1985 г. Август *Том 146, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ТЕКУЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

539.12.01

ИНСТАНТОНЫ ПРОТИВ СУПЕРСИММЕТРИИ

А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Суперсимметрия (SUSY) [1-3] в настоящее время — наиболее активно исследуемое и быстро растущее направление в теоретической физике элементарных частиц. Существует постоянный и обильный поток работ, посвященных суперсимметричным теориям и их возможным приложениям (см., например, обзоры [4-11]). Одна из самых главных проблем, разрешения которой ожидают от суперсимметричных моделей,— это проблема иерархии масс. Наблюдаемые на опыте и существующие в теории (гипотетические) масштабы являются ступенями гигантской лестницы, каждый шаг по которой уводит нас на много порядков величин: от нескольких десятков электрон-вольт — массы нейтрино (?) до 10^{19} ГэВ — массы Планка.

Суперсимметрия дает надежду [12] на объяснение иерархии масс по двум взаимосвязанным причинам. Во-первых, из-за отсутствия перенормировок в теории возмущений [13] — так называемых неренормализационных теорем — поля защищены от приобретения больших масс в петлевых диаграммах. Поэтому, если различие в массах вводится в лагранжиан с самого начала, то оно сохраняется во всех порядках по константе связи, и его не приходится поддерживать искусственным образом. Во-вторых, что более важно, можно ожидать динамического нарушения симметрии экспоненциальными по обратной константе связи эффектами, поскольку вышеупомянутые теоремы справедливы только в теории возмущений. Таким образом, в теории естественно возникает малый параметр, и можно надеяться на объяснение механизма возникновения иерархии масс.

Именно вопросу о динамическом нарушении SUSY и посвящен настоящий обзор. Таким образом, из потока текущей литературы по суперсимметрии мы выбрали лишь один ручеек (обзор основан на работах [14-20]), который, однако, может со временем превратиться в полноводную реку, если надежды на объяснение иерархии масс оправдаются. В любом случае речь идет об очень красивом теоретическом явлении.

С технической точки зрения самым важным шагом является использование инстантонов [21]. До сих пор инстантоны, весьма поучительные для понимания структуры неабелевых теорий, не имели надежных практических приложений (см. обзор [22]). Здесь мы имеем дело со случаем, когда вклад инстантонов хорошо определен и приводит к качественному эффекту — спонтанному нарушению цветовой симметрии или суперсимметрии.

Напомним читателю некоторые известные примеры спонтанного нарушения симметрии, отмечая аналогии и отличия от того явления, которое мы собираемся обсуждать подробно.

На первый взгляд суперсимметричные калибровочные теории очень похожи на «обычную» квантовую хромодинамику. В простейшем случае единственное отличие состоит в том, по какому представлению по группе цвета преобразуются фермионы. В случае суперсимметричной глюодинамики фермионы, так называемые глюино λ^a_α, преобразуются по тому же присоединенному представлению, что и глюоны. Если же добавляются поля материи, то наряду с фермионами материи (кварками) вводятся и их скалярные партнеры (скалярные кварки).

В случае квантовой хромодинамики мы знаем из феноменологии сильных взаимодействий, что происходит спонтанное нарушение киральной симметрии (см., например, учебники [23]). Именно, если в лагранжиане сильных взаимодействий, в пределе безмассовых u- и d-кварков можно совершать киральные вращения, меняющие четность, то физический спектр неинвариантен относительно таких вращений: вырождения по четности нет. Спонтанное нарушение характеризуется возникновением кваркового конденсата

$$\langle \bar{q}^\alpha q^\alpha \rangle \neq 0, \qquad (1.1)$$

где q^α — поля кварков, $q^\alpha = u^\alpha$, d^α; α — цветовой значок.

В суперсимметричных теориях мы также будем заниматься вычислением различных конденсатов в вакууме и узнавать тем самым о спонтанном нарушении той или иной симметрии. В частности, будем обсуждать конденсат глюино

$$\langle \lambda^a \lambda^a \rangle \neq 0, \qquad (1.2)$$

где a — цветовой индекс, $a = 1, 2, 3$ в случае группы SU (2).

Однако в случае квантовой хромодинамики мы имеем дело с теорией с сильной связью, так что отсутствуют последовательные методы вычисления конденсатов. Скажем, величина $\langle \bar{q}q \rangle$ извлекается из феноменологии π-мезонных взаимодействий. В суперсимметричных же теориях, точнее говоря, в тех вариантах, которые обсуждаются ниже, все явления разыгрываются, когда константа мала. Что более важно, в случае квантовой хромодинамики цветовая симметрия не нарушается, для суперсимметричных же теорий характерно в первую очередь динамическое нарушение именно цветовой симметрии.

В этом смысле ситуация больше напоминает модель Глэшоу — Вайнберга — Салама электрослабых взаимодействий, в которой «цветное» скалярное поле образует вакуумный конденсат (см., например, [23]). В этой модели потенциальная энергия скалярного поля имеет вид

$$V_{\text{пот}}(\varphi) = C(\bar{\varphi}\varphi - v^2)^2, \qquad (1.3)$$

где φ — дублет скалярных полей, v — константа. Тогда очевидно, что минимуму энергии отвечает ненулевое среднее скалярного поля:

$$(\bar{\varphi}\varphi)_{\text{вак}} = v^2. \qquad (1.4)$$

Если v велико, то мы имеем дело с классическим полем и можно говорить о среднем значении не только квадрата поля, но и самого поля. Отлично от нуля вакуумное ожидание электрически нейтральной компоненты хиггсовского поля φ.

В обсуждаемых теориях также происходит спонтанное нарушение цветовой симметрии, «выпадает в осадок» скалярное цветное поле. В отличие от теории электрослабых взаимодействий, однако, не постулируется существование потенциальной энергии вида (1.3) в лагранжиане. Эффективный потенциал генерируется динамически, инстантонами. Именно таков смысл слов «динамическое нарушение симметрии», часто встречающихся в настоящей статье.

Мы будем обсуждать в основном случай, когда вакуумное ожидание скалярного поля велико, калибровочные поля приобретают большую массу и эффективная константа связи всегда мала. Возникает вопрос, как все эти малости или «великости» выглядят параметрически, если в лагранжиане нет константы типа v. Ответ на этот вопрос в суперсимметричных теориях совершенно неожидан для всякого, чья «интуиция» заимствована из опыта работы с квантовой хромодинамикой.

Именно, набор лагранжевых размерных параметров в суперсимметричных теориях тот же, что и в КХД. Это — параметр Λ, определяющий величину эффективной константы связи, и массы частиц материи (кварков):

$$\Lambda,\quad m_1,\quad m_2,\quad \ldots$$

В простейшем случае кварков одного аромата оценка вакуумного среднего скалярного поля $\varphi_{\text{вак}}$ выглядит так:

$$\varphi_{\text{вак}} \sim \Lambda \left(\frac{\Lambda}{m_1}\right)^{1/4}, \tag{1.5}$$

и $\varphi_{\text{вак}}$ велико, $\varphi_{\text{вак}} \gg \Lambda$, если $m_1 \ll \Lambda$! Ничего подобного в КХД нет: здесь массы u-, d-кварков можно с хорошей точностью считать равными нулю, никакие величины в бесконечность не обращаются.

Механизм возникновения конденсата (1.5) можно пояснить следующим образом. В безмассовом пределе низшее состояние теории — вакуум — вообще не определено в рамках теории возмущений. Есть такие направления в цветовом пространстве, по которым скалярное поле может принимать произвольную величину, не увеличивая энергии состояния. Такое свойство потенциальной энергии заложено в суперсимметрии теории, а не является случайным, и поддерживается во всех порядках теории возмущений (см. упоминавшиеся выше неренормализационные теоремы).

Поэтому значение вакуумного поля $\varphi_{\text{вак}}$ определяется малыми возмущениями. К таким возмущениям относятся массовый член в лагранжиане (если $m \ll \Lambda$, то массовый член мал) и инстантонные эффекты. Инстантоны выделены тем, что представляют собой главный непертурбативный вклад и нарушают вырождение вакуума по величине φ. Таким образом и возникают неожиданные ответы типа (1.5). Подчеркнем еще раз, что все вычисления по существу просты и могут быть выполнены до конца.

Динамическое нарушение цвета возникает в достаточно широком классе моделей, простейшая из которых кратко описана выше — суперсимметричная КХД с одним ароматом кварков. Нарушение же самой суперсимметрии имеет место в теориях с так называемой киральной материей, т. е. в моделях, где число левых и правых фермионов в лагранжиане различно. То, что киральность материи является необходимым условием для нарушения суперсимметрии, известно давно — из рассмотрения так называемого индекса Виттена [24]. Однако только теперь продемонстрировано явно, что это же условие является, по крайней мере в некоторых случаях, и достаточным.

План обзора следующий. В гл. 2 описана суперсимметричная квантовая хромодинамика — теория, которая обсуждается относительно подробно в настоящем обзоре. Гл. 3 посвящена инстантонам в суперсимметричных калибровочных теориях. Эта глава подготавливает рассмотрение в гл. 4 физических эффектов, упомянутых выше,— спонтанного нарушения цветовой симметрии и суперсимметрии.

2. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

а) Описание модели

Прежде всего, приведем общие сведения о суперсимметричной квантовой хромодинамике — состав частиц и структура вершин взаимодействия. Мы рассмотрим здесь простейший вариант: калибровочная группа SU (2), один аромат материи.

Калибровочный сектор модели включает три глюона и три спинорных суперпартнера — глюино — для описания которых можно использовать либо четырехкомпонентное майорановское поле (вещественное), либо двухкомпонентное вейлевское поле (комплексное).

Теперь о материи. Напомним, что дираковское поле кварка в обычной КХД эквивалентно двум киральным полям — одному левому и одному правому, причем оба преобразуются по фундаментальному представлению группы SU $(2)_c$, т. е. являются дублетами по цвету. Если перейти от частиц к античастицам, то правый дублет можно переписать как левый антидублет. Далее, поскольку все представления группы SU (2) (псевдо)вещественны, антидублет по существу не отличается от дублета и, таким образом, дираковский кварк сводится к двум левым полям — дублетам по цвету.

В суперсимметричном варианте для описания одного аромата необходимо ввести два киральных (левых) суперполя, преобразующихся по фундаментальному представлению группы SU $(2)_c$, S_1 и S_2. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением S_f^α, где $\alpha = 1,\ 2$ — цветовой значок ($f = 1,\ 2$). В компонентах киральное поле, как обычно, имеет вид

$$S = \varphi(x_L) + \sqrt{2}\theta^\gamma\psi_\gamma(x_L) + \theta^2 F(x_L), \tag{2.1}$$

где значки α и f опущены, θ^γ — двухкомпонентный грассманов спинор, F — вспомогательное поле, входящее в лагранжиан без кинетического члена. Поля кварка и скалярного кварка обозначены через ψ и φ соответственно. Координаты θ и x_L — стандартные координаты, от которых зависят киральные поля. Укажем закон их преобразования при суперсдвигах с параметрами ε, $\bar\varepsilon$:

$$(x_L)_{\alpha\dot\alpha} = x_{\alpha\dot\alpha} - 2i\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}, \qquad \delta(x_L)_{\alpha\dot\alpha} = -4i\theta_\alpha\bar\varepsilon_{\dot\alpha},$$
$$\delta\theta_\alpha = \varepsilon_\alpha, \tag{2.2}$$

где α, $\dot\alpha = 1,\ 2$ — лоренцевы индексы.

