

ИЗ ТЕКУЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

539.12.01

СУПЕРСИММЕТРИЯ: ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ — КЛЕЙНА, АНОМАЛИИ, СУПЕРСТРУНЫ*И. Я. Арефьева, И. В. Волович*

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	655
1. Подход Калуцы — Клейна	656
а) Проблемы теорий большого объединения	656
б) Расширенные супергравитации в $(d = 4)$ -мерном пространстве-времени	657
в) Супергравитация в $(d > 4)$ -мерном пространстве-времени	657
г) Спонтанная компактификация: вакуумные решения	659
д) Механизмы спонтанной компактификации	661
е) Нулевые моды	662
ж) Космология — окно в высшие измерения	664
з) Спонтанная компактификация $(d = 11)$ -супергравитации	665
и) Спонтанная компактификация 10-мерных моделей	666
к) Стабильность вакуумных решений	667
2. Аномалии	668
а) Киральные аномалии в высших размерностях	669
б) Гравитационные аномалии	671
в) Сокращение аномалий	671
3. Суперструны	671
а) Свободные струны	673
б) Взаимодействующие струны	674
Заключение	676
Список литературы	677

ВВЕДЕНИЕ

Теория суперсимметрии ¹ является очередным шагом на пути реализации мечты теоретической физики о построении единой теории элементарных частиц *). Теория суперсимметрии не имеет пока подтвержденных на опыте экспериментальных эффектов, но она дала целый ряд замечательных «теоретических эффектов», среди которых такой принципиальный для квантовой теории поля ² результат, как построение 4-мерной модели без ультрафиолетовых расходимостей **).

Мы дадим ниже краткое описание некоторых недавних результатов по суперсимметрии, которые для удобства изложения разбили на разделы: подход Калуцы — Клейна, аномалии и суперструны. Следует, однако, иметь в виду, что наиболее интересные результаты получены на стыке разных областей, с привлечением разнообразных математических и физических идей, что наглядно демонстрирует стремление к единству и сложной простоте. Это отнесится в первую очередь к обсуждаемой ниже суперструне

*) В этой короткой статье при цитировании мы по большей части ограничиваемся ссылками на недавние публикации и обзоры, не касаясь истории вопроса.

**) Имеется в виду $(N = 4)$ -суперсимметричная теория Янга — Миллса (см. ³) и ее обобщения типа мягкого включения массы ⁴.

Грина и Шварца ^{5,6} с калибровочной группой $SO(32)$ или $E_8 \times E_8$ — одним из современных кандидатов на роль единой теории, объединяющей все известные взаимодействия — слабое, электромагнитное, сильное и гравитационное.

1. ПОДХОД КАЛУЦЫ — КЛЕЙНА

а) Проблемы теорий большого объединения

В последние годы в теории элементарных частиц возродилась фантастическая идея Калуцы ⁷ о том, что пространство-время имеет больше чем 4 измерения ⁸. Современное развитие этого подхода началось с работ Шерка и Шварца ⁹ и Креммера и Шерка ¹⁰ в связи со струнными дуальными моделями. Они предложили рассматривать дополнительные измерения как физические, равноправные с наблюдаемыми 4 измерениями. Очевидное различие между 4 наблюдаемыми и добавочными микроскопическими измерениями было предложено интерпретировать как спонтанное нарушение симметрии вакуума или, другими словами, как результат спонтанной компактификации дополнительных измерений.

Здесь мы дадим обзор основных идей, которые привели к заключению, что кандидата на роль реалистической единой теории нужно искать среди на первый взгляд странных моделей в пространстве-времени размерности больше 4, причем необходимо учитывать гравитацию.

Как известно, теории большого объединения ^{11, 12}, имеющие значительные успехи в объяснении свойств стандартной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -модели электрослабых и сильных взаимодействий, встречаются с рядом проблем.

1. Проблема иерархии взаимодействий, т. е. необходимость объяснить огромное различие в масштабах масс электрослабого взаимодействия $M_W \sim 10^2$ ГэВ и большого объединения, $M_X \sim 10^{15}$ ГэВ.

2. Не объясняется наличие трех поколений фермионов.

3. Проблема киральных фермионов, т. е. требуется объяснить, почему правые и левые фермионы входят в лагранжиан несимметрично.

4. Выбор калибровочной группы в значительной мере произволен.

5. Для описания хиггсовских бозонов требуется большое число параметров.

6. Теории большого объединения не включают гравитацию, хотя характерная масса в этих теориях $M_X \sim 10^{15}$ ГэВ не так уж далека от планковской массы $M_P \sim 10^{19}$ ГэВ.

Решение проблемы иерархии взаимодействий должно быть устойчивым относительно вычисления радиационных поправок. Это привело к использованию глобальной суперсимметрии ¹³ для обеспечения жесткого отношения M_W/M_X , поскольку в суперсимметричных моделях часть обычных для квантовой теории поля расхождений отсутствует, и это позволяет сделать отношение M_W/M_X постоянным. Для того чтобы получить реалистический спектр частиц в таком подходе, нужно иметь спонтанное нарушение суперсимметрии. Это оказалось возможным только при учете супергравитации ¹⁴, а именно, в теории, включающей $(N = 1)$ -супергравитацию, $(N = 1)$ -суперсимметричную теорию Янга — Миллса и некоторое число $N = 1$ скалярных киральных полей (последние призваны обеспечить нарушение калибровочной и суперсимметрии). Замечательно, что если раньше высказывалась надежда ^{15, 16}, что гравитация может быть важна в теории элементарных частиц, то сейчас выяснилось, что без гравитации фактически невозможно построить феноменологически удовлетворительную теорию. Однако и эта теория имеет свои проблемы: она не является перенормируемой, имеет много свободных параметров и не решает вышеперечисленные проблемы 2—5. Следовательно, такая теория не может быть фундаментальной и является только эффективной теорией. Если считать, что фундаментальной является полевая теория, то такая теория должна обладать более высокой симметрией,

чем $(N = 1)$ -супергравитация. Повысить симметрию можно двумя способами:

первый заключается в том, чтобы рассмотреть теории с расширенной N -суперсимметрией в $(d = 4)$ -мерном пространстве-времени¹⁷;

второй, восходящий к идее Калуцы — Клейна, заключается в том, чтобы рассматривать теории, в которых симметрией является группа локальных $(N = 1)$ -суперпреобразований d -мерного пространства¹⁸ ($d > 4$).

В первом случае, чтобы получить феноменологическую теорию, нужен механизм, нарушающий $(N > 1)$ -суперсимметрию до $(N = 1)$ -суперсимметрии, — спонтанное нарушение суперсимметрии, а во втором — механизм, нарушающий общекоординатную симметрию d -мерного пространства до симметрии пространства $M^4 \times B^{d-4}$. О втором механизме принято говорить как о механизме спонтанной компактификации. Однако трудности с перенормируемостью этих теорий заставляют и их (имеются в виду теории в размерности $d \leq 10$) в свою очередь рассматривать как эффективные, получающиеся из более фундаментальной — суперструны в 10-мерном пространстве-времени¹⁹. В теории суперструн, по-видимому, отсутствуют расходимости^{6, 19}. Возможно, и в расширенной супергравитации имеется скрытая симметрия, благодаря которой теория окажется перенормируемой^{20 *}).

б) Расширенные супергравитации в $(d = 4)$ -мерном пространстве-времени

В размерности $d = 4$ возможны N -расширенные супергравитации с $N = 1, \dots, 8$ (N указывает число суперзарядов теории). Ограничение на число N связано с тем, что для $N > 8$ возникают поля, соответствующие частицам со спином, большим 2, а последовательной теории таких полей, взаимодействующих с гравитацией, не существует¹¹⁸. Максимально симметричная модель супергравитации — $(N = 8)$ -супергравитация¹⁷. Известно несколько вариантов этой теории^{21, 22}, однако во всех этих теориях элементарные калибровочные поля преобразуются по группе, которая не может включать $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Следовательно, $(N = 8, d = 4)$ -супергравитация не может рассматриваться как реалистическая, если не апеллировать к идее использовать составные калибровочные поля^{17, 23}.

Попытки построить реалистическую теорию на основе N -супергравитации с $2 \leq N \leq 4$, взаимодействующей с полями материи, не привели к удовлетворительной модели, поскольку для них трудно обеспечить механизм, нарушающий суперсимметрию до $N = 1$.

Таким образом, реалистическая теория с расширенной суперсимметрией в 4-мерном пространстве-времени пока отсутствует. Более перспективными представляются теории в многомерном ($d > 4$) пространстве-времени. Основная идея здесь заключается в том, чтобы написать геометрическую модель при $d > 4$, из которой затем при помощи спонтанной компактификации получить более сложную реалистическую теорию для $d = 4$. Заметим, кстати, что 4-мерные теории с расширенной суперсимметрией были построены именно с помощью простейшей размерной редукции из многомерных теорий.

в) Супергравитация в $(d > 4)$ -мерном пространстве-времени

Максимальная размерность пространства-времени, при которой супергравитация может быть построена, равна 11¹²¹. Максимальное число $(N = 8)$ расширенных суперсимметрий в размерности $d = 4$ связано с мак-

*) Метод обратной задачи, скрытая симметрия и высшие законы сохранения в суперпространстве для похожей на супергравитацию $(N = 4)$ -суперсимметричной теории Янга — Миллса рассмотрены в^{110, 98, 20, 99, 117}. Суперсимметричная формулировка этой теории дана в¹⁰⁰. Геометрическая формулировка $(N = 1)$ -супергравитации дана в^{101, 102}.

симальной размерностью 11, поскольку при размерной редукции (см. ниже) 32-компонентные спиноры-генераторы простой суперсимметрии Q_A , $A = 1, \dots, 32$, в 11-мерной теории разбиваются на 8 групп ($N = 8$) 4-компонентных спиноров-генераторов расширенной суперсимметрии — $Q_{\alpha i}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, \dots, 8$, в четырехмерном пространстве. При $d = 11$ нет мультиплетов, содержащих поля только со спином J , $J \leq 1$ (мультиплетов полей материи) ^{11a}, и мы получаем в качестве унифицирующей единственно возможную теорию ¹⁸. Эта теория содержит 11-мерное поле реперов e_M^A (44 бозонные степени свободы), поле гравитино $\psi_{\mu\alpha}$ (128 фермионных степеней свободы) и антисимметричный тензор третьего ранга A_{MNC} (84 бозонные степени свободы).

Компонентное содержание моделей супергравитации, включая возможное взаимодействие с мультиплетами материи, в зависимости от размерности

Т а б л и ц а

	Состав мультиплетов	Бозонная часть лагранжиана
$d=11$, $N=1$	Гравитационный мультиплет (e_M^A , ψ_M , A_{MNP}); ψ_M — поле Рариты — Швингера, A_{MNP} — антисимметричный тензор, $M, N, P = 0, 1, \dots, 10$	$S = \int d^{11}x e \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{48} F_{MNPQ} F^{MNPQ} + \frac{2e}{6(4!)^2} e^{M_1 \dots M_{11}} \times \right. \\ \left. \times F_{M_1 M_2 M_3 M_4} F_{M_5 M_6 M_7 M_8} A_{M_9 M_{10} M_{11}} \right],$ $F_{MNPQ} = 4! \partial_{[M} A_{NPQ]}$
$d=10$, $N=1$	Гравитационный мультиплет (e_M^A , ψ_M , B_{MP} , λ , φ); векторный мультиплет (A_M , ψ); ψ_M — поле Рариты — Швингера, B_{MP} — антисимметричный тензор, λ — поле Дирака, φ — скаляр, A_M — поле Янга — Миллса, $M, N, P = 0, 1, \dots, 9$	$S = \int d^{10}x e \left(\frac{1}{2} R - \nabla_M \varphi \nabla^M \varphi - \frac{e^{-\varphi}}{4g^2} F_{MN}^a F^{aMN} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2g^4} e^{-2\varphi} H_{MNC} H^{MNC} \right);$ $H_{MNC} = \partial_{[M} B_{NL]} + \text{tr} \left(A_{[M} F_{NL]} - \frac{1}{3} A_{[M} A_N A_{L]} \right)$
$d=6$, $N=2$	Гравитационный мультиплет (e_M^A , ψ_M , B_{MP}^+); антисимметричный тензорный мультиплет (B_{MP}^- , χ , φ); калибровочный мультиплет (A_M , λ); гипермультиплет (ψ^Δ , ϕ^i); $B^+(-)$ — авто(анти)дуальная напряженность, ψ_M и λ — левые фермионы, χ — правые, ϕ^i — скаляры, параметризующие $HP(n-1, 1)$, φ — скаляр, ψ^Δ — $\text{Sp}(n)$ -спиноры, $M, P = 0, 1, \dots, 5$; $a = 1, \dots, n(2n+1)$ — изотопический индекс, $i = 1, \dots, 4n$, $\Delta = 1, \dots, 2n$	$S = \int d^6x e \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} \nabla_M \varphi \nabla^M \varphi - \frac{e^{2\varphi}}{6g^4} H_{MNC} H^{MNC} - \frac{e^\varphi}{4g^2} F_{MN}^a F^{aMN} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} G_{ij} D_M \varphi^i D^M \varphi^j - e^{-\varphi} V(\varphi^i) \right];$ G_{ij} — калерова метрика
Гравитационная постоянная κ равна 1; g — янг-миллсовская постоянная, e_M^A — поле реперов, F_{MN} — янг-миллсовская напряженность, H_{MNC} — напряженность поля B_{MP} с точностью до членов Черна — Саймонса калибровочного поля A_M , $e = \sqrt{\det g_{MN} }$.		

