1985 г. Август *Том 146, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

539.12.01

ТЕОРИИ КАЛУЦЫ — КЛЕЙНА: ОБЩИЙ ОБЗОР

А. Ходос

Цель этой заметки — дать неспециалисту некоторый, не лишенный определенной предвзятости, обзор основных идей, лежащих в основе подхода Калуцы — Клейна к объединению взаимодействий, а также совсем краткий очерк последних достижений. Изложение содержит минимум математики; заинтересованный читатель найдет в предлагаемом списке литературы (ни в коей мере не полном) все необходимое для подробного изучения вопросов, показавшихся ему достойными большего внимания.

I. ИСТОРИЯ

Если оставить в стороне раннюю попытку Нордстрема в 1914 г. [1], то история теорий Калуцы — Клейна начинается с Калуцы [2], чья статья «Zum Unitätsproblem der Physik» («О проблеме объединения физики») была в 1921 г. представлена Прусской академии наук Эйнштейном. Клейн [3] и другие [4] поддерживали эту идею на протяжении «классического» периода ее развития, длившегося примерно до середины 60-х или начала 70-х годов. Целью всей деятельности в этом направлении было в то время объединение на классическом уровне гравитации с электромагнетизмом за счет формального введения одного дополнительного пространственного измерения.

В 1924 г. де Витт [5] осознал, что, допустив существование более чем одного дополнительного измерения, можно с тем же успехом описать неабелевы калибровочные теории. В конце 70-х годов под влиянием прогресса в понимании многомерной супергравитации [6] и обнаружившегося совпадения с точностью до нескольких порядков масштаба Великого объединения и массы Планка идея Калуцы — Клейна внезапно приобрела широкую известность. В результате сейчас усердный исследователь, стремящийся ознакомиться с предметом, имеет перед собой список из нескольких сотен статей, причем все они написаны за последние несколько лет.

II. ОСНОВЫ

Пока в отсутствие каких-либо стимулирующих экспериментальных указаний в пользу теории Калуцы — Клейна стремление заниматься ею может быть вызвано лишь некоей априорной верой в справедливость этой идеи. Обращение во всякую веру происходит ле че, если имеется одно-два чуда. В нашем случае чудо происходит так.

*) Chodos A. Kaluza — Klein Theories: Overview.— Comm. Nucl. and Part. Phys. (Comm. Mod. Phys. Pt. A), 1984, v. 13, No. . 171—181.— Перевод А. Ю. Морозова.

Алан Ходос работает на физическом факультете Йельского университета, Нью-Хейвен, шт. Коннектикут, США.

Начнем в качестве простейшего нетривиального примера с общей теории относительности в пятимерном пространстве-времени. Действие равно

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{|g|}\, R, \tag{1}$$

где g_{AB} — пятимерная метрика, R — скаляр кривизны, $R = g^{AB} R_{AB}$, а G_5 — пятимерный аналог ньютоновской константы, имеющей на этот раз размерность (длина)[3]. Мы выберем топологию нашего пятимерного пространства совпадающей не с топологией пятимерного пространства Минковского, а с топологией многообразия $M^4 \times S^1$, где S^1 обозначает окружность с пока что неопределенным радиусом r. Тогда удобно записать метрику в следующем виде:

$$g_{AB} = \phi^{-1/3} \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu \phi & A_\mu \phi \\ A_\nu \phi & \phi \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Отметим, что такой выбор никак не ограничивает общности. Это не анзац, а просто выбор одной из произвольных параметризаций метрики g_{AB}.