Если воспользоваться суперполевым языком, то лагранжиан модели можно представить в очень компактном виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}\int d^2\theta W^2 + \frac{1}{4}\int d^2\theta d^2\bar\theta \bar S^f l^V S^f + \left(\frac{m}{4}\int d^2\theta S^{\alpha f} S_{\alpha f} + \text{э. с.}\right), \tag{2.3}$$

где V — суперполе общего вида, содержащее глюонный четырехпотенциал, W_α — киральное суперполе напряженностей,

$$W_\alpha(x_L, \theta) = \frac{1}{8}\bar D^2(e^{-V}D_\alpha e^V) =$$
$$= [i\lambda_\alpha(x_L) - \theta_\alpha D(x_L) - i\theta^\beta G_{\alpha\beta}(x_L) + \theta^2\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\bar\lambda^{\dot\alpha}(x_L)], \tag{2.4}$$

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\partial_{\alpha\dot\alpha}A_\beta^{\dot\alpha} + \partial_{\beta\dot\alpha}A_\alpha^{\dot\alpha} + [A_{\alpha\dot\alpha}A_\beta^{\dot\alpha}]), \qquad A_{\alpha\dot\alpha} = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}A_\mu, \qquad \sigma_\mu = (1,\ \sigma).$$

Далее, поля V и W_α — матрицы в пространстве цвета, например, $V \equiv V^a\tau^a/2$, где τ^a — матрицы Паули. Константа связи g включена в нормировку поля V. Символом D_α обозначена спинорная производная, а $\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}$ — ковариантная производная.

Отметим, что рассматриваемая модель с *одним ароматом* обладает глобальной SU (2)-инвариантностью, связанной с преобразованиями полей $S_1 \leftrightarrow \leftrightarrow S_2$. Симметрия имеет место даже в присутствии массового члена; см. (2.3). Эта SU (2)-группа, которую мы будем называть ароматной группой, своим существованием обязана тому факту, что представления цветовой группы SU $(2)_c$ (псевдо)вещественны. Все значки, отвечающие SU (2)-группам (цветовые, лоренцевы и ароматные), опускаются и поднимаются с помощью ε-символа по общим правилам.

Если перейти к компонентам, то лагранжиан (2.3) включает: а) кинетические члены глюона, глюино, кварка и скалярного кварка; б) массовые члены материи; в) нормальные калибровочные вершины; г) связь кварка, глюино и скалярного кварка типа $\bar{\varphi} T^a \psi \lambda^a$, где $T^a = \tau^a/2$ — генераторы SU $(2)_c$ в фундаментальном представлении; д) квадрат D-членов,

$$\Delta \mathscr{L}_D^{(W)} = \frac{1}{2g^2} D^a D^a.$$

Обратим внимание на необычный — положительный — знак этого слагаемого в лагранжиане. Он возникает из $W^2 |_F$; кинетический член поля D^a отсутствует, и его можно исключить, воспользовавшись уравнением движения. В чистой глюодинамике $D^a = 0$, однако введение материи $\bar{S} e^V S$ добавляет к лагранжиану

$$\Delta \mathscr{L}^{(S)} = D^a \bar{\varphi}^f T^a \varphi^f. \tag{2.4'}$$

В итоге после исключения вспомогательного поля D^a приходим к следующему выражению для самодействия скалярных полей:

$$V_{\text{пот}} = \frac{1}{2g^2} D^a D^a, \qquad D^a = -\frac{g^2}{2} (\bar{\varphi}_1 \tau^a \varphi_1 + \bar{\varphi}_2 \tau^a \varphi_2), \tag{2.5}$$

где мы учли, что генераторы группы SU (2) сводятся здесь к $\tau^a/2$.

Этой информации достаточно, чтобы пояснить тот аспект моделей, который лежит в основе всего рассматриваемого круга явлений.

Будем считать, что скалярные поля не зависят от x, и предположим сначала, что $m = 0$ (эффекты, связанные с введением малой массы материи, будут учтены позднее). Тогда легко убедиться, что минимум потенциала ($V_{\min} = 0$) достигается не только при нулевых значениях $\varphi_{1,2}$, но и вдоль целых направлений, которые мы будем называть долинами (в литературе используется термин «плоские направления»). Действительно, пусть

$$\varphi_1 = v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2 = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Очевидно, что при любом v значения D^a равны нулю. Кроме того, если $m = 0$, то равны нулю и значения F-членов.

Более того, бесконечнократное вырождение вакуума — существование долины (2.6) — имеет место не только на классическом уровне, но и с учетом всех порядков теории возмущений. Это обстоятельство вытекает из перенормируемости теории и неренормализационных теорем [13], гласящих, что весь эффект теории возмущений сводится к перенормировке волновых функций полей.

В этом пункте суперсимметричные теории кардинально отличаются от несуперсимметричных. В обычной теории, скажем, с

$$\mathscr{L} = |\partial_\mu \varphi|^2 + \psi i \hat{\partial} \psi + (g\varphi \bar{\psi} \psi + \text{э. с.}),$$

мы также могли бы считать, что на классическом уровне масса поля φ и его самодействие отсутствуют. Иными словами, в классике $V_{\text{пот}} = 0$. И масса, и самодействие с неизбежностью возникли бы, однако, уже на однопетлевом уровне, так что соответствующие контрчлены необходимо записать в лагранжиан с самого начала, что автоматически разрушает безразличное равновесие в потенциальной энергии.

Итак, в суперсимметричных теориях с материей можно производить квантование и развивать теорию возмущений вблизи любой точки из долины, коль скоро в теории возмущений имеется безразличное равновесие. Центральный вопрос таков: снимается ли вырождение при включении непертурбативных эффектов?

Прежде чем ответить на этот вопрос, обсудим структуру модели при $v \neq 0$ несколько более подробно. Очевидно, что режим с $v \neq 0$ отвечает спонтанному нарушению цветовой симметрии, при котором, как обычно, происходит перестройка спектра: калибровочные бозоны становятся массивными, «съедая» при этом некоторые скалярные поля, которые превращаются в их продольные компоненты. Нарастание массы у векторных полей сопровождается, вследствие суперсимметрии, нарастанием массы и у их спинорных партнеров.

Напомним, что в обычной (несуперсимметричной) SU (2)-модели с одним комплексным хиггсовским полем (дублетом по цвету), которое эквивалентно четырем вещественным полям, три из них можно *занулить тождественно*, используя калибровочную инвариантность модели, а оставшееся четвертое поле, развивая вакуумное среднее v, дает массу $m_V = gv$ трем векторным бозонам. Отклонение этого поля от v представляет собой физическую хиггсовскую частицу.

В суперсимметричном варианте вместо калибровочной свободы возникает свобода относительно суперкалибровочных преобразований,

$$S \to e^{i\Lambda} S,$$

где Λ — киральное суперполе, $\Lambda = \Lambda^a T^a$, и нижняя компонента Λ^a — произвольная *комплексная* функция $\omega^a(x_L)$. Пользуясь этой свободой, в топологически тривиальном секторе всегда можно положить, что три из четырех киральных суперполей $S^{\alpha f}$ тождественно равны нулю,

$$S_f^\alpha(x_L) \equiv \delta_f^\alpha \phi(x_L), \tag{2.7}$$

где $\phi(x_L)$ — синглетное киральное суперполе без цветовых и ароматных значков. При этом три киральных суперполя уходят в «продольные» компоненты векторного суперполя V^a, которое становится массивным, если вакуумное значение ϕ отлично от нуля. Таким образом, соотношение (2.7) является аналогом унитарной калибровки в обычной модели Хиггса. Подставляя (2.7) в лагранжиан (2.3), убеждаемся, что все частицы в векторном супермультиплете становятся массивными:

$$m_V = g\langle\phi\rangle \equiv gv, \tag{2.8}$$

а синглетное суперполе ϕ остается безмассовым.

Возможность убрать с помощью суперкалибровочного условия поля, «съедаемые» хиггсовым механизмом, является общей. Фактически мы видим, что координатой, отвечающей движению вдоль дна долины, является цветовой и ароматный инвариант $S_f^\alpha S_\alpha^f = 2\phi^2$.

Поучительно проследить, как перераспределяются степени свободы при спонтанном нарушении цвета. До нарушения мы имели три безмассовых глюона (6 степеней свободы) и три безмассовых глюино (6 степеней свободы), четыре комплексных скалярных поля (8 степеней свободы) и четыре вейлевских фермиона материи (8 степеней свободы). После спонтанного нарушения — три глюона, три вещественных скалярных поля и три дираковских спинора, все с массой (12 бозонных и 12 фермионных степеней свободы), одно комплексное скалярное поле и один вейлевский спинор с нулевой массой (2 бозонные и 2 фермионные степени свободы).

Таким образом, если $v \neq 0$, то теория разбивается на два сектора — сектор массивных частиц, образующих триплеты по SU (2), и сектор безмассовых частиц. В этом последнем секторе как цветовая, так и ароматная SU (2)-группы реализованы тривиально, поскольку безмассовые частицы являются синглетами по обеим группам.

При низких энергиях ($\ll m_V$) суперполе ϕ стерильно, и, в частности, не фиксировано его вакуумное значение — для любого постоянного ϕ энергия равна нулю, что и отражает наличие долин. На этом языке вопрос о том, снимается или нет вырождение непертурбативными эффектами, можно сформулировать так: существует или нет в низкоэнергетическом лагранжиане для ϕ, который получается после интегрирования по всем тяжелым степеням свободы, ненулевой суперпотенциал?

б) Инстантоны и динамика плоских направлений

Нам осталось продемонстрировать возникновение эффективного потенциала в СКХД, снимающего континуальное вырождение и фиксирующего значение ϕ, $\phi_{\text{вак}} = v \neq 0$. Оказывается, что вопрос об эффективном потенциале может быть исследован практически до конца без каких-либо вычислений. Анализируя лишь общие свойства модели, можно фиксировать функциональный вид суперпотенциала с точностью до числовой константы, конкретное значение которой вообще не очень важно (впрочем, важным является тот факт, что она отлична от нуля, факт, устанавливаемый лишь прямым расчетом; см. гл. 3).

Прежде всего, от каких переменных может зависеть эффективный потенциал? Поскольку векторные суперполя́ массивны, в низкоэнергетической области остается зависимость лишь от ϕ. Как и в любом низкоэнергетическом разложении, в главном приближении зависимостью от производных суперполя ϕ можно пренебречь.

Дальнейший анализ будет более прозрачным, если мы временно откажемся от унитарной калибровки и вернемся к калибровке общего вида. В этой калибровке искомая переменная должна быть построена из суперполей S_1 и S_2, причем она, очевидно, должна быть инвариантна относительно симметрий, присутствующих в модели,— цветовой и ароматной SU (2)-групп.

Единственный инвариант, который можно в данном случае сконструировать из суперполей материи, это

$$I = S^{\alpha f} S_{\alpha f} \qquad \alpha,\ f = 1,\ 2, \tag{2.9}$$

что равно $2\phi^2$.

Эффективный суперпотенциал, если существует, должен иметь вид

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \int d^2\theta f\,(I\,(x_L,\ \theta)) + \text{э. с.},$$

где f — некоторая функция.

