легко получить выражения для боковой волны вблизи ее переднего ($t \rightarrow t_6$) и заднего ($t \rightarrow R_1/c_1$) фронтов. При $t \rightarrow t_6$ имеем из (5.24)

$$p_{отр} = - \frac{Ac_1 n}{2\pi R_1^2 m \alpha^{1/2} \sin^{1/2} \delta^{(1)} \sin^{3/2} (\delta^{(1)} - \theta_m)}, \quad (5.26)$$

$$0 < t - t_6 \ll t_6.$$

Из (5.26) следует, что вблизи переднего своего фронта боковая волна убывает, так же как в случае точечного гармонического источника^{3,27-29}, т. е. $p_{отр} \propto R_1^{-2}$.

Ранее было отмечено, что для падающего на границу плоского импульса боковая волна вблизи отраженного плоского импульса убывает обратно пропорционально расстоянию от этого импульса (именно эта часть боковой волны определяет предвестник). Аналогичная ситуация имеет место и для сферического импульса. Действительно, при $0 < (R_1/c_1) - t \ll R_1/c_1$ из (5.24), оставляя лишь слагаемые порядка $[(R_1/c_1) - t]^{-1}$, легко найти

$$p_{отр} \approx \frac{Am\gamma_0 \sqrt{\alpha^2 - \gamma_0^2}}{2\pi^2 R_1 [\gamma_0^2 (m^2 - 1) + \alpha^2] [t - (R_1/c_1)]}, \quad (5.27)$$

где $\gamma_0 = c_1 t z' / R_1^2$, $\alpha > \gamma_0$, $\lambda / R_1 \ll |1 - (c_1 t / R_1)|$.

Перейдем к определению поля возмущений в области за сферическим отраженным фронтом, т. е. в области $R_1 < c_1 t$. Здесь следует различать два случая: $\gamma_0 > \alpha$ (угол падения меньше угла полного внутреннего отражения) и $\gamma_0 < \alpha$ (угол падения больше угла полного внутреннего отражения). При

$$\frac{z'}{R_1} > \alpha, \quad \frac{\rho^2}{R_1^2} \left(\frac{c_1^2 t^2}{R_1^2} - 1 \right) \gg \frac{\lambda}{R_1}$$

в (5.22) можно пренебречь слагаемым порядка λ . Тогда (5.22) сводится к интегрированию вокруг разреза, соединяющего точки $\Psi_1^{(1)}(z')$, $\Psi_2^{(1)}(z')$.

Представляет интерес выяснить поведение $p_{отр}$ непосредственно за отраженным фронтом, т. е. при $\sqrt{(c_1^2 t^2 / R_1^2) - 1} \ll z' / R_1$. В этом случае точки $\Psi_1^{(1)}(z')$, $\Psi_2^{(1)}(z')$ сколь угодно близки друг к другу и (5.22) легко вычисляется. Поскольку при $z' / R_1 > \alpha$, $R_1 > c_1 t$, $\sqrt{(R_1^2 / c_1^2) - t^2} \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ интеграл, входящий в (5.22) (см. (5.23)), равен нулю, а при $z' / R_1 < \alpha$, $R_1 < c_1 t$, интеграл J_1 в (5.22) равен $2\pi i V$ ($\theta = z' / R_1$), то

$$p_{отр} = - \frac{AV(z'/R_1)}{4\pi R_1} \delta \left(t - \frac{R_1}{c_1} \right). \quad (5.28)$$

Таким образом, при $z' / R_1 < \alpha$ вблизи фронта $R_1 = c_1 t$ форма отраженного импульса повторяет форму падающего импульса.

В случае, когда угол падения больше угла полного внутреннего отражения, ситуация сложнее. При

$$\gamma_0 < \alpha, \quad R_1 < c_1 t, \quad \frac{\rho^2}{R_1^2} \left(\frac{c_1^2 t^2}{R_1^2} - 1 \right) \gg \frac{\lambda}{R_1}$$

также можно опустить в (5.22) слагаемые под корнем порядка λ и (5.22) сведется к вычислению интеграла J_1 , охватывающего разрез, соединяющий точки $\Psi_{1,2}(z')$:

$$V = V_1 + iV_2, \quad V_1 = \frac{\theta^2 (m^2 + 1) - \alpha^2}{\theta^2 (m^2 - 1) + \alpha^2}, \quad V_2 = - \frac{2m\theta \sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}{\theta^2 (m^2 - 1) + \alpha^2}, \quad (5.29)$$

$$J_1 = \oint \frac{(V_1 + iV_2) d\theta}{V(\theta - \gamma_1)^2 + v^2} = J_{11} + J_{12}, \quad J_{11} = \oint \frac{V_1 d\theta}{V(\theta - \gamma_1)^2 + v^2},$$

$$v^2 = \frac{\rho^2}{R_1^2} \left(\frac{c_1^2 t^2}{R_1^2} - 1 \right) \rightarrow 0, \quad \gamma_1 = \frac{z'}{R_1}.$$