Далее, сделанное предположение о топологии пятимерного пространства позволяет разложить каждую компоненту метрики в ряд Фурье по координате x^5:

$$g_{AB}(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{AB}^{(n)}(x^\mu)\, e^{inx^5/r}. \tag{3}$$

Стандартная размерная редукция получится теперь, если предположить, что $\partial/\partial x^5$ есть вектор Киллинга, т. е. что метрика не зависит от x^5. Иначе говоря, мы удерживаем лишь моду с $n = 0$ в разложении (3). Подставляя часть метрики, имеющую $n = 0$, в действие (1) и интегрируя по x^5, получим

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|\det\{g_{\mu\nu}\}|} \left(R^{(4)} + \frac{1}{4} \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{6} \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{\phi^2} \right). \tag{4}$$

Возникновение U(1)-калибровочного слагаемого с $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ и есть простейший пример калуцы-клейновского «чуда». В качестве приятного следствия легко получить, что калибровочное преобразование $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$ порождается специальным выбором пятимерного преобразования координат:

$$x'^\mu = x^\mu, \tag{5а}$$

$$x'^5 = x^5 + \lambda(x^\mu). \tag{5б}$$

Все обсуждение непосредственно, хотя и не вполне тривиально с технической точки зрения, обобщается на неабелев случай[8]. Для этого нужно выбрать фоновое многообразие в виде $M^4 \times B$ с компактным римановым B, допускающим семейство полей Киллинга K_i^a, $i = 1, \ldots, n$, порождающее некоторую n-мерную неабелеву группу G. В полной аналогии с пятимерным случаем можно убедиться, что в результате размерной редукции в действии возникает член, пропорциональный $F^i_{\mu\nu} F^{\mu\nu i}$, где $F^i_{\mu\nu}$ — напряженность поля, отвечающая группе G, а неабелево калибровочное преобразование связано со следующим координатным преобразованием на $M^4 \times B$:

$$x'^\mu = x^\mu, \tag{6а}$$

$$x'^a = x^a + \varepsilon^i K_i^a, \tag{6б}$$

причем

$$K_i^a \frac{\partial}{\partial x^a} \varepsilon^j = 0. \tag{6в}$$

Это обобщенное «чудо» приводит к тому, что можно было бы назвать центральной догмой теории Калуцы — Клейна: источником калибровочных теорий является многомерная общая теория относительности (возможно, супергравитация). Для истинно верующего это не просто возможность. а необходимость: никогда не следует вводить калибровочные теории «руками», они всегда должны возникать в результате размерной редукции. Например, теория, заданная действием

$$S=-\frac{1}{16\pi G_D}\int d^D x\sqrt{|g|}\left(R+\frac{1}{4}F^a_{AB}F^{ABa}\right), \tag{7}$$

в которой калибровочное поле F^a_{AB} «руками» вставлено в многомерное пространство, должна быть предана анафеме (конечно, при условии, что эту теорию нельзя получить из чистой гравитации в еще большем числе измерений).

Прежде чем завершить этот раздел, полезно обсудить редуцированное действие (4) несколько подробнее. Видно, что поле $\ln\,\phi/\phi_c$ играет роль обычного скалярного поля. Удобно выбрать ϕ_c, постоянное вакуумное значение поля ϕ, равным единице. Тогда параметр r буквально совпадает с радиусом пятого измерения. Для ранней теории Калуцы — Клейна это дополнительное скалярное поле создавало определенные сложности (редуцированная теория оказывалась скалярно-тензорной гравитацией). Теперь мы знаем, что скалярные поля часто играют важную роль при спонтанном нарушении калибровочных симметрий. Кроме того, квантовые поправки наверняка дают скалярам массу, устраняя тем самым их длинномасштабные гравитационные эффекты.

Из уравнения (4) видно также, что роль обычного калибровочного поля на самом деле играет $\tilde{A}_\mu=(1/\sqrt{16\pi G})\,A_\mu$. Эта информация существенна для определения величины заряда q, связанного с U(1)-калибровочным полем. Рассмотрим скалярное поле материи χ, взаимодействующее минимальным образом с пятимерной метрикой Калуцы — Клейна g_{AB}:

$$g^{AB}\,\nabla_A\nabla_B\chi=0. \tag{8}$$

Стоящая здесь ковариантная производная ∇_A вычисляется с помощью метрики g_{AB}. Чтобы поле χ имело заряд, оно обязательно должно зависеть от x^5. Простейшая возможность:

