

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145.6

СУПЕРСИММЕТРИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Л. Э. Генденштейн, И. В. Криве

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	553
2. Простейшая модель — суперсимметричный осциллятор	555
а) Два свойства суперсимметрии	555
б) Состояния и операторы	556
в) Первое появление генераторов суперсимметрии и суперсимметричного гамильтониана	556
г) Первое появление супералгебры	557
д) Структура супералгебр	557
е) Неотрицательность спектра гамильтониана	558
ж) Двукратное вырождение уровней гамильтониана ($E \neq 0$)	558
з) Алгебра Клиффорда и кратность вырождения уровней	558
и) Заряды и суперзаряды	560
к) Необычные свойства параметров преобразований	561
л) Чет—нечет	561
м) Алгебра Грассмана	562
н) Нулевая энергия вакуума	562
о) Фермионы без дираковского моря	563
п) Первый пример суперсимметрии в реальном мире	565
3. Суперсимметричная квантовая механика	566
а) Можно включить взаимодействие, сохранив суперсимметрию	566
б) Матричная реализация фермионных операторов и «ненормальность» бозонных операторов	567
в) Гамильтониан и суперпотенциал	567
г) Общая константа взаимодействия и сокращение расхождений	568
д) Энергия вакуума и топология суперпотенциала	568
е) Спонтанное нарушение суперсимметрии	570
ж) Нахождение спектров уравнения Шрёдингера с помощью суперсимметрии	571
4. Интегралы Березина	572
а) Почему нет «координатного представления» для фермионных степеней свободы	572
б) Голоморфное представление для бозонов	573
в) Голоморфное представление для фермионов	574
г) Интегрирование по грассмановым переменным	575
д) Гауссовы интегралы	576
5. Суперсимметрия в реальном мире	576
а) Электрон в магнитном поле	576
б) Ядерная физика	580
6. Нулевые моды, топология и суперсимметрия	581
7. Суперсимметрия и функциональные замены переменных	583
а) Стохастические дифференциальные уравнения	583
б) «Духи» Фаддеева — Попова	585
8. Заключение	588
Список литературы	588

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор предназначен, на наш взгляд, для первого ознакомления с суперсимметрией прежде всего как с новым видом симметрии. Нам казалось, что для этого следует рассмотреть максимально простые модели, на

примере которых можно выделить и проанализировать характерные свойства суперсимметрии, сохраняющиеся и в более сложных моделях.

Самое главное свойство суперсимметрии состоит в том, что она весьма нетривиальным образом объединяет *непрерывные* преобразования (например, трансляции) с *дискретными* преобразованиями особого вида (типа отражения). При этом сохраняется формальная аналогия между этими двумя типами преобразований, имеющих существенно различную природу. Именно наличие этой аналогии и является «изюминкой» суперсимметрии.

В квантовой теории поля такая аналогия была подмечена уже давно — это аналогия между бозонными и фермионными операторами. Бозонные операторы соответствуют непрерывным преобразованиям, а фермионные — дискретным. Формальная аналогия состоит в том, что для бозонных полей имеют место *коммутационные* соотношения, а для фермионных — *антикоммутационные*. С учетом этого различия многие формулы для бозонных и фермионных теорий поля обнаруживали удивительное сходство. Это сходство было отмечено еще при рождении квантовой механики (например, Дираком в его знаменитой книге), однако прошло почти полвека, пока Гольфанд и Лихтман¹, Волков и Акулов² и Весс и Зумино³ не заметили, что это сходство позволяет *объединить* в одну группу (названную супергруппой) преобразования, соответствующие бозонным и фермионным операторам. Таким образом, появились первые теории поля, в которых бозоны и фермионы обрели, наконец, равноправие.

До появления суперсимметричных теорий бозоны (например фотоны) и фермионы (например электроны) рассматривались как частицы, имеющие принципиально различную природу. Бозоны считались носителями «взаимодействий», а фермионы — носителями «материи». Это разделение особенно укрепилось с появлением калибровочных теорий, потому что в этих теориях бозонные поля являлись калибровочными полями, непосредственно связанными с группой симметрии теории, а фермионные поля вводились «руками». Вследствие этого свойства бозонные поля *однозначно* определялись симметрией теории, а фермионные поля могли принадлежать *произвольным* представлениям группы симметрии.

Только в суперсимметричных теориях впервые удалось объединить «материю» и «взаимодействие», точнее, убрать различие между ними. В этих теориях бозоны и фермионы объединяются в единые (супер)-мультиплеты. Это свойство суперсимметричных теорий, конечно, вызвало большой интерес.

Вторым важнейшим свойством суперсимметричных теорий оказалось резкое сокращение расходимостей, которые до сих пор являются одной из нерешенных принципиальных проблем в квантовой теории поля. Более того, появились, наконец, первые теории поля, вообще свободные от расходимостей в четырехмерном пространстве-времени.

Сокращение расходимостей в суперсимметричных теориях сразу же оживило попытки построения квантовой теории гравитации (супергравитации), поскольку все предшествующие попытки сталкивались с непреодолимым препятствием — неперенормируемостью гравитационного взаимодействия, если считать, что квантами этого взаимодействия являются только бозоны (гравитоны со спином 2). Таким образом, суперсимметрия стала сегодня одной из центральных идей в попытках построения единой квантовой теории поля, объединяющей все взаимодействия, включая гравитационное.

Что можно сказать сегодня о реализации суперсимметрии в природе?

Ситуация в физике элементарных частиц продолжает оставаться неопределенной. С уверенностью можно лишь сказать, что простейшие варианты суперсимметричных моделей «не проходят», однако остается еще достаточный «простор» для более сложных теорий, которые активно разрабатываются во всем мире. Поискам проявлений суперсимметрии в физике высоких энергий посвящены специальные программы *).

*) См. также другие статьи в этом номере журнала. (Примеч. ред.)

Однако привлекательные черты суперсимметрии оказались настолько яркими, что даже отсутствие экспериментальных подтверждений в физике элементарных частиц, т. е. в той области, для которой суперсимметрия была изобретена, не могло остановить все усиливающегося роста интереса к ней.

Причина этого заключена, по-видимому, в том, что суперсимметрия представляет собой новый вид симметрии, расширяющий наши представления о симметрии физических систем. Идеи и методы суперсимметрии проникли в статистическую физику^{40,41,44-46} и физику ядра^{47,48}. Они привели к созданию новых математических теорий^{15,16}. Суперсимметрия обнаружила себя в задачах квантовой механики³³.

Таким образом, сегодня можно уже утверждать с определенностью, что суперсимметрия в природе *реализуется*. Ее проявлениям в значительной мере посвящен настоящий обзор.

Для широкого круга физиков ознакомление с простыми и красивыми идеями суперсимметрии в значительной мере затруднено тем, что имеющиеся обзоры^{4-8,12,13} рассчитаны в основном на специалистов по современной квантовой теории поля. Будучи необычной сама по себе, в теории поля суперсимметрия по необходимости усложняется спинорной структурой генераторов, требуемой для правильной связи спина со статистикой, и, кроме того, специфическими трудностями, присущими квантовой теории поля как системе с бесконечным числом степеней свободы.

Задачу «вхождения» в суперсимметрию во многом облегчает появление «суперсимметричной квантовой механики»^{17,18}, которая возникла как лаборатория для изучения суперсимметрии, но впоследствии оказалась адекватной реальным задачам квантовой механики.

Кроме педагогического аспекта, рассмотрение суперсимметрии в квантовой механике может представить интерес еще по двум причинам: во-первых, суперсимметрия позволяет взглянуть по-новому на ставшие уже «классическими» задачи квантовой механики, широко используемые в различных областях, а, во-вторых, такой, подход полезен и для развития самих суперсимметричных теорий, поскольку вводит в эти теории круг представлений, возникших благодаря большому опыту, накопленному при исследовании задач квантовой механики.

Обзор построен следующим образом: в гл. 2 подробно рассмотрена простейшая модель — суперсимметричный осциллятор, который столь же полезен при изучении суперсимметрии, как обычный осциллятор — при изучении квантовой механики; в гл. 3 рассмотрена суперсимметричная квантовая механика и подчеркнуты те ее свойства, которые являются наиболее характерными и сохраняются в суперсимметричных теориях поля; гл. 4 посвящена формализму Березина, который является сегодня основным при описании фермионных степеней свободы; в гл. 5 изложена задача, в которой суперсимметрия является физической симметрией, — задача об электроны в магнитном поле; гл. 6 посвящена связи между суперсимметрией и нулевыми модами — эта связь послужила основой для применения методов суперсимметрии в топологии; в гл. 7 рассмотрена суперсимметрия в ядерной физике, и, наконец, гл. 8 посвящена использованию суперсимметрии при функциональных заменах переменных в методе континуального интегрирования — так, суперсимметрия вошла в теорию квантования калибровочных полей, статистическую физику и теорию случайных процессов.

2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ — СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

а) Д в а с в о й с т в а с у п е р с и м м е т р и и

Под «суперсимметрией» подразумевают обычно два свойства:

1. Существуют преобразования, переводящие бозоны в фермионы и обратно, причем гамильтониан инвариантен относительно таких преобразований.

2. Алгебра этой симметрии включает не только привычные коммутационные соотношения для генераторов, но и антикоммутационные, т. е. является не алгеброй Ли, а ее обобщением — супералгеброй Ли.

Оба эти свойства тесно связаны друг с другом. Чтобы это увидеть, начнем с самого простого случая, когда есть всего лишь одна бозонная степень свободы и одна фермионная, и найдем простейший суперсимметричный гамильтониан. Этот гамильтониан будет описывать «суперсимметричный гармонический осциллятор».

б) С о с т о я н и я и о п е р а т о р ы

Базисные векторы состояний рассматриваемой системы естественно задать в виде

$$|n_B, n_F\rangle, \quad n_B = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad n_F = 0, 1, \quad (2.1)$$

где n_B и n_F — бозонное и фермионное числа заполнения. Операторы рождения и уничтожения, которые мы для удобства обозначим b^+ и b^- для бозонов и f^+ и f^- для фермионов, действуя на векторы состояний $|n_B, n_F\rangle$, изменяют числа заполнения n_B и n_F стандартным образом. Операторы $b^\pm$ и $f^\pm$ удовлетворяют следующим соотношениям коммутации и антикоммутации:

$$[b^-, b^+] = 1, \quad \{f^-, f^+\} \equiv f^-f^+ + f^+f^- = 1, \quad (2.2)$$

$$f^{+2} = f^{-2} = 0, \quad (2.3)$$

$$[b, f] = 0. \quad (2.4)$$

Свойство операторов $f^\pm$, выражаемое соотношением $f^2 = 0$, называется *нильпотентностью*. В последующем оно будет играть важную роль.

в) П е р в о е п о я в л е н и е г е н е р а т о р о в с у п е р с и м м е т р и и и с у п е р с и м м е т р и ч н о г о г а м и л ь т о н и а н а

Как определить операторы, превращающие бозон в фермион и наоборот? В простейшем случае действие таких операторов $Q_\pm$ может быть следующим:

$$Q_+ |n_B, n_F\rangle \propto |n_B - 1, n_F + 1\rangle, \quad (2.5)$$

$$Q_- |n_B, n_F\rangle \propto |n_B + 1, n_F - 1\rangle, \quad (2.6)$$

т. е. оператор Q_+ превращает бозон в фермион, а Q_- — наоборот, фермион в бозон. Выражая эти операторы через операторы рождения и уничтожения, получаем

$$Q_+ = qb^-f^+, \quad Q_- = qb^+f^-, \quad (2.7)$$

где q — произвольная константа, одна и та же для того, чтобы Q_+ и Q_- были сопряжены друг другу.