Вид функции f легко установить, если вспомнить, что исходный лагранжиан СКХД обладает дополнительной инвариантностью, связанной с аксиальными вращениями полей глюино и материи. На классическо уровне существуют два сохраняющихся аксиальных тока. Один из них, так называемый R-ток, J_μ^R, является суперпартнером тензора энергии-импульса и суперток а и отвечает следующим поворотам:

$$\lambda_\alpha \to e^{i\vartheta}\lambda_\alpha, \quad \psi_\alpha^f \to e^{-(i/3)\vartheta}\psi_\alpha^f, \quad \varphi^f \to e^{(2i/3)\vartheta}\varphi^f.$$

Последние два преобразования на суперполевом языке эквивалентны одновременному фазовому преобразованию суперполей S и параметра θ:

$$S^f \to \exp\left(\frac{2i}{3}\vartheta\right) S^f, \qquad \theta_\alpha \to \exp(i\vartheta)\,\theta_\alpha.$$

Другой ток, J_μ^M, затрагивает только поля материи; соответствующие ему преобразования таковы:

$$\psi_\alpha^f \to e^{i\gamma}\psi_\alpha^f, \qquad \varphi^f \to e^{i\gamma}\varphi^f,$$

или, в суперполевых обозначениях, $S^f(x_L, \theta) \to \exp(i\gamma) S^f(x_L, \theta)$. Квантовые эффекты разрушают сохранение обоих токов из-за известных треугольных аномалий. Однако одна линейная комбинация из двух токов остается безаномальной. Не погружаясь в обсуждение аномалий,— заинтересованный читатель должен обратиться к специальной литературе — укажем, что строго сохраняющийся (с учетом аномалий) ток для калибровочной группы SU (2) имеет вид

$$J_\mu^R - \frac{5}{3} J_\mu^M. \tag{2.10}$$

Таким образом, эффективный лагранжиан СКХД обязан быть инвариантен относительно преобразований

$$S^f \to e^{-i\vartheta} S^f, \qquad \theta_\alpha \to e^{i\vartheta}\theta_\alpha. \tag{2.11}$$

При этом переменная I переходит в $\exp(-2i\vartheta) I$, и единственно возможное инвариантное выражение для суперпотенциала, очевидно, сводится к

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \int d^2\theta \cdot \text{const} \cdot [I(x_L, \theta)]^{-1} \equiv \int d^2\theta \frac{C\Lambda^5}{S^{\alpha f} S_{\alpha f}}; \tag{2.12}$$

здесь фактор Λ^5 дописан из соображений размерности, C — числовая константа.

Именно этот фактор, Λ^b (b — первый коэффициент функции Гелл-Манна — Лоу, равный пяти в SU(2)-модели с одним ароматом), входит в выражение для одноинстантонной меры. Таким образом, есть все основания ожидать, что суперпотенциал (2.12), полученный из анализа симметрий модели, действительно генерируется в одноинстантонном приближении. В гл. 3 описано развитое нами инстантонное исчисление, с помощью которого нетрудно проследить въявь за появлением суперпотенциала (2.12) и в принципе найти значение числовой константы C. Поскольку для нас существенно только то обстоятельство, что $C \neq 0$, в дальнейших формулах будем считать $C = 1$.

Возвращаясь в унитарную калибровку, видим, что суперпотенциал (2.12)

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} \sim \int d^2\theta \frac{\Lambda^5}{\phi^2(x_L, \theta)} + \text{э. с.} \tag{2.13}$$

приводит к возникновению отличного от нуля F-члена суперполя ϕ, а именно

$$\bar{F} = \frac{\Lambda^5}{\varphi^3}, \qquad F = \frac{\Lambda^5}{\bar{\varphi}^3}, \tag{2.14}$$

которому соответствует потенциальная энергия

$$V_{\text{пот}} = |F|^2 = \frac{\Lambda^{10}}{|\varphi|^6}.$$

Инстантонный вклад в энергию слегка искривил плоское дно долины, приподняв начало координат (рис. 1). Иными словами, решение с нулевым значением скалярного поля в вакууме нестабильно, теория выталкивает сама себя из начала координат.

В пределе безмассовой материи вакуумного состояния не существует вовсе. Действительно, чем больше вакуумное поле $|\varphi|$, тем ниже потенциальная энергия, и истинный суперсимметричный минимум $V_{\text{пот}} = 0$ достигается при бесконечных значениях конденсатов.

Если мы хотим иметь нормальную теорию с вакуумным состоянием, то следует «запереть выходы из долин», приподняв тем или иным способом дно долины при больших значениях скалярного поля. В рассматриваемой модели стабилизация легко достигается введением малого массового члена $mS^2|_F$ (см. (2.3)). При этом вместо (2.14) имеем (рис. 2)

$$\overline{F} = -m\varphi + \frac{\Lambda^5}{\varphi^3}, \qquad V_{\text{пот}} = \left| m\varphi - \frac{\Lambda^5}{\varphi^3} \right|^2. \tag{2.15}$$

Если $m \ll \Lambda$, то вакуумное значение поля φ, дающее минимум потенциалу (2.15) ($V_{\text{пот}} = 0$, SUSY не нарушена!), велико:

$$\varphi^2_{\text{вак}} = \pm \Lambda^{5/2} m^{-1/2} \gg \Lambda^2, \tag{2.16}$$

что и оправдывает сформулированные выше утверждения — спонтанное нарушение цвета и законность метода эффективных потенциалов и всего вычисления в целом.

Отметим, что решение для калибровочно инвариантной величины $\langle S^{\alpha f} S_{\alpha f} \rangle$ двукратно вырождено. Двукратное вырождение находится в полном соответствии с тем фактом, что индекс Виттена в SU (2)-модели равен двойке.

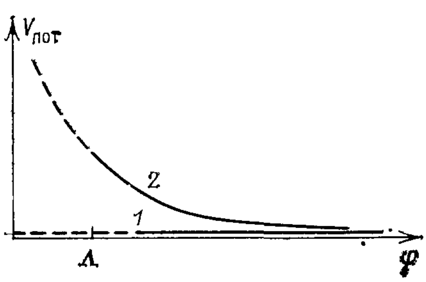

Рис. 1. СКХД с одним безмассовым ароматом: потенциальная энергия, отвечающая самодействию скалярного поля вдоль дна долины.

1 — теория возмущений, *2* — с учетом эффективного потенциала, индуцированного инстантоном

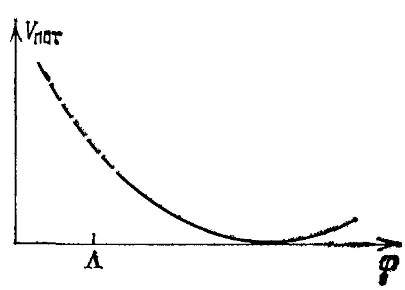

Рис. 2. Потенциальная энергия (см. рис. 1) после введения массового члена материи ($m \ll \Lambda$)

Это вырождение отражает спонтанное нарушение дискретной симметрии Z_2, присущей модели.

В заключение раздела наметим в нескольких словах альтернативный метод для определения вакуумных конденсатов (см. работы [15,18,20,29,30]). Если считать, что $\varphi_{\text{вак}} = v \neq 0$, то инстантонное исчисление, описанное в гл. 3, позволяет фиксировать конденсат глюино

$$\langle \lambda^\alpha \lambda_\alpha \rangle = \frac{\Lambda^5}{v^2}. \tag{2.17}$$

Последнее соотношение справедливо для любого $v \gg \Lambda$. Для того чтобы найти значения $\langle \lambda\lambda \rangle$ и v^2 по отдельности, можно воспользоваться суперсимметричным тождеством Уорда, так называемым аномальным соотношением Кониши [25]:

$$\bar{D}^2 \overline{S^{\alpha f}} e^V S^{\alpha f} = 4m S_{\alpha f} S^{\alpha f} + \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Tr} W^2. \tag{2.18}$$

Из соотношения (2.18) очевидно, что в суперсимметричном вакууме

$$\langle \lambda^{a\alpha} \lambda^a_\alpha \rangle = \text{const} \cdot m v^2. \tag{2.19}$$

Комбинируя (2.17) и (2.19), мы возвращаемся к уже известному нам результату для вакуумного скалярного поля, приведенному в (2.16).

3. ИНСТАНТОНЫ

Как уже упоминалось, мы собираемся обсуждать инстантонные эффекты. В этой, подготовительной, главе мы кратко опишем инстантоны в суперсимметричных теориях. Разумеется, нет возможности заново излагать всю «инстантонную азбуку»— этому посвящен отдельный обзор [22], и мы сосредоточимся на аспектах, существенных для дальнейшего. Несколько парадоксальным образом, инстантонное исчисление в суперсимметричных теориях проще, чем, скажем, в квантовой хромодинамике. Действительно, все ненулевые моды, анализ которых требует наибольших затрат труда и времени, сокращаются при суперсимметричном вычислении, и задача превращается в чисто классическую проблему — описания семейства решений классических уравнений движения в евклидовом пространстве-времени. Поэтому мы надеемся, что материал будет понятен и читателям, которые ранее специально инстантонами не занимались.

Исходный инстантон Белавина — Полякова — Шварца — Тюпкина [21] — это решение уравнений дуальности для глюонного поля, которое мы приведем здесь в несколько нестандартных обозначениях:

$$A^{\gamma\delta}_{\alpha\dot\alpha} = -i\,[\delta^\gamma_\alpha (x-x_0)^\delta_{\dot\alpha} + \delta^\delta_\alpha (x-x_0)^\gamma_{\dot\alpha}]\,\frac{1}{(x-x_0)^2+\rho^2}. \qquad (3.1)$$

Мы пользуемся спинорными обозначениями для векторных значков, в частности, вместо четырехпотенциала A_μ введена величина $A_{\alpha\dot\alpha}$ с одним точечным и одним неточечным SU(2)-значками $A_{\alpha\dot\alpha} \equiv A_\mu (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}$, $\sigma_\mu = (1, \boldsymbol\sigma)$. Что более необычно, спинорные обозначения использованы и для цветового значка a ($a = 1, 2, 3$ для $\mathrm{SU(2)_c}$). Вместо A^a мы ввели $A^{\gamma\delta}$ по правилу

$$A^{\gamma\delta} = A^a \left(\frac{\tau^a}{2}\right)^\gamma_\rho \varepsilon^{\delta\rho}. \qquad (3.2)$$

Напряженность глюонного поля, отвечающая инстантону, равна

$$G^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = -i\,(\delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta + \delta^\delta_\alpha\delta^\gamma_\beta)\,\frac{\rho^2}{[(x-x_0)^2+\rho^2]^2}, \qquad G^{\gamma\delta}_{\dot\alpha\dot\beta} = 0.$$

Далее, x_0, ρ — параметры, причем x_0 называется центром инстантона, а ρ — его размером (радиусом).

Действие для инстантона равно

$$S_{\mathrm{inst}} = \frac{8\pi^2}{g^2}, \qquad (3.3)$$

где g — константа связи, так что вклад инстантонов в физические амплитуды пропорционален $\exp(-8\pi^2/g^2)$, и мы имеем дело с экспоненциально малыми по обратной константе связи эффектами.