$$\chi=\chi_0(x^\mu)\,e^{ix^5/r}. \tag{9}$$

Другими словами, мы оставляем только моду с $n=1$ в фурье-разложении χ. Далее, чтобы выделить эффекты, связанные с калибровочным полем, удобно положить $\phi=1$ и $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ в метрике g_{AB}, заданной формулой (2). После этого получается, что $\chi_0(x^\mu)$ удовлетворяет стандартному уравнению Клейна — Гордона для заряженной частицы при условии, что заряд выбирается равным

$$q=\frac{h}{c}\,\frac{\sqrt{16\pi G}}{r}. \tag{10}$$

(*N. B.* Конечно, в уравнении (8) нет $\hbar$; постоянная Планка появляется лишь при выделении заряда из коэффициента при $\tilde{A}_\mu$.) В настоящее время нет никаких феноменологических оснований для отождествления q с наблюдаемым электрическим зарядом (например, в пятимерной модели любая заряженная частица имеет также массу порядка планковской). Тем не менее все известные нам калибровочные константы находятся в пределах

$$\frac{1}{100}\leqslant q\leqslant\frac{1}{10}. \tag{11}$$

С помощью уравнения (10) можно заключить отсюда, что r всегда должно выбираться лишь на несколько порядков большим планковской длины $1{,}6\cdot10^{-33}$ см. Пропорциональность калибровочных констант связи отношению планковской длины к размеру дополнительных измерений имеет место и в неабелевом случае [9]. В этом отношении теории Калуцы — Клейна обладают приятной самосогласованностью: малость дополнительных измерений, объясняющая их ненаблюдаемость, вытекает из того, что калибровочные константы не слишком сильно отличаются от единицы.

III. О ПЕРСПЕКТИВАХ РАЗМЕРНОЙ РЕДУКЦИИ

В случае пятимерной модели размерная теория работает столь хорошо, что легко не заметить принципиальных трудностей, от которых эта конструкция может пострадать при $D > 5$. Основная проблема состоит в том, что при выборе многообразия в виде

$$M = (\text{пространство Минковского}) \times B \tag{12}$$

с римановым и компактным B, допускающим неабелев набор полей Киллинга, это M не может быть решением классических уравнений Эйнштейна с космологической постоянной или без нее. Но в то же время именно такой выбор M необходим, чтобы размерная редукция работала так, как описано в предыдущем разделе.

В литературе часто предлагается выбрать для изучения то или иное M, по дополнительным измерениям производится интегрирование и реально обсуждается только редуцированная теория. Неосторожный читатель не успевает спросить, являются ли решения редуцированной теории одновременно решениями D-мерных уравнений движения. (На самом деле не являются, и дело нельзя поправить ни добавлением космологической постоянной, ни введением простого конформного фактора.)

Существуют по меньшей мере три точки зрения на такую ситуацию: 1) Размерная редукция — не более чем аппарат для получения эффективных четырехмерных теорий. Тогда неважно, удовлетворяются многомерные уравнения движения или нет. Эта точка зрения вполне полезна — например, такой подход прекрасно сработал при построении ($N = 8$)-супергравитации в четырех измерениях [6]. Однако при таком подходе все претензии на объединение отбрасываются с самого начала. 2) Дополнительные измерения существуют, но для получения спонтанной компактификации (т. е. чтобы получить решение многомерных уравнений с предполагаемой симметрией и топологией) надо ввести дополнительные поля материи [10]. Возможно, при этом идея объединения трактуется более серьезно, однако все еще есть опасность, что при введении полей материи ad hoc можно нарушить центральную догму из предыдущего раздела. 3) Если принимать дополнительные измерения совершенно серьезно, то следует начинать с чисто геометрической теории в многомерном пространстве и находить решение классических или, быть может, модифицированных квантовыми поправками уравнений движения, описывающее спонтанную компактификацию. Как отмечалось выше, чистая гравитация на классическом уровне для этой цели не подходит. Широко изучавшаяся супергравитация в одиннадцати измерениях [11, 12], похоже, работает, только если пространственно-временна́я часть многообразия есть не пространство Минковского, а антидеситтеровское пространство. Более того, масштаб длины, связанный с кривизной антидеситтеровского мира, по порядку величины совпадает с масштабом внутреннего пространства — интересный мир, но мы живем не в нем.