пространства-времени приведено в таблице, причем приведены только наиболее реалистические кандидаты на роль унифицирующей теории. Мультиплеты полей материи существуют только при $d \leq 10$ ¹¹⁹. В 10-мерном случае единственно возможным является $(N = 1)$ -янг-милловский мультиплет¹²⁰. Этот мультиплет содержит только поля спина $1/2$ и калибровочные поля и не содержит скалярных полей. При $d = 10$ имеются три теории супергравитации: $(N = 1)$ -супергравитация²⁴, $(N = 2)$ -супергравитация²⁵ и $(N = 2)$ -киральная супергравитация²⁶. $(N = 1, d = 10)$ -супергравитация взаимодействует с мультиплетом, содержащим калибровочные поля (см. таблицу), причем единственной независимой постоянной является гравитационная постоянная¹¹¹.

$(N = 2, d = 6)$ -теория содержит несколько мультиплетов — гравитационный мультиплет, антисимметричный тензорный мультиплет, калибровочный мультиплет и гипермультиплет. В состав гипермультиплета входят скалярные поля ϕ^i , на которые наложены дополнительные ограничения — они являются параметрами некомпактного кватернионного кэлерова многообразия $HP(n-1, n)$ (число n связано с размерностью калибровочной группы).

Изучение физических свойств этих теорий основано на механизме спонтанной компактификации.

г) Спонтанная компактификация: вакуумные решения

Механизм спонтанной компактификации в теориях типа Калуцы — Клейна заключается в следующем⁸⁻¹⁰. В d -мерном пространстве-времени рассматриваются уравнения, описывающие гравитационное поле, возможно, взаимодействующее с полями материи. Ищется решение специального вида (вакуумное решение) этих уравнений, отвечающее представлению d -мерного многообразия в виде $M^d = M^4 \times B^{d-4}$, где M^4 — четырехмерное пространство-время (желательно — пространство Минковского, но часто рассматривают и пространство анти-де Ситтера) и B^{d-4} — компактное «внутреннее» пространство. Вакуумная метрика $\dot{g}_{MN}$ имеет блочный вид:

$$\dot{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{mn}(y) \end{pmatrix};$$

здесь x^μ — координаты на M^4 и y^m — координаты на B^{d-4} . В качестве M^4 и B^{d-4} обычно рассматриваются пространства Эйнштейна²⁹ (т. е. тензор Риччи пропорционален метрике). Естественно предположить, что вакуумное решение должно быть в некотором смысле стабильным и обладать симметрией. Затем выполняется разложение всех полей, обозначим их $\Phi(x, y)$, по гармоникам (собственным функциям оператора массы M^2) на B^{d-4} :

$$\Phi(x, y) = \sum_k \varphi_k(x) \chi_k(y), \quad M^2 \chi_k(y) = m_k^2 \chi_k(y);$$

коэффициенты разложения $\varphi_k(x)$ интерпретируются как физические поля. Оператор массы задается некоторым дифференциальным оператором на B^{d-4} , определяемым разложением действия до второго порядка по флуктуациям относительно вакуумного решения. Уравнения для эффективной 4-мерной теории получаются при помощи интегрирования по y и описывают бесконечный набор массивных состояний с массами порядка $1/L$, где L — характерная длина B^{d-4} , и конечный набор безмассовых состояний — нулевых мод. Если взять L порядка планковской длины, то получаются массивные состояния с чрезвычайно большой планковской массой далеко за пределами экспериментальных возможностей*). Наблюдаемыми в этом подходе являются

*) Более точно: если $-\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, — собственные значения оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле или Неймана на n -мерном компактном римановом многообразии объема v , то имеет место оценка $\lambda_k \geq c_n (k/v)^{2/n}$ при всех k ¹²⁷.

только безмассовые частицы. Таким образом, дополнительные измерения проявляются при низких энергиях только в специальном, в зависимости от модели, виде взаимодействий безмассовых частиц.

Уравнения движения гравитационного поля в d -мерном пространстве имеют вид

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = T_{MN} - \Lambda g_{MN}, \quad (1.1)$$

где T_{MN} — тензор энергии-импульса полей материи, Λ — лямбда-член. При $\Lambda = 0$ вакууму с $T_{MN} = 0$ соответствует компактификация $M^d = M^r \times B^{d-r}$, где M^r — пространство Минковского, B — риччи-плоское компактное пространство. В качестве B можно взять $(d-r)$ -мерный тор T^{d-r} . Однако в такой теории имеются только абелевы калибровочные поля (см. ниже), и желательно иметь более нетривиальную компактификацию за счет того, что в вакууме тензор T_{MN} отличен от нуля.

Блочное представление метрики g_{MN} совместно с уравнениями, если предположить, что

$$T_{\mu\nu} = -\gamma_1 g_{\mu\nu}(x), \quad T_{mn} = \gamma_2 g_{mn}(y). \quad (1.2)$$

Из (1.1), (1.2) следует, что $M^d = M^4 \times B^{d-4}$, где M^4 и B^{d-4} — пространства Эйнштейна, т. е.

$$R_{\mu\nu} = -\frac{(d-4)(\gamma_1 + \gamma_2) - 2(\gamma_1 + \Lambda)}{d-2} g_{\mu\nu}, \quad (1.3a)$$

$$R_{mn} = \frac{4\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\Lambda}{d-2} g_{mn}. \quad (1.3b)$$

Вакуумные решения для полей могут быть двух типов:

1. Решения, не нарушающие максимальной симметрии 4-мерного пространства-времени, т. е. отличны от нуля компоненты векторных и тензорных полей только во внутреннем пространстве (для тензора 4-го ранга остается возможность быть пропорциональным $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ — полностью антисимметричному тензору 4-го ранга).

2. Решения, допускающие нарушение максимальной симметрии 4-мерного пространства, так называемые космологические решения.

Если рассматривается взаимодействие гравитации с векторными, тензорными и скалярными полями без потенциального члена, т. е. слагаемого в T_{MN} , пропорционального $g_{MN}V(\varphi)$, то в первом случае оказывается, что $\gamma_2 = \tilde{\gamma}_1 - \gamma_1$, где $\tilde{\gamma}_1$ — постоянная того же порядка, но в несколько раз большая, чем γ_1 . В силу положительности энергии, $T_{00} > 0$, постоянная γ_1 положительна. При этом из (1.3) следует, что если $\Lambda = 0$, то M^4 является пространством анти-де Ситтера (adS^4), а B^{d-4} — компактное пространство, и получить в качестве вакуумного решения плоское четырехмерное пространство с $T_{MN} \neq 0$ невозможно. Если же в T_{MN} входит потенциальное скалярное слагаемое, то решение $\varphi = \text{const}$ эквивалентно введению Λ -члена и плоское пространство M^4 возможно при неплоском пространстве B^{d-4} , как это и происходит в $(d=6, N=2)$ -теории.

Существуют следующие возможности построить без эффективного Λ -члена решение, соответствующее пространству Минковского M^4 и имеющее $T_{MN} \neq 0$.

Учесть члены с высшими производными^{32, 33}, радиационные поправки⁸⁶ или духовые поля^{30 *}, которые появляются для гипермультиплетов, содержащих некомпактные пространства³⁴.

Принять гипотезу³¹ о существовании нескольких временных измерений, т. е. использовать, например, сигнатуру $(-++++ \dots +)$ ³⁰.

*) При спонтанной редукции теории с духовыми полями появляются компактные пространства отрицательной кривизны³⁰.

д) Механизмы спонтанной компактификации

Основная задача при построении компактификации $M^d = M^4 \times B^{d-4}$ состоит в том, чтобы найти решения классических полевых уравнений, тензор энергии-импульса которых удовлетворяет условиям (1.3а), (1.3б). Будем рассматривать вакуумные решения, в которых только бозонные поля отличны от нуля, т. е. нужно найти решение уравнений, следующих из лагранжианов, приведенных в таблице, совместные с расщеплением (1.3а), (1.3б).

Известны следующие механизмы спонтанной компактификации:

- 1) механизм, предложенный Фройндом и Рубином³⁵, использующий специальный анзац для антисимметричных тензоров, а также механизм Энглерта³⁶;
- 2) погружение связности для группы внутренних симметрий в лоренцеву связность^{37, 50};
- 3) монополярный или инстантонный механизм³⁸;
- 4) компактификация за счет скалярных киральных полей^{39, 40};
- 5) компактификация за счет радиационных поправок⁸⁶.

Механизм Фройнда — Рубина

Этот механизм обычно применяется в $(N = 1, d = 11)$ -супергравитации. Решения уравнений движения для бозонных полей — уравнений Эйнштейна с $T_{MN} = F_{MKPL}F_N^{KPL} - \frac{1}{8}g_{MN}F^2$ и уравнения для антисимметричного тензорного поля

$$\nabla_M F^{MNPQ} = -\frac{1}{e(x)} \varepsilon^{M_1 \dots M_8 N P Q} F_{M_1 \dots M_4} F_{M_5 \dots M_8}, \quad (1.4)$$

совместные с блочным видом g_{MN} , ищутся в виде

$$F_{\mu\nu\rho\lambda} = e(x) f \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}; \quad (1.5)$$

f — постоянная, остальные компоненты F_{MNPQ} равны нулю. Для $R_{\mu\nu}$ и R_{mn} получаются уравнения (1.3а), (1.3б).

Механизм Энглерта

Имеются и более сложные решения уравнения (1.4), приводящие к тензору энергии-импульса вида (1.2). Для решений типа Энглерта³⁶ тензор F_{MNPQ} имеет также неисчезающие компоненты во внутреннем пространстве. Решение типа Энглерта впервые было построено на сфере S^7 с кручением. Оно может быть построено^{83, 84} на любом пространстве Эйнштейна B^7 , на котором метрика удовлетворяет уравнению $R_{mn} = 6\lambda^2 g_{mn}$ и которое допускает по крайней мере один спинор Киллинга, удовлетворяющий уравнению $[\nabla_m - (\lambda/2)\gamma_m]\eta = 0$. Тогда решение дается следующим анзацем:

$$F_{\mu\nu\lambda\sigma} = -2\lambda e(x) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}, \quad F_{mnkl} = -\lambda \bar{\eta} \Gamma_{mnkl} \eta;$$

при этом $R_{\mu\nu} = -10\lambda^2 g_{\mu\nu}$, γ_m — матрицы Дирака, $\Gamma_{mnkl} = \gamma_{[m} \gamma_n \gamma_k \gamma_{l]}$.

Механизм погружения янг-миллсовской связности в лоренцеву связность

Этот механизм^{37, 50} основан на том, что по заданной метрике на однородном римановом пространстве можно построить янг-миллсовскую связность, удовлетворяющую условию параллелизуемости

$$D_P F^{MN} = 0; \quad (1.6)$$

D — янг-миллсовская производная.