Параметры x_0 и ρ можно ввести непосредственно, решая классические уравнения. Сейчас более важно, что их существование следует из симметрии классического лагранжиана. Лагранжиан глюонного поля инвариантен относительно группы конформных преобразований, генераторы которых обозначим как $P_{\alpha\dot\alpha}$ — сдвиги в x-пространстве, $K_{\alpha\dot\alpha}$ — специальные конформные преобразования, $M_{\alpha\beta}$, $M_{\dot\alpha\dot\beta}$ — лоренцевы повороты, D — дилатация. Напоминаем еще раз, что α, $\dot\alpha$ — спинорные индексы и связь с возможно более привычными тензорными обозначениями дается, например, $P_{\alpha\dot\alpha} = P_\mu (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}$, где $\sigma_\mu = (1, \boldsymbol\sigma)$.

Коммутационные соотношения между генераторами группы конформных преобразований можно найти, например, в обзоре [5], и мы не будем их здесь выписывать.

В самом общем виде связь между симметрией классического лагранжиана и параметрами типа x_0, ρ такова. Начинаем с какого-нибудь решения классических уравнений. Применяя к нему преобразования симметрии, получаем целое семейство решений, что и отвечает введению параметров типа x_0, ρ, или коллективных координат. В нашем случае x_0, очевидно, связано со сдвигами, а ρ — с дилатациями, или изменением масштаба.

Легко, однако, заметить, что число параметров меньше, чем число генераторов группы симметрии. Причина такова. Вообще говоря, может существовать стационарная подгруппа преобразований, действие которых на то или иное классическое решение сводится к единице. Для стандартного инстантона, который мы сейчас обсуждаем, к стационарной подгруппе относятся генераторы лоренцевых поворотов, $M_{\dot\alpha\dot\beta}$ — инстантонное поле имеет определенную киральность. Кроме того, к стационарной подгруппе относится линейная комбинация лоренцевых поворотов $M_{\alpha\beta}$ и глобальных поворотов в цветовом пространстве $T_{\alpha\beta}$, именно,

$$M_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}, \tag{3.4}$$

где $T^a = \tau^a/2$.

Наконец, в стационарную подгруппу входит $K_{\alpha\dot\alpha} + 2\rho^2 P_{\alpha\dot\alpha}$.

Вообще говоря, мы должны были бы ввести коллективные координаты, отвечающие глобальным цветовым поворотам. Однако в конечном счете мы всегда будем рассматривать величины, которые являются скалярами в обычном и цветовом пространствах, например, квадрат напряженности глюонного поля G^2. Генераторы $T_{\alpha\beta}$ на такие объекты не действуют, и нет нужды включать в анализ соответствующие коллективные координаты (ориентацию инстантона в цветовом пространстве).

Перейдем теперь к *суперсимметричной глюодинамике*. Группа симметрии лагранжиана расширяется тогда до *суперконформной*, причем к перечисленным ранее генераторам добавляются Q_α, $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ — генераторы суперпреобразований, S_α, $\bar{S}_{\dot\alpha}$ — генераторы суперконформных преобразований. Более подробное обсуждение группы можно найти опять в обзоре [5].

Генераторы $\bar{Q}_{\dot\alpha}$, S_α пополняют стационарную подгруппу — инстантонное поле, как упоминалось, киральное. (Действие S_α связано с умножением на $x_{\alpha\dot\alpha}$, и эффективно $S^\alpha x_{\alpha\dot\alpha}$ имеет ту же киральность, что и $\bar{Q}_{\dot\alpha}$.) Что касается генераторов Q_α, $\bar{S}_{\dot\alpha}$, то их действие на исходное бозонное решение (3.1) нетривиально и должно генерировать новые решения классических уравнений, на этот раз, очевидно, фермионные.

Классическое уравнение Дирака для поля глюино во внешнем инстантонном поле имеет вид

$$\hat{\mathscr{D}}\lambda = 0, \tag{3.5}$$

а его решения называют также нулевыми фермионными модами, что связано с процедурой вычисления фермионного детерминанта во внешнем бозонном поле.

Нетрудно получить и явный вид этих нулевых мод из соображений симметрии, если учесть, что при суперпреобразованиях

$$\delta\lambda_\alpha \sim G_{\alpha\beta}\varepsilon^\beta, \tag{3.6}$$

где ε^β — параметр преобразований, $G_{\alpha\beta}$ — напряженность глюонного поля (в спинорных обозначениях). При суперконформных преобразованиях

$$\delta\lambda_\alpha \sim G_{\alpha\beta}x^{\beta\dot\rho}\bar{\varepsilon}_{\dot\rho}, \tag{3.7}$$

где $\bar{\varepsilon}_{\dot\rho}$ — параметр. Не представляет труда непосредственно убедиться, что после подстановки $G_{\alpha\beta} = (G_{\alpha\beta})_{\rm inst}$ правые части (3.6) и (3.7) действительно удовлетворяют уравнению Дирака (3.5); однако это очевидно и заранее, из суперсимметрии.

Упомянем, что в случае обычной хромодинамики нулевые моды ищут *непосредственно* [26] *как решения уравнения Дирака. Здесь они* имеют простой геометрический смысл и связаны с симметрией классического лагранжиана.

Ясно, что суперсимметрия будет реализована полностью, только если мы введем наряду с x_0 и ρ фермионные коллективные координаты инстантона. Чтобы не отпугнуть читателя, заметим сразу, что фермионные координаты имеют смысл коэффициентов при нулевых модах в общем разложении фермионного поля по собственным функциям оператора Дирака. «Классическое» спинорное поле тогда, очевидно, линейно по этой координате, и выкладка проста. Нельзя, однако, исключить, что есть бозонные поля, скажем, квадратичные по фермионным координатам. Такие поля отвечают повторному применению суперпреобразований, и в дальнейшем у нас будут явные примеры такого рода. Поддерживая суперсимметрию явно на каждом шаге, мы сможем найти сразу все семейство решений, которое следует учесть в функциональном интеграле наряду с первоначальным инстантоном. Сами по себе коллективные координаты можно ввести с помощью следующего простого формального приема. Введем обобщенный оператор сдвига

$$\mathscr{V}(x_0, \rho, \theta_0, \bar\beta) = e^{iPx_0} e^{-i\theta_0 Q} e^{-i\bar S\bar\beta} e^{iD\ln\rho}, \tag{3.8}$$

где θ_0, $\bar\beta$ — грассмановы коллективные координаты. Чтобы определить, далее, закон преобразования коллективных координат при суперсдвигах, умножаем оператор $\mathscr{V}(x_0, \rho, \theta_0, \bar\beta)$ слева, скажем, на $\exp(-i\overline{Q\varepsilon})$ и, пользуясь коммутационными соотношениями для генераторов, сводим результат такого умножения к переопределению исходных параметров:

$$\exp(-i\bar Q\bar\varepsilon)\,\mathscr{V}(x_0, \rho, \theta_0, \bar\beta) = \mathscr{V}(x_0', \rho', \theta_0', \bar\beta')\,F, \tag{3.9}$$

где F — некоторое преобразование из стационарной группы. Заметим, что поскольку в разложении экспоненты по грассмановым числам число членов конечно, то и преобразования координат носят алгебраический характер.

Таким образом, устанавливается закон преобразования коллективных координат при суперсдвигах с параметрами ε и $\bar\varepsilon$:

$$\begin{gathered}\delta(x_0)_{\alpha\dot\alpha} = -4i(\theta_0)_\alpha \bar\varepsilon_{\dot\alpha}, \qquad \delta\rho^2 = -4i(\bar\varepsilon\bar\beta)\rho^2,\\ \delta(\theta_0)_\alpha = \varepsilon_\alpha, \qquad \delta\bar\beta = -4i\bar\beta_{\dot\alpha}(\bar\varepsilon\bar\beta).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Единственное, что использовано при выводе,— это коммутационные соотношения генераторов группы суперконформных преобразований.

Несколько более сложно найти явную зависимость суперполей, ассоциированных с инстантоном, от введенных таким образом коллективных координат. Для решения этой задачи следует прежде всего иметь в виду, что суперполе как функция координат x_L, θ и коллективных координат является инвариантом относительно одновременного суперпреобразования тех и других. Удобно поэтому предварительно построить инварианты из (x_L, θ) и $(x_0, \rho, \theta_0, \bar\beta)$. Аналогично, если мы следим за пуанкаре-инвариантностью, то соответствующей комбинацией является разность $(x - x_0)$, которая, очевидно, инвариантна относительно одновременного сдвига x и x_0. Столь же очевидно, что инстантонное поле зависит от $(x - x_0)$.

Нетрудно убедиться, что комбинация $\tilde\theta_\alpha$, где

$$\tilde\theta_\alpha = (\theta - \theta_0)_\alpha + (x - x_0)_{\alpha\dot\alpha}\bar\beta^{\dot\alpha}, \tag{3.11}$$

преобразуется относительно просто:

$$\delta\tilde\theta_\alpha = -4i(\bar\varepsilon\bar\beta)\tilde\theta_\alpha. \tag{3.12}$$

а величина

$$\frac{\tilde{\theta}_\alpha}{\rho^2}$$

есть инвариант суперпреобразований.

Теперь ясно, что инстантонное суперполе напряженностей W^2 имеет вид

$$\operatorname{Tr} W^2 = \mathrm{const}\cdot\frac{\tilde{\theta}^2\rho^4}{[(x_L - x_0)^2+\rho^2]^4}. \tag{3.13}$$

Действительно, рассмотрим сначала случай коллективных грассмановых координат, равных нулю: $\theta_0 = \bar{\beta} = 0$. Тогда мы имеем дело с чисто бозонным решением (3.1). В суперполе W^2 бозонный член стоит коэффициентом при θ^2 (см. (2.4)). Отсюда мы знаем ответ для W^2 при $\theta_0 = \bar{\beta} = 0$. Единственное, что нужно для получения полного ответа (3.13), дополнить θ/ρ^2 до инварианта $\tilde{\theta}/\rho^2$. Скептически настроенный читатель может убедиться, например, что выражение (3.13) правильно воспроизводит нулевые фермионные моды, которые появляются в коэффициентах при нулевой и первой степенях θ. (Отметим, что преобразования $x_L - x_0$ обсуждаются ниже в более общем контексте.)

Для явных вычислений необходимо еще знать меру интегрирования по коллективным координатам:

$$d\mu\,(\rho,\ x_0,\ \theta_0,\ \bar{\beta})\, e^{-S} = C\Lambda^6\, d^4x_0\, d\rho^2\, d^2\theta_0\, d^2\bar{\beta}. \tag{3.14}$$

Мера интегрирования, естественно, инвариантна относительно преобразований суперсимметрии.

Пусть теперь добавляются *поля материи одного аромата*. Инстантонное поле (3.1) остается прежним. Можно найти, далее, решение уравнений для скалярного поля φ, $\mathscr{D}^2\varphi = 0$, в заданном внешнем векторном поле:

$$\varphi^\alpha_{\dot f} = \bar{\varphi}^\alpha_{\dot f} = x^\alpha_{\dot f}\frac{v}{\sqrt{x^2+\rho^2}}, \tag{3.15}$$

где α — цветовой, а $\dot f$ — ароматный значок, v — вакуумное ожидание поля φ (см. гл. 2).