Благодаря наличию фермионных операторов $f^\pm$ операторы $Q_\pm$ также являются *нильпотентными*:

$$Q_+^2 = Q_-^2 = 0. \quad (2.8)$$

Это их свойство сохранится и в более общих моделях. Оно тесно связано с *антикоммутацией*: если мы определим эрмитовы операторы

$$Q_1 = Q_+ + Q_-, \quad Q_2 = -i(Q_+ - Q_-), \quad (2.9)$$

то они, вследствие (2.8), антикоммутируют друг с другом:

$$\{Q_1, Q_2\} = 0, \quad (2.10)$$

и, кроме того, их квадраты равны:

$$Q_1^2 = Q_2^2 = \{Q_+, Q_-\}. \quad (2.11)$$

Эти соотношения подсказывают вид простейшего гамильтониана H , инвариантного относительно преобразований, перемешивающих бозоны и фермионы (см. (2.5), (2.6)), т. е. обладающего *суперсимметрией*:

$$H = Q_1^2 = Q_2^2 = \{Q_+, Q_-\}. \quad (2.12)$$

Условие суперсимметричности гамильтониана:

$$[H, Q] = 0, \quad (2.13)$$

где Q обозначает любой из операторов $Q_{\pm}$ или $Q_{1,2}$, обеспечивается, как легко видеть, нильпотентностью операторов $Q_{\pm}$.

г) Первое появление супералгебры

Объединяя соотношения (2.10), (2.12), (2.13) в виде

$$\{Q_i, Q_k\} = 2\delta_{ik}H, \quad i, k = 1, 2, \quad (2.14)$$

$$[Q_i, H] = 0, \quad (2.15)$$

мы приходим к простейшей *супералгебре Ли*, т. е. алгебре, включающей *как* соотношения коммутации, *так и* соотношения антикоммутации. Эта супералгебра характеризует новый вид динамической симметрии — *суперсимметрию*. Динамический характер симметрии проявляется в том, что гамильтониан H входит в число генераторов супералгебры.

д) Структура супералгебр

В дальнейшем мы будем ограничиваться только простейшими супералгебрами Ли вида (2.14), (2.15), однако надо сказать, что это лишь весьма частный вид супералгебр Ли. Охарактеризуем общую структуру таких алгебр. Основным их свойством является Z_2 -*градуировка*, т. е. разделение всех генераторов на два класса: четные и нечетные. Структура супералгебры имеет вид

$$[C, C] \propto C, \quad (2.16)$$

$$[C, H] \propto H, \quad (2.17)$$

$$\{H, H\} \propto C, \quad (2.18)$$

где буквами C и H обозначены четные и нечетные генераторы. Структурные константы, не выписанные явно в правых частях формул (2.16)–(2.18), должны, во-первых, удовлетворять естественным условиям симметрии (для (2.18)) или антисимметрии (для (2.16), (2.17)), а во-вторых, соотношению, являющемуся обобщением тождества Якоби на случай супералгебр. Последнее необходимо для того, чтобы соответствующая супергруппа Ли была ассоциативной.

В случае супералгебры (2.14), (2.15) нечетными генераторами являются операторы Q_i , а единственным четным генератором — гамильтониан H .

Обратим особое внимание на соотношение (2.17). Оно показывает, что нечетные генераторы принадлежат некоторому представлению алгебры Ли (обычной, а не «супер»), причем генераторами этой алгебры Ли являются четные генераторы. Это было одной из главных эвристических идей при появлении суперсимметрии в релятивистской теории поля: нечетные генераторы — генераторы суперсимметрии — преобразуются там по спинорному представлению группы Лоренца. Вследствие принципа Паули нечетный характер генераторов суперсимметрии связан в релятивистской теории поля с их спинорной структурой.

е) Неотрицательность спектра гамильтониана

Вернемся к рассматриваемому простому гамильтониану (2.12) и изучим его свойства, потому что некоторые из них сохраняются в общем случае, так как эти свойства не зависят от конкретной модели, а определяются только наличием суперсимметрии.

Прежде всего заметим, что спектр гамильтониана H неотрицателен, так как согласно (2.12) H является квадратом эрмитова оператора.

ж) Двукратное вырождение уровней гамильтониана ($E \neq 0$)

Уровни гамильтониана H с энергией $E \neq 0$ двукратно вырождены. Поскольку это свойство является одним из наиболее характерных свойств суперсимметричных теорий, покажем, как оно выводится из соотношений супералгебры (2.14), (2.15).

Вследствие соотношения (2.15) можно выбрать общую систему собственных векторов гамильтониана H и одного из операторов Q_1 или Q_2 . Выберем Q_1 и возьмем одно из состояний этой системы, для которого

$$Q_1\psi_1 = q\psi_1, \quad H\psi_1 = q^2\psi_1. \quad (2.19)$$

Покажем, что оператор Q_2 переводит ψ_1 снова в собственный вектор оператора Q_1 , но с противоположным по знаку собственным значением. Обозначим

$$\psi_2 = Q_2\psi_1. \quad (2.20)$$

Получаем

$$Q_1\psi_2 = Q_1Q_2\psi_1 = -Q_2Q_1\psi_1 = -qQ_2\psi_1 = -q\psi_2. \quad (2.21)$$

С другой стороны, поскольку $[H, Q_2] = 0$,

$$H\psi_2 = HQ_2\psi_1 = Q_2H\psi_1 = q^2Q_2\psi_1 = q^2\psi_2, \quad (2.22)$$

т. е. ψ_2 является также собственным состоянием гамильтониана H , с тем же собственным значением, что и ψ_1 . Таким образом, если $q \neq 0$, т. е. $E = q^2 > 0$, рассматриваемый уровень гамильтониана двукратно вырожден. Состояния, вырожденные по энергии и переводящиеся друг в друга действием нечетных генераторов суперсимметрии, называются *суперпартнерами*.

з) Алгебра Клиффорда и кратность вырождения уровней

Посмотрим на это двукратное вырождение с более общей точки зрения и найдем кратность вырождения уровней гамильтониана для супералгебр вида (2.14), (2.15), но содержащих произвольное число N суперзарядов Q_i . Такой вид имеют супералгебры в суперсимметричных теориях поля в системе отсчета, в которой трехмерный импульс равен нулю, и поэтому кратность вырождения определяет состав *супермультиплетов*.

Кратность вырождения уровня гамильтониана H с энергией E равна, очевидно, размерности подпространства, инвариантного относительно действия всех операторов Q_i .

Если $E = 0$, то соответствующее подпространство одномерно — суперсимметрия не приводит к вырождению этого уровня. Будем называть этот уровень нулевым, поскольку ему соответствует нулевое собственное состояние гамильтониана.

Рассмотрим теперь кратность вырождения ненулевых уровней, для которых $E \neq 0$.

В подпространстве векторов состояний, принадлежащих данному собственному значению E гамильтониана H , этот гамильтониан кратен, очевид-

но, единичному оператору. Изменим нормировку операторов Q_i , введя операторы

$$q_i = \frac{Q_i}{\sqrt{E}}. \quad (2.23)$$

Гамильтониан H при таком изменении нормировки превратится просто в единичный оператор на рассматриваемом подпространстве. Вместо алгебры (2.14), (2.15) теперь мы будем иметь

$$q_i q_k + q_k q_i = 2\delta_{ik}. \quad (2.24)$$

Эти соотношения определяют алгебру Клиффорда с N образующими q_i ($i = 1, \dots, N$). Задача нахождения кратности вырождения уровней сводится, таким образом, к задаче определения размерности представлений алгебры Клиффорда. Эта задача давно решена, но для того чтобы наше изложение было замкнутым, а также имея в виду, что алгебры Клиффорда являются центральным объектом в суперсимметричных теориях, мы приведем здесь простое рассмотрение этого вопроса, используя хорошо знакомые физикам фермионные операторы.

Введем n пар фермионных операторов рождения и уничтожения: f_α^+ , f_α^- ($\alpha = 1, \dots, n$). Эти операторы удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям:

$$\{f_\alpha^+, f_\beta^+\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{f_\alpha^+, f_\beta^-\} = 0, \quad \{f_\alpha^-, f_\beta^-\} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n). \quad (2.25)$$

По аналогии с бозонным случаем введем фермионные «координаты» x_α и «импульсы» p_α :

$$x_\alpha = f_\alpha^+ + f_\alpha^-, \quad p_\alpha = \frac{1}{i}(f_\alpha^+ - f_\alpha^-). \quad (2.26)$$

Из соотношений (2.25) следует, что

$$\{x_\alpha, x_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad \{p_\alpha, p_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad \{x_\alpha, p_\beta\} = 0. \quad (2.27)$$

Легко видеть, что мы получили как раз алгебру Клиффорда с N образующими, причем $N = 2n$. Действительно, достаточно просто изменить обозначения, чтобы от соотношений (2.27) перейти к соотношениям (2.24): $x_\alpha \rightarrow q_{2\alpha-1}$, $p_\alpha \rightarrow q_{2\alpha}$. На этом примере мы можем увидеть, кстати, как существенно отличаются фермионные «координаты» и «импульсы» от обычных, бозонных. В фермионном случае в антикоммутационных соотношениях (2.27) «координаты» x_α и «импульсы» p_α полностью расщепились: каждый оператор сам себе канонически сопряжен (в смысле антикоммутации). Поэтому можно вообще не различать «координат» и «импульсов», обозначая их сходным образом, что мы и сделали, перейдя к операторам q_i *).

Теперь легко ответить на вопрос, чему равна размерность представления алгебры Клиффорда (2.24) с четным числом образующих $N = 2n$. Размерность представления равна, очевидно, числу различных состояний в системе с n фермионными степенями свободы. Каждое из n одночастичных фермионных состояний может быть или пустым или заполненным, и поэтому полное число состояний, а вместе с ним и размерность ν представления алгебры Клиффорда с $N = 2n$ образующими дается формулой

$$\nu = 2^n = 2^{N/2}. \quad (2.28)$$

Это — единственное неприводимое представление алгебры Клиффорда при четном N . При нечетном $N = 2n + 1$ имеются два неприводимых представления, каждое из которых имеет размерность

$$\nu = 2^n = 2^{[N/2]}, \quad (2.29)$$

*) По этой причине в некоторых работах под «числом фермионных степеней свободы» подразумевается число операторов q_i . При таком определении в рассматриваемом случае имеется не n , а $N = 2n$ фермионных степеней свободы.

где [...] — символ целой части. На доказательстве этих утверждений мы здесь не останавливаемся (см. ⁶⁵).

Формула (2.29) охватывает случаи как четного, так и нечетного N и задает кратность вырождения уровней суперсимметричного гамильтониана H с энергией $E \neq 0$, т. е. число состояний в одном супермультиплете.