Для произвольных значений t , R этот интеграл, так же как в случае $R_1 > c_1 t$, не выражается через элементарные функции, за исключением случаев $z' = 0$ и $\rho = 0$. В то же время для области значений $R_1 \rightarrow c_1 t$ его легко вычислить. В этом случае на L_0 значения θ можно считать действительными; тогда в интеграле J_1 контур L_0 охватывает расположенные сколь угодно близко ($\nu \rightarrow 0$) точки ветвления $\Psi_{1,2}(z')$. Поскольку других особых точек внутри L_0 нет, то

$$J_{11} = 2\pi i V_1 \left(\frac{z'}{R_1} \right), \quad R_1 < c_1 t. \quad (5.30)$$

При $\nu \rightarrow 0$ (5.29) содержит логарифмически расходящееся выражение ($\theta \rightarrow \gamma_1$), которое и определяет наиболее медленно убывающую по мере удаления от сферы $R_1 = c_1 t$ часть возмущения. Логарифмически расходящуюся часть J_{12} легко выделить. В результате будем иметь

$$J_{12} = 4V_2 \left(\frac{z'}{R_1} \right) \ln \frac{\rho \sqrt{R_1^2 - c_1^2 t^2}}{R_1^2}, \quad (5.31)$$

$$\nu \rightarrow 0, \quad R_1 < c_1 t.$$

При помощи (5.24), (5.27), (5.30), (5.31) при $R_1 \rightarrow c_1 t$ найдем для области, примыкающей с обеих сторон к сфере $R_1 = c_1 t$:

$$P_{\text{отр}} = -\frac{A}{4\pi R_1} \left[V_1 \left(\frac{z'}{R_1} \right) \delta \left(t - \frac{R_1}{c_1} \right) + \frac{1}{\pi} \frac{V_2(z'/R_1)}{t - R_1/c_1} \right], \quad (5.32)$$

$$\frac{|t - R_1/c_1|}{t} \ll \frac{z'}{R_1}, \quad \frac{\rho^2}{R_1^2} \left| \frac{c_1^2 t^2}{R_1^2} - 1 \right| \gg \frac{\lambda}{R_1}.$$

Кроме сосредоточенного возмущения, повторяющего форму падающего импульса, в (5.32) содержится часть, связанная с распределенным возмущением. В указанном смысле ситуация здесь аналогична случаю падения на границу плоского импульса (см. (3.2) и (3.28)). Следует, однако, отметить, что (5.32) не годится для очень малых значений $t - (R_1/c_1)$. Более точное рассмотрение приводит вместо формулы $[t - (R_1/c_1)]^{-1}$ в (5.32) к выражению

$$\frac{t - (R_1/c_1)}{[t - (R_1/c_1)]^2 + (\lambda^2 \rho^2 / c_1^2 t^2 R_1^2)} = \frac{P}{t - (R_1/c_1)},$$

т. е. между (5.32) и (3.2), (3.28) существует полное соответствие. Более того, при $l \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \infty$, $A/l = \text{const}$ распределенная часть сигнала, описываемого (5.32), может интерпретироваться как возмущение, связанное с предвестником, поскольку «приход» этого сигнала в точку наблюдения опережает момент прихода сосредоточенного импульса в эту точку на сколь угодно большой промежуток времени.

Действительно, при $l \rightarrow \infty$, $A/l = \text{const}$ формула (5.32) соответствует (3.2), (3.28), так как при $l \gg |y|$, $l \gg z$

$$R = \sqrt{x^2 + (y + l \sin \mu)^2 + (z - l \cos \mu)^2} \approx l + y \sin \mu - z \cos \mu,$$

$$R_1 \approx l + y \sin \mu + z \cos \mu, \quad t = \frac{l}{c_1} + \tau,$$

l_1 — расстояние от точки локализации начального возмущения до начала координат, τ — время, отсчитываемое от момента прихода в начало координат звукового сигнала.