Для случая, когда в качестве пространства B^{d-4} рассматривается сфера S^{d-4} и если калибровочная группа имеет в качестве подгруппы группу $O(d-3)$, напряженность калибровочного поля, удовлетворяющая (1.6) и тождествам Бианки, имеет вид

$$F_{mn}^{ab} = r (e_m^a e_n^b - e_m^b e_n^a); \quad (1.7)$$

r — радиус сферы, e_m^a — поле реперов. Формулы для F_{mn}^{ab} в случае, когда B^{d-4} является однородным пространством G/H , можно найти в ³⁷.

Монополярный механизм

В частном случае абелевой калибровочной группы монополярный механизм совпадает с механизмом Фройнда — Рубина, при котором отличен от нуля антисимметричный тензор 2-го ранга — напряженность электромагнитного поля $F_{mn} = se(y) \epsilon_{mn}$, ϵ_{mn} — полностью антисимметричный тензор 2-го ранга. Такой механизм компактификации используется в $(d=6, N=2)$ -супергравитации ²⁸.

Компактификация при помощи киральных полей

Уравнения имеют вид

$$R_{MN} = \frac{2}{\lambda^2} h_{mn}(\phi) \partial_M \phi^m \partial_N \phi^n, \\ \frac{2}{e} \partial_M (e g^{MN} h_{mn} \partial_N \phi^n) = g^{MN} \frac{\partial h_{pq}}{\partial \phi^m} \partial_M \phi^p \partial_N \phi^q.$$

Используется ³⁹ следующий анзац: $\phi^m(x, y) = y^m$, $g_{mn} = -(2/\lambda^2) h_{mn}$; $g_{\mu\nu}$ — метрика Минковского; здесь h_{mn} — метрика постоянной положительной кривизны.

Гелл-Манн и Цвибакх ⁴⁰ рассмотрели также случай, когда h_{mn} — метрика постоянной отрицательной кривизны. В этом случае они построили спонтанную размерную редукцию на некомпактную поверхность конечной площади.

е) Нулевые моды

1) Калибровочные поля

Выше при обсуждении вакуумных решений было отмечено, что наблюдаемыми в области низких энергий в теории Калуцы — Клейна являются только безмассовые состояния (нулевые моды оператора массы, т. е. операторов Бельтрами — Лапласа, Дирака и Лихнеровича). Для того чтобы получить эффективную низкоэнергетическую теорию для безмассовых калибровочных полей, применяется следующий стандартный «анзац Калуцы — Клейна»:

$$g_{\mu\nu} = \dot{g}_{\mu\nu}(x) + A_\mu^\alpha(x) A_\nu^\beta(x) K^{m\alpha}(y) K^{n\beta}(y) \dot{g}_{mn}(y), \\ g_{\mu n} = A_\mu^\alpha(x) K^{m\alpha}(y) \dot{g}_{mn}(y), \quad g_{mn} = \dot{g}_{mn}(y); \quad (1.8)$$

здесь $(\dot{g}_{\mu\nu}(x), \dot{g}_{mn}(y))$ — вакуумное решение на $M^4 \times B^{d-4}$. Предполагается, что B имеет группу изометрий G с векторами Киллинга $K^{m\alpha}(y)$; α пробегает количество значений, равное размерности группы G . При инфинитезимальных преобразованиях координат $y^m \rightarrow y^m + \varepsilon^\alpha(x) K^{m\alpha}(y)$ величины $A_\mu^\alpha(x)$ преобразуются как калибровочные поля:

$$A_\mu^\alpha \rightarrow A_\mu^\alpha + (D_\mu \varepsilon)^\alpha.$$

Таким образом, поля Янга — Миллса с калибровочной группой G в теории Калуцы — Клейна возникают как компоненты метрики. В рамках чистой многомерной гравитации метрика вида (1.8), вообще говоря, не удовлетворяет уравнениям движения ⁴¹, а для полей A_μ^α не получается ^{8, 43} стандартный лагранжиан Янга — Миллса. Важными исключениями являются компактификация на тор (в этом случае группа G абелева), а также случай $B = H$, где H — компактная полупростая группа Ли. Тогда левинвариантные векторные поля являются векторами Киллинга $K^{m\alpha'}$ для бивариантной метрики на H и выполняется соотношение (Киллинга — Картана)

$$K_m^{\alpha'} K^{m\beta'} = \delta^{\alpha'\beta'}.$$

В этом случае анзац (1.8) удовлетворяет уравнениям движения. То же справедливо и для случая, когда B — однородное пространство. В обоих случаях калибровочная группа редуцируется к некоторой подгруппе группы G . Согласованность анзаца (1.3) с уравнениями движения может потребовать также включения скалярных полей (как в первоначальной работе Калуцы). При наличии полей материи анзац (1.8) может быть согласован с уравнениями движения (как, например, в 11-мерной супергравитации ⁴¹), но для каждой конкретной модели требуется отдельный анализ.

2) Скалярные поля

Скалярные поля играют очень значительную роль в современных калибровочных теориях поля ¹², поскольку они обеспечивают механизм Хиггса спонтанного нарушения симметрии и для описания скалярных полей требуется большое число параметров. Поэтому геометрическая интерпретация скалярных полей приобретает важное значение. Скалярные поля как компоненты метрики появляются в теориях Калуцы — Клейна ^{7, 8, 42}, однако результаты сильно зависят от модели и их взаимодействие при этом описывается экзотическими лагранжианами, имеющими мало общего со стандартным лагранжианом Янга — Миллса — Хиггса.

В работе ⁴³ было предложено рассматривать теории Калуцы — Клейна с динамическим кручением и интерпретировать определенные компоненты кручения как скалярные поля. Если задана линейная связность Γ_{MN}^P , то тензор кручения определяется как $T_{MN}^P = \Gamma_{MN}^P - \Gamma_{NM}^P$. Будем считать, что кручение в плоском пространстве Минковского отсутствует, и положим $T_{\mu m}^\nu = \delta_\mu^\nu \Phi_m(x)$. Тогда для скалярных полей Φ_m (они преобразуются по некоторой калибровочной группе) получается лагранжиан Янга — Миллса — Хиггса.

Отметим, что кручение появляется также в подходе Вайнберга ⁴⁴ к теории Калуцы — Клейна и в 11-мерной супергравитации ^{36, 45}.

3) Фермионные поля

Безмассовый фермион со спином 1/2 описывается в теории Калуцы — Клейна уравнением Дирака в d -мерном пространстве:

$$\gamma^M \nabla_M \psi = 0,$$

или

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \psi = -\gamma^m \nabla_m \psi; \quad (1.9)$$

здесь ∇_M — ковариантная производная, $\gamma^\mu \nabla_\mu$ — обычный 4-мерный оператор Дирака, а $\gamma^m \nabla_m$ — оператор Дирака в пространстве B . Из (1.9) видно,

что собственные значения оператора $\gamma^m \nabla_m$ будут играть роль массы для 4-мерной теории. В частности, низкоэнергетическими наблюдаемыми будут нулевые моды $\gamma^m \nabla_m$, соответствующие кваркам и лептонам⁴⁶. Число нулевых мод (т. е. число кварков и лептонов) зависит от геометрии многообразия B . Например, на многообразиях положительной кривизны, которые часто возникают при компактификации, нулевые моды у оператора Дирака вообще отсутствуют (теорема Лихнеровича⁴⁷). К счастью, в теориях супергравитации есть еще поля Рариты — Швингера со спином 3/2, некоторые компоненты которых проявляются в 4-мерном пространстве-времени как поля со спином 1/2. Оператор Рариты — Швингера может иметь нулевые моды и на многообразиях положительной кривизны.

Однако в теориях Калуцы — Клейна с фермионами возникает следующая основная проблема^{46, 48}. Как известно, наблюдаемые правые и левые фермионы преобразуются по различным (комплексным) представлениям калибровочной группы. Однако получить эту асимметрию при помощи многомерной гравитации не удастся. Имеется теорема Атьи и Хирцебруха^{49, 50}, что для любой непрерывной группы симметрии нулевые моды оператора Дирака образуют вещественное представление. Виттен⁵⁰ показал, что то же верно для оператора Рариты — Швингера на компактных однородных многообразиях.

Предлагались два способа решения этой проблемы киральных фермионов. Первый способ — введение дополнительных калибровочных полей^{50, 51} (помимо тех, которые появляются как компоненты метрики). Такие поля всегда существуют в теории суперструны¹⁹. При наличии нетривиальной конфигурации этих полей во внутреннем пространстве решение проблемы киральных фермионов возможно^{50, 51}. Другой способ — рассмотрение некомпактных внутренних пространств конечного объема⁵². Этот способ, возможно, окажется полезным в 11-мерной супергравитации⁵³.

С проблемой киральных фермионов связана проблема аномалий (см. ниже).

В настоящее время большинство примеров спонтанной компактификации детально разработано для случая, когда пространство M^d представляется в виде прямого произведения $M^d = M^4 \times B^{d-4}$, т. е. является тривиальным расслоением над M^4 . В более общем случае при спонтанной компактификации возможно появление на M^d структуры нетривиального расслоения с базой M^4 . Такой модельный пример рассмотрен в¹²³.

Для получения 4-мерной теории из многомерной, помимо метода спонтанной компактификации, используется метод размерной редукции⁶¹. При этом на метрику на $M^4 \times G/H$ вместо требования, чтобы она удовлетворяла уравнениям движения, накладывается условие G -инвариантности. Такая метрика описывается в терминах полей на M^4 .

ж) К о с м о л о г и я — о к н о в в ы с ш и е и з м е р е н и я⁵⁴

При высоких температурах спонтанно нарушенная симметрия восстанавливается⁵⁵. Поэтому с точки зрения идеи о спонтанной компактификации в экстремальных условиях раннего этапа развития Вселенной пространство-время имеет свои «истинные» 10 (или 11) измерений. Затем происходит компактификация в принципе во все возможные вакуумные решения. В результате могут образовываться «острова», в которых пространство-время может иметь разную топологию¹²², разную размерность⁵⁶ и разную сигнатуру^{31, 30*}). Не исключено, что могут быть туннельные переходы и образование пузырьков (ср.⁵⁷) одного вакуума в другом вакууме.

*) Заметим здесь, что наличие добавочных пространственно-временных измерений в подходе Калуцы — Клейна, куда можно поместить хотя бы мысленно наблюдателя, по-видимому, открывает возможность для новой интерпретации квантовой теории, отличной от копенгагенской интерпретации и от интерпретации Эверетта¹²⁴.

Процесс раздувания Вселенной может быть связан с коллапсом внутренних измерений⁵⁸.

В принципе, возможна экспериментальная проверка теории Калуцы — Клейна, поскольку в этом подходе постоянная тонкой структуры и гравитационная постоянная изменяются со временем⁵⁹.

Поскольку в теории суперструн отсутствуют расходимости⁶, то эта теория, возможно, поможет пролить свет на природу космологической сингулярности. В работе⁶⁰ высказано предположение, что фазе большого взрыва (точнее — вместо нее) предшествовала струнная нелокальная фаза с $d = 10$, затем наступила спонтанная компактификация и фаза локализации (т. е. струны превратились в обычные частицы), после чего началось расширение.

з) Спонтанная компактификация ($d = 11$)-супергравитации

Здесь будут описаны вакуумные решения 11-мерной супергравитации. В принципе, следует рассматривать все вакуумные решения, так как возможны туннельные переходы и различные решения могут реализоваться в различных островах Вселенной.

Простейшая компактификация получается, когда M^4 — пространство Минковского, а $B^7 = T^7$ — семимерный тор. Безмассовый сектор дает ($d = 4$, $N = 8$)-теорию Крэммера и Джулии¹⁷, которая имеет (глобальную E_7) $\times$ (скрытую локальную $SU(8)$)-симметрию (скрытая калибровочная симметрия реализуется на составных калибровочных полях, образованных из скаляров и их производных).

Другое решение с ($N = 8$)-суперсимметрией⁶² имеет вид $M^{11} = adS^4 \times S^7$, где adS^4 — пространство анти-де Ситтера и $S^7 = SO(8)/SO(7)$ — 7-мерная сфера со стандартной метрикой. Эта теория имеет (локальную $SO(8)$) $\times$ (скрытую локальную $SO(8)$)-симметрию. Других решений с ($N = 8$)-суперсимметрией нет⁶³. Оказывается, что $SO(3,2)$ (симметрия анти-де Ситтера)-бозонная симметрия совместно с ($N = 8$)-фермионной симметрией расширяется до суперсимметрии $OSp(4|8)$ ⁶⁴. Безмассовый сектор в линейном приближении⁶⁵ дается ($d = 4$, $N = 8$)-калибровочной супергравитацией де Вита и Николаи²¹, которая была получена из теории¹⁷ введением калибровочных полей для $SO(8)$ -подгруппы E_7 . Однако в нелинейной теории это совпадение, возможно, отсутствует⁶⁶. Существуют еще другие²² калибровочные версии ($d = 4$, $N = 8$)-супергравитации, отвечающие некомпактным подгруппам E_7 .