и) З а р я д ы и с у п е р з а р я д ы

Выразим гамильтониан H через операторы рождения и уничтожения. В случае, когда $Q_{\pm}$ задаются в виде (2.7), получаем

$$H = \{Q_+, Q_-\} = q^2 (b^+ b^- + f^+ f^-) = \\ = q^2 \left(b^+ b^- + \frac{1}{2} \right) + q^2 \left(f^+ f^- - \frac{1}{2} \right) \equiv H_B + H_F. \quad (2.30)$$

Последние равенства выписаны для того, чтобы показать, что гамильтониан H представляет собой сумму гамильтонианов невзаимодействующих друг с другом бозонного и фермионного осцилляторов H_B и H_F с энергиями E_B и E_F соответственно:

$$H_B = q^2 \left(b^+ b^- + \frac{1}{2} \right), \quad E_B = q^2 \left(n_B + \frac{1}{2} \right), \quad n_B = 0, 1, \dots, \infty, \quad (2.31)$$

$$H_F = q^2 \left(f^+ f^- - \frac{1}{2} \right), \quad E_F = q^2 \left(n_F - \frac{1}{2} \right), \quad n_F = 0, 1. \quad (2.32)$$

Частоты $\omega = q^2$ этих осцилляторов одинаковы — именно это свойство обеспечивает суперсимметрию гамильтониана H . Здесь уместно вспомнить связь между совпадением частот и появлением дополнительной симметрии для обычного двумерного осциллятора с гамильтонианом

$$H_{2B} = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2). \quad (2.33)$$

При $\omega_1 = \omega_2$ этот гамильтониан становится инвариантным относительно поворотов, генерируемых оператором момента $L = q_1 p_2 - q_2 p_1$:

$$[H_{2B}, L] = 0. \quad (2.34)$$

Если вместо двух вещественных координат q_1 и q_2 ввести одну комплексную $q = q_1 + i q_2$, то преобразование поворота примет знакомый вид фазового преобразования:

$$q \rightarrow e^{i\varphi} q. \quad (2.35)$$

Инвариантность относительно этого преобразования в теории поля влечет за собой сохранение заряда (например, электрического). В данном случае роль заряда играл момент L .

Аналогом «заряда» L в случае суперсимметрии являются суперзаряды Q . Чтобы яснее увидеть эту аналогию, выразим L через операторы рождения и уничтожения:

$$L = -i (b_1^+ b_2^- - b_2^+ b_1^-). \quad (2.36)$$

Нетрудно видеть, что каждое из слагаемых в этой формуле также является интегралом движения:

$$[H_{2B}, b_1^+ b_2^-] = 0, \quad [H_{2B}, b_2^+ b_1^-] = 0. \quad (2.37)$$

Эти интегралы движения

$$L_+ = b_1^+ b_2^-, \quad L_- = b_2^+ b_1^- \quad (2.38)$$

являются явными аналогами операторов $Q_{\pm}$ (см. (2.7)) и тоже превращают квант возбуждения одной степени свободы в квант возбуждения другой степени свободы, только в данном случае это превращение не бозон $\leftrightarrow$ фермион,

а бозон ↔ бозон. Такое взаимопревращение квантов не меняет энергии (т. е. генераторы $L_{\pm}$ коммутируют с гамильтонианом H_{2B}) как раз в том случае, если частоты ω_1 и ω_2 совпадают.

Аналогично тому как L генерирует повороты в пространстве двух бозонных степеней свободы q_1 и q_2 , операторы Q генерируют «повороты» в пространстве «бозон — фермион». В первом случае параметром преобразования является угол поворота φ — обычное c -число. Что должно играть роль параметра преобразования в случае суперсимметрии?

к) Необычные свойства параметров преобразований

Как известно, изменение какого-либо оператора A под действием преобразования, генерируемого другим оператором B , имеет вид

$$\delta A \propto [\varepsilon B, A], \quad (2.39)$$

где ε — параметр преобразования *).

В случае поворота в пространстве q_1, q_2 , поскольку генератором преобразования является оператор L , получаем

$$\delta q_1 \propto [\varphi L, q_1] \propto \varphi q_2, \quad \delta q_2 \propto [\varphi L, q_2] \propto \varphi q_1. \quad (2.40)$$

Попробуем поступить аналогично и в случае суперсимметрии, когда генераторами преобразований являются операторы Q , и предположим сначала, что параметр преобразования ε — тоже c -число.

Для вариации бозонных операторов, например b^+ , получаем

$$\delta b^+ \propto [\varepsilon Q_+, b^+] = [\varepsilon b^- f^+, b^+] = \varepsilon f^+ [b^-, b^+] = \varepsilon f^+. \quad (2.41)$$

Это совпадает с ожидаемой структурой $\delta b \propto \varepsilon f$, сходной с (2.40). Для вариации же фермионных операторов мы не получим желаемой структуры $\delta f \propto \varepsilon b$:

$$\delta f^- \propto [\varepsilon Q_+, f^-] = [\varepsilon b^- f^+, f^-] = \varepsilon b^- [f^+, f^-] \neq \varepsilon b. \quad (2.42)$$

Вот если бы в формуле (2.42) вместо коммутатора $[f^+, f^-]$ стоял антикоммутатор $\{f^+, f^-\}$, то мы получили бы как раз желаемую структуру преобразования $\delta f \propto \varepsilon b$. Как убить двух зайцев: сохранить коммутатор $[b^-, b^+]$ в соотношении (2.41), но получить антикоммутатор $\{f^+, f^-\}$ в формуле (2.42)? Этого можно добиться, если потребовать, чтобы параметр преобразования ε обладал несколько необычными свойствами — коммутировал с бозонными операторами, но антикоммутировал с фермионными. Действительно, в таком случае

$$\delta b \propto [\varepsilon Q_+, b] = \varepsilon Qb - b\varepsilon Q = \varepsilon Qb - \varepsilon bQ = \varepsilon [Q, b] \propto \varepsilon f, \quad (2.43)$$

$$\delta f \propto [\varepsilon Q, f] = \varepsilon Qf - f\varepsilon Q = \varepsilon Qf + \varepsilon fQ = \varepsilon \{Q, f\} \propto \varepsilon b. \quad (2.44)$$

л) Чет — нечет

Мы пришли к еще одному важному свойству суперсимметричных теорий: не только операторы, но и параметры преобразований делятся на два класса — *четные* и *нечетные*. Четные параметры — это обычные c -числа, и они коммутируют со всеми величинами (операторами и параметрами). а нечетные, такие, например, как ε , со всеми четными величинами коммутируют, но антикоммутируют с нечетными (тоже как операторами, так и параметрами). Это свойство параметров преобразования в суперсимметричных теориях является, наверное, одним из наиболее непривычных, потому что если для операторов мы «согласны» принять любые перестановочные соотношения,

*) Мы представляем это и последующие соотношения в схематическом виде, чтобы обратить внимание читателя прежде всего на соотношения коммутации и антикоммутации.

то параметры преобразований мы всегда рассматривали раньше как обычные числа. Нечетные параметры в суперсимметрии именно тем и непривычны, что, обладая формально статусом чисел, а не операторов, они приобретают новое свойство — некоммутативность, которое мы привыкли связывать только с операторами. Поэтому в «суперматематике» — новом разделе математики¹⁵⁻¹⁶, развивающемся в тесном переплетении с физическими исследованиями по суперсимметрии, — обобщается само понятие коммутации таким образом, чтобы для четных величин коммутатор оставался коммутатором, а для нечетных — превращался в антикоммутатор. Можно сказать, что именно в этом обобщении понятия коммутации и кроется та формальная аналогия между бозонными и фермионными операторами, о которой шла речь во введении. Все это тесно связано с упомянутой выше Z_2 -градуировкой супералгебр Ли (см. (2.16) — (2.18)). Для четных и нечетных величин всех типов (операторов и параметров) выполняются естественные «правила умножения»:

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}, \mathcal{C} \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H}, \mathcal{H} \cdot \mathcal{H} = \mathcal{C}, \quad (2.45)$$

где буквами $\mathcal{C}$ и $\mathcal{H}$ схематически обозначены четные и нечетные величины. В частности, соотношения (2.43), (2.44) показывают, что вариация четного оператора b является тоже четной, а вариация нечетного оператора f является нечетной.

м) Алгебра Грассмана

Нечетные параметры антикоммутируют не только с другими нечетными величинами, но и сами с собой, т. е. их квадраты равны нулю. В этом можно убедиться из следующих соображений. Преобразованные фермионные операторы $\tilde{f} = f + \delta f = f + \epsilon b$, оставаясь по-прежнему фермионными, должны сохранять свойство $\tilde{f}^2 = 0$. Таким образом, получаем

$$0 = \tilde{f}^2 = (f + \epsilon b)(f + \epsilon b) = f^2 + \{f, \epsilon b\} + \epsilon^2 b^2. \quad (2.46)$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как f — фермионный оператор, второе слагаемое равно нулю из-за антикоммутации ϵ и f , и, следовательно, $\epsilon^2 b^2 = 0$, что приводит к

$$\epsilon^2 = 0, \text{ или } \{\epsilon, \epsilon\} = 0. \quad (2.47)$$

Совокупность величин ϵ_i , обладающих свойством

$$\{\epsilon_i, \epsilon_j\} = 0 \quad (2.48)$$

при всех i, j , называется образующими алгебры Грассмана. Можно заметить, что эти алгебры сходны с алгебрами Клиффорда: в алгебрах Клиффорда образующие также антикоммутируют, но только друг с другом, а их квадраты отличны от нуля. И, действительно, каждой грассмановой алгебре можно поставить в соответствие алгебру Клиффорда с удвоенным числом образующих⁶⁵. Величины, являющиеся образующими алгебр Грассмана и Клиффорда, играют важнейшую роль не только в суперсимметричных теориях, но и вообще в моделях, содержащих фермионные степени свободы, а такие степени свободы оказываются подчас весьма удобно вводить, даже если они отсутствуют в исходной постановке задачи. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующих главах.

н) Нулевая энергия вакуума

Исследуем теперь энергетический спектр суперсимметричного осциллятора. Интересные особенности этого спектра на первый взгляд могут показаться следствием выбранной простейшей модели, однако в действительности они характерны для всех суперсимметричных моделей.

Кроме того, спектр суперсимметричного осциллятора напомним читателю спектр одной классической задачи квантовой механики.

Из соотношений (2.30) — (2.32) следует, что каждый энергетический уровень характеризуется двумя числами заполнения n_B и n_F , причем

$$E_{n_B, n_F} = \omega (n_B + n_F). \quad (2.49)$$

Этот спектр изображен на рис. 1. Прежде всего обращает на себя внимание то, что основное состояние (вакуум) имеет энергию, равную нулю. Энергия бозонных нулевых колебаний в точности компенсируется отрицательной энергией фермионных «нулевых колебаний»! Это — проявление знаменитого сокращения бесконечной энергии нулевых колебаний в суперсимметричных теориях, благодаря чему энергия вакуума становится равной нулю. До появления суперсимметричных теорий энергию вакуума делали равной нулю с помощью искусственного приема — нормальным упорядочением операторов рождения и уничтожения. Требование нормального упорядочения никак не следовало из основных принципов квантовой теории поля, и поэтому оно вызывало ощущение внутренней несогласованности теории. В то же время

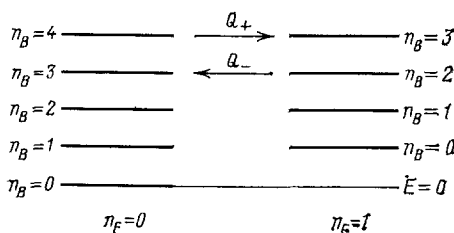


Рис. 1. Энергетический спектр суперсимметричного осциллятора. Действие операторов $Q_{\pm}$ показано стрелками

и просто отбросить нулевые колебания нельзя — они вполне реальные: ими, например, обусловлены радиационные поправки к энергетическим уровням атомов (лэмбовский сдвиг). С точки зрения же суперсимметричных теорий бесконечные энергии бозонного и фермионного вакуумов (соответственно положительные и отрицательные) есть просто следствие искусственного разделения равной нулю энергии вакуума «единой» теории, включающей и бозоны и фермионы, на положительное и отрицательное бесконечные слагаемые. Это естественное обращение в нуль энергии вакуума сыграло большую роль в возникновении интереса к суперсимметрии. Особенно важным оказалось то обстоятельство, что это свойство присуще не только «свободным» теориям таких объектов, как рассматриваемый гармонический осциллятор, но остается и при включении взаимодействия, причем *вне рамок теории возмущений*, если взаимодействие удовлетворяет определенным требованиям. На этом мы остановимся в следующей главе. Здесь же заметим, что можно было бы поступить наоборот: с целью сокращения ненулевой энергии бозонных нулевых колебаний ввести в чисто бозонную теорию фиктивные дополнительные степени свободы, рассматривая это просто как рецепт такого же уровня «законности», как нормальное упорядочение. Тогда эти дополнительные степени свободы имели бы фермионный характер (иначе не произошло бы сокращения энергий нулевых колебаний) и, более того, новый эффективный гамильтониан обладал бы суперсимметрией, т. е. симметрией относительно взаимопревращений «реальных» бозонов и «фиктивных» фермионов. Это явление исследовано и в квантовой теории поля.