IV. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ

Возможно, что важное изменение этой картины происходит при включении однопетлевых квантовых эффектов. В частности, компактность дополнительных измерений через эффект Казимира приводит к поправкам к классическим уравнениям движения. Эти поправки были впервые вычислены в исходной пятимерной модели [13], в том числе с учетом температурных эффектов [14]. Также рассматривался вариант с d-мерным тором в качестве компактного многообразия [15]. Изучен эффект от включения полей материи [16]. По существу, было показано, что поля материи приводят к исправлению уравнений движения, решением которых является многообразие $M^4 \times S^N$[17]. (По техническим причинам вычисление ограничивается случаем нечетных N.) Более того, в решении фиксируется размер N-сферы в единицах планковской длины. Таким образом, в этих моделях предсказывается значение калибровочной константы связи редуцированной теории. (Скорее всего, это значение константы, измеренное на масштабе порядка размеров внутренних измерений. В реалистической модели следует использовать ренормгруппу, чтобы получить константу связи при лабораторных энергиях, которую можно сравнить с экспериментом [18].)

Хотя эти результаты и обнадеживают, необходимо иметь в виду следующие факты:

1) Поля материи, которые приводят к квантовой компактификации, обычно дают очень малые вклады в эффект Казимира. Это означает, что требуется огромное число полей (10^4 или 10^5), чтобы получить разумный результат для масштаба компактификации. Мало того, что введение скалярных полей противоречит центральной догме теории Калуцы — Клейна, еще и число этих полей должно быть нереально большим.

2) Поэтому интересно вычислить эффект Казимира за счет самого гравитационного поля на фоне геометрии $M^4 \times S^N$, чтобы выяснить, будет ли он столь же малым. Технически эта задача намного сложнее, чем вопрос с полями материи, но в настоящее время она успешно решается [19, 20]. Однако в гравитационном случае есть еще одна трудность: отсутствие подгоночного параметра типа числа полей. В случае полей материи, выбирая это число большим, можно обеспечивать применимость петлевого разложения [17], в случае же гравитации однопетлевое вычисление можно обосновывать лишь post hoc, если масштаб компактификации окажется достаточно великим по сравнению с планковской длиной L_P. Тогда на расстояниях, превышающих L_P, высшие квантовые поправки будут малы. Можно утешаться мыслью, что если реалистическая теория когда-нибудь появится, то размер дополнительных измерений будет значительно больше L_P, иначе калибровочные константы окажутся феноменологически неприемлемыми.

3) Как всегда, к любому квантово-гравитационному эффекту надо относиться с подозрением из-за отсутствия самосогласованной теории квантовой гравитации. При таком положении вещей высшие поправки не только невозможно рассчитать, им нельзя придать никакого смысла из-за неперенормируемости теории. Тем не менее эффект Казимира в теориях Калуцы — Клейна — это один из редких примеров, где квантовая гравитация, как ожидается, играет физически важную роль.

V КОСМОЛОГИЯ

В четырехмерной общей теории относительности подход к космологии лежит через изучение зависящих от времен решений уравнений движения, которые описывают развивающиеся вселенные. Эти же рассуждения можно применить и к теориям Калуцы — Клейна. Первый подобный анализ [21] относился к решениям пятимерной модели. Было предсказано, что одно измерение сжимается со временем, в то время как оставшиеся три пространственных измерения расширяются. Затем было получено решение для супергравитации в одиннадцати измерениях [22]. Оно естественным образом объясняет, почему именно три пространственных измерения расширяются, а семь — нет (а, скажем, не четыре и шесть). Справедливость этих моделей ограничена, однако, тем, что при изменении со временем масштаба внутренних измерений меняются и калибровочные константы. Возможность изменения фундаментальных констант со временем жестко ограничена экспериментальными данными [23]. Выход из положения могла бы дать модель, в которой дополнительные измерения не сжимаются, а имеют какой-нибудь постоянный размер (вероятно, малый) [24]. Можно рассуждать и иначе: когда сжимающиеся внутренние измерения достигают планковской длины L_P, квантовые эффекты, обсуждавшиеся в предыдущем разделе, начинают доминировать. В результате эти измерения замораживаются при каком-то фиксированном по отношению к L_P масштабе.