Следует заметить, что поля (3.1), (3.15) не являются точными решениями классических уравнений, поскольку в уравнениях для векторного поля в присутствии скалярного поля возникает источник, который не учитывается. На больших расстояниях этот источник эквивалентен массе векторного поля и приводит к экспоненциальному падению поля A_μ. Соответственно, возникает добавка к инстантонному действию, которое теперь равно [26]

$$S_{\mathrm{bos}} = \frac{8\pi^2}{g^2} + 4\pi^2 v^2\rho^2. \tag{3.16}$$

Видно, что при $\rho \neq 0$ мы, строго говоря, не имеем дела с экстремалью действия. Тем не менее вклад инстантонов может быть важен — подробное обсуждение этого вопроса можно найти в оригинальных работах [20,26]. Нас будет интересовать обобщение на случай суперсимметрии.

Новизна ситуации со скалярным полем заключается в том, что поле (3.15) неинвариантно относительно сдвигов, генерируемых $(\overline{Q\varepsilon})$, что сразу видно, если проделать преобразование (2.2) координат. Нельзя поэтому отнести теперь $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ к стационарной подгруппе, но следует ввести новую коллективную координату $\bar{\theta}_0$.

Закон преобразований нового набора коллективных координат можно найти, как обычно, вводя оператор

$$\mathscr{V}\,(x_0,\ \rho,\ \theta_0,\ \bar{\theta}_0,\ \bar{\beta}) = e^{iPx_0}e^{-iQ\theta_0}e^{-i\bar{S}\bar{\beta}}e^{-i\bar{Q}\bar{\theta}_0}e^{iD\ln\rho}$$

и умножая его на $\exp(-i\overline{Q\varepsilon})$ или $\exp(-iQ\varepsilon)$. Не останавливаясь на деталях вычислений, укажем, что

$$\delta\bar{\theta}_0 = \bar{\varepsilon} - 4i\bar{\beta}(\bar{\theta}_0\bar{\varepsilon}), \tag{3.17}$$

а преобразования других коллективных координат были найдены ранее; см. (3.10).

Переходя, далее, к построению инвариантов, заметим, что помимо $\tilde{\theta}$, введенного в (3.11), просто преобразуется величина $\tilde{x}$, где

$$\tilde{x}_{\alpha\dot{\alpha}} = (x_L - x_0)_{\alpha\dot{\alpha}} + 4i\tilde{\theta}_\alpha(\bar{\theta}_0)_{\dot{\alpha}}.$$

Действительно,

$$\delta\tilde{x}_{\alpha\dot{\alpha}} = 4i\tilde{x}_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{\beta}^{\dot{\gamma}}\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}, \qquad \delta\tilde{x}^2 = -4i(\bar{\varepsilon}\bar{\beta})\tilde{x}^2. \tag{3.18}$$

Список суперинвариантов выглядит так:

$$\frac{\tilde{x}^2}{\rho^2}, \quad \frac{\tilde{\theta}_\alpha}{\rho^2}, \quad \rho^2[1 + 4i(\bar{\beta}\bar{\theta}_0)]. \tag{3.19}$$

Более точно, наше рассмотрение относится к *киральным* полям. Для антикиральных полей и для суперполей общего вида можно развить аналогичную технику.

Из формул (3.19) ясно, как ввести коллективные координаты в киральное суперполе. Если при $\theta_0 = \bar{\theta}_0 = \bar{\beta} = 0$ поле зависит от x_L и θ, то в общем случае следует сделать замену

$$\frac{(x_L - x_0)^2}{\rho^2} \to \frac{\tilde{x}^2}{\rho^2}, \qquad \frac{\theta_\alpha}{\rho^2} \to \frac{\tilde{\theta}_\alpha}{\rho^2}. \tag{3.20}$$

В частности, для квадрата суперполя $S^{\alpha f}$ этот рецепт приводит к выражению

$$(S^2)_{\rm inst} \equiv (S^{\alpha\dot{f}} S_{\alpha\dot{f}})_{\rm inst} = 2\,\frac{v^2\tilde{x}^2}{\tilde{x}^2 + \rho^2}, \tag{3.21}$$

где α — цветовой значок, $\dot{f}$ — значок глобальной SU (2).

Выражение (3.13) для W^2 остается прежним, поскольку отличие $x_L - x_0$ от $\tilde{x}$ в этом случае не играет роли из-за множителя $\tilde{\theta}^2$, эквивалентного для грассмановых чисел $\delta^2(\tilde{\theta})$.

Чтобы пояснить физический смысл $\bar{\theta}_0$, разложим (3.21) по $\bar{\theta}_0$ при $\theta_0 = \bar{\beta} = 0$, $x_0 = 0$ [20]:

$$(S^2)_{\rm inst} = 2v^2\left[\frac{x^2}{x^2+\rho^2} + 4i\theta^\alpha x_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}_0^{\dot{\alpha}}\frac{\rho^2}{(x^2+\rho^2)^2} - 8\,\frac{\rho^4\theta^2\bar{\theta}_0^2}{(x^2+\rho^2)^3}\right] \tag{3.22}$$

и, сравнивая с общим выражением

$$S^2 = \varphi^{\alpha f}\varphi_{\alpha\dot{f}} + 2\sqrt{2}(\theta\psi^{\alpha\dot{f}})\varphi_{\alpha\dot{f}} + [2\varphi_{\alpha\dot{f}}F^{\alpha\dot{f}} - (\psi^{\alpha f}\psi_{\alpha\dot{f}})]\theta^2$$

видим, что спинорное поле материи равно

$$\psi_\gamma^{\alpha\dot{f}} = 2\sqrt{2}\,iv(\bar{\theta}_0)^{\dot{f}}\delta_\gamma^\alpha\frac{\rho}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \tag{3.23}$$

(γ — лоренцев значок, α — индекс цвета, $\dot{f}$ — глобальной SU (2); $F^{\alpha\dot{f}} = 0$ по уравнениям движения).

Спинорное поле (3.23) совпадает, с точностью до множителя, с обычной фермионной нулевой модой [25]. Грассманов параметр $\bar{\theta}_0$, точнее, два параметра $\bar{\theta}_0^{\dot{1}}$, $\bar{\theta}_0^{\dot{2}}$ пропорциональны коэффициентам разложения по этим нулевым модам.

Таким образом, суперсимметрия придает геометрический смысл нулевой моде материи.

Теперь, когда коллективные координаты введены и построены суперинвариантные выражения для инстантонных суперполей, мы подходим к наиболее нетривиальному пункту моделей с материей, одному из ключевых пунктов развиваемого формализма — мере интегрирования по коллективным координатам. В чисто бозонном случае эта задача — мера интегрирования в теории со скалярными частицами и спонтанным нарушением калибровочной симметрии — была решена в пионерской работе [26]. В SU (2)-модели с двумя дублетами хиггсовых скаляров результат [26] пропорционален (в пределе Богомольного)

$$(\Lambda\rho)^b \frac{d\rho}{\rho^5} d^4x_0 e^{-4\pi^2 v^2 \rho^2}, \tag{3.24}$$

где b — первый коэффициент функции Гелл-Манна — Лоу, $v^2 = \langle \varphi_f^2 \rangle$, $f = 1, 2$. Экспонента $\exp(-4\pi^2 v^2 \rho^2)$ отражает тот факт, что уже в классическом приближении инстантонное действие зависит от одной из коллективных координат, ρ. Эта зависимость в свою очередь объясняется следующим: инстантон в присутствии скалярных полей с ненулевым v не является точной экстремалью, дает лишь приближенное решение классических уравнений, так что полное классическое действие медленно меняется как функция ρ. Иными словами, при интегрировании в функциональном пространстве мы пользуемся методом перевала по всем направлениям, вдоль которых действие меняется быстро, а динамику одного из направлений, от которого действие зависит слабо, изучаем въявь.

На первый взгляд кажется, что единственное изменение, вносимое в результат 'т Хоофта суперсимметризацией, сводится к добавлению дифференциалов фермионных коллективных координат, $d^2\theta_0\, d^2\bar{\theta}_0\, d^2\bar{\beta}$. Легко убедиться, однако, что при этом мера интегрирования оказывается неинвариантной относительно суперпреобразований. Точнее говоря, используя законы преобразований (3.10), (3.17), находим, что именно экспонента $\exp(-4\pi^2 v^2 \rho^2)$ портит суперинвариантность.

К счастью, эта неприятность ни в коей мере не указывает на неизлечимый порок формализма, а лишь выявляет ошибку в нашем наивном рассуждении. Дело в том, что в суперсимметричных теориях понятие радиуса обобщается и в инстантонные амплитуды входит величина, которую мы назвали инвариантным радиусом. В СКХД с одним ароматом

$$\rho_{\text{inv}}^2 = \rho^2\,[1 + 4i\,(\bar{\theta}_0\bar{\beta})] \tag{3.25}$$

(ср. с (3.19)). В терминах ρ_{inv}^2 мера интегрирования по коллективным координатам сводится к [20]

$$d\mu e^{-S} = \text{const}\cdot\frac{\Lambda^5}{v^2}\, d^4x_0 d^2\theta_0 d^2\bar{\theta}_0 d^2\bar{\beta}\, \frac{d\rho^2}{\rho^2}\, e^{-4\pi^2 v^2 \rho_{\text{inv}}^2}, \tag{3.26}$$

причем числовая константа, отличная от нуля, также в принципе легко вычислима. Различие между $\exp(-4\pi^2 v^2 \rho^2)$ и $\exp(-4\pi^2 v^2 \rho_{\text{inv}}^2)$ связано с тем фактом, что лагранжиан СКХД содержит юкавские вершины типа $g\bar{\varphi}\lambda\psi$. Если вместо λ и ψ подставить нулевые моды, глюино и материи, а вместо $\bar{\varphi}$ — решение (3.15), можно проверить, что соответствующий вклад в действие действительно собирается в ρ_{inv}^2. Дальнейшие подробности см. в [20].

Используя намеченные выше элементы инстантонного исчисления, не составляет труда вычислить въявь эффективный суперпотенциал, возникающий в СКХД с одним ароматом в одноинстантонном приближении. Задачу удобно сформулировать так: требуется найти энергию, связанную с инстантоном с центром (x_0, θ_0), который «живет» во внешнем поле $S^{\alpha f}(x_L, \theta)$.

Для постоянного внешнего поля, вообще не зависящего от x и θ, ($S^{\alpha f} S_{\alpha f} = 2v^2$), ответ фактически приведен в (3.26). Все, что надо сделать — обобщить его на случай слабопеременных внешних полей. Поскольку нас интересует низкоэнергетический предел, производными по x и θ от внешнего (супер) поля можно последовательно пренебречь. Тогда эффективный суперпотенциал, очевидно, будет зависеть только от $S^{\alpha f}(x_0, \theta_0)\, S_{\alpha f}(x_0, \theta_0)$, причем для того, чтобы найти эту зависимость, достаточно заменить

$$2v^2 \to S^{\alpha f}(x_0, \theta_0)\, S_{\alpha f}(x_0, \theta_0) \tag{3.27}$$

в формуле (3.26).