Другой особенностью спектра суперсимметричного осциллятора (см. рис. 1) является двукратное вырождение всех энергетических уровней, кроме нулевого. Выше было показано, что это вырождение является следствием суперсимметрии, поэтому оно сохраняется и в других суперсимметричных моделях. Такие примеры будут рассмотрены в следующих главах.

о) Фермионы без дираковского моря

Суперсимметричные теории подсказывают такую интерпретацию фермионного вакуума и фермионных состояний, которая полностью аналогична случаю бозонов. При этом не требуется вводить дираковского «моря» заполненных состояний с отрицательной энергией и бесконечным рядом.

Сначала необходимо уточнить терминологию. Термин «состояние» употребляется часто в двух различных смыслах:

- 1) как состояние *системы* (вообще говоря, многочастичной);
- 2) как *одночастичное* состояние.

Нам необходимо будет различать эти значения, и поэтому для точности будем придавать слову «состояние» только первое значение, а одночастичные состояния будем называть «ячейками».

В обычной теории фермионов вводятся ячейки с положительной и отрицательной энергиями, в соответствии с двумя знаками энергии для решений уравнения Дирака. При фиксированных значениях импульса и проекции спина имеется следующий набор из четырех состояний:

$$\begin{aligned} \bar{E} > 0, \quad E < 0 \\ (0, \quad 1) &— \text{вакуум,} \\ (1, \quad 1) &— \text{одноэлектронное состояние,} \\ (0, \quad 0) &— \text{однопозитронное состояние (дырка),} \\ (1, \quad 0) &— \text{электрон-позитронная пара.} \end{aligned}$$

Здесь первая цифра в скобках показывает число заполнения ячейки с положительной энергией, а вторая — с отрицательной.

Такое описание состояний явным образом несимметрично относительно зарядового преобразования, переводящего электроны в позитроны и обратно. Кроме того, при этом приходится вводить искусственное переопределение заряда, для того чтобы вакуум имел нулевой заряд. Тем не менее в свое время такое описание казалось удовлетворительным; более того, сложилось представление, что при этом в теории естественным образом возникают античастицы, соответствующие дыркам в море состояний с отрицательной энергией. Однако сегодня мы уже знаем, что наличие античастиц не является следствием отличительным свойством только фермионов, а является следствием зарядовой симметрии теории и присуще бозонам в той же степени, что и фермионам.

Кроме того, когда создавалась ставшая ныне традиционной теория фермионов, казалось естественным пустой ячейке приписать энергию, равную нулю. В случае же бозонов в силу соотношения

$$E_B = n_B + \frac{1}{2} \quad (2.50)$$

пустой ячейке ($n_B = 0$) соответствует ненулевая энергия.

Вследствие этого имелось существенное различие между тем, как сопоставлялись друг другу энергии одночастичных состояний и энергии, соответствующие решениям уравнения Дирака в случае фермионов и уравнения Клейна — Гордона в случае бозонов.

Заметим теперь, что энергия фермионного осциллятора определяется, согласно (2.32), выражением

$$E_F = n_F - \frac{1}{2}. \quad (2.51)$$

При этом пустой ячейке ($n_F = 0$) так же, как и в случае бозонов, соответствует ненулевая энергия (см. (2.50)), только в этом случае отрицательная. Благодаря этому оба состояния, с положительной и отрицательной энергиями, можно реализовать с помощью *одной* ячейки, а не двух, как при традиционной интерпретации. В теории поля эта ячейка характеризуется не знаком энергии, а другими характеристиками фермионных возбуждений, например зарядом. Для описания, скажем, электронов и позитронов вводим две ячейки (связанные преобразованием зарядового сопряжения). Описанный выше набор из четырех физических состояний выглядит теперь так:

$$\begin{aligned} (0, \quad 0) &— \text{вакуум,} \\ (1, \quad 0) &— \text{одноэлектронное состояние,} \\ (0, \quad 1) &— \text{однопозитронное состояние,} \\ (1, \quad 1) &— \text{электрон-позитронная пара.} \end{aligned}$$

Здесь первая цифра в скобках показывает число заполнения «электронной» ячейки, а вторая — «позитронной».

Такое описание полностью симметрично относительно зарядового сопряжения ($e^- \leftrightarrow e^+$), и заряд вакуума равен нулю без искусственного переопределения заряда. Энергия же фермионного вакуума в соответствии с формулой (2.51) отрицательна. По аналогии со случаем бозонов, когда энергия вакуума тоже ненулевая, это представляется естественным и, более того, даже необходимым для того, чтобы в «единой» теории, включающей и бозоны и фермионы, энергия вакуума была равной нулю.

Аналогия между бозонным и фермионным осцилляторами станет еще более явной, если выражения для гамильтонианов

$$H_B = b^+ b^- + \frac{1}{2}, \quad H_F = f^+ f^- - \frac{1}{2} \quad (2.52)$$

(мы считаем $\omega = 1$) представить в виде

$$H_B = \frac{1}{2} \{b^+, b^-\}, \quad H_F = \frac{1}{2} [f^+, f^-], \quad (2.53)$$

непосредственно отражающем различие в статистике бозонов и фермионов.

п) Первый пример суперсимметрии в реальном мире

Рассмотренная в этой главе максимально простая суперсимметричная модель соответствует реальной физической задаче. Спектр, изображенный на рис. 1, в точности совпадает с картиной уровней Ландау для электрона в однородном магнитном поле. Действительно, значения уровней энергии в этой задаче даются формулой⁵⁶

$$E = \frac{eB}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \frac{eB}{m} = \frac{eB}{m} \left[\left(n_B + \frac{1}{2} \right) + \left(n_F - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (2.54)$$

где мы положили составляющую импульса электрона вдоль поля равной нулю, B — величина магнитной индукции.

Второе равенство в формуле (2.54) выписано для того, чтобы читатель сразу узнал в первом слагаемом энергию «бозонного осциллятора», а во втором — «фермионного». Бозонный осциллятор появляется вследствие квантования орбитального движения электрона в магнитном поле, а фермионный — вследствие взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным полем. Частоты этих осцилляторов *совпадают*, и благодаря этому все уровни электрона, кроме нулевого, двукратно вырождены — это и есть то вырождение, которое связано с наличием суперсимметрии в этой задаче.

Интересно, что совпадение частот бозонного и фермионного осцилляторов, а вместе с этим и наличие суперсимметрии возникает только в том случае, если магнитный момент электрона равен как раз магнетону Бора $\mu_B = e\hbar/2mc$, т. е. значению, предсказываемому только релятивистской теорией. В гл. 5 этот вопрос рассмотрен подробно и показано, что это совпадение не является случайным. Там же учтено и бесконечнократное вырождение уровней (2.54) по «центру орбиты» — оно снимается в неоднородном магнитном поле, но суперсимметрия для широкого класса полей все-таки остается.

На примере этой реальной задачи можно наглядно увидеть, что представляют собой преобразования суперсимметрии и каким образом суперсимметрия объединяет непрерывные и дискретные преобразования.

Роль фермионной степени свободы в задаче об электроне в магнитном поле играет спин, в качестве бозонной степени свободы можно выбрать одну из координат, перпендикулярных направлению магнитного поля (наличие второй бозонной степени свободы как раз ответственно за бесконечнократное вырождение по центру орбиты). При преобразовании суперсимметрии электрон меняет направление спина на противоположное и *одновременно* переходит

дит с одной орбиты на другую — при этом его энергия остается неизменной. Переворот спина — это дискретное преобразование, а переход с одной орбиты на другую, хотя и может показаться тоже дискретным преобразованием, в действительности обусловлен действием бозонных операторов уничтожения и рождения, построенных из (обычных) координаты и импульса. Импульс же является генератором трансляций — непрерывных преобразований, а координата (оператор координаты) — генератор трансляций в импульсном пространстве. Преобразования суперсимметрии, генерируемые операторами Q , объединяют свойства отмеченных преобразований. Действие генераторов $Q_{\pm}$ показано стрелками на рис. 1. Вырожденные по энергии состояния — «суперпартнеры» отвечают движению электрона по различным орбитам и с различным направлением спина.

3. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

а) Можно включить взаимодействие, сохранив суперсимметрию

Рассмотренный в предыдущем пункте пример суперсимметричного гармонического осциллятора соответствует свободной теории. Как включить взаимодействие, сохранив суперсимметричную структуру гамильтониана?

Возможность такого включения взаимодействия проще всего увидеть, если вспомнить, что инвариантность гамильтониана

$$H = Q_+ Q_- + Q_- Q_+ \quad (3.1)$$

относительно преобразований суперсимметрии, генерируемых операторами $Q_{\pm}$, обеспечивается их нильпотентным характером, т. е. тем, что $Q_{\pm}^2 = 0$. Действительно,

$$H Q_+ = Q_+ Q_- Q_+ + 0, \quad (3.2)$$

$$Q_+ H = 0 + Q_+ Q_- Q_+, \quad (3.3)$$

т. е.

$$[H, Q_+] = 0. \quad (3.4)$$

Аналогично $[H, Q_-] = 0$.

Заметим теперь, что нильпотентный характер операторов $Q_{\pm}$ сохранится, если мы обобщим простую модель предыдущего пункта следующим образом:

$$Q_+ = B^- (b^-, b^+) f^+, \quad (3.5)$$

$$Q_- = B^+ (b^-, b^+) f^-, \quad (3.6)$$

где $B^{\pm}$ — произвольные функции бозонных операторов (сопряженные друг другу, чтобы Q_+ и Q_- оставались сопряженными). По этой причине гамильтониан H , определяемый формулой (3.1), с операторами $Q_{\pm}$, заданными в виде (3.5), (3.6), по-прежнему останется суперсимметричным. Однако при этом он уже не будет квадратичным по бозонным операторам, т. е. будет включать взаимодействие между «бозонами», а кроме того, будет включать и взаимодействие между «бозонами» и «фермионами».

Для суперсимметричного гамильтониана, включающего взаимодействие, необходимо обобщить первоначальное представление о преобразованиях суперсимметрии как преобразованиях бозон в фермион и наоборот. При включении взаимодействия гамильтониан перестает быть диагональным в представлении бозонных чисел заполнения, и поэтому собственные состояния гамильтониана уже не характеризуются определенным «числом бозонов». Поэтому правильное говорить, что преобразования суперсимметрии переводят бозонное состояние в фермионное состояние и наоборот. В случае суперсимметричной квантовой механики такое разделение состояний на «бозонные» и «фермионные» является условным, но в суперсимметрич-

ных теориях поля оно обретает физический смысл. Генераторы суперсимметрии преобразуются там по спинорному представлению группы Лоренца и поэтому изменяют спин на $\pm 1/2$, что и соответствует переходу от бозонного состояния к фермионному и наоборот.