В последнее время при обсуждении космологии сразу встает вопрос об инфляции. Проделана некоторая работа, чтобы узнать, может ли в теориях Калуцы — Клейна существовать фаза инфляции, или же какие-нибудь из желательных следствий инфляции, например производство энтропии, могут рассматриваться прямо как результат размерной редукции [25, 26]. Видимо, сейчас рано судить о возможности создания убедительного сценария таким образом.

Важность подобных космологических исследований связана с тем, что они дают наибольшую и, возможно, единственную надежду найти какие-то эмпирические следствия, отличающие теории Калуцы — Клейна от других возможных путей объединения.

VI. ОБЛАКО НА ГОРИЗОНТЕ

Солнце не всегда сияет над многомерным миром. Возможно, самая серьезная проблема — отсутствие реалистического воплощения идеи Калуцы — Клейна. Ситуация может оказаться более сложной, чем проблема выбора одной правильной модели из многих возможных. Существует теорема [27] о невозможности построить модель с фермионами в киральном представлении калибровочной группы. (Эта теорема не абсолютно строгая, но очень близка к этому.) Если исключить простую, но не очень красивую возможность, что правые партнеры наблюдаемых нами левых лептонов и кварков появятся на следующем поколении ускорителей (или по крайней мере при какой-нибудь энергии, несущественной по сравнению с масштабом компактификации), то мы сталкиваемся с реальной трудностью. Это побуждает к отказу от некоторых стандартных положений римановой геометрии в многомерном пространстве [28].

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом обзоре мы сосредоточились на основных общих свойствах теорий Калуцы — Клейна. В последнее время проделана большая работа по изучению одиннадцатимерной супергравитации [11, 12], которая, вероятно, заслуживает более подробного обсуждения. Следует также иметь в виду, что основная часть литературы по теориям Калуцы — Клейна содержит намного больше математики, чем может показаться при чтении настоящей статьи, в частности интенсивно используется геометрия векторных расслоений [29]. Приводит это к прояснению или к затемнению физической картины, зависит от образования конкретного читателя.