Сфера S^7 , помимо стандартной метрики, допускает вторую эйнштейновскую метрику⁶⁷ (squashed metric), которая дает теорию с $SO(5) \times SU(2)$ -калибровочной симметрией и ($N = 1$ или $N = 0$)-суперсимметрией, в зависимости от ориентации S^7 . По две эйнштейновские метрики допускают также 7-мерные однородные пространства $N^{pqr} = SU(3) \times U(1)/U(1) \times U(1)$, где p, q, r описывают различные вложения $U(1) \times U(1)$. Эти решения имеют $SU(3) \times SU(2)$ -калибровочную симметрию и ($N = 1$)-суперсимметрию⁶⁸.

Калибровочная группа $SO(8)$ для элементарных калибровочных полей не содержит феноменологической $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -подгруппы. Поэтому для того, чтобы получить реалистическую теорию, нужно рассмотреть более сложные вакуумные решения. Как отмечалось Виттеном⁷⁷, замечательно, что $n = 7$ — минимальная размерность пространства B^n , имеющего $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -группу изометрий.

Каждое компактное однородное пространство G/H , где H — максимальная подгруппа, допускает метрику Эйнштейна⁶⁹, а следовательно, такие 7-мерные пространства являются решениями уравнений ($d = 11$)-супергравитации. Группа изометрий этой метрики совпадает с G . Для наиболее интересного случая калибровочной группы $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

введенное Виттенем ⁷⁷ соответствующее пространство Эйнштейна имеет вид

$$M^{pqr} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1) / \text{SU}(2) \times \text{U}(1) \times \text{U}(1),$$

где целые числа p, q, r характеризуют характер вложения знаменателя в числитель. Все остальные 7-мерные пространства Эйнштейна вида G/H описаны в ⁷¹.

Для пространств M^{pqr} при $p \neq q$ группа голономии есть $\text{SO}(7)$ и суперсимметрия полностью нарушена. При $p = q$ группа голономии есть $\text{SO}(3)$ и имеется $(N = 2)$ -суперсимметрия.

Был получен полный спектр частиц для решений типа Фройнда — Рубина как на сфере S^7 , так и на произвольных однородных пространствах ⁷². Оказалось, что помимо безмассовых калибровочных мультиплетов есть также квазибезмассовые мультиплеты, в которых скаляр не имеет массы, а все другие состояния со спином $J, J \leq 1/2$, массивны. Возможно, такие мультиплеты могли бы играть роль мультиплетов материи, взаимодействующей с калибровочной супергравитацией, и участвовать в механизме супер-Хиггса. Эффективный потенциал теории при этом меняется, и не исключено, что таким образом можно получить решение проблемы космологической постоянной.

Однако все построенные модели, основанные на компактных пространствах B^7 , страдают следующими недостатками:

1. Они не решают проблему киральных фермионов.
2. Суперсимметрия нарушается до $N = 0$ или до $N = 2$ (но не до $N = 1$) в случаях, когда группой калибровочной симметрии является $\text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$.
3. В размерности $d = 4$ получается не плоское пространство, а пространство анти-де Ситтера, и соотношение между калибровочной константой связи и космологической постоянной таково, что одна из них обязательно нереалистична.

В работах ^{52,53} трудности с киральными фермионами предлагается преодолевать за счет рассмотрения в качестве B некомпактного пространства конечного объема.

Если удастся построить динамическую теорию составных калибровочных полей, несмотря на появление духов ¹⁰³ при $d \geq 4$, то в этом случае скрытая $\text{SU}(8)$ -калибровочная симметрия теории де Вита — Николаи была бы достаточна для феноменологии, и можно было бы даже получить киральные фермионы ^{23,42}. Однако в 11-мерной программе, даже если удастся преодолеть перечисленные выше трудности, остается открытой проблема с неперенормируемостью 11-мерной супергравитации.

и) С п о н т а н н а я к о м п а к т и ф и к а ц и я 10 - м е р н ы х м о д е л е й

10-мерные суперсимметричные полевые модели играют особую роль, так как они получаются в низкоэнергетическом пределе из суперструны ¹⁹.

Построение вакуумного решения для этой теории наталкивается на трудность ⁷³, связанную с уравнением для скалярного поля

$$\nabla_M \nabla^M \varphi + \frac{1}{8g^2} e^{-\varphi} F^2 + \frac{3}{2g^4} e^{-2\varphi} H^2 = 0. \quad (1.10)$$

Отсюда видно, что если $\varphi = \text{const}$ и отличны от нуля компоненты F и H только для внутреннего замкнутого пространства с положительной сигнатурой, то уравнение (1.10) не удовлетворяется, поскольку в левую часть (1.10) входит сумма положительных слагаемых.

Таким образом, в этой теории при обычных предположениях отсутствует спонтанная компактификация вида $M^4 \times B^6$, если M^4 — пространство с максимальной группой симметрии. Обойти эту трудность можно следующим

образом. В ³¹ высказана гипотеза о существовании областей Вселенной с различной сигнатурой метрики. В ³⁰ найдены решения эффективной полевой теории суперструны ⁵ и теории ²⁷ вида $M^4 \times adS^3 \times B^3$, где M^4 — пространство Минковского, adS^3 — 3-мерное пространство анти-де Ситтера (оно содержит временную переменную), B^3 — компактное пространство (в этой ситуации, по-видимому, следует говорить не о спонтанной компактификации, так как adS^3 некомпактно, а о спонтанной редукции). Таким образом, гипотеза ³¹ о существовании нескольких временных измерений в динамической теории Калуцы — Клейна позволяет решить проблему космологической постоянной. Решение проблемы дулов в теориях с дополнительными временными измерениями предложено в ¹³⁰.

В работе ³² построена вакуумная конфигурация для эффективной полевой теории Грина — Шварца. Эта конфигурация имеет $(N = 1)$ -суперсимметрию, 4-мерное пространство Минковского и компактифицируется на риччи-плоское (аналогично и в 11-мерной супергравитации требование $(N = 1)$ -суперсимметрии в пространстве Минковского приводит к риччи-плоскому внутреннему пространству ¹⁰⁴) кэлерово многообразие и приводит к 4 поколениям киральных фермионов. Эта конфигурация не удовлетворяет уравнениям (1.10) теории Грина — Шварца, однако является решением модифицированной теории с добавочным членом с высшими производными, который получается из $E_8 \times E_8$ -суперструны ⁷⁴.

к) Стабильность вакуумных решений

Вакуумное решение должно быть стабильным относительно классических или квантовых возмущений.

Одним из критериев стабильности является отсутствие духов и тахионов в спектре, вычисленном в линейном приближении на фоне данного вакуумного решения ⁷⁵. Другой критерий: всякое возмущение должно обладать большей энергией, чем вакуум ⁷⁶. Если решение обладает суперсимметрией, то оно стабильно ^{77,78}. Формально это вытекает из того, что гамильтониан равен сумме квадратов суперзарядов и обращается в нуль только в суперсимметричном состоянии. В частности, стабильными оказываются суперсимметричные решения в $(N \geq 4)$ -супергравитации, хотя скалярный потенциал здесь и неограничен снизу ⁷⁶.

Несуперсимметричные решения также могут быть стабильными, например, в силу топологических причин ⁷⁹. Это имеет место, например, для $(d = 6)$ -системы Эйнштейна — Максвелла с компактификацией на сферу S^2 при помощи монополя Дирака ⁸⁰ и для $(d = 8)$ -теории с инстантонной компактификацией на сферу S^4 ⁸¹.

Необходимое и достаточное условие классической стабильности ⁸² решения типа Фройнда — Рубина, компактифицирующегося на B^7 ($R_{mn} = \gamma g_{mn}$), состоит в том, что все собственные значения λ оператора Лихнеровича Δ_L , действующего на симметрические поперечные бесследовые тензоры h_{mn} ,

$$\Delta_L h_{mn} = -\Delta h_{mn} - 2R_{mnpq}h^{pq} + 2R_{(m}{}^p h_{n)p} = \lambda h_{mn}$$

(здесь Δ — оператор Бельтрами — Лапласа), должны удовлетворять неравенству $\lambda \geq \gamma/2$. В частности, решение (squashed S^7) стабильно. Пространства $M^{p,q}$ дают стабильные решения только при

$$\frac{7}{27} \sqrt{6} < \left| \frac{p}{q} \right| < \frac{17}{117} \sqrt{66},$$

т. е. при p и q в некоторой окрестности суперсимметричного решения с $p/q = 1$.

Решения типа Энглерта нестабильны, если B^7 допускает не менее двух спиноров Киллинга ⁸⁴. Нестабильно ⁸⁵ также решение типа Энглерта на деформированной (squashed) сфере S^7 .

Даже стабильные классические решения могут быть нестабильными в квантовой теории. Однопетлевые поправки рассматривались в работах ⁸⁶.

Помимо условия стабильности вакуума, теория должна также удовлетворять условию отсутствия аномалий.

2. АНОМАЛИИ

Хорошо известны киральные аномалии, связанные с нарушением γ^5 -инвариантности и возникающие в треугольной диаграмме с безмассовыми фермионами ^{12,87}. Аномалии позволяют объяснить распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ в рамках алгебры токов, а также дать решение $U(1)$ -проблемы в квантовой хромодинамике.

Аномалия возникает также при взаимодействии поля Янга — Миллса с линейной комбинацией векторного и аксиального токов, как, например, в стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории электрослабых взаимодействий. Поскольку при наличии аномалий в калибровочной теории происходит нарушение калибровочной инвариантности и, следовательно, унитарности, теория с аномалиями не является согласованной. В частности, обычная $SU(2) \times U(1)$ -теория осмысленна только при взаимодействии с кварками, когда аномалии сокращаются. Аномалию нельзя сократить добавлением к лагранжиану локальных контрчленов.

Приведем основные формулы для четырехмерных аномалий ⁸⁸⁻⁹¹.

А б е л е в ы а н о м а л и и возникают вследствие нарушения на квантовом уровне симметрии $\psi(x) \rightarrow e^{iu(x)\gamma^5} \psi(x)$ классического лагранжиана, описывающего взаимодействие безмассовых фермионов с полем Янга — Миллса. В квантовом случае дивергенция аксиального тока $j_\mu^A = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$ равна

$$\partial_\mu j^{\mu A} = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}.$$

Появление абелевых аномалий можно интерпретировать как неинвариантность фермионной меры в континуальном интеграле ⁹² при киральном преобразовании.

Н е а б е л е в ы а н о м а л и и также возникают в треугольной диаграмме с безмассовыми фермионными линиями и связаны с нарушением на квантовом уровне неабелевой симметрии $\psi(x) \rightarrow e^{iu(x)\gamma^5} \psi(x)$, $u(x) = u^a(x) \lambda^a$; λ^a — генераторы алгебры калибровочной группы G .