б) М а т р и ч н а я р е а л и з а ц и я ф е р м и о н н ы х
о п е р а т о р о в и « н е н о р м а л ь н о с т ь » б о з о н н ы х
о п е р а т о р о в

Поскольку фермионное число заполнения n_F может принимать только два значения $n_F = 0, 1$, удобно выбрать представление для векторов состояний, в котором волновые функции являются двухкомпонентными:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где верхняя компонента ψ_1 соответствует $n_F = 1$, а нижняя ψ_0 соответствует $n_F = 0$. Фермионные операторы рождения и уничтожения реализуются при этом матрицами 2×2 :

$$f^+ = \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^- = \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Сопряженные друг другу операторы B^+ и B^- , действующие в пространстве бозонных переменных, представим в виде

$$B^+ = B_1 + iB_2, \quad B^- = B_1 - iB_2, \quad (3.9)$$

где B_1 и B_2 — эрмитовы операторы. Для операторов Q_1 и Q_2 , определяемых так же, как в предыдущем пункте, получаем

$$Q_1 = Q_+ + Q_- = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2, \quad (3.10)$$

$$Q_2 = -i(Q_+ - Q_-) = B_1\sigma_2 - B_2\sigma_1. \quad (3.11)$$

Эти операторы антикоммутируют друг с другом и имеют равные квадраты (совпадающие с гамильтонианом H (3.1)) независимо от коммутационных соотношений между операторами B_1 и B_2 . В рассматриваемом представлении гамильтониан H принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \{B^-, B^+\} + \frac{1}{2} [B^-, B^+] \sigma_3. \quad (3.12)$$

Этот гамильтониан включает фермионную степень свободы только в том случае, если $[B^-, B^+] \neq 0$. Это означает, что оператор B^- (и B^+) не должен быть «нормальным», если пользоваться терминологией теории операторов⁵⁹. «Ненормальность» операторов B^- и B^+ проявляется в том, что они могут иметь различные собственные векторы, в частности, один из них может иметь ядро (такие $\psi \neq 0$, для которых $B\psi = 0$), а другой — нет. Например, для суперсимметричного осциллятора предыдущего пункта $B^\pm = b^\pm$, и b^- имеет ядро (вакуумное состояние), а b^+ не имеет ядра. Различие в собственных векторах сопряженных друг другу операторов B^- и B^+ окажется важным (см. ниже) при рассмотрении вопроса о спонтанном нарушении суперсимметрии.

в) Г а м и л ь т о н и а н и с у п е р п о т е н ц и а л

Если гамильтониан H (3.12) квадратичен по импульсам p , то операторы B имеют вид

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mp ip + W(x)], \quad (3.13)$$

где $W(x)$ — произвольная функция координаты x . Суперсимметричному осциллятору (п. 2) соответствует $W(x) = x$ — при этом $B^\pm = b^\pm$.

Подставляя (3.13) в (3.12), получаем для гамильтониана H

$$H = \frac{1}{2} [p^2 + W^2(x) + \sigma_3 W'(x)]. \quad (3.14)$$

Это гамильтониан «суперсимметричной квантовой механики Виттена»¹⁷. Он обладает важным свойством, сохраняющимся во всех суперсимметричных моделях: взаимодействие бозонов с бозонами (в данном случае член $W^2(x)$) и фермионов с бозонами (в данном случае $\sigma_3 W'(x)$) определяются *одной и той же* функцией $W(x)$. Мы будем в дальнейшем называть эту функцию «суперпотенциалом», хотя чаще так называют другую функцию $V(x)$, связанную с $W(x)$ соотношением $V'(x) = W(x)$. Выбор функции $V(x)$ обусловлен формализмом (суперполей), который мы не будем рассматривать здесь.

г) Общая константа взаимодействия и сокращение расходимостей

Таким образом, как видно на примере гамильтониана (3.14), суперсимметрия устанавливает связь между взаимодействиями бозонов с бозонами и бозонов с фермионами. Вид этой связи таков, что при переходе к «свободной» теории одновременно выключаются как взаимодействия бозонов с бозонами, так и бозонов с фермионами. Действительно, «свободной» теории, т. е. гармоническому осциллятору, соответствует $W(x) = x$ — при этом $W^2 = x^2$, что соответствует отсутствию взаимодействия бозонов с бозонами, и $W' = \text{const}$, что соответствует отсутствию взаимодействия бозонов с фермионами. В пределе же слабой связи, когда можно ввести малую константу взаимодействия, оба взаимодействия определяются *одной и той же* константой. Именно это свойство суперсимметричных теорий обеспечивает сокращение расходимостей при использовании теории возмущений. Как известно, бозонные и фермионные петли в диаграммах теории возмущений соответствуют вкладам с противоположными знаками, и поэтому равенство констант в вершинах диаграмм может привести к сокращению бесконечных вкладов от бозонных и фермионных петель. К сожалению, однако, самой по себе суперсимметрии еще недостаточно для полного устранения расходимостей, хотя в суперсимметричных теориях и уменьшается число типов расходимостей, а остающиеся расходимости становятся менее сильными (например, степенная расходимость превращается в логарифмическую). Оказалось, тем не менее, что если суперсимметричная теория обладает дополнительной достаточно высокой симметрией, то расходимостей в ней может вообще не быть. Первый известный пример свободной от расходимостей квантовой теории поля в четырехмерном пространстве-времени — это суперсимметричная теория калибровочных полей с группой симметрии $O(4)$. Сокращение расходимостей в суперсимметричных теориях оказалось важным при построении квантовой теории гравитации (супергравитации), в которой суперпартнером гравитона со спином 2 является новая гипотетическая частица — гравитино со спином $3/2$.

д) Энергия вакуума и топология суперпотенциала

Вернемся к гамильтониану (3.14) и выясним, какие свойства суперсимметричного осциллятора сохраняются и в этом, более общем случае.

Прежде всего, сохраняется двукратное вырождение энергетических уровней с энергией $E > 0$ при *произвольной* функции $W(x)$, поскольку это вырождение обусловлено только наличием суперсимметрии.

Далее, для суперсимметричного осциллятора энергия основного состояния в точности равна нулю, и это нулевое состояние — единственное невырожденное. Сохранится ли это свойство в более общем случае, когда включено взаимодействие?

Этот вопрос был изучен Виттенем¹⁷. При этом было обнаружено красивое свойство: наличие или отсутствие невырожденного уровня с энергией $E = 0$ определяется только *глобальными свойствами суперпотенциала* $W(x)$ и не зависит от его конкретного вида. Обобщение этого наблюдения привело к нахождению критериев спонтанного нарушения суперсимметрии в теориях поля.

Чтобы рассмотреть вопрос об основном состоянии гамильтониана (3.14), удобно представить его в матричном виде (см. 3.12)):

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где $H_+ = B^-B^+$, $H_- = B^+B^-$.

Гамильтонианы H_+ и H_- действуют в пространстве *однокомпонентных* волновых функций, причем каждый из них факторизован, т. е. имеет вид произведения двух сопряженных друг другу дифференциальных операторов *первого* порядка. Благодаря этому задача определения состояния с энергией $E = 0$ сводится к нахождению решений уравнений $B^-\psi = 0$ или $B^+\psi = 0$.

Действительно, эти уравнения эквивалентны уравнениям $H_-\psi = 0$ или $H_+\psi = 0$. Докажем эту эквивалентность. Из $B^-\psi = 0$ очевидным образом следует $H_-\psi = 0$. С другой стороны, из $H_-\psi = 0$ следует $B^-\psi = 0$, поскольку $H_- = B^+B^-$:

$$0 = \langle \psi | B^+B^- | \psi \rangle = \| B^- | \psi \rangle \|^2. \quad (3.16)$$

Обозначим решения уравнений $B^\pm\psi = 0$ через $\psi_\pm$. Индексы $\pm$ соответствуют знаку собственных значений σ_3 в формуле (3.14).

Пользуясь выражением (3.13) для операторов $B^\pm$, запишем уравнения $B^\pm\psi = 0$ в виде

$$\left(\frac{d}{dx} \mp W \right) \psi_\pm = 0. \quad (3.17)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\psi_\pm = C \exp \left[\pm \int_0^x W(x') dx' \right]. \quad (3.18)$$

Однако для того чтобы функции $\psi_\pm$ действительно являлись собственными функциями гамильтониана H , необходимо, чтобы они были квадратично интегрируемыми. Мы здесь не будем рассматривать случай, когда $\psi_\pm$ осциллируют при $x \rightarrow \pm \infty$. Тогда для квадратичной интегрируемости ψ_- необходимо, согласно (3.18), чтобы

$$\int_0^x W(x') dx' \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm \infty. \quad (3.19)$$

Для нормируемости же ψ_+ необходимо, чтобы

$$\int_0^x W(x') dx' \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm \infty. \quad (3.20)$$

Очевидно, условия (3.19) и (3.20) несовместимы, и поэтому только *одна* из функций $\psi_\pm$ может быть нормируемой. Однако может оказаться, что *ни одна* из этих функций не нормируема.

Таким образом, если состояние с энергией $E = 0$ *существует*, то оно невырождено*), этому состоянию отвечает та из функций $\psi_\pm$, которая является нормируемой.

*) Это утверждение справедливо только в случае *одной* бозонной степени свободы. Как будет показано в гл. 5, уже в случае двух бозонных степеней свободы кратность вырождения основного состояния может быть произвольной (даже бесконечной).

Если ни одно из условий (3.19), (3.20) не выполнено, то нормируемой функции, соответствующей состоянию с энергией $E = 0$, не существует, и вследствие неотрицательности спектра суперсимметричного гамильтониана основное состояние имеет энергию $E_0 > 0$.

Условия (3.19) и (3.20) и есть те глобальные условия на суперпотенциал, о которых говорилось выше: малая деформация суперпотенциала $W(x)$ в конечной области не может привести к появлению или исчезновению уровня с нулевой энергией. Наличие такого уровня, как сказали бы математики, обладает гомотопической инвариантностью по отношению к деформациям суперпотенциала.

Условия (3.19), (3.20) принимают особенно простой вид, если $W(x)$ имеет определенные знаки при $x \rightarrow \pm \infty$.

Если знаки $W(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$ одинаковы, то ни одно из условий (3.19), (3.20) не может быть выполнено, и, следовательно, $E_0 > 0$. Так, например, обстоит дело при $W(x) = x^2$.

Если же $W(x)$ имеет различные знаки при $x \rightarrow \pm \infty$, причем $W(x)$ не стремится к нулю, то одно из условий (3.19), (3.20) будет выполнено. При этом энергия основного состояния $E_0 = 0$, независимо от того, каков конкретный вид $W(x)$. Простейший пример — рассмотренный в п. 2 суперсимметричный осциллятор, которому отвечает $W(x) = x$.

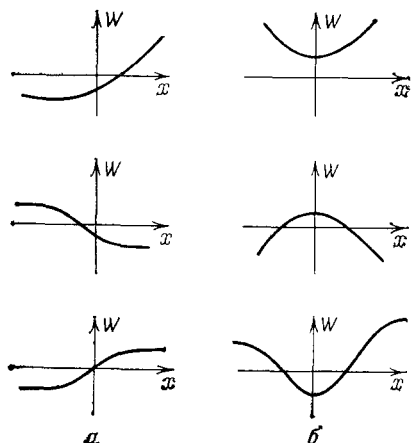


Рис. 2. Примеры суперпотенциалов $W(x)$.

a — Суперсимметрия точная, *б* — суперсимметрия спонтанно нарушена

На рис. 2 приведены примеры суперпотенциалов $W(x)$, для которых энергия основного состояния $E_0 = 0$ (рис. 2, *a*) и для которых $E_0 > 0$ (рис. 2, *б*).