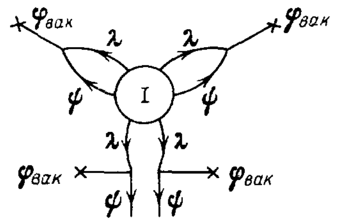

Рис. 3. Диаграмма для эффективного суперпотенциала, индуцированного инстантоном в SU(2)-модели с одним ароматом

Разлагая экспоненту в (3.26) по $(\bar\theta_0\bar\beta)$ и выполняя интегрирования по $d\rho^2$, $d^2\bar\theta_0$ и $d^2\bar\beta$, приходим к следующему эффективному действию:

$$A_{\text{eff}} = \text{const} \cdot \int d^4x_0 d^2\theta_0 \frac{\Lambda^5}{S^{\alpha f}(x_0, \theta_0)\, S_{\alpha f}(x_0, \theta_0)}. \tag{3.28}$$

Это же выражение было получено в гл. 2 из общих соображений. Сжатая диаграммная запись задачи об эффективном суперпотенциале приведена на рис. 3.

Некоторые другие примеры инстантонных вычислений как в этой простейшей модели, так и в более сложных случаях (например, СКХД с двумя ароматами) приведены в оригинальной работе [20].

4. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ SUSY

Мы надеемся, что знакомство с простейшим примером, суперсимметричной квантовой хромодинамикой, дало читателю общее представление о том, как происходит динамическое нарушение симметрии за счет инстантонов и возникает режим слабой связи. В модели, обсуждавшейся в гл. 2, спонтанно нарушается цветовая симметрия, а SUSY остается ненарушенной.

Это обстоятельство — выживание суперсимметрии — является следствием теоремы об индексе [24]. В теориях с отличным от нуля индексом Виттена (а в рассмотренной модели с калибровочной группой SU (2) и некиральной материей индекс Виттена равен двойке) спонтанное нарушение суперсимметрии невозможно.

Один из наиболее поразительных аспектов изучаемого явления — его универсальность. Почти в любой модели с материей есть классическое вырождение вакуума, долины, а вместе с ними возникает потенциальная возможность для дестабилизации «тривиального» вакуума, отвечающего нулевым значениям скалярных полей,— дестабилизации, запускаемой инстантонными эффектами.

Схемы, по которым могут развиваться большие вакуумные конденсаты, весьма разнообразны. Вводя те или иные мультиплеты материи в определенном наборе, мы реализуем конкретную схему из весьма богатого спектра динамических сценариев, включающего (как частные случаи) спонтанное нарушение цвета, обсуждавшееся в гл. 2, и спонтанное нарушение SUSY.

Систематическое изучение различных вариантов было предпринято в работе [19]. Мы перечислим здесь основные, наиболее типичные. ситуации, а затем остановимся на простейшей модели, в которой происходит спонтанное нарушение суперсимметрии в режиме слабой связи.

а) Каталог динамических сценариев

Прежде всего, опишем общую структуру суперсимметричных моделей, которым посвящен настоящий обзор. Калибровочный сектор включает глюоны и глюино, преобразующиеся по присоединенному представлению калибровочной группы G. В литературе были детально исследованы следующие группы:

$$G = \mathrm{SU}\,(N), \qquad G = \mathrm{SO}\,(N).$$

Анализировались также некоторые примеры с калибровочной группой в виде прямого произведения типа $G = \mathrm{SU}\,(N) \times \mathrm{SU}\,(M)$ или $G = \mathrm{SU}\,(N) \times \mathrm{U}\,(1)$.

Что касается устройства «материального» сектора, то, комбинируя мультиплеты материи в разных представлениях и в разном числе, можно получить большое количество вариантов, которые разбиваются на два принципиально разных класса: некиральная и киральная материя.

В первом случае всем полям материи можно приписать массовый член, не нарушая калибровочной симметрии (и SUSY). Суперсимметричная КХД относится к этому классу, и, как уже отмечалось, спонтанное нарушение SUSY в этих моделях не может иметь места.

Киральная материя — такая, для которой введение массового члена запрещено калибровочной инвариантностью. Индекс Виттена для киральной материи не был вычислен, так что возможность нулевого значения индекса была не исключена, и поиски спонтанного нарушения суперсимметрии следовало заранее ограничить этим классом моделей.

Отметим, что если некиральная материя допускает весьма широкий произвол в выборе мультиплетов полей, для киральной материи произвол значительно уже, поскольку существует весьма жесткое требование сокращения «внутренних» аксиальных аномалий в теории. Так, например, для калибровочной группы SU (5) теория безаномальна только в том случае, если материальный сектор содержит *равное число* пятерок и антидесяток киральных суперполей.

Следующий шаг после фиксации набора мультиплетов материи — исследование вопроса о долинах. Это исследование в свою очередь разбивается на несколько этапов, которые удобно сформулировать в виде алгоритма.

Первое. Рассматриваем классический лагранжиан с выключенными юкавскими и массовыми членами в суперпотенциале. (В моделях с некиральной материей суперпотенциал, вообще говоря, может содержать и те и другие, в моделях с киральной материей допустимы лишь юкавские члены.) Если пренебречь юкавскими и массовыми членами, в лагранжиане остаются лишь калибровочные взаимодействия

$$\int \mathrm{d}^2\theta W^2, \qquad \int \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\bar{\theta}\bar{S}e^{\mathbf{V}}S,$$

где S — обобщенное обозначение для суперполей материи.

Второе. Выписываем выражение для D-членов:

$$D^a = -\sum_f g^2\bar{\varphi}^f T^a \varphi^f; \tag{4.1}$$

здесь φ^f — скалярные поля, являющиеся нижними компонентами суперполей S^f, f — ароматный значок и суммирование в (4.1) идет по всем мультиплетам материи, T^a — генераторы калибровочной группы в соответствующем представлении. Далее, логически возможны два варианта.

Система уравнений $D^a = 0$ имеет лишь тривиальное решение при нулевых значениях всех скалярных полей. Иными словами, долины отсутствуют. Пример такой ситуации дает SU (5)-модель с одной пятеркой и одной антидесяткой материи [15]. В этом случае калибровочная симметрия остается ненарушенной, осуществляется режим сильной связи и вопрос о спонтанном (непертурбативном) нарушении SUSY может быть исследован только с помощью косвенных методов, которые не будут обсуждаться в настоящем обзоре. Заметим мимоходом, что аргументы работ [14,15] свидетельствуют в пользу спонтанного нарушения суперсимметрии в вышеупомянутой модели с одной пятеркой и одной (анти)десяткой.

Ниже мы сконцентрируемся на другом, более богатом варианте, который потенциально приводит к спонтанному нарушению цвета и режиму слабой связи. Предположим, что система уравнений $D^a = 0$ имеет нетривиальные решения в пространстве скалярных полей. Если изобразить энергию самодействия скалярных полей

$$V_{\text{пот}}=\frac{1}{2g^2}D^aD^a=\frac{1}{2}g^2\sum_a\Big(\sum_f\overline{\varphi}^fT^a\varphi^f\Big)^2 \tag{4.2}$$

в виде профиля, то образно можно представить в этом случае систему решений как сеть «ущелий» или «долин», дно которых в рассматриваемом приближении совершенно плоское и отвечает нулевому уровню, $V_{\text{пот}}=0$, а крутизна стенок определяется калибровочной константой связи g. (Фактически решения уравнений $D^a=0$ дают множество точек, лежащих на дне ущелий.) В простейшем примере СКХД с одним ароматом (см. гл. 2) ущелье протянулось прямой линией от начала координат $\varphi_1=\varphi_2=0$ на бесконечность; в более сложных моделях ущелья, стартуя из начала координат, извиваются и ветвятся, образуя разветвленную сетку, аналогичную той, которая существует в настоящих горных хребтах.

Общий метод решения уравнений $D^a=0$, насколько нам известно, не разработан. Некоторые способы, облегчающие нахождение долин в часто встречающихся случаях, описаны в работах [19,26]. Подчеркнем, что отыскание долин, особенно в моделях с киральной материей,— достаточно сложная техническая задача, а решения зачастую выглядят самым прихотливым образом.

Чтобы не быть голословными, воспроизведем здесь одно из семейства долин, которое мы нашли в SU (5)-модели с двумя пятерками $V^{(1)\alpha}$, $V^{(2)\alpha}$ и двумя (анти)десятками $X^{(1)}_{\alpha\beta}$, $X^{(2)}_{\alpha\beta}$ (эта модель обсуждалась в работах [15,19]).

Удобнее всего представить решение в полярной параметризации, тогда оно зависит от трех чисел — радиуса r и двух углов α, θ. В этой параметризации вакуумной долине отвечают следующие значения скалярных полей из пятерок и антидесяток:

$$V^{(1)}=\begin{bmatrix}a_1\\0\\0\\a_4\\0\end{bmatrix},\qquad V^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\a_2\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \tag{4.3а}$$

$$X^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0&s&0\\0&0&b&0&0\\0&-b&0&0&f\\-s&0&0&0&0\\0&0&-f&0&0\end{bmatrix}, \tag{4.3б}$$

$$X^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&d&0&0&g\\-d&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&h\\-g&0&0&-h&0\end{bmatrix}, \tag{4.3в}$$

где

$$a_1=r\cos\theta,\qquad a_4=r\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\theta,\qquad a_2=r\operatorname{tg}\theta\sqrt{\frac{\cos^2\theta-\cos^2\alpha}{\sin^2\theta+\cos^2\alpha}}, \tag{4.4а}$$

$$\left.\begin{aligned}
&s=\frac{r\cos\alpha}{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\alpha}},\\
&b=r\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\alpha},\\
&f=r\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\sqrt{\frac{\cos^2\theta-\cos^2\alpha}{\sin^2\theta+\cos^2\alpha}},\\
&d=\frac{r}{\cos\theta}\sqrt{\cos^2\theta-\cos^2\alpha},\\
&g=r\cos\alpha,\qquad h=r\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4б}$$

Изменяя r в интервале $(0, \infty)$ при фиксированных α и θ, пробегаем по дну долины, из начала координат в пространстве скалярных полей до бесконечности.

Третье. Любой точке на дне долины отвечает $V_{\text{пот}} = 0$. Таким образом, имеет место бесконечное вырождение вакуума (которое сохраняется также в любом порядке теории возмущений). Далее, стройная структура нашего каталога ломается, так как мы опять сталкиваемся с необходимостью изложить несколько альтернативных возможностей.

Эффективный суперпотенциал, снимающий вырождение энергии вакуума, может возникнуть либо не возникнуть в одноинстантонном приближении. Пример ситуации, когда вырождение не снимается и дно долины остается плоским,— калибровочная теория с расширенной ($N = 2$) суперсимметрией [28] либо СКХД с $N_f \geqslant N_c$ и строго безмассовыми кварками [16] (N_f — число ароматов, N_c — число цветов). В этом случае требуется дальнейший анализ, поскольку вакуумное состояние теории не определено однозначно. Фактически один и тот же лагранжиан описывает набор теорий, которые отличаются значениями конденсатов и совершенно разной физикой в разных фазах (например, фаза с ненарушенной калибровочной симметрией и конфайнментом и фаза с нарушенным цветом). Более подробное обсуждение можно найти в работе [28], здесь отметим только, что вне зависимости от того, какая из фаз реализуется, обязательным для таких моделей является строго безмассовый скалярный мезон (дилатон). По суперсимметрии это означает присутствие целого супермультиплета строго безмассовых частиц.