Следует подчеркнуть, что асимптотическое разложение (5.32) справедливо при $|t - R_1/c_1|/t \ll z'/R_1$ и не может быть использовано в том случае, когда излучатель и приемник находятся вблизи границы ($z' \rightarrow 0$). Поле отраженной волны при $z' \rightarrow 0$ выражается через элементарные функции¹⁹. Для боковой волны из (5.24) получаем

$$P_0 = \begin{cases} 0, & t < \frac{\rho}{c_2}, \\ -\frac{Am^2 \alpha c_1^2 t}{2\pi \rho^3 [\alpha^2 + (m^2 - 1)(1 - c_1^2 t^2 / \rho^2)]^{3/2}}, & \frac{\rho}{c_2} < t < \frac{\rho}{c_1}, \end{cases} \quad (5.33)$$

а отраженная сферическая волна повторяет форму падающей с коэффициентом отражения $V = -1$:

$$p_{\text{отр}} = \frac{A}{4\pi\rho} \delta\left(t - \frac{\rho}{c_1}\right), \quad t \geq \frac{\rho}{c_1}. \quad (5.34)$$

В приближении плоских волн ($R \rightarrow \infty$) полное поле в верхней среде при скользящем падении $p = p_{\text{пад}} + p_{\text{отр}} \equiv 0$. Этот факт составляет содержание так называемого парадокса Ллойда: «При скользящем падении полное поле в верхней и нижней средах отсутствует». Разрешение парадокса Ллойда состоит в учете сферичности падающего импульса. Тогда в верхней среде будет присутствовать боковая волна (см. формулу (5.33)).

Интересно отметить, что приведенные асимптотические формулы для отраженного сферического импульса (5.28), (5.32), соответствующие отражению плоских волн, хотя и правильно описывают форму основной части сигнала, тем не менее не определяют его полный импульс

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} p \, dt.$$

Для выяснения этого факта подсчитаем полный импульс отраженного сигнала. Интегрируя (5.22) по времени, получим

$$P = -\frac{m-1}{4\pi R_1(m+1)}.$$

К этому же результату легко прийти, интегрируя исходные волновые уравнения (3.4), (3.5) по времени и решая затем уравнения Лапласа с граничными условиями (3.6), (3.7)¹⁴. В то же время интегрирование соотношений (5.28), (5.32) дает результат, отличный от приведенного выше. Разрешение проблемы «исчезнувшего импульса» состоит в том, что более быстро спадающие по сравнению с $1/R_1$ части отраженного поля (боковые волны, сигналы, пришедшие после основного импульса) хотя и малы по амплитуде ($\sim 1/R_1^2$), но имеют большую длительность ($\sim R_1$) и вносят в полный импульс отраженного поля вклад, по порядку величины сравнимый с основным сигналом. Этот результат, разумеется, следует из непосредственного вычисления импульса боковой волны (подробнее см. статью Тауна¹⁹).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше рассмотрены задачи об отражении импульсов различной формы от границы раздела двух жидкостей. При исследовании вопроса об отражении полубесконечного импульса от границы раздела выяснено, что предвестник, возникающий при отражении плоского импульса, связан с возбуждением той части боковой волны, поле которой в системе отсчета $y' = y - (c_1 t / \sin \mu)$ не зависит от времени. При рассмотрении причинной постановки задачи момент прихода сигнала в точку наблюдения определяется передним фронтом боковой волны. Рассмотрено отражение импульса цилиндрической формы от границы раздела двух жидкостей⁵. Аналогичные результаты для отражения электромагнитных импульсов от границы раздела двух диэлектриков получены в¹². Отражение цилиндрических импульсов от границы раздела жидкость — твердое тело исследовалось в^{11,13}. В перечисленных работах^{5,11-13} получены точные выражения в элементарных функциях для отраженных полей, что позволяет детально исследовать боковые волны, а также различного рода поверхностные волны, возникающие при отражении от твердого тела^{11,13}.

В третьем разделе анализируется проблема отражения сферического импульса от границы раздела жидкостей, которая впервые решена в работе⁹, а затем более детально рассмотрена в¹⁴. Результаты этих работ содержатся

также в статье ⁸. Случай отражения сферического импульса от границы твердого тела исследован в ³⁰, см. также ^{31,32}. В цитируемых работах при получении исходных выражений для отраженного поля используется та или иная разновидность метода Фурье или Лапласа с последующим вычислением кратных интегралов. В работах зарубежных авторов (в особенности в США) этот способ получения выражения для отраженного поля называется методом Каньяра или методом Каньяра — Хупа ^{33–35}. Изложенный в настоящей работе единый подход к задачам об отражении импульсов различной формы также основывается на методе Фурье.