е) С п о н т а н н о е н а р у ш е н и е с у п е р с и м м е т р и и

Суперсимметрия, так же как и другие виды симметрии, может быть спонтанно нарушена, однако в случае суперсимметрии это явление имеет свои особенности.

Напомним, что спонтанным нарушением симметрии называется следующее: гамильтониан H инвариантен относительно некоторых преобразований $[H, R] = 0$, где R — генераторы преобразований, однако основное состояние $|0\rangle$ (вакуум) не остается инвариантным, т. е. $R|0\rangle \neq 0$.

В случае точной симметрии, когда нет спонтанного нарушения, генераторы преобразований, действуя на вакуум, аннигилируют его: $R|0\rangle = 0$. Это соотношение означает, что вакуум остается инвариантным относительно конечных преобразований, имеющих вид $\exp(i\alpha\bar{R})$, где α — параметр преобразования.

Генераторами суперсимметрии являются операторы Q . Таким образом, если суперсимметрия точная, то $Q|0\rangle = 0$, и, следовательно, $H|0\rangle = = Q^2|0\rangle = 0$, т. е. *существует* состояние с нулевой энергией. И наоборот, если есть состояние с нулевой энергией, то суперсимметрия точная, т. е. нет спонтанного нарушения. Доказательство аналогично проведенному выше в п. д) гл. 2.

Вопрос о спонтанном нарушении суперсимметрии представляется весьма важным. Если суперсимметрия реализуется в мире элементарных частиц, то она непременно должна быть спонтанно нарушенной, так как в случае точной суперсимметрии бозоны и фермионы должны быть вырождены по массе, что не соответствует действительности.

На рассмотренном примере суперсимметричной квантовой механики можно видеть, что вопрос о спонтанном нарушении симметрии связан с вопросом о топологии суперпотенциала: знаки $W(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$ являются топологическими характеристиками в том смысле, что они не меняются при малых деформациях суперпотенциала.

Важным отличием спонтанного нарушения суперсимметрии от спонтанного нарушения внутренней симметрии является возможность спонтанного нарушения в системе с *конечным* числом степеней свободы — так, в суперсимметричной квантовой механике это имеет место уже в случае одной бозонной и одной фермионной степени свободы (для суперпотенциалов $W(x)$, изображенных на рис. 2, б).

ж) Нахождение спектров уравнения Шрёдингера с помощью суперсимметрии

Гамильтониан суперсимметричной квантовой механики (3.14) можно рассматривать как совокупность двух обычных одномерных гамильтонианов

$$H_{\pm} = \frac{1}{2} [p^2 + W^2(x) \pm W'(x)], \quad (3.24)$$

которые, благодаря суперсимметрии, имеют *одинаковый* спектр при *произвольной* функции $W(x)$. Исключение может составлять только низший уровень одного из $H_{\pm}$, и его энергия в этом случае *точно* равна нулю. Именно эти два свойства суперсимметричных теорий: двукратное вырождение всех уровней с энергией $E > 0$ и равенство нулю энергии основного состояния, если оно невырождено, можно использовать для нахождения точного спектра *).

Приведем характерный пример такого определения спектра.

Выберем суперпотенциал W в виде $W(a, x) = a \operatorname{th} x$.

При $x \rightarrow \pm \infty$ суперпотенциал W имеет различные знаки. Если $a > 0$, то нулевым уровнем обладает

$$H_{-}(a) = \frac{1}{2} [p^2 + W^2(x) - W'(x)] = \frac{1}{2} \left[p^2 - \frac{a(a+1)}{\operatorname{ch}^2 x} \right] + \frac{a^2}{2}. \quad (3.22)$$

С другой стороны, для H_{+} получаем

$$H_{+}(a) = \frac{1}{2} \left[p^2 - \frac{a(a-1)}{\operatorname{ch}^2 x} \right] + \frac{a^2}{2}. \quad (3.23)$$

Обозначим $a_1 = a - 1$; тогда, вследствие (3.22), (3.23), имеем

$$H_{+1}(a) = H_{-}(a_1) + \frac{a^2}{2} - \frac{a_1^2}{2}. \quad (3.24)$$

Если $a_1 > 0$, то нижний уровень для гамильтониана $H_{-}(a_1)$ снова равен нулю, и поэтому уравнение (3.24) позволяет определить нижний уровень гамильтониана $H_{+}(a)$; он равен

$$E_1 = \frac{a^2 - a_1^2}{2}. \quad (3.25)$$

Но уровни $H_{+}(a)$ и $H_{-}(a)$ совпадают, за исключением нижнего уровня $H_{-}(a)$, и поэтому E_1 есть энергия следующего за основным (нулевым) уровнем гамильтониана $H_{-}(a)$. Таким образом, мы уже знаем *два* уровня гамильтониана $H_{-}(a)$: $E_0 = 0$ и E_1 .

Описанную процедуру можно повторять, делая на каждом шагу замену $a_n = a_{n-1} - 1 = a - n$ до тех пор, пока $a_n \geq 0$. В результате мы получим полный дискретный спектр гамильтониана $H_{-}(a)$: энергия n -го уровня дается

*) Этот метод определения спектров связан с методом факторизации^{26,27} и вскрывает симметрию, лежащую в его основе.

формулой

$$E_n = \frac{1}{2} [(a^2 - a_1^2) + (a_1^2 - a_2^2) + \dots + (a_{n-1}^2 - a_n^2)] = \frac{a^2}{2} - \frac{a_n^2}{2}. \quad (3.26)$$

Таким образом, для известного потенциала

$$U(a, x) = -\frac{a(a+1)}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (3.27)$$

отличающегося от потенциала в $H_-(a)$ аддитивной постоянной $-a^2/2$, получаем энергетический спектр в виде]

$$E_n = -\frac{a_n^2}{2} = -\frac{(a-n)^2}{2}. \quad (3.28)$$

С целью обобщения рассмотренного примера заметим, что гамильтонианы H_+ и H_- отличались в данном случае только значениями *параметров* (включая аддитивную константу) — именно это свойство позволило построить итерационную процедуру нахождения спектра. Естественно поставить задачу о нахождении всех потенциалов, удовлетворяющих такому условию «форминвариантности». Эта задача рассмотрена в работе ²⁸. Оказалось, что к числу потенциалов, для которых указанным способом можно найти спектры с помощью элементарных вычислений, относятся все точно решенные до сих пор задачи одномерной квантовой механики на всей оси x .

Отметим, что мы использовали суперсимметрию для решения задачи, которая в своей первоначальной формулировке (нахождение спектров одномерного уравнения Шрёдингера) не содержала этой симметрии. Оказалось полезным расширить задачу, перейдя к суперсимметричной квантовой механике, аналогично тому, как бывает полезным, например, перейти в комплексную плоскость для вычисления интегралов вдоль вещественной оси.

4. ИНТЕГРАЛЫ БЕРЕЗИНА

В построении и развитии суперсимметричных моделей большую роль играет формализм Березина, в котором бозоны и фермионы описываются удивительно сходным образом ^{14,15}. Правила обращения с фермионными переменными могут показаться довольно необычными, и поэтому мы приведем более подробную мотивировку этих правил, так, чтобы они появились с необходимостью, «естественным» путем. При этом станет более ясным и соответствие между бозонными и фермионными переменными — соответствие, которое является центральной идеей суперсимметрии.

Однако и независимо от суперсимметрии формализм Березина является весьма удобным и плодотворным при исследовании систем с фермионными степенями свободы и, более того, позволяет формально вводить такие степени свободы в задачах, где их первоначально не было, упрощая их исследование.

Основной целью, поставленной при создании этого формализма, было построение континуального интегрирования по фермионным переменным. Этой цели пытался достичь еще Фейнман ⁶⁰, однако ему не удалось распространить созданный им метод континуального интегрирования на фермионные переменные. Препятствием к этому он считал отсутствие классического предела для антикоммутирующих переменных, описывающих фермионные степени свободы.

а) Почему нет «координатного представления» для фермионных степеней свободы

В поисках единого описания бозонов и фермионов Березин обратил внимание на то, что обычное представление в терминах координат и импульсов, применимое для бозонных степеней свободы, непосредственно не обобщается

на фермионный случай. Рассмотрим, почему невозможна прямая аналогия между бозонными и фермионными переменными в «координатном» представлении.

В координатном представлении каждому состоянию системы сопоставляется комплексная функция от *вещественных* переменных (волновая функция):

$$|\psi\rangle \leftrightarrow f(q_1, \dots, q_N), \quad (4.1)$$

где N — число степеней свободы. В данном представлении все операторы координат *одновременно* диагонализированы, а это возможно только в том случае, когда операторы координат *коммутируют* друг с другом.

В случае бозонных степеней свободы это условие, естественно, выполняется. Однако попытка построить аналогичное представление для системы с фермионными степенями свободы сразу же наталкивается на принципиальное препятствие: фермионные операторы *антикоммутируют* друг с другом, и поэтому не могут быть диагонализированы одновременно. Таким образом, в этом случае нельзя сопоставить состоянию функцию от вещественных переменных — «координат».

б) Голоморфное представление для бозонов

Существует ли такое представление, общее для описания бозонных и фермионных степеней свободы, в котором каждому состоянию все-таки можно сопоставить функцию, и какими свойствами должны обладать аргументы этой функции?

Начнем с бозонов. Для системы с одной степенью свободы выберем в качестве базиса состояния

$$(b^+)^n |0\rangle, \quad (4.2)$$

где $|0\rangle$ — вакуум. Любой вектор состояния можно представить в виде линейной комбинации векторов (4.2):

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (b^+)^n |0\rangle, \quad (4.3)$$

где c_n — комплексные коэффициенты. Разложение (4.3) единственно вследствие ортогональности векторов (4.2).

Заметим теперь, что сумму в формуле (4.3) можно рассматривать как разложение в ряд Тейлора некоторой *аналитической функции* от оператора b^+ :

$$|\psi\rangle = F(b^+) |0\rangle. \quad (4.4)$$

Это соотношение показывает, что каждому состоянию $|\psi\rangle$ можно сопоставить аналитическую функцию комплексного переменного. Обычно в качестве этой переменной выбирают не z , а z^* , имея в виду соответствие с представлением по когерентным состояниям⁵³⁻⁵⁵.

Сопоставление

$$\text{состояние} \leftrightarrow \text{функция: } |\psi\rangle \leftrightarrow F(z^*) \quad (4.5)$$

и является тем представлением, которое может быть обобщено на фермионный случай. Такое представление называется голоморфным, поскольку функция $F(z^*)$ является голоморфной *).

Обобщение на случай нескольких бозонных степеней свободы очевидно:

$$|\psi\rangle = \sum_{\{n_i\}} a_{\{n_i\}} (b_1^+)^{n_1} (b_2^+)^{n_2} \dots (b_N^+)^{n_N} |0\rangle, \quad (4.6)$$

где $\{n_i\}$ — совокупности целых чисел (мультииндекс), $a_{\{n_i\}}$ — коэффициенты, которые можно считать *симметричными* относительно перестановок индексов i , вследствие того, что бозонные операторы коммутируют друг с другом.

*) Другие названия: представление Фока — Баргмана, представление по когерентным состояниям; с ним тесно связано представление вторичного квантования.