С точки зрения настоящего обзора более интересна другая ситуация — инстантон генерирует отличный от нуля суперпотенциал. Во всех моделях с инстантонным суперпотенциалом, разобранных в литературе, эффективный суперпотенциал приводит к выталкиванию теории из начала координат (см. рис. 1), что кажется естественным. Действительно, чем больше значение скалярного поля, тем более подавлен инстантонный вклад в энергию вакуума, и при стремлении $\langle\varphi\rangle$ к бесконечности вдоль дна долины инстантоны выключаются, а $E_{\text{вак}} \to 0$ *). Если не предпринимать дальнейших мер, то теория оказывается незащищенной по отношению к образованию бесконечно больших конденсатов, поскольку это выгодно энергетически. В этом варианте вакуумного состояния нет вообще.

Таким образом, возникает задача стабилизации теории на больших φ с помощью введения массовых или юкавских членов в суперпотенциал на классическом уровне. Иными словами, для того, чтобы в теории существовало истинное вакуумное состояние, необходимо запереть выходы из всех долин при больших значениях скалярных полей, приподняв их дно. В теориях с некиральной материей задача легко решается добавлением массовых членов (см. обсуждение СКХД с одним ароматом в гл. 2). В случае киральной материи у нас в распоряжении лишь юкавские члены. Если рассматривать только перенормируемые теории, набор юкавских членов (кубичных по суперполям материи) ограничен симметрийными соображениями, и стабилизация теории при больших значениях $\langle\varphi\rangle$ не всегда возможна.

В качестве примера упомянем SU (N)-модель (N — четное, $N \geqslant 6$), в которой имеется один супермультиплет материи, преобразующийся по цвету как антисимметричный тензор $X_{[ij]}$, и $N - 4$ супермультиплета в фундаментальном представлении, V^k [19]. Общий вид юкавского классического суперпотенциала таков:

$$W_{\text{кл}} = h^{(fg)} X_{[ij]} V^i_{(f)} V^j_{(g)}, \tag{4.5}$$

где $f, g = 1, 2, \ldots (N-4)$ — ароматные значки и матрица юкавских констант h удовлетворяет условиям $h^T = h$, $|h| \ll g$. Инстантон генерирует су-

*) В работе [19] показано, что при некоторых условиях инстантонный суперпотенциал мог бы, наоборот, приподнимать дно долин на больших φ, стремясь «скатить» теорию в начало координат. Однако модели, в которых подобный режим осуществляется для всех долин, пока неизвестны.

перпотенциал, выталкивающий из начала координат, а взаимодействие (4.5) не обеспечивает стабилизации по всем направлениям. В итоге эта модель, по-видимому, не имеет вакуумного состояния.

Наш каталог завершается самой интересной динамической схемой, в которой происходит спонтанное нарушение суперсимметрии в режиме слабой связи. Если в модели с киральной материей есть долины, если инстантон генерирует выталкивающий суперпотенциал, если теорию удается полностью стабилизовать юкавскими членами так, что убегание на $\langle\varphi\rangle = \infty$ невозможно — *если выполнены все эти «если»*, то *почти наверняка в такой модели будет иметь место динамическое нарушение SUSY*. Именно здесь, на этом пути, следует, по-видимому, сконцентрировать усилия для поисков реалистической теории кварков и лептонов, если, конечно, такая теория действительно построена на суперсимметрии. Исторически первой «игрушечной» моделью со спонтанным нарушением SUSY в (контролируемом) режиме слабой связи была SU (5)-модель с двумя пятерками и двумя антидесятками [15, 14].

Перечисленные выше условия являются необходимыми, но, вообще говоря, не остаточными.

В литературе известны [18, 19] два критерия, каждый из которых гарантирует спонтанное нарушение SUSY.

Критерий 1. Предположим, что юкавские члены в суперпотенциале, введенные для стабилизации при больших φ, не содержат какого-либо супермультиплета материи S (или некоторой линейно независимой комбинации супермультиплетов). В этом случае конденсат глюино является параметром порядка — отличное от нуля вакуумное среднее

$$\langle\lambda\lambda\rangle \neq 0$$

означает спонтанное нарушение суперсимметрии. Действительно, если супермультиплет S входит в лагранжиан лишь в виде $\bar{S}e^{V}S\,|_D$, то аномальное тождество Кониши [25] принимает вид

$$\bar{D}^2(\bar{S}e^{V}S) = (\text{числовая константа}) \times W^2, \tag{4.6}$$

где $\bar{D}$ — спинорная производная. Если так, то вакуумное ожидание W^2 эквивалентно вакуумному ожиданию оператора $\bar{D}^2\bar{S}e^{V}S$. С другой стороны, для ненарушенной суперсимметрии, очевидно, $\langle\bar{D}^2\bar{S}e^{V}S\rangle = 0$.

Критерий 2. Предположим, что рассматривается теория, в которой долины либо вообще отсутствуют либо «заперты» юкавскими или массовыми членами в суперпотенциале (так, что их дно приподнимается при увеличении скалярных полей). Если в такой теории спонтанно нарушается некоторая *точная непрерывная глобальная* симметрия (например, аксиальная), то SUSY также спонтанно нарушается.

Наметим в общих чертах доказательство [31], опустив некоторые тонкости. (Близкое рассуждение в частном случае расширенной ($N = 2$)-суперсимметрии содержится в работе [28].) При спонтанном нарушении непрерывной глобальной инвариантности возникает безмассовый голдстоуновский бозон, π. Пусть суперсимметрия теории не нарушена. Тогда π должен сопровождаться безмассовыми суперпартнерами, в частности, скалярной частицей со спином 0, σ. Поскольку поле π, будучи голдстоуновским, входит в лагранжиан с нулевым потенциалом $V_{\text{пот}}(\pi) = 0$, потенциал для поля σ также должен обращаться в нуль и, как следствие, вакуумное ожидание $\langle\sigma\rangle$ не фиксировано. Иными словами, поле σ выступает в роли дилатона, связывающего между собой различные вакуумы с одной и той же — нулевой — энергией *). Подобный вывод, однако, противоречит исходному предположению

*) Поле σ не может описывать голдстоуновский бозон, отвечающий спонтанному нарушению какой-либо другой глобальной симметрии, так как в этом случае значения $\langle\sigma\rangle$ должны были бы образовывать некоторое компактное многообразие. В [9] приведены аргументы, показывающие, что многообразие $\{\sigma\}$ — некомпактное!

Таблица

Динамические сценарии, реализуемые в некоторых моделях с материей, обсуждавшихся в литературе (N_c — число цветов, N_f — число ароматов, G — калибровочная группа, m — масса (супермультиплета материи), Λ — масштабный параметр, определяющий бег калибровочной константы связи)

1) Модель	СКХД	СКХД	СКХД	СКХД
Сектор материи	$m \equiv 0$	$N_f < N_c - 1$, $m_1 = m_2 = \ldots \ldots = m_{N_f} \ll \Lambda$	$N_f = N_c - 1$, $m_i \ll \Lambda$, $i = 1, \ldots, N_f$	$N_f > N_c - 1$, $m_1 = \ldots = m_{N_f}$
Схема	Нет вакуумного состояния	SU (N_c) нарушена до SU ($N_c - N_f$), SUSY не нарушена	Цветовая симметрия разрушена полностью (режим слабой связи), SUSY не нарушена	Инстантонный суперпотенциал не генерируется, цвет и SUSY не нарушены
2) Модель	СКХД	$G = $ SU (4)	$G = $ SU (N), N — четное, $N \geqslant 6$	$G = $ SU (5)
Сектор материи	$N_f > N_c - 1$, $m_1 \ll m_2 \ll \ldots \ldots \ll m_{N_f} \ll \Lambda$	Один антисимметричный тензор $X_{[ij]}$, $m \neq 0$	Один антисимметричный тензор $X_{[ij]}$ и $N-4$ (анти)мультиплета в фундаментальном представлении	Одна пятерка и одна антидесятка
Схема	Цветовая симметрия полностью разрушена (режим слабой связи), SUSY не нарушена	SU (4) = O (6) нарушена до Sp (4) = O (5), SUSY не нарушена	Нет вакуумного состояния	Цвет не нарушен (режим сильной связи), SUSY, по-видимому, нарушена
3) Модель	$G = $ SU (N), N — нечетное, $N \geqslant 7$	$G = $ SU (N)	$G = $ SU (5)	$G = $ SU (3) $\times$ SU(2)
Сектор материи	Один антисимметричный тензор $X_{[ij]}$ и $N-4$ (анти)мультиплета в фундаментальном представлении	Один симметричный тензор S_{ij} и $N+4$ (анти)мультиплета в фундаментальном представлении	Две пятерки, две антидесятки	u-, d-кварки, ν, e_L
Схема	Нет вакуумного состояния	Инстантонный суперпотенциал не генерируется, вакуумное вырождение не снимается	Цветовая симметрия разрушена (режим слабой связи), SUSY спонтанно нарушена	Цветовая симметрия полностью разрушена, SUSY спонтанно нарушена (раздел б) гл. 4)

об отсутствии абсолютно плоских направлений в лагранжиане. Единственная возможность избавиться от противоречия — заключить, что суперсимметрия спонтанно нарушена.

Отметим, что два критерия, приведенные выше, не являются вполне независимыми. Действительно, если некоторое суперполе не входит в классический суперпотенциал (см. критерий 1), то существует аксиальный ток — линейная комбинация тока материи S и R-тока, который строго сохраняется.

Далее, оператор $\lambda^{a\alpha}\lambda^a_\alpha$, очевидно, неинвариантен относительно преобразований, генерируемых этим током. Поэтому конденсация $\lambda\lambda$ автоматически означает спонтанное нарушение соответствующей аксиальной симметрии.

В заключение приведем таблицу (с. 703), где суммирована ситуация для ряда моделей, рассмотренных в литературе (см. [19], где также дан список более ранних работ). Следующий раздел является миниобзором *простейшей* модели, в которой происходит спонтанное нарушение суперсимметрии в режиме слабой связи.

б) Динамическое нарушение SUSY: SU(3)×SU(2)-модель [19]

Если задаться целью сконструировать модель с киральной материей и долинами, то ответ может быть подсказан схемой Глэшоу — Вайнберга — Салама. Поскольку здесь для нас существен лишь педагогический аспект, то мы, следуя [19], пойдем даже дальше и упростим эту схему: оставим лишь одно поколение материи, выключим гиперзаряд и выбросим $\bar{e}_L$-частицу, синглетную как по цвету, так и по слабому изоспину и взаимодействующую только с бозоном, калибрирующим гиперзаряд.

Действуя таким образом, мы фактически получаем СКХД с тремя цветами и двумя ароматами, u и d. Иными словами, сектор материи включает следующие киральные (левые) суперполя:

$$\{u^\alpha, d^\alpha\} \equiv Q^{\alpha f} \quad (\alpha = 1, 2, 3;\ f = 1, 2), \qquad \bar{u}_\alpha,\ \bar{d}_\alpha. \tag{4.7}$$

Далее, ароматное взаимодействие левых частиц (u^α, d^α) (но не античастиц $\bar{u}_\alpha$, $\bar{d}_\alpha$!) прокалибровано. Соответствующие калибровочные бозоны, W^+, W^-, W^0, и их суперпартнеры, очевидно, преобразуются по присоединенному представлению группы SU (2) слабого изоспина. Именно в этом месте входит асимметрия между правой и левой материей.