Пока нельзя указать окончательное место идеи Калуцы — Клейна в физике. Без сомнения, многие физики находят ее очень полезной, но необходимо время, чтобы узнать, потребует ли описание природы дополнительных пространственных измерений, или же идея Калуцы — Клейна, несмотря на всю свою красоту, окажется лишь одним из тех милых лиц, что на мгновение появляются из толпы, чтобы исчезнуть в ней навсегда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nordstrom G.— Zs. Phys., 1914, Bd. 15, S. 504.
2. Kaluza Th.— Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. Math. und Phys. Kl., 1921, S. 966.
3. Klein O.— Zs. Phys., 1926, Bd. 37, S. 895.
4. Einstein A., Bergmann P. — Ann. of Math., 1938, v. 39, p. 683.
   Einstein A., Bergmann V., Bergmann P.— In: Theodor von Karman Anniversary Volume.— Pasadena, 1941, p. 212.
   Einstein A., Pauli W.— Ann of Phys., 1943, v. 44, p. 131.
   Thiry Y.— J. de Math. Pure et Appl., 1951, t. 30, p. 275.
   Souriau J. M.— Nuovo Cimento, 1963, v. 30, p. 565.
   Thirring W.— Acta Phys. Austr., 1972, Suppl. IX, p. 256.
5. De Witt B.— In: Dynamical Theory of Groups and Fields.— N.Y.: Gordon and Breach, 1965.
   Kerner R.— Ann. Inst. Henri Poincaré, 1968, t. 9, p. 143.
   Trautman A.— Rept. Math. Phys., 1970, v. 1, p. 29.
6. Cremmer E., Julia B.— Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 80, p. 48; Nucl. Phys. Ser. B, 1979, v. 159, p. 141.
7. Более подробное изложение некоторых результатов, приведенных в этом разделе, можно найти в: Witten E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 186, p. 142.
   Appelquist T., Chodos A.— Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 28, p. 772.
   См. также: Salam A., Strathdee J.— Ann. of Phys., 1982, v. 141, p. 316.
8. Cho Y. M.— J. Math., Phys., 1975, v. 16, p. 2029.
   Cho Y. M., Freund P. G. O.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 1711.
   Cho Y. M., Jang P. S.— Ibidem, p. 3789.
   Chang L. N., Macrae K. I., Mansouri F.— Ibidem, 1976, v. 13, p. 235.
9. Weinberg S.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 125, p. 265.
   См. также: Duff M. J., Pope C. N., Warner N. P.— Ibidem, v. 130, p. 254.
10. Horvath T., Palla L., Cremmer E., Scherk J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 127, p. 57.
    Luciani J. F.— Ibidem, 1978, v. 135, p. 111.
    Randjbar-Daemi S., Salam, Strathdee J.— Ibidem, 1983, v. 214, p. 491.
11. Freund P. G. O., Rubin M. A.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 97, p. 233.
    Englert F.— Ibidem, 1982, v. 119, p. 339.
    Biran B., Englert F., de Witt B., Nicolai H.— Ibidem, 1983, v. 124, p. 45.
    Englert F., Rooman M., Spindal P.— Ibidem, v. 127, p. 47.
12. Duff M. J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 219, p. 389.
    Duff M. I., Nilsson B. W., Pope C. N.— Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, p. 2043.
    Page D. N.— Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 28, p. 2976.
    Awada M. A., Duff M. J., Pope C. N.— Phys. Rev. Lett., 1983. v. 50, p. 294.
13. Appelquist J., Chodos A.— Ibidem, p. 141; Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 28, p. 772.
    Chodos A.— In: An Introduction to Kaluza—Klein Theories/Ed. H. C. Lee.— Singapore: Word Scientific, 1984.
14. Rubin M. A., Barkan-Roth B.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 226, p. 444.
15. Appelquist T., Chodos A., Myers E.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 127, p. 51.
    Inani T., Yasuda O.— Ibidem, v. 133, p. 180.
16. Tsokos K.— Ibidem, v. 126, p. 451.
    Rubin M. A., Roth B.— Ibidem, v. 127, p. 55.
17. Candelas P., Weinberg S. Texas Preprint UTTG-6-83.— 1983.
    См. также: Коган Я. И., Воронов Н. А. Письма ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 262.
18. Weinberg S.— In: Proc. of 4th Workshop on Grand Unification.— Boston: Birkhäuser, 1983.
19. Chodos A., Myers E.— Ann. of Phys., 1984, v. 156, p. 412.
20. Rubin M. A., Ordonez C. R. (in preparation).
21. Chodos A., Detweiler S.— Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2167.
22. Freund P. G. O.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 209, p. 146.
23. Marciano W.— Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, p. 489.
24. Randjbar Daemi S., Salam A., Strathdek J.— Phys. Lett. Ser. B, 1984, v. 135, p. 388.

25. Shafi Q., Wetterich C.— Ibidem, 1983, v. 129, p. 387.
26. Alvarez E., Belen-Gavela M.— Phys. Rev. Lett., 1983, v. 51, p. 931.
Sahdev D.— Phys. Lett. (to be published).
Barr S. M., Brown L. S.— Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 29, p. 2779.
Abbott R. B., Barr S. M., Ellis S. D.— Ibidem, v. 30, p. 720.
Okada Y. University of Tokyo preprint UT-429.— Tokyo, 1984.
27. Witten E. Fermion Numbers in Kaluza—Klein Theory: Princeton preprint.— October 1983.
28. Weinberg S. Quasi-Riemannian Theories of Gravitation in More than Four Dimensions: Texas preprint UTT-1-84.— 1984.
Wetterich C. Dimensional Reduction of Fermions in Generalized Gravity: Bern preprint BUTP-84/5.— 1984.
29. Например: Orzalesi C. A.— Forschr. Phys., 1981, Bd. 29, S. 413.
Coguereaux R.— Multi-dimensional Universes. Kaluza-Klein, Einstein Spaces and Symmetry Breaking.— Marseile. CPT-83/P-1556, December 1983.
Cho Y. M.— См. [8].