Рассмотрим взаимодействие поля Янга — Миллса $A_\mu(x)$ с киральными (левыми) фермионами:

$$\exp[i\Gamma(A)] = \int d\psi d\bar{\psi} \exp\left[i \int \bar{\psi} \left(\tilde{\partial} + \tilde{A} \frac{1+\gamma_5}{2}\right) \psi d^4x\right], \quad (2.1)$$

$$\tilde{\partial} = i\gamma^\mu \partial_\mu, \quad \tilde{A} = i\gamma^\mu A_\mu, \quad A_\mu = \lambda^a A_\mu^a, \quad \bar{\psi} \lambda^a \psi = \bar{\psi}^i \lambda_{ij}^a \psi^j.$$

При калибровочном преобразовании $A_\mu \rightarrow A_\mu + D_\mu u$ (D_μ — ковариантная производная) функционал $\Gamma(A)$ преобразуется как

$$\Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A + Du) = \Gamma(A) + \mathfrak{A}(A, u), \quad (2.2)$$

$$\mathfrak{A}(A, u) \equiv \delta_u \Gamma(A) = -i \int d^4x \text{tr} \left(u(x) D_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} \right), \quad (2.3)$$

т. е. на функционалах от A генератор калибровочных преобразований есть $-iD_\mu \delta / \delta A_\mu^a$. Если бы $\Gamma(A)$ было калибровочно инвариантным, как следует из формальных преобразований, то мы имели бы $D_\mu \delta \Gamma / \delta A_\mu^a(x) = 0$. Однако аккуратное вычисление с учетом регуляризации дает следующий результат:

$$D_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a(x)} = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \text{tr} \left[\lambda^a \left(A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \right]. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) приводит к нарушению ковариантного сохранения тока в присутствии внешнего калибровочного поля:

$$D_\mu j^{\mu a} = D_\mu \left\langle \bar{\psi} \gamma^\mu \lambda^a \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi \right\rangle = D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \Gamma \neq 0.$$

Формула (2.4) показывает отсутствие инвариантности относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований. Относительно калибровочных преобразований $A_\mu \rightarrow A_\mu^g = g^{-1}(x) (A_\mu - i \partial_\mu) g(x)$ $\Gamma(A)$ преобразуется следующим образом:

$$\Gamma(A^g) - \Gamma(A) = -2\pi \int_{\mathbb{R}_+^{d+1}} d^{d+1}x [\omega_{d+1}(A^g) - \omega_{d+1}(A)]; \quad (2.5)$$

здесь $d = 4$ и интегрирование происходит по $\mathbb{R}_+^5 = \{(x^\mu, x^5) \mid x^5 \geq 0\}$; $\omega_{d+1}(A)$ — плотность действия Весса — Зумино (она является $(d+1)$ -мерным классом Черна — Саймонса); для $d = 4$ имеет место формула

$$\omega_5(A) = -\frac{i}{192\pi^3} \varepsilon^{pqrs} \text{tr} \left(F_{pq} F_{rs} A_l - F_{pq} A_r A_s A_l + \frac{2}{5} A_p A_q A_r A_s A_l \right). \quad (2.6)$$

В формулу (2.5) входят калибровочные поля, зависящие от точек $(d+1)$ -мерного пространства, и можно брать произвольное (если нет топологических препятствий, которые могут приводить к квантованию физических параметров; подробнее см. ^{89-91,93}) продолжение полей $A_\mu(x)$ в $(d+1)$ -мерное пространство.

Появление геометрических характеристик в формуле (2.5) не случайно. Само появление аномалий обусловлено нетривиальной топологией пространства орбит калибровочной группы. Нормировка неабелевой аномалии фиксируется нормировкой абелевой аномалии, которая представляет собой локальный вариант теоремы Атьи — Зингера об индексе ^{96,91}. Интерпретация аномалий в терминах коциклов дана в ⁹⁴.

а) Киральные аномалии в высших размерностях

Теории типа Калуцы — Клейна, которые приводят к киральным фермионам, потенциально аномальны. Они могут быть осмысленны, только если происходит сокращение аномалий. Для того чтобы проследить за сокращением аномалий, нужно знать их явный вид, т. е. иметь формулы типа (2.4). В последнее время были проделаны вычисления калибровочных аномалий в многомерном пространстве ⁸⁸⁻⁹¹. Мы приведем ниже вывод формул для неабелевых аномалий в $2n$ -мерном пространстве, пользуясь языком дифференциальных форм *). Поскольку $\delta_u \Gamma(A) = \mathfrak{U}(u, A)$ соответствует бесконечно малому преобразованию калибровочной группы, то должно выполняться следующее условие (условие Весса — Зумино ⁹⁵):

$$\delta_u \mathfrak{U}(A, v) - \delta_v \mathfrak{U}(A, u) = \mathfrak{U}(A, [u, v]). \quad (2.6')$$

Условие (2.6) накладывает нетривиальные ограничения на возможный вид аномалий. Покажем, что уравнению (2.6) удовлетворяет следующий функционал от A и u :

$$\mathfrak{U}(A, u) = \int_{M^{2n}} d^{-1} \delta_u d^{-1} \Omega_{2n+2}(A). \quad (2.7)$$

*) Для иллюстрации приведем на языке дифференциальных форм уравнения Максвелла. Введем 1-форму $A = A_\mu dx^\mu$ и 2-форму $F = (1/2) F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$. Тогда соотношение $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ запишется в виде $F = dA$. Уравнение $\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ будет иметь вид $dF = 0$, а уравнение $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ запишется в виде $d * F = 0$, где $*F$ — дуальная к F 2-форма. Аналогично можно записать уравнения Янга — Миллса. Внешнее умножение дифференциальных форм с матричными коэффициентами выполняется по естественным правилам.

Поясним обозначения *) в (2.7): $\Omega_{2n+2}(A)$ — $(2n+2)$ -форма в $(2n+2)$ -мерном пространстве (введены две вспомогательные переменные) — класс Черна — Понтрягина,

$$\Omega_{2n+2}(A) = \text{tr } F^{n+1}, \quad (2.8)$$

$$F = \frac{1}{2} F_{MN} dx^M \wedge dx^N;$$

$d^{-1}\Omega_{2n+2}(A)$ — это $(2n+1)$ -форма $\omega_{2n+1}^0(A)$ такая, что

$$\Omega_{2n+2}(A) = d\omega_{2n+1}^0(A). \quad (2.9)$$

Форма $\omega_{2n+1}^0(A)$ существует, поскольку условие локальной разрешимости $d\Omega_{2n+2} = 0$, очевидно, выполнено.

Выражение $\delta_u \omega_{2n+1}^0(A)$ означает вариацию за счет бесконечно малого калибровочного преобразования. Чтобы было осмысленно применение оператора d^{-1} к $\delta_u \omega_{2n+1}^0(A)$, проверим, что $d\delta_u \omega_{2n+1}^0 = 0$. Действительно,

$$d\delta_u \omega_{2n+1}^0 = \delta_u d\omega_{2n+1}^0 = \delta_u \Omega_{2n+2} = 0$$

в силу калибровочной инвариантности $\Omega_{2n+2}(A)$. Поэтому найдется такая $2n$ -форма $\omega_{2n}^1(A, u)$, что

$$d\omega_{2n}^1(A, u) = \delta_u \omega_{2n+1}^0(A). \quad (2.10)$$

Покажем, что (2.7) решает (2.6). Имеем

$$\delta_u \delta_v \omega_{2n+1}^0(A) = (\text{в силу (2.10)}) = \delta_u d\omega_{2n}^1(A, v) = (\delta_u \text{ и } d \text{ коммутируют}) = d\delta_u \omega_{2n}^1(A, v),$$

и, следовательно, тождество

$$(\delta_u \delta_v - \delta_v \delta_u - \delta_{[u, v]}) \omega_{2n+1}^0(A) = 0$$

может быть записано в виде

$$d\delta_u \omega_{2n}^1(A, v) - d\delta_v \omega_{2n}^1(A, u) - d\omega_{2n}^1(A, [u, v]) = 0. \quad (2.11)$$

Интегрируя соотношение (2.11) по $(2n+1)$ -мерному многообразию, границей которого является M^{2n} , в силу формулы Стокса получаем соотношение

$$\int_{M^{2n}} \delta_u \omega_{2n}^1(A, v) - \int_{M^{2n}} \delta_v \omega_{2n}^1(A, u) = \int_{M^{2n}} \omega_{2n}^1(A, [u, v]),$$

которое и показывает, что (2.7) решает (2.6).

Формула (2.6) удобна для того, чтобы следить за возможным сокращением аномалий, поскольку выражение (2.7) для формы Ω_{2n+2} имеет простой вид. Таким образом, чтобы выявить сокращение аномалий в $2n$ -мерной теории, достаточно в силу (2.6) провести вычисления в $(2n+2)$ -мерном пространстве. Заметим, что след в (2.8) берется в представлении, соответствующем фермионным полям. В суперсимметричных теориях фермионы принимают значения в присоединенном представлении, и для этих теорий в (2.8) входит tr_{adj} . С другой стороны, вклад калибровочных полей в лагранжиан суперсимметричных теорий записывается как след в фундаментальном представлении, поэтому в формуле для Ω_{2n+2} удобно пересчитать tr_{adj} на след в фундаментальном представлении. В частности, для $(N=1, d=10)$ -калибровочной теории Янга — Миллса имеем

$$\Omega_{12}^{YM} = 15 \text{tr } F^2 \text{tr } F^4 + (n-32) \text{tr } F^6, \quad G = \text{SO}(n), \quad (2.12a)$$

$$\Omega_{12}^{YM} = \frac{1}{7200} (\text{tr } F^2)^3, \quad G = E_8 \times E_8. \quad (2.12b)$$

*) Мы используем обозначения С. П. Новикова⁹³; d^{-1} естественно обозначает оператор, обратный к оператору внешнего дифференцирования d .

Отметим, что уравнение (2.7) определяет $\mathfrak{A}(A, u)$ с точностью до коэффициента, который может быть найден непосредственно из фейнмановских диаграмм, или с помощью метода Фуджикавы⁹². Нормировка абелевых аномалий, которая наиболее просто вычисляется, используя теорему Атьи — Зингера об индексе, также фиксирует нормировку неабелевых аномалий^{96,91}.

б) Гравитационные аномалии

В пространстве более чем четырех измерений Альваресом-Гоме и Витте-ном были обнаружены аномалии нового типа с чисто гравитационными вершинами, отвечающие нарушению общекоординатной инвариантности⁹⁷. Чисто гравитационные аномалии появляются у вейлевских спиноров со спином $1/2$ и спином $3/2$ в пространствах размерности $d = 4k + 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В гравитационную аномалию дает вклад также бозонное антисимметричное поле B_{MN} .

Приведем ответ для формы Ω_{12}^{Gr} , соответствующей 10-мерной чисто гравитационной аномалии в $(N = 1)$ -супергравитации, взаимодействующей с материей:

$$\Omega_{12}^{Gr} = - \left[\frac{1}{32} + (n - 496)/13\,824 \right] (\text{tr } R^2)^3 - \left[\frac{1}{8} + (n - 496)/5760 \right] \text{tr } R^2 \text{tr } R^4 - \\ - [(n - 496)/7560] \text{tr } R^5; \quad (2.13)$$

здесь n — число левых фермионов спина $1/2$ из мультиплетов материи.

Появляются также и смешанные аномалии, соответствующие диаграммам, в вершинах которых стоят калибровочные поля и тензор энергии-импульса.

Как показано в⁹⁷, для $(d = 10, N = 2)$ -киральной супергравитации имеет место непосредственное сокращение аномалий.

в) Сокращение аномалий

Замечательным образом оказывается, что для $(N = 1, d = 10)$ -супергравитации, взаимодействующей с $SO(32)$ - или $E_8 \times E_8$ -калибровочным полем (эти модели получаются в низкоэнергетическом пределе струны типа I), часть членов в (2.12) и (2.13) исчезает. А именно, последний член в (2.12а) исчезает при $n = 32$ и последний член в (2.13) исчезает для $G = SO(32)$ и $E_8 \times E_8$, так как $n = 496$ — размерность присоединенных представлений $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$. Как показано в⁵, оставшиеся аномальные слагаемые могут быть скомпенсированы добавлением в исходное действие локальных слагаемых. Эти слагаемые содержат высшие производные и могут быть получены из низкоэнергетического разложения суперструны.

Сокращение аномалий происходит также и для $(N = 2, d = 6)$ -супергравитации, взаимодействующей с мультиплетом полей материи (см. таблицу) для калибровочной группы $E_6 \times E_7 \times U(1)$ ¹²⁵.

3. СУПЕРСТРУНЫ

Теория суперструн имеет парадоксальную историю. Эта теория возникла при исследовании феноменологии адронов, но буквально заставила рассматривать себя как фундаментальную единую теорию элементарных частиц. В конце 60-х годов исследование взаимодействий адронов при помощи дисперсионных соотношений и реджистики привело к дуальной резонансной модели Венециано, удовлетворительно описывающей феноменологию мезонов¹⁰⁵.