Наконец, поскольку нечетное число левых дублетов (u^α, d^α), $\alpha = 1, 2, 3$, в группе SU (2) запрещено аномалией [32], необходимо добавить еще один дублет киральных суперполей, лептонный:

$$L^f = \{\nu, e\}. \tag{4.8}$$

Всего получаем 14 левых вейлевских спинора плюс их суперпартнеры; пятнадцатый левый спинор, $\bar{e}_L$, как уже упоминалось, исключен из рассмотрения.

Легко проверить, что не существует массового члена, который был бы инвариантен относительно калибровочной группы $G = \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2)$. Если ограничиться классом перенормируемых теорий, то единственное допустимое взаимодействие, кроме (супер)калибровочного,— это юкавские члены в классическом суперпотенциале, которые можно выбрать в виде

$$W_{\text{кл}} = hQ^{\alpha f}\bar{d}_\alpha L^{f'}\varepsilon_{ff'} \qquad (f, f' = 1, 2), \tag{4.9}$$

где h — юкавская константа. Обратим внимание на то обстоятельство, что поле $\bar{u}_\alpha$ не фигурирует в $W_{\text{кл}}$; мы еще воспользуемся этим фактом позднее.

Так же, как и в обычной схеме Глэшоу — Вайнберга — Салама, положим, что калибровочная константа SU (3) (g_3) много больше калибровочной константы SU (2) (g_2), и, кроме того,

$$h \ll g_2 \ll g_3. \tag{4.10}$$

В пределе $h \to 0$ модель обладает долинами, нахождение которых не представляет никаких проблем. Именно, если

$$u^\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{d}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

$$L^f = \left(0, \sqrt{|a|^2 - |b|^2}\right),$$

где a и b — произвольные комплексные параметры, то все D-члены, как по SU(3), так и по SU (2), обращаются в нуль. Юкавский член (4.9) обеспечивает стабилизацию, приподнимая дно долин при $|a|$, $|b| \to \infty$.

При $a \neq 0$ и $b \neq 0$ вся калибровочная симметрия полностью разрушена, так что 11 ($=8+3$) киральных суперполей съедаются суперхиггсовским механизмом, давая массу всем одиннадцати векторным супермультиплетам, присутствующим в модели. Три легких киральных суперполя остаются в этом приближении ($h=0$) безмассовыми.

Включим теперь непертурбативные эффекты, причем учтем лишь инстантоны по калибровочной группе SU(3), пренебрегая в силу малости g_2 SU(2)-инстантонами. Для читателя, ознакомившегося с предыдущим материалом, видимо, не составит труда сразу же написать эффективный суперпотенциал, индуцированный инстантоном:

$$W_{\text{эфф. инст}} = \frac{2\Lambda_3^7}{\det\{\bar{Q}Q\}}, \tag{4.12}$$

где Λ_3 — масштабный фактор, определяющий g_3, фактор 2 введен для удобства и

$$\det\{\bar{Q}Q\} = (u^\alpha \bar{u}_\alpha d^\beta \bar{d}_\beta - u^\alpha \bar{d}_\alpha d^\beta \bar{u}_\beta). \tag{4.13}$$

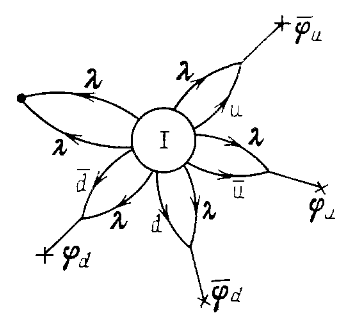

Рис. 4. Одноинстантонный вклад в конденсат глюино $\langle\lambda\lambda\rangle$ в SU(3) $\times$ SU(2)-модели с двумя ароматами.

SU(3)-инстантон содержит шесть нулевых мод глюино и четыре моды материи. Крестиками помечены вакуумные скалярные поля, которые определяются параметрами a и b. Жирная точка — оператор $\lambda\lambda$

Этот суперпотенциал «выгоняет» скалярное поле из начала координат (т. е. из области $a=0$ и/или $b=0$) и генерирует спонтанное нарушение калибровочной инвариантности и суперсимметрии. При условии (4.10) это нарушение происходит в режиме слабой связи.

Для доказательства нарушения SUSY можно воспользоваться критерием 1 (см. раздел а) гл. 4), поскольку $\bar{u}_\alpha$ не входит в $W_{\text{кл}}$. Рис. 4 демонстрирует, что в модели действительно возникает отличный от нуля конденсат $\langle\lambda\lambda\rangle$, где λ — восьмерка SU(3)-глюино.

Для получения более детальной информации нужно исследовать суперпотенциал ($W_{\text{кл}} + W_{\text{эфф.инст}}$). Процедура стандартная: сначала, комбинируя (4.12) и (4.9), находим все F-члены как функции скалярных полей; затем подставляем скалярные поля, лежащие на дне долин (см. (4.11)); затем минимизируем потенциал $V_{\text{пот}} = \Sigma\,|F|^2$ по a и b, фиксируя таким образом вакуумные значения скалярных полей и вакуумную энергию. В работе [19] получено

$$a_{\text{вак}} \approx 1{,}29\,\frac{\Lambda_3}{h^{1/7}}, \qquad b_{\text{вак}} \approx 1{,}25\,\frac{\Lambda_3}{h^{1/7}}, \qquad E_{\text{вак}} \approx 3{,}59 h^{10/7}\Lambda_3^4. \tag{4.14}$$

При $h \to 0$ параметры a и b, как и следовало ожидать, стремятся к бесконечности, что и оправдывает утверждение о режиме слабой связи (массы калибровочных бозонов $m \sim g\Lambda_3 h^{-1/7} \to \infty$).

Сектор легких частиц содержит голдстоуновский (строго безмассовый) фермион, «электрон», существование которого можно вывести из условия самосогласования 'т Хоофта [33] для аномального треугольника, индуцированного гиперзарядом. Он содержит также нейтральный фермион с массой $\approx 11{,}3 h^{6/7}\Lambda_3$. Среди бесспиновых бозонов имеется один строго безмассовый голдстоун, отвечающий спонтанному нарушению некоторой аксиальной инвариантности, один заряженный и три нейтральных скаляра с массами $h^{6/7}\Lambda_3$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопрос о динамическом нарушении суперсимметрии непертурбативными эффектами в четырхмерных калибровочных теориях был поставлен в работе [12]. Длительные поиски такой схемы наконец увенчались успехом. Дополнительным и весьма ценным подарком можно считать тот факт, что при спонтанном нарушении SUSY в теориях с материей, как правило, нарушается и калибровочная симметрия, так что возникает режим слабой связи, полностью контролируемый теоретически.

Теперь, когда принципиальная возможность явления доказана, на первый план выдвигаются поиски реалистической схемы, основанной на том механизме, который был описан нами выше. Первые шаги в этом направлении были предприняты в работах [14, 19]. Мы не обсуждаем в этом обзоре соответствующих результатов, отсылая читателя к оригинальной литературе, поскольку развитие в этом направлении носит явно незавершенный характер. Предложенные схемы не кажутся нам вполне удовлетворительными либо по эстетическим, либо по чисто феноменологическим причинам. В лучшем случае, они имеют статус «полуреалистических моделей», что, впрочем, признают и их авторы. Таким образом, основная работа — впереди, и итог ее неизвестен.

Вместе с тем сейчас вряд ли есть причины сомневаться в том, что инстантоны в суперсимметричных теориях — их анализ представляет собой чрезвычайно увлекательную теоретическую задачу — сыграют ключевую роль в решении практических проблем, стоящих перед исследователями этих моделей.

Авторы признательны И. Дремину, по чьей инициативе написан настоящий обзор.

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.— Письма ЖЭТФ, **1971**, т. 13, с. 452.
2. Volkov D. V., Akulov V. P.— Phys. Lett. Ser. B, **1973**, v. 46, p. 109.
3. Wess J., Zumino B.— Nucl. Phys. Ser. B, **1974**, v. 70, p. 39.
4. Огиевецкий В. И., Мезинческу Л.— УФН, **1975**, т. 117, с. 637.
5. Fayet P., Ferrara S.— Phys. Rept., **1977**, v. 32, p. 249.
6. Salam A., Strathdee J.— Fortschr. Phys., **1978**, Bd. 26, S. 57.
7. Bagger J., Wess J. Supersymmetry and Supergravity.— Princeton: University Press, 1983.
8. Gates S. J., Grisaru M. T., Roček M., Siegel W. Superspace, or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry.— Reading, MA: Benjamin/Cummings, 1983.
9. Высоцкий М. И.— УФН, **1985**, т. 146, с. 591 (в этом выпуске).
10. Haber H. E., Kane G. L.— Phys. Rept., **1985**, v. 117, p .75.
11. Nilles H. P.— Ibidem, **1984**, v. 110, p. 3.
12. Witten E.— Nucl. Phys. Ser. B, **1981**, v. 188, p. 513.
13. Grisaru M. J., Siegel W., Roček M.— Nucl. Phys. Ser. B, **1979**, v. 159, p. 429.
14. Affleck I., Dine M., Seiberg N.— Phys. Lett. Ser. B, **1984**, v. 137, p. 187; Phys. Rev. Lett., **1984**, v. 52, p. 1677.
15. Meurice Y., Veneziano G.— Phys. Lett. Ser. B, **1984**, v. 141, p. 69.
16. Affleck I., Dine M., Seiberg N.— Nucl. Phys. Ser. B, **1984**, v. 241, p. 493.
17. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.— Письма ЖЭТФ, **1984**, т. 39, с. 494.
18. Amati D., Rossi G. C., Veneziano C.— Nucl. Phys., Ser. B, **1985**, v. 249, p. 1.
19. Affleck I., Dine M., Seiberg N.— Phys. Lett. Ser. B, **1984**, v. 140, p. 59; Dynamical SUSY Breaking in Four Dimensions and Its Phenomenological Implications: Preprint.— Priceton, 1984.
20. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Preprint ITEP-31.— Moscow,' 1985. Nucl. Phys. (in press).

21. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 85.
22. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.— УФН, 1982, т. 136, с. 553.
23. Окунь Л. Б. Лептоны и кварки.— М.: Наука, 1981.
Волошин М. Б., Тер-Мартиросян К. А. Теория калибровочных взаимодействий.— М.: Энергоатомиздат, 1984.
24. Witten E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 202, p. 253.
25. Clark T. E., Piguet O., Sibold K.— Ibidem, 1979, v. 159, p. 1.
Konishi K.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 135, p. 439.
26. 't Hooft G.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 3432.
27. Buccella F., Derendinger J. P., Savoy C. A., Ferrara S.— Preprint CERN TH.3212.— Geneva, 1983.
28. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Vysotsky M. I.— Nucl. Phys. Ser. B, 1985, v. 254, p. 619.
29. Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. — Ibidem, 1983, v. 229, p. 407.
30. Rossi G. C., Veneziano G.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 138, p. 195.
31. Affleck I., Dine M., Seiberg N.— Ibidem, v. 137, p. 187.
32. Witten E.— Ibidem, 1982, v. 117, p. 324.
33. 't Hooft G.— In: Recent Development in Gauge Theories/Eds G. 't Hooft et al.— N.Y.: Plenum Press, 1980.