Скалярное произведение в голоморфном представлении определяется из условия

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn}, \quad (4.7)$$

где $|n\rangle$ — нормированное « n -частичное» состояние.

Представим скалярное произведение в виде интеграла

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int F_1(z) F_2(z^*) \rho(z^*, z) dz^* dz, \quad (4.8)$$

где весовая функция $\rho(z^*, z)$ должна быть определена из условия (4.7), и учтем, что, согласно (4.2) — (4.5), нормированному на единицу состоянию $|n\rangle$ сопоставляется функция $(z^*)^n / \sqrt{n!}$. Таким образом, условие (4.7) примет вид

$$\frac{1}{n!} \int (z^*)^n z^m \rho(z^*, z) dz^* dz = \delta_{mn}. \quad (4.9)$$

Этому соотношению удовлетворяет одна и только одна функция

$$\rho(z^*, z) = \frac{1}{2\pi i} e^{-z^* z}. \quad (4.10)$$

в) Голоморфное представление для фермионов

Перейдем к случаю фермионных степеней свободы. По аналогии с бозонным случаем выберем базис из волновых функций вида

$$(f_1^+)^{n_1} (f_2^+)^{n_2} \dots (f_N^+)^{n_N} |0\rangle, \quad (4.11)$$

где N — число фермионных степеней свободы, $n_i = 0, 1$ в соответствии с тем, что $(f_i^+)^2 = 0$. Любой вектор состояния является линейной комбинацией векторов (4.11):

$$|\psi\rangle = \sum_{\{n_i\}} c_{\{n_i\}} (f_1^+)^{n_1} (f_2^+)^{n_2} \dots (f_N^+)^{n_N} |0\rangle, \quad (4.12)$$

однако коэффициенты $c_{\{n_i\}}$ являются теперь *антисимметричными* относительно перестановок индексов i , вследствие антикоммутации операторов f_i^+ .

Придерживаясь аналогии со случаем бозонов, разложение (4.12) можно также понимать как разложение *функции* в ряд Тейлора. Однако аргументы этой функции должны рассматриваться как антикоммутирующие (*грассмановы*) величины, для того чтобы были учтены свойства антисимметрии коэффициентов $c_{\{n_i\}}$. Таким образом, как и в случае бозонов (см. (4.5)), каждому состоянию можно сопоставить функцию, только в фермионном случае это будет функция грассмановых переменных ξ_i^+ :

$$|\psi\rangle \longleftrightarrow F(\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_N^*). \quad (4.13)$$

Эти грассмановы переменные иногда называются «фермионными координатами». Такое название не совсем удачно, поскольку при этом неявно предполагается соответствие между этими переменными ξ и бозонными координатами q , а такого соответствия в действительности нет. Соответствие имеется между *комплексными* величинами z , характеризующими *когерентные* состояния бозонов и грассмановыми переменными ξ . Это соответствие позволяет, кстати, определить когерентные состояния и для фермионов, что, по существу, и было сделано Березиным.

г) Интегрирование по гассмановым переменным

Как определить скалярное произведение в голоморфном представлении в фермионном случае?

Возьмем одну фермионную степень свободы. По аналогии с бозонным случаем представим скалярное произведение в виде интеграла

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int F_1(\xi) F_2(\xi^*) \rho(\xi^*, \xi) d\xi^* d\xi \quad (4.14)$$

и потребуем ортонормированности состояний $|n\rangle$ (в данном случае $n = 0, 1$). При этом, однако, мы встречаемся сразу с *двумя* проблемами: определением весовой функции $\rho(\xi^*, \xi)$ и определением того, что следует понимать в формуле (4.14) под «интегрированием по гассмановым переменным». Необходимо сделать выбор: либо *определить* правила интегрирования и затем *найти* весовую функцию, либо, наоборот, определить весовую функцию, а из требования ортонормированности базиса найти правила интегрирования.

Обычно выбирают первый путь, но мы здесь выберем второй, и ниже постараемся обосновать наш выбор.

По аналогии с бозонами (см. (4.10)) определим весовую функцию

$$\rho(\xi^*, \xi) = e^{-\xi^* \xi} \quad (4.15)$$

и найдем правила интегрирования по гассмановым переменным, исходя из условий ортонормированности базиса:

$$\langle 0 | 0 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle = 1, \quad \langle 0 | 1 \rangle = \langle 1 | 0 \rangle = 0. \quad (4.16)$$

Поскольку состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ представляются функциями

$$|0\rangle \leftrightarrow f(\xi^*) = 1, \quad |1\rangle \leftrightarrow f(\xi^*) = \xi^*, \quad (4.17)$$

то условия ортонормированности (4.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \int \rho(\xi^*, \xi) d\xi^* d\xi &= \int \xi \xi^* \rho(\xi^*, \xi) d\xi^* d\xi = 1, \\ \int \xi^* \rho(\xi^*, \xi) d\xi^* d\xi &= \int \xi \rho(\xi^*, \xi) d\xi^* d\xi = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

В соответствии с гассмановым характером ξ и ξ^*

$$\rho(\xi^*, \xi) = \exp(-\xi^* \xi) = 1 - \xi^* \xi, \quad (4.19)$$

и поэтому из уравнений (4.18) получаем

$$\begin{aligned} \int d\xi^* d\xi - \int \xi^* \xi d\xi^* d\xi &= 1, \\ \int \xi d\xi^* d\xi &= \int \xi^* d\xi^* d\xi = 0, \\ \int \xi \xi^* d\xi^* d\xi &= 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Если понимать кратные интегралы в (4.20) как повторные, то мы приходим к знаменитым правилам интегрирования Березина

$$\int d\xi = 0, \quad \int \xi d\xi = 1. \quad (4.21)$$

Если же выбрать тот путь, о котором говорилось выше, т. е. *определить* сначала правила интегрирования (4.21), то, на наш взгляд, остается неясным, как можно было догадаться о таких необычных правилах интегрирования. В то же время введение весовой функции $\rho(\xi^*, \xi)$ для фермионов совершенно аналогично бозонному случаю и не должно вызывать «внутреннего протеста».

Вообще, имея дело с грассмановыми переменными, следует иметь в виду, что они *не принимают никаких численных значений*. Описание с их помощью состояний как *функций* соответствует, по образному выражению одного математика, заданию функций «в смысле XVIII века», т. е. не как отображений, а как формы записи, в данном случае — задания совокупностей коэффициентов разложения по некоторому базису. Кстати, именно такая ситуация имеет место и в бозонном случае, когда представителем состояния является функция комплексного переменного (голоморфное представление). Эта функция понимается при этом не как отображение комплексной плоскости в себя, а как задание бесконечной совокупности коэффициентов разложения в ряд Тейлора. В случае же конечного числа фермионных степеней свободы базис является конечномерным.

д) Гауссовы интегралы

Интегрирование по грассмановым переменным было введено и в основном используется для континуального интегрирования. Основными в методе континуального интегрирования являются гауссовы интегралы.

Для простейшего такого интеграла получаем

$$\int e^{-a\xi\xi^*} d\xi^* d\xi = \int (1 - a\xi\xi^*) d\xi^* d\xi = -a. \quad (4.22)$$

Здесь a — обычное число. Обратим внимание на то, что при «обычном» интегрировании a стояло бы в знаменателе.

В случае нескольких грассмановых переменных получаем:

$$\int e^{-a_{ik}\xi_i\xi_k^*} \prod_{i=1}^n d\xi_i^* \prod_{i=1}^n d\xi_i = (-1)^n \det |a_{ik}|. \quad (4.23)$$

И здесь при «обычном» интегрировании детерминант стоял бы в знаменателе.

Это отличие гауссовых интегралов по грассмановым переменным от обычных интегралов Гаусса позволяет использовать их при функциональных заменах переменных. Подробнее этот вопрос рассмотрен в п. 7.

5. СУПЕРСИММЕТРИЯ В РЕАЛЬНОМ МИРЕ

В настоящем пункте рассмотрены задачи, в которых суперсимметрия реализуется как физическая симметрия.

а) Электрон в магнитном поле

Уравнение Дирака для электрона в магнитном поле, постоянном во времени, можно записать в виде

$$\sigma\pi\psi_a = (H_D + m)\psi_b, \quad (5.1)$$

$$\sigma\pi\psi_b = (H_D - m)\psi_a,$$

где ψ_a и ψ_b — двухкомпонентные спиноры, $\pi = -i\partial/\partial x - eA(x)$, $H_D = = i\partial/\partial t$. Оба спинора, ψ_a и ψ_b , удовлетворяют уравнению

$$(\sigma\pi)^2\psi = (H_D^2 - m^2)\psi, \quad (5.2)$$

откуда в нерелятивистском пределе следует уравнение Паули для электрона с магнитным моментом, равным магнетону Бора:

$$(\sigma\pi)^2\psi = 2mH_F\psi. \quad (5.3)$$

Для дальнейшего важно, что оба уравнения (5.2) и (5.3) для релятивистского и нерелятивистского электрона имеют общую структуру:

$$Q^2\psi = H\psi, \quad (5.4)$$

где $Q = \sigma \mathbf{p}$, а оператор H определяется как $H = H_D^2 - m^2$ в релятивистском случае и как $H = 2mH_D$ в нерелятивистском. Таким образом, после выбора знака энергии в релятивистском случае симметрия «гамильтониана» H определяет как симметрию релятивистского гамильтониана H_D , так и нерелятивистского H_D . Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать их одновременно, называя гамильтонианом оператор H в уравнении (5.4).

Уравнение (5.4) имеет вид *одного* из соотношений алгебры суперсимметрии (см. (2.12), (2.14)), в частности, суперзаряд Q является интегралом движения. Этот интеграл движения

$$Q = \sigma (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \quad (5.5)$$

давно известен экспериментаторам, особенно тем, кто проводил эксперименты по измерению радиационных поправок к магнитным моментам. Сохранение Q означает, что спин и скорость прецессируют в магнитном поле с одинаковой частотой, так что угол между ними остается неизменным. Изменение же этого угла со временем связано с малым отличием магнитного момента электрона от магнетона Бора, отличием, обусловленным радиационными поправками.

Как мы уже видели (см. гл. 2), одного оператора Q недостаточно для того, чтобы имело место характерное для суперсимметрии вырождение энергетического спектра: кратность вырождения равна $\nu = 2^{[N/2]}$, где N — число суперзарядов. При $N = 1$ получаем $\nu = 1$, т. е. никакого вырождения еще нет.

Если существует оператор T со свойствами

$$\{T, Q\} = 0, \quad T^2 = 1, \quad (5.6)$$

будет два суперзаряда: $Q_1 = Q$ и $Q_2 = iQT$.

Оператор Q , как легко видеть, имеет вид оператора Дирака в трехмерном евклидовом пространстве, и поэтому действие оператора T аналогично γ_5 -преобразованию. Однако в трехмерном случае, вследствие нечетной размерности, не существует матрицы — аналога γ_5 , т. е. антикоммутирующей со всеми тремя матрицами Паули σ . Поэтому в общем случае, если не накладывать никаких дополнительных условий на магнитное поле, других суперзарядов, кроме Q , нет, и нет вырождения спектра.

Существуют, однако, два широких класса полей, для которых можно найти оператор T со свойствами (5.6):

1. «Двумерное поле», т. е. поле, направленное вдоль одной из координатных осей и произвольным образом зависящее от двух других координат: $B_z = B_z(x, y)$, $B_x = B_y = 0$.

2. Трехмерное поле с определенной четностью: $\mathbf{B}(-x) = \pm \mathbf{B}(x)$.