Наиболее существенным моментом в используемом в настоящем обзоре методе, так же как и в ⁵, представляется то, что в качестве начальных условий используется возмущение, имеющее конечную, хотя и малую ширину локализации, характеризуемую параметром λ (только в конечных выражениях λ устремляется к нулю). Такой подход позволил обойти ряд сложностей в вычислениях интегралов Фурье, описывающих отраженное поле, при сингулярных начальных условиях (дельтаобразных начальных возмущениях). Этот факт хорошо иллюстрируется тем обстоятельством, что после интегрирования по k_y (см. (3.15)) или k (см. 5.15)) в однократных контурных интегралах для отраженного поля пути интегрирования L_x зажаты вблизи оси $\text{Im } x = 0$ условиями (3.14), (5.9). Разумеется, L_x не может проходить по действительной оси, поскольку на ней есть особые точки подынтегральных выражений и, что очень важно, точки ветвления $x = \pm n^{-1}$.

Следует заметить, что развиваемый здесь метод, равно как и метод Каньяра — Хупа, эффективен, как правило, только для недиспергирующих сред, когда коэффициенты отражения и преломления $V(\omega, k)$, $W(\omega, k)$ — однородные функции своих переменных.

В заключение укажем, что примененная в статье процедура вычислений может быть успешно применена и в задачах об отражении импульсов от анизотропных сред ^{36,37}.

Авторы выражают благодарность В. Л. Гинзбургу и участникам семинара ФИАНа за плодотворное обсуждение результатов работы.

Научно-исследовательский радиофизический
институт, Горький

Институт прикладной физики АН СССР,
Горький

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов И. Д. — Акуст. ж., 1973, т. 19, с. 106.
2. Иванов И. Д. — Ibidem, с. 536.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
4. Толстой И., Клей Л. Акустика океана. — М.: Мир, 1972.
5. Курин В. В., Немцов Б. Е., Эйрман В. Я. — Акуст. ж., 1985, т. 31, с. 62.
6. Nevisside O. Electromagnetic Theory. V. 3. — Lnd., E.P.C., 1912.
7. Франк И. М. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, с. 3.
8. Иванов И. Д. — Акуст. ж., 1981, т. 27, с. 234.
9. Savage J. C. — JASA, 1958, v. 30, p. 974.
10. Arons H., Yennie P. R. — JASA, 1950, v. 22, p. 131.
11. Roever W. L., Vining T. F., Strick E. — Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1959, v. 251, p. 455.
12. De Hoop A. T. — Radio Sci., 1979, v. 14, p. 253.
13. De Hoop A. T., van der Hijden — JASA, 1983, v. 74, p. 333.
14. Town P. H. — JASA, 1968, v. 44, p. 65.
15. De Hoop A. T., Frankena H. J. — Appl. Sci. Res. Ser. B, 1960, v. 8, p. 369.
16. Frankena H. J. — Ibidem, p. 357.
17. Langerberg K. J. — Appl. Phys., 1974, p. 179.
18. Ewing W. M., Jardetsky W. S., Press F. Elastic Waves in Layed Media. — N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
19. Town D. H. — JASA, 1968, v. 44, p. 77.
20. Friedlander F. G. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, v. 1, p. 376.
21. Williams W. E. — Can. J. Phys., 1961, v. 39, p. 272.

22. Dyukers L. R. B.— JASA, 1965, v. 37, p. 1052.
23. Abramovitz W.— JASA, 1964, v. 36, p. 214.
24. Cron B. F., Nuttal A. H.— JASA, 1965, v. 37, p. 486.
25. Tjøtta J. N., Tjøtta S.— JASA, 1983, v. 73, p. 826.
26. Fischer F. A.— Ann. d. Phys., 1948, Bd. 2, S. 211.
27. Гержуоу Е.— Comm. Pure and Appl. Math., 1953, v. 6, p. 73.
28. Гержуоу Е.— Phys. Rev., 1948, v. 73, p. 1442.
29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.
30. Johnson L. R.— Geophys. J. RAS, 1974, v. 37, p. 99.
31. Иванов И. Д.— Акуст. ж., 1975, т. 21, с. 551.
32. Иванов И. Д. Ibidem, с. 415.
33. Cagniard L. Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves.— N.Y.: McGraw-Hill, 1962.
34. De Hoop A. T.— Appl. Sci. Res., Ser. B, 1960, v. 8, p. 349.
35. Achenbach J. Wave Propagation in Elastic Solids.— Amsterdam: North-Holland, 1973.
36. Burridge R.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1971, v. 24, pt. 1, p. 81.