Дуально резонансную амплитуду можно представить при помощи набора осцилляторов, и было показано, что эти осцилляторы можно рассматривать как нормальные возбуждения релятивистской струны. В теории имеются состояния с отрицательной нормой (духи), которые отсутствуют, только если

пространство-время имеет критическую размерность $d = 26$ (возможно, что учет конформных аномалий¹⁰⁶ и выбор правильного основного состояния^{107,128} может понизить эту размерность). Появление нефизической размерности привело в дальнейшем к возрождению идеи Калуцы — Клейна. Фермионные степени свободы были учтены в модели Рамона — Невё — Шварца¹⁰⁸, для которой критическая размерность $d = 10$. Эта модель послужила одним из истоков современной теории суперсимметрии. Струнная модель адронов, хотя и была интуитивно привлекательна (представление о кварках, соединенных струной, весьма наглядно), сталкивалась, однако, со следующими проблемами. Во-первых, для того чтобы исключить духи, параметр модели (коэффициент наклона траектории Редже α') должен иметь нефизическое значение. Далее, в теории даже в критических размерностях остаются частицы с мнимой массой — тахионы. Кроме того, имеются безмассовые адроны со спином 2, которых не существует в природе.

Радикальное изменение в интерпретации, позволившее решить (или по крайней мере обойти) эти проблемы струнных моделей, было сделано Шерком и Шварцем^{9,109}, которые показали, что можно рассматривать частицы со спином 2 как гравитоны, а теорию струны как единую теорию элементарных частиц, включающую гравитацию. В этом случае характерный масштаб длины теории $L \sim (\alpha')^{-1/2}$ естественно считать порядка планковской длины, $L \sim 10^{-33}$ см (в то время как для струнной модели адронов $L \sim 10^{-13}$ см). Эта программа была разработана Шварцем и Грином в теории суперструн¹⁹. Они построили явно суперсимметричные теории суперструн двух типов (различающихся значениями суперзарядов) без духов и тахионов при $d = 10$. Каждая теория суперструн имеет безмассовый сектор плюс бесконечный набор массивных возбуждений с произвольно большими спинами. Безмассовый сектор имеет такой же набор состояний, как и некоторая суперсимметричная полевая модель (при $d = 10$), в которую и переходит суперструна в низкоэнергетическом пределе ($\alpha' \rightarrow 0$). Суперструны типа I могут быть открытыми (со свободными концами) или замкнутыми. Взаимодействие безмассовых возбуждений открытых струн в низкоэнергетическом пределе описывается суперсимметричной теорией Янга — Миллса, замкнутых струн — ($N = 1$, $d = 10$)-супергравитацией. Каждая из этих полевых теорий имеет киральные аномалии. Однако в низкоэнергетической полевой теории, описывающей как замкнутые, так и открытые суперструны типа I, для калибровочных групп $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$ аномалии сокращаются⁵. Суперструны типа II могут быть только замкнутыми. Безмассовый сектор в низкоэнергетическом пределе описывается ($N = 2$, $d = 10$)-супергравитацией. Аномалии здесь также сокращаются⁹⁷.

Важным свойством суперструнных теорий является отсутствие ультрафиолетовых расходимостей. На уровне одной петли эти теории конечны, и есть основания ожидать конечности и в высших петлях⁶. Причины отсутствия расходимостей формально объясняются просто. Суперструна имеет две размерные константы — гравитационную κ и реджевский параметр α' . По существу, α' играет роль параметра обрезания, и при $\alpha' > 0$ мы имеем конечную струнную теорию. При $\alpha' \rightarrow 0$ получается полевая неперенормируемая теория, включающая гравитацию. Физическая причина отсутствия расходимостей заключается в том, что мы имеем дело с протяженным объектом.

Теория суперструн, как сейчас представляется, должна рассматриваться в духе подхода Калуцы — Клейна и не имеет непосредственной связи с адронными струнами, из которых она выросла *). Опосредствованную связь можно представить себе следующим образом. Из суперструны нужно получить квантовую хромодинамику, а из нее в пределе большого числа цветов¹¹² — адронную струну.

*) Фройнд¹²⁶ предположил, что 10-мерная суперструна может быть получена из 26-мерной бозонной струны.

Известно, что для того, чтобы удовлетворить условию причинности, взаимодействие двух протяженных объектов должно быть локальным¹⁶. Вакуумные флуктуации препятствуют локальности взаимодействия и, вообще говоря, приводят к нарушению причинности. Однако, если модель суперсимметрична, то вакуумные флуктуации сокращаются и появляется возможность для последовательного включения взаимодействия.

а) С в о б о д н ы е с т р у н ы

1) Бозонная струна

В d -мерном пространстве-времени M^d с координатами x^M , $M = 0, 1, \dots, d-1$, и метрикой $g_{MN}(x)$ мировая поверхность струны задается уравнением $x^M = x^M(\sigma, \tau)$, где σ — пространственноподобная, а τ — времениподобная координаты. Действие для струны имеет вид

$$S = -\frac{1}{2} T \int_0^\pi d\sigma \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \eta^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\alpha x^M(\xi) \partial_\beta x^N(\xi) g_{MN}(x(\xi)); \quad (3.1)$$

здесь $\xi = (\sigma, \tau)$, $\eta^{\alpha\beta}(\xi)$ — метрика на мировой поверхности струны, $\partial_\alpha = (\partial/\partial\sigma, \partial/\partial\tau)$, $T \sim 1/\alpha'$ — размерный параметр (натяжение струны). Метрика g_{MN} , вообще говоря, нетривиальна, ее следовало бы определять динамически из экстремума эффективного действия^{19,107,115,116}. Однако в теории суперструн детально разработан только случай, когда M^d — пространство Минковского с метрикой $g_{MN} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ (а также случай компактификации на 6-мерный тор¹⁹), которого мы и будем придерживаться в дальнейшем.

Используя инвариантность действия S , можно выбрать светоподобную калибровку, в которой $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1)$, независимыми переменными являются поперечные координаты $x^i(\xi)$, $i = 1, \dots, 8$, и действие имеет вид

$$S = -\frac{1}{2} T \int_0^\pi d\sigma \int d\tau \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^i(\xi) \partial_\beta x^i(\xi). \quad (3.2)$$

Решение классических уравнений, следующих из действия (3.2), для открытой струны ($\partial_\sigma x^i = 0$ при $\sigma = 0, \pi$) можно записать в виде

$$x^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i \cos n\sigma e^{-in\tau},$$

$$x^+(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^9) = x^+ + p^+ \tau;$$

здесь x^i , p^i , α_n^i , x^+ , p^+ — постоянные.

Каноническое квантование приводит к перестановочным соотношениям

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m \delta_{m+n, 0} \delta^{ij}.$$

Оператор массы

$$M^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i$$

и имеет в качестве низшего собственного состояния тахивон. Алгебра Пуанкаре замкнута только в размерности $d = 26$. Возможно, появление этой критической размерности связано с процедурой квантования в светоподобной калибровке, и не исключена возможность того, что каким-то образом удастся проквантовать струну прямо в 4-мерном пространстве-времени.

2) Свободная суперструна

Действие для суперструны в светоподобной калибровке имеет вид

$$S = -\frac{1}{2} \int_0^\pi d\sigma \int d\tau \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^i + \frac{i}{2p^+} \lambda^\alpha \rho^\alpha \partial_\alpha \lambda^a \right); \quad (3.3)$$

p^+ — постоянная.

Мы будем рассматривать суперструну в критической размерности $d = 10$. Действие (3.3) SO (8)-инвариантно. Напомним, что алгебра SO (8) имеет три неэквивалентных 8-мерных представления, одно векторное и два спинорных. Используем индексы i, j для векторного представления, a, b для одного спинорного и $\dot{a}, \dot{b}$ для другого спинорного представления. В выражении (3.3) ρ^α — 2×2 -матрицы Дирака (матрицы Паули), ферми-поле λ^{aA} имеет 2-компонентный спинорный индекс A и 8-компонентный спинорный индекс a . Решение уравнений движения для λ^{aA} имеет вид

$$\lambda^{a1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n^a e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \lambda^{a2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n^a e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad (3.4)$$

a антикоммутирующие соотношения — вид

$$\{Q_m^a, Q_n^b\} = 2p^+ \delta_{m+n, 0} \delta^{ab}.$$

В этом случае тахивон отсутствует, низшие состояния оператора массы образуют безмассовый супермультиплет, состоящий для открытых струн типа I из вектора A^i и спинора $\psi^{\dot{a}}$, который совпадает с янг-миллсовским мультиплетом в размерности $d = 10$. Можно считать, что эти состояния преобразуются по некоторому представлению произвольной калибровочной группы.

Для замкнутых струн с периодическими граничными условиями решения уравнений движения записываются в виде

$$x^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^i e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in(\tau+\sigma)}), \quad (3.5)$$

$$\lambda^{a1}(\sigma, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n^{1a} e^{-i2n(\tau-\sigma)}, \quad \lambda^{a2}(\sigma, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n^{2a} e^{-i2n(\tau+\sigma)}.$$

Имеются два генератора суперсимметрии (суперзаряды), которые в данном случае совпадают с Q_0^{1a} и Q_0^{2a} . Если оба суперзаряда сохраняются и принадлежат одному и тому же представлению группы SO (8), то такая (замкнутая) струна называется типа IIb. Эта теория киральна (зеркально асимметрична). Говорят, что суперструна имеет тип IIa, если суперзаряды принадлежат различным спинорным представлениям SO (8). Наконец, если сохраняется только один суперзаряд, то такая (замкнутая) суперструна имеет тип I.

Безмассовый спектр замкнутой суперструны типа I имеет следующий состав (при $d = 10$): 1 гравитон g^{ij} , 1 антисимметричный тензор B^{ij} , 1 скаляр ϕ , 1 спинор $\psi^{\dot{a}}$, 1 состояние Рариты — Швингера $\psi^{a\dot{a}}$. Ответ на вопрос, каков спектр безмассовых состояний в 4-мерном пространстве-времени, зависит от процедуры компактификации. При простейшей компактификации на 6-мерный тор получается обширный набор безмассовых частиц, не наблюдающихся в природе.

б) Взаимодействующие струны

Взаимодействие струн вводится весьма просто. Либо две струны могут соединиться концами, образуя третью струну, либо струна может разорваться на две. При этом учитывается ориентация струн. Ориентация связывается с направлением волны, бегущей по замкнутой струне. Замена $\sigma \rightarrow \pi - \sigma$

соответствует в формулах (3.5) перестановке $\alpha_n \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n$, $Q_n^1 \leftrightarrow Q_n^2$. При этом для струн типа I ничего не меняется, и они оказываются неориентируемыми, а для струн типа II меняется ориентация. Для открытой струны (типа I) можно ввести группу внутренней изотопической симметрии, если мысленно поместить на ее концах «кварк» и «антикварк». Соединив концы такой струны, получим замкнутую струну; она будет ориентированной, если «кварки» отличаются от «антикварков», как, например, для группы $SU(n)$. С другой стороны, струны типа I неориентируемы, следовательно, изотопическая группа $SU(n)$ запрещена. Была разработана теория суперструны только с калибровочными группами $SO(n)$ и $Sp(2n)$ ^{19,114}.

Однако недавно была построена⁷⁴ теория замкнутых суперструн, которая в низкоэнергетическом пределе описывается $(d=10, N=1)$ -супергравитацией, взаимодействующей с суперсимметричной теорией Янга — Миллса с калибровочной группой $E_8 \times E_8$ или $Spin(32)/Z_2$. Эта теория была получена как гибрид $(d=10)$ -фермионной струны и $(d=26)$ -бозонной струны при помощи компактификации 16 дополнительных бозонных координат на максимальный тор определенного радиуса $(26-10=16=8+8!)$. Эта струна не имеет духов и тахионов и свободна от аномалий.

Аналогично тому, как для описания взаимодействия точечных частиц переходят от первично квантованных переменных x, p ко вторично квантованным полевым оператором $\phi(x)$, так и для описания взаимодействующих суперструн вводятся полевые операторы $\Psi[x^i(\sigma), \vartheta^s(\sigma), x^+, p^+]$ (для замкнутых струн) и $\Phi^{ab}[x^i(\sigma), \vartheta^s(\sigma), x^+, p^+]$ (для открытых струн); здесь $\vartheta^s(\sigma)$ — антикоммутирующие функции, $s=1, \dots, 8$; a, b — изотопические индексы. В отличие от обычных квантованных полей, которые зависят от точки x , здесь Ψ и Φ являются операторными функционалами. (Математический смысл функционалам от антикоммутирующих функций можно придать в духе работы¹¹³.) Гамильтониан, отвечающий динамике по переменной x^+ (см. (3.2)), является суммой свободного гамильтониана и гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}}$. Для теории типа II гамильтониан $\mathcal{H}_{\text{int}}$ имеет вид взаимодействия типа $\kappa\Psi^3$:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \kappa \int \left(\prod_{h=1}^3 dp_h^+ \mathcal{D}^{16} z_h \right) \delta \left(\sum_h p_h^+ \right) \Delta^{16} [z_1(\sigma) + z_2(\sigma) - z_3(\sigma)] \times \\ \times K(\sigma) \Psi(1) \Psi(2) \Psi(3); \quad (3.6)$$

здесь κ — гравитационная постоянная, $z_h = (x_h^i(\sigma), \vartheta_h^s(\sigma))$, Δ^{16} — δ -функции, оператор K содержит вариационные производные, $\Psi(1), \Psi(2), \Psi(3)$ — полевые операторы от соответствующих аргументов.

Для открытых струн имеются также слагаемые типа $\Phi^3, \Phi\Psi, \Psi^3, \Phi^2\Psi$ и Φ^4 .

Теория возмущений для суперструн во многом напоминает старую теорию возмущений в квантовой теории поля до введения фейнмановских диаграмм. Ковариантный формализм в настоящее время отсутствует.

Интересно, что, в отличие от квантовой супергравитации, где взаимодействие неполиномиально по κ , в теории суперструны оно имеет простой вид (3.6)*. Ультрафиолетовые расходимости (по крайней мере в одной петле) отсутствуют. Переход от гравитации к суперструне можно сравнить с переходом от неперенормируемого 4-фермионного слабого взаимодействия к современной теории электрослабого взаимодействия.

Обсуждение спонтанной компактификации для низкоэнергетической полевой теории суперструн см. выше, в разделе и) гл. 1. Решения уравнений эффективной полевой теории Грина — Шварца вида $adS^3 \times S^1 \times S^3 \times S^3$

*) Имеется гипотеза, что теория взаимодействующих суперструн может оказаться в некотором смысле точно решаемой¹¹⁰ и обладать скрытой симметрией⁶.

получены в ¹²⁹. В ¹³⁰ построены решения в этой теории вида $M^4 \times L^3 \times B^3$, где M^4 — пространство Минковского, L^3 — компактное многообразие постоянной отрицательной кривизны, B^3 — многообразие положительной кривизны. При этом предполагается, что 6 дополнительных измерений времени-подобны. Там же обсуждаются условия на компактификацию, при которых получается удовлетворительная 4-мерная теория безмассовых полей без духов.

В работах ¹³¹ рассмотрены возможные феноменологические следствия предложенной в ³² вакуумной конфигурации с риччи-плоским кэлеровым многообразием с $SU(3)$ -группой голономии, для которой исходная $E_8 \times E_8$ -калибровочная группа нарушена до $E_6 \times E_8$. Показано, что дальнейшее нарушение калибровочной инвариантности при помощи механизма Хиггса и нарушение суперсимметрии при помощи конденсата глюино может приводить к моделям, качественно согласующимся с $(d = 4, N = 1)$ -низкоэнергетическими теориями супергравитации ¹⁴.

Низкоэнергетические полевые теории суперструн содержат члены с высшими производными, которые, вообще говоря, могут приводить к нарушению унитарности. В ¹³² показано, что при определенном соотношении между константами перед этими членами духи отсутствуют.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение, возвращаясь к проблемам, сформулированным в гл. 1, которые должна решать фундаментальная теория, перечислим еще раз модели, которые представляются в данный момент заслуживающими наибольшего внимания.

1) Максимально симметричные модели супергравитации: $d = 11, N = 1$ и $d = 10, N = 2$. Нерешенными остаются проблемы киральных фермионов и космологической постоянной.

2) Калибровочная киральная $(d = 6, N = 2)$ -модель. Здесь имеется компактификация на пространство Минковского, можно получить киральные фермионы, и для некоторых калибровочных групп показано сокращение аномалий. Однако классическая стабильность вакуумного решения имеет место только для двух поколений фермионов.

3) Свободная от аномалий $(d = 10, N = 1)$ -супергравитация, взаимодействующая с $SO(32)$ - или $E_8 \times E_8$ -калибровочными полями. Эта теория могла бы быть реалистической в том смысле, что могла бы привести к эффективной 4-мерной $SU(5)$ -калибровочной теории с любым числом поколений.

Все эти теории обладают еще одним общим недостатком — они формально неперенормируемы. С определенной долей уверенности можно сказать, что эта проблема решается в теории суперструн.

4) Теория суперструн дает возможность решать проблемы, связанные с квантовыми числами, — проблему киральных фермионов, проблему поколений и устраняет расходимости в квантовой гравитации. Следует подчеркнуть, что впервые из теоретических соображений удалось фиксировать калибровочную группу ($E_8 \times E_8$ или $SO(32)$).

Остаются нерешенными окончательно такие важные динамические вопросы, как спонтанная компактификация, спонтанное нарушение калибровочной симметрии, вычисление реалистического спектра масс и др.

Однако в настоящее время теория суперструн выглядит весьма привлекательно как возможная единая теория элементарных частиц. Эта теория способна качественно ответить на многие вопросы физики элементарных частиц. Удастся ли построить количественную теорию и будет ли она в согласии с экспериментом, покажет будущее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Superspace and Supergravity/Ed. S. W. Hawking, M. Rocek.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
 Gates S. J., Jr., Grisaru M. T., Roček M., Siegel W. Superspace, or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry.— Reading, MA: Benjamin/Cummings, 1983.
 Огневский В. И., Мезинченко Л.— УФН, 1975, т. 117, с. 637.
 Van Nieuwenhuizen P.— Phys. Rept., 1981, v. 68, p. 189.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.— Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1973.
3. Stelle K. S. Talk on Seminar on Group Theory Methods in Physics.— Zvenigorod, 1982.
 Mandelstam S.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 213, p. 149.
 Howe P. S., Stelle K. S., Townsend P. K.— Ibidem, 1984, v. 236, p. 125.
 Brink L., Lindgren C., Nilsson B. E. W.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 123, p. 323.
4. Namazie M. A., Salam A., Strathdee J.— Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 28, p. 1481.
 West P. C.— In: Supersymmetry and Supergravity — 83/Ed. B. Milewski.— Singapore: World Scientific, 1984.
5. Green M. B., Schwarz J. H.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 149, p. 117.
6. Green M. B., Schwarz J. H.— Ibidem, 1985, v. 151, p. 21.
7. Kaluza Th.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. Math. und Phys. Kl., 1921, S. 966.
8. Klein O.— Zs. Phys., 1926, Bd. 37, S. 895; Helv. Phys. Acta Suppl., 1956, v. 4, p. 58.
 Einstein A., Bergmann P.— Ann. Math., 1938, v. 39, p. 683.
 De Witt B. Dynamical Theory of Groups and Fields.— N.Y.: Gordon and Breach, 1965.
 Trautman A.— Rept. Math. Phys., 1970, v. 1, p. 29.
 Cho Y. M.— J. Math. Phys., 1975, v. 16, p. 2029.
 Cho Y. M., Freund P. G. O.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 1711.
 Chang L. N., Macrae K. I., Mansouri F.— Ibidem, 1976, v. 13, p. 235.
 Luciani J. F.— Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 135, p. 111.
 Witten E.— Ibidem, 1981, v. 186, p. 412.
 Salam A., Strathdee J.— Ann. Phys. (N.Y.), 1982, v. 141, p. 316.
 Duff M. J., Pope C. N.— In: Supergravity — 82/Ed. S. Ferrara, J. G. Taylor, P. van Nieuwenhuizen.— Singapore: World Scientific, 1983.
9. Scherk J., Schwarz J. H.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 57, p. 463.
10. Cremmer E., Scherk J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 103, p. 393; v. 108, p. 409.
11. Langacker P.— Phys. Rept. Ser. C, 1981, v. 72, p. 185.
 Матиян С. Г.— УФН, 1980, т. 130, с. 3.
 Рубаков В. А., Шапошников М. Е.— В кн. XV Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий.— Дубна: ОИЯИ, 1982.
12. Окунь Л. Б. Физика элементарных частиц.— М.: Наука, 1984.
13. Witten E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 188, p. 513.
14. Nilles H. P.— Phys. Rept., 1984, v. 110, p. 2.
 Ellis J., Kounnas C., Nanopoulos D. V.— Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 247, p. 373.
15. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.— ДАН СССР, 1955, т. 102, с. 489.
16. Марков М. А. Нейтрино.— М.: Наука, 1964; Progr. Theor. Phys., 1965, Suppl. Extra Number, p. 85.
17. Cremmer E., Julia B.— Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 80, p. 48; Nucl. Phys. Ser. B, 1979, v. 159, p. 141.
18. Cremmer E., Julia B., Scherk J.— Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 76, p. 409.
19. Schwarz J. H.— Phys. Rept., 1982, v. 89, p. 223.
 Green M. B.— Surveys High Energy Phys., 1983, v. 3, p. 127.
 Brink L. CERN preprint TH.4006.— Geneva, 1984.
20. Arefeva I. Ya., Volovich I. V.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 149, p. 131.
21. De Wit B., Nicolai H.— Ibidem, 1981, v. 108, p. 285; Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 208, p. 323.
22. Hull C. M.— Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 30, p. 760.
23. Ellis J., Gaillard M. K., Maiani L., Zumino B.— In: Unification of the Fundamental Interactions/Ed. J. Ellis, S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen.— N.Y.: Plenum Press, 1980.
 Ellis J., Zumino B., Gaillard M. K.— Acta Phys. Polon. Ser. B, 1982, v. 13, p. 253.
24. Chamseddine A. H.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 185, p. 403.

25. Hug M., Namazie M. A. Trieste preprint IC/83/210.— 1983.
Campbell I. C. C., West P. C. King's College preprint.— London, 1984.
Nilsson B. E. W., Pope C. N. Imperial College preprint TP/83-84/41.— London, 1984.
Giani F., Pernici M. Stony Brook preprint IPP-SB-84-13.— 1983.
26. Green M. P., Schwarz J. H.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 109, p. 444.
Schwarz J. H., West P. C.— Ibidem, 1983, v. 126, p. 301.
Howe P. S., West P. C.— Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 238, p. 181.
27. Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B., van Nieuwenhuizen P.— Ibidem, 1982, v. 195, p. 97.
Chapline G. F., Manton N. S.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 120, p. 105.
28. Nishino H., Sezgin E.— Ibidem, 1984, v. 144, p. 187.
Salam A., Sezgin E. Trieste preprint IC/84/57.— 1984.
Koh I. G., Nishino H. Trieste preprint IC/84/129.— 1984.
Marcus N., Schwarz J. H.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 115, p. 111.
D'Auria R., Fré P., Regge T.— Ibidem, 1983, v. 128, p. 44.
29. Петров А. З. Пространства Эйнштейна.— М.: Физматгиз, 1961.
Berger M.— Astérisque (Soc. Math. de France), 1980, t. 80, p. 5.
30. Арефьева И. В., Волович И. В.— ТМФ, 1985, т. 64, с. 350.
31. Сахаров А. Д.— ЖЭТФ, 1984, т. 87, с. 375.
32. Candelas P., Horowitz G. T., Strominger A., Witten E. Princeton preprint.— 1984.
33. Stelle K.— Phys. Rev. Ser. D, 1967, v. 16, p. 953.
Fradkin E. S., Tseytlin A. A.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 134, p. 307.
34. Cremmer E., Scherk J., Ferrara S.— Ibidem, 1977, v. 68, p. 234.
Green M. B., Schwarz J. H.— Ibidem, 1983, v. 122, p. 143.
Schwarz J. H.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 226, p. 269.
Howe P., West P. C.— Ibidem, 1984, v. 238, p. 181.
Pernici M., Pilch K., van Nieuwenhuizen P., Warner N. P.— Ibidem, 1984, v. 249, p. 381.
35. Freund P. G. O., Rubin M. A.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 94, p. 233.
36. Englert F.— Ibidem, 1982, v. 119, p. 339.
Bais F. A., Nicolai H., van Nieuwenhuizen P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 228, p. 333.
37. Волков Д. В., Ткач В. И.— Письма ЖЭТФ, 1980, т. 32, с. 681; ТМФ, 1982, т. 51, с. 171.
Волков Д. В., Сорокин Д. П., Ткач В. И.— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 397; ЯФ, 1984, т. 39, с. 1306.
Randjbar-Daemi S., Percacci R.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 117, p. 42.
38. Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.— Ibidem, 1983, v. 132, p. 56; Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 242, p. 447.
39. Omero C., Percacci R.— Ibidem, 1980, v. 165, p. 351.
Gell-Mann M., Zwiebach B.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 141, p. 333.
40. Gell-Mann M., Zwiebach B.— Ibidem, v. 147, p. 111.
41. Chattopadhyay U., Karlhede A.— Ibidem, v. 139, p. 279.
42. Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. B., Warner N. P.— Ibidem, v. 149, p. 90.
42. Duff M. J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 219, p. 389.
43. Katanaev M. O., Volovich I. V.— Phys. Lett. Ser. B, 1985, v. 154, p. 666.
44. Weinberg S.— Ibidem, 1984, v. 138, p. 47.
45. Bars I., MacDowell S. W.— Ibidem, 1983, v. 129, p. 182.
Kallos R. E.— Ibidem, 1984, v. 143, p. 373.
46. Palla L.— In: Proc. of Conference on High Energy Physics.— Tokyo, 1978, p. 629.
Witten E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 186, p. 412.
47. Fichnerowich A.— C.R. Ac. Sci. Ser. A-B, 1963, t. 257, p. 7.
48. Witten E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 186, p. 412.
Wetterich C.— Ibidem, v. 187, p. 343; 1983, v. 211, p. 177; v. 222, p. 209; v. 233, p. 109; Bern preprint BUTP-84/5.— 1984.
Manton N. S.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 193, p. 391.
Chapline G., Nanton N. S.— Ibidem, v. 184, p. 391.
Chapline G., Slansky R.— Ibidem, 1982, v. 209, p. 461.
49. Atiyah M. F., Hirzebruch F.— In: Essays on Topology and Related Topics/Ed. A. Haefliger, R. Narasimhan.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1970.
50. Witten E. Princeton preprint.— 1983.
51. Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 214, p. 491.
Salam A., Sezgin E.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 147, p. 47.
52. Wetterich C. Bern preprints BUTP-84/5, BUTP-84/6 — 1984.
53. Nicolai H., Wetterich C.— Phys. Lett. Ser. B, 1985, v. 150, p. 347.

54. Salam A. Trieste preprint IC/84/170.— 1984.
55. Киржниц Д. А.— Письма ЖЭТФ, 1972, т. 15, с. 745.
Kirzhnits D. A., Linde A. D.— Phys. Lett. Ser. B, 1972, v. 42, p. 471; ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1263.
56. Линде А. Д.— УФН, 1984, т. 144, с. 177.
57. Зельдович Я. Б., Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 3.
Волошин М. Б., Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б.— ЯФ, 1974, т. 20, с. 1229.
58. Shafi O., Wetterich C.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 129, p. 387.
Freund P. G. O.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 209, p. 146.
Gleiser M., Rajpoot S., Taylor J. G.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 30, p. 756.
59. Marciano W. Brookhaven National Lab. preprint BNL-33980.— 1984.
60. Alvarez E.— Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 31, p. 418.
61. Coquereaux R., Jadczyk A.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 90, p. 79; 1984, v. 96, p. 172; CERN preprint TH. 4023/84.— Geneva, 1984.
Jadczyk A.— J. Geom. and Phys., 1984, v. 14, p. 107.
Гатанаев М. О.— ТМФ, 1983, т. 56, с. 246.
62. Duff M. J., Pope C. N.— In: Supergravity — 82/Ed. S. Ferrara et al.— Singapore: World Scientific, 1983, p. 7.
Duff M. J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 219, p. 389.
63. Biran B., Englert F., de Wit B., Nicolai H.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 124, p. 45.
De Wit B., Nicolai H.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 208, p. 323.
64. D'Auria R., Fré P.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 121, p. 141.
Lukierski J., Nowicki A.— Wroclaw preprint No. 609.— 1984.
65. D'Auria R., Fré P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 201, p. 101.
De Wit B., Nicolai H.— Ibidem, 1984, v. 231, p. 506.
66. Günaydin M., Warner N. P.— Ibidem, v. 248, p. 685.
67. Jensen G.— Duke Math. J., 1975, v. 42, p. 397.
Awada M. A., Duff M. J., Pope C. N.— Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, p. 294.
Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.— Ibidem, p. 2043; v. 51, p. 846(E).
68. Castellani L., Romans L. J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 238, p. 683.
Page D. N., Pope C. N.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 147, p. 55.
69. Castellani L.— Ibidem, v. 149, p. 103.
70. Castellani L., D'Auria R., Fré P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 239, p. 610.
71. Castellani L., Romans L. J., Warner N. P. Caltech Preprint CALT-68-1055.— 1984.
72. Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N. Imperial College preprint T.P./83-84/18.— London, 1984.
Castellani L., D'Auria R., Fré P., Pilch K., van Nieuwenhuisen P. Stony Brook preprint ITP-SB-83-61.— 1984.
Sezgin E.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 138, p. 57.
D'Auria R., Fré P.— Ann. Phys. (N.Y.), 1984, v. 146, p. 135; CERN preprint TH. 3860.— Geneva, 1984.
73. Freedman D. Z., Gibbons G. W., West P. C.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 124, p. 491.
74. Gross D., Harvey J. A., Martinec E., Rohm R. Princeton preprint.— 1984.
75. Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 124, p. 345.
76. Breitenlohner P., Freedman D. Z.— Ibidem, 1983, v. 115, p. 197; Ann. Phys. (N.Y.), 1982, v. 144, p. 249.
77. Witten E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 186, p. 412.
78. Gibbons G. W., Hull C. M., Warner N. P.— Ibidem, 1983, v. 218, p. 173.
79. Randjbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J.— Ibidem, 1984, v. 242, p. 447.
80. Salam A., Sezgin E.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 147, p. 47.
81. Frampton P. H., Moxhay P. J., Yamamoto K.— Ibidem, v. 144, p. 354.
82. Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.— Ibidem, v. 139, p. 154.
83. Page D. N., Pope C. N.— Ibidem, v. 145, p. 337.
84. De Witt B., Nicolai H.— Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 231, p. 506.
Biran B., Spindel Ph.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 141, p. 181.
Page D. N., Pope C. N.— Ibidem, v. 145, p. 333.
85. Ito K.— Ibidem, v. 147, p. 52.
Fujii Y., Inami T., Kato M., Ohta N.— Ibidem, 1983, v. 131, p. 319.

86. Witten E.—Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 195, p. 481.
Appelquist T., Chodos A.—Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, p. 141.
Candelas P., Weinberg S.—Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 237, p. 397.
Воронов Н. А., Коган Я. И.—Письма ЖЭТФ, 1983, т. 138, с. 262.
87. Славнов А. А., Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.
88. Jackiw R.—In: Relativity, Groups and Topology.— Amsterdam: North-Holland, 1984, p. 147.
Stora R.—Ibidem, p. 34.
Zumino B.—Ibidem, p. 86.
89. Witten E.—Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 223, p. 422.
90. Zumino B., Wu Y.-S., Zee A.—Ibidem, 1984, v. 239, p. 477.
91. Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P.—Ibidem, v. 243, p. 449.
92. Fujikawa K.—Phys. Rev. Ser. D, 1985, v. 31, p. 341.
93. Новиков С. П.—ДАН СССР, 1981, т. 260, с. 31; УМН, 1982, т. 37, вып. 5 (227), с. 3.
94. Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л.—ТМФ, 1984, т. 60, с. 206.
Faddeev L. D.—Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 145, p. 81.
95. Wess J., Zumino B.—Ibidem, 1971, v. 37, p. 95.
96. Atiyah M. F., Singer I.—Proc. Nat. Acad. Sci., 1984, v. 81, p. 2597.
97. Alvarez-Gaumé L., Witten E.—Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 234, p. 269.
98. Devchand C.—Ibidem, v. 238, p. 331.
99. Владимиров В. С., Волович И. В.—ТМФ, 1985, т. 62, с. 3.
100. Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev. JINR preprint E2-84-441.—Dubna, 1984.
101. Огиевский В. И., Сокачев Э.—ЯФ, 1978, т. 28, с. 1631; 1980, т. 31, с. 284.
102. Rosly A. A., Schwarz A. S.—Comm. Math. Phys., 1984, v. 95, p. 161, v. 96, p. 285.
103. Aref'eva I. Ya., Azakov S. I.—Nucl. Phys. Ser. B, 1980, v. 162, p. 238.
104. Candelas P., Reine D. J.—Ibidem, 1984, v. 248, p. 415.
105. Dual Theory: Physics Reports reprint. V. 1/Ed. M. Jacob.—Amsterdam: North-Holland, 1974.
106. Polyakov A. M.—Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 103, p. 207.
107. Fradkin E. S., Tseitlin A. A. P.N. Lebedev Institute preprint No. 261.—Moscow, 1984.
108. Ramond P.—Phys. Rev. Ser. D, 1971, v. 3, p. 2415.
Neveu A., Schwarz J. H.—Nucl. Phys. Ser. B, 1971, v. 31, p. 86.
109. Scherk J., Schwarz J. H.—Ibidem, 1974, v. 81, p. 118.
110. Волович И. В.—ТМФ, 1983, 56, с. 153; Lett. Math Phys., 1983, v. 7, p. 517.
111. Witten E.—Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 149, p. 351.
112. Migdal A. A.—Phys. Rept. Ser. C, 1984, v. 105, p. 2.
113. Владимиров В. С., Волович И. В.—ТМФ, 1984, т. 59, с. 3; т. 60, с. 169.
114. Green M. B., Schwarz J. H.—Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 243, p. 450.
115. Nemeschansky D., Yankelowicz S. SLAC preprint SLAC-PUP-3513.—Stanford, 1984.
116. Lovelace C.—Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 135, p. 75.
117. Chau L. L., Ge M. L., Rosy Teh. Trieste preprint IC/84/150.—1984.
118. Berends F. A., van Holten J. W., de Wit B., van Nieuwenhuizen P.—J. Phys. Ser. A, 1980, v. 13, p. 1643.
119. Nahm W.—Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 135, p. 149.
120. Brink L., Scherk J., Schwarz J. H.—Ibidem, 1977, v. 121, p. 77.
121. Gliozzi F., Scherk J., Olivea D.—Ibidem, v. 122, p. 253.
122. Cremmer E., Ferrari S., Scherk J.—Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 74, p. 61.
123. Gibbons G. W., Hawking S. W.—Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 2738.
Gibbons G. W., Perry M. J.—Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 146, p. 90.
Vilenkin A.—Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 2848.
Hartle J. B., Hawking S. W.—Ibidem, v. 28, p. 2960.
124. Bais F. A., Batenburg P. CERN preprint 3979/84.—Geneva, 1984.
125. Everett E.—Rev. Mod. Phys., 1957, v. 29, p. 454.
126. Randjbar-Daemi S., Salam A., Sezgin E., Strathdee J.—Phys. Lett. Ser. B, 1985, v. 151, p. 351.
127. Freund P.—Ibidem, p. 387.
128. Cheng S.-Y., Li P.—Comment. Math. Helv., 1981, v. 56, p. 327.
Li P., Yau S.-T.—Comm. Math. Phys., 1983, v. 88, p. 309.
129. Фрадкин Е. С., Цейтлин А. А.—Письма ЖЭТФ, 1985, т. 41, с. 169.
130. Арефьева И. Я., Волович И. В.—Письма ЖЭТФ, 1985, т. 41, вып. 12.

131. Witten E. Symmetry Breaking Patterns in Superstring Models: Princeton University preprint.— Princeton, 1985.
Dine M., Rohm R., Seiberg N., Witten E. Gluino Condensation in Superstring Models: Princeton University preprint.— Princeton, 1985.
Derendinger J. B., Ibanez L. E., Nilles H. P.— CERN preprint TH.4123/85.— Geneva, 1985.
Cecotti S., Derendinger J.-P., Ferrara S., Girandello L., Roncadelli M. CERN preprint TH.4103/85.— Geneva, 1985.
Breit J. D., Ovrut B. A., Segre G. C. University of Pennsylvania preprint UPR-0279.— Philadelphia, 1985.
132. Zwiebach B. Berkeley preprint UCB-PTH-85.— 1985.
Zumino B. Berkeley preprint UCB-PTH-85.— 1985.