Рассмотрим сначала первый класс полей и выберем векторный потенциал в виде: $A_x = A_x(x, y)$; $A_y = A_y(x, y)$; $A_z = 0$.

Уравнение (5.4) сохраняет свой вид, если понимать под Q двумерный оператор Дирака

$$Q = \sigma_1 \pi_1 + \sigma_2 \pi_2 \quad (5.7)$$

и сделать преобразование гамильтониана H : $H \rightarrow H - p_z^2$.

Роль оператора T играет в этом случае σ_3 . Существование оператора с такими свойствами обусловлено четной размерностью.

Для дальнейшего удобно ввести также операторы $Q_{\pm}$ (см. гл. 2), которые имеют вид

$$Q_{\pm} = \frac{1}{2} (Q_1 \pm iQ_2) = Q \frac{1 \mp \sigma_3}{2}. \quad (5.8)$$

Аналогия с суперсимметричной квантовой механикой, рассмотренной в п. 3, станет сразу видной, если представить генераторы $Q_{\pm}$ в виде

$$Q_+ = \pi^- f^+, \quad Q_- = \pi^+ f^-, \quad (5.9)$$

где $\pi^{\pm} = \pi_x \pm i\pi_y$, $f^{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2/2$.

Операторы $f^\pm$ удовлетворяют алгебре фермионных операторов уничтожения и рождения: $f^{\pm 2} = 0$, $\{f^+, f^-\} = 1$.

Операторы $\pi^\pm$ удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\pi^-, \pi^+] = 2 |e| B_z(x, y), \quad (5.10)$$

где учтено, что для электрона $e = -|e|$. В однородном поле $B_z = B_0 > 0$ операторы $b^\pm = \pi^\pm / \sqrt{2 |e| B_0}$ могут рассматриваться как бозонные операторы рождения и уничтожения (при $B_0 < 0$ они меняются ролями).

Таким образом, задача об электроне в однородном магнитном поле сводится к рассмотренной в гл. 2 задаче о суперсимметричном гармоническом осцилляторе, что и отмечалось выше.

Суперсимметричная структура сохраняется, однако, и в неоднородном поле, и при этом мы имеем дело уже не со «свободной» теорией невзаимодействующих осцилляторов, но с теорией, включающей взаимодействие, аналогичной рассмотренной в п. 3 суперсимметричной квантовой механике.

Отметим, что наличие суперсимметрии в этой задаче оказалось связанным с калибровочным характером электромагнитного поля. Действительно, замена $\mathbf{p} \rightarrow \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x})$ в соответствии с принципом минимального включения взаимодействия приводит к «нормальному» значению магнитного момента, равному магнетону Бора $\mu_B = e\hbar/2mc$, а только при $\mu = \mu_B$ гамильтониан H имеет суперсимметричную структуру. Связь между тем, что гамильтониан имеет вид «точного квадрата», и тем, что $\mu = \mu_B$, отмечалась Фейнманом⁶⁰.

Гамильтониан H в базисе собственных функций оператора σ_z распадается на два факторизованных гамильтониана (см. гл. 3):

$$H = H_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + H_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

где

$$H_+ = \pi^- \pi^+, \quad H_- = \pi^+ \pi^-. \quad (5.12)$$

Гамильтонианы $H_\pm$ действуют на однокомпонентные функции, соответствующие проекциям спина $\pm 1/2$. Вследствие факторизации этих гамильтонианов задача нахождения волновой функции основного состояния значительно упрощается. В точности аналогично тому, как и в суперсимметричной квантовой механике, рассмотренной в гл. 3, волновая функция основного состояния должна удовлетворять одному из дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\pi^+ \psi = 0 \quad \text{или} \quad \pi^- \psi = 0, \quad (5.13)$$

в зависимости от знака полного магнитного потока. Можно убедиться, что уравнения (5.13) несовместны друг с другом, и поэтому может удовлетворяться только одно из них.

Факторизация гамильтонианов Паули и Дирака в двумерном магнитном поле была обнаружена (без связи с суперсимметрией) в работе Аронова и Канера³⁰, там же была найдена кратность вырождения основного состояния в случае финитного поля, когда полный магнитный поток Φ конечен. Эта кратность вырождения определяется формулой $N_0 = [\Phi/\Phi_0]$, где $\Phi_0 = -2\pi/|e|$ — квант магнитного потока. Если поток равен целому числу квантов, то, как отмечалось в работе³¹, кратность вырождения на единицу меньше. В той же работе рассмотрен случай двоякопериодического двумерного магнитного поля и показано, что вакуум остается вырожденным бесконечнократно, несмотря на потерю трансляционной инвариантности. В работе³³ рассмотрена суперсимметричная структура задачи и показано, что на волновых функциях основного состояния реализуется бесконечномерное неприводимое представление алгебры Гейзенберга — Вейля (алгебры бозонных операторов рождения и уничтожения) и в том случае, если магнитное поле не обладает никакой регулярностью, но полный поток бесконечен.

Задача об электро́не в двумерном магнитном поле представляет собой пример суперсимметричной квантовой механики с *двумя* бозонными степенями свободы и *одной* фермионной. Таким образом, видно, что суперсимметрия не требует, вопреки распространенному представлению, совпадения числа бозонных и фермионных степеней свободы. Свойства «двумерной» суперсимметричной квантовой механики существенно отличаются от свойств одномерной механики Виттена, рассмотренной в гл. 3, главным образом тем, что основное состояние (вакуум) может быть вырождено и при наличии точной (не нарушенной спонтанно) суперсимметрии. Однако так же, как и в одномерном случае, кратность вырождения вакуума определяется глобальными свойствами суперпотенциала (для двумерного поля — величиной полного потока Φ), а не его конкретным видом. В случае бесконечного потока кратность вырождения бесконечна, и именно с этим связано известное бесконечнократное вырождение по «центру орбиты» в однородном магнитном поле. В неоднородном поле с бесконечным полным потоком вырождение всех уровней, кроме основного, может быть снято (за исключением двукратного вырождения, обусловленного суперсимметричной структурой задачи), однако основной уровень остается вырожденным бесконечнократно. Можно сказать, что вакуум и после включения взаимодействия «помнит» симметрию свободного гамильтониана, соответствующего случаю однородного поля, когда *все* уровни, включая основной, были вырождены бесконечнократно. Отличие неоднородного поля от однородного состоит в том, что в однородном поле волновой пакет, представляющий основное состояние, можно сдвигать, не меняя его формы: при этом энергия состояния остается равной нулю. В неоднородном поле волновой пакет при сдвиге меняет свою форму, «приспосабливаясь» к нерегулярностям поля так, чтобы его энергия оставалась равной нулю.

Переходя к случаю трехмерного поля, заметим, что оператор «импульса» $p = -i\partial/\partial x$ антикоммутирует с оператором четности P . Благодаря этому для полей, имеющих определенную четность $A(-x) = \pm A(x)$, гамильтониан обладает суперсимметрией с двумя суперзарядами. Роль упоминавшегося выше оператора T (см. (5.6)) в случае нечетного поля $A(-x) = -A(x)$ играет оператор четности P , а в случае четного поля $A(-x) = A(x)$ — оператор R , действующий следующим образом: $R\psi(x) = i\sigma_2\psi^*(-x)$ ³³. Мы имели в виду здесь четность вектор-потенциала $A(x)$, само же магнитное поле $B(x)$ имеет (вследствие соотношения $B = \text{rot } A$) четность, противоположную четности поля $A(x)$.

Интересно проследить, что играет роль «фермионного заряда» в рассмотренной задаче об электро́не в магнитном поле.

В двумерном случае таким «зарядом» является значение проекции спина (по или против поля). В трехмерном случае роль «фермионного заряда» играет четность. В обоих случаях введение «фермионной степени свободы» было просто приемом, который был естественно связан с разбиением всего пространства состояний на два ортогональных подпространства — в первом случае подпространства определялись знаком s_z , во втором — четностью волновой функции. Этот пример показывает, что фермионные степени свободы могут быть с пользой введены и в такие задачи, где они первоначально отсутствуют.

Другие примеры будут приведены ниже.

Двукратное вырождение уровней электро́на в *однородном* магнитном поле связывалось также с существованием динамической группы симметрии⁵⁴. На состояниях с одинаковой энергией в этом случае реализуется спинорное представление группы $SU(2)$, генераторы которой X_i наряду с коммутационными соотношениями удовлетворяют также и *анти*коммутационному соотношению $\{X_i, X_j\} = 2\delta_{ij}$, которое после изменения нормировки генераторов совпадает с одним из соотношений супералгебры (см. гл. 2). Суперсимметрия же объясняет двукратное вырождение уровней энергии и в *неоднородном* двумерном поле, когда представление операторов X_i в терминах операторов

рождения и уничтожения невозможно, а такое представление является основным при использовании динамической группы (а не супергруппы) симметрии.

б) Ядерная физика

При изучении ядерных взаимодействий часто используется понятие нуклон-нуклонного потенциала. На малых расстояниях ($r \leq 2\text{Фм}$) он имеет характер отталкивающего потенциала («кор» нуклонов), а на больших — притягивающего. Если формирование «кора» обеспечивается сложными одно- и многочастичными процессами (обмен векторными мезонами ρ , ω , двух-пионный обмен и т. д.), то дальнедействующая часть нуклон-нуклонного потенциала формируется только за счет однопионного обмена. Таким образом, пион-нуклонное взаимодействие играет важную роль в ядерной физике. Как будет показано ниже, в некоторых случаях это взаимодействие обладает суперсимметричной структурой.

Рассмотрим сначала одночастичную задачу: нуклон в классическом (внешнем) π -мезонном поле. Эта задача интересна не только с методической точки зрения, но и для исследования свойств ядерной материи с π -конденсатом⁶², так как π -конденсат представляет собой классическое пионное поле.

В случае псевдоскалярной связи лагранжиан πN -взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{PS} = g_{\pi N} \bar{\psi} \gamma_5 \tau \pi (\mathbf{x}) \psi, \quad (5.14)$$

а в случае псевдовекторной:

$$\mathcal{L}_{PV} = f_{\pi N} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \partial_\mu \tau \pi (\mathbf{x}) \psi; \quad (5.15)$$

здесь $\pi(\mathbf{x})$ — изовекторное пионное поле, τ — изотопические матрицы Паули, ψ — изодублет нуклонов. Псевдоскалярное взаимодействие характеризуется безразмерной константой связи $g_{\pi N}$ и перенормируемо, константа связи псевдовекторного взаимодействия $f_{\pi N}$ имеет размерность обратной длины, и это взаимодействие неперенормируемо. Известно, однако, что в разложении с точностью до линейных по константе связи слагаемых обе теории эквивалентны (см., например,⁶¹). При этом $f_{\pi N} = g_{\pi N}/2M$, где M — масса нуклона.

Гамильтониан, входящий в уравнение Дирака для нуклона во внешнем пионном поле, имеет вид

$$H_{PS}^D = \hat{\alpha} \mathbf{p} + \beta M + i g \gamma_5 \tau \pi (\mathbf{x}) \quad (5.16)$$

в случае псевдоскалярной связи,

$$H_{PV}^D = \hat{\alpha} \mathbf{p} + \beta M - f \alpha \gamma_5 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \tau \pi (\mathbf{x}) \quad (5.17)$$

в случае псевдовекторной связи. В нерелятивистском приближении

$$H_{PS} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{g^2}{2M} \pi^2(\mathbf{x}) + \frac{g}{2M} \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \tau \pi (\mathbf{x}), \quad (5.18)$$

$$H_{PV} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + f \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \tau \pi (\mathbf{x}), \quad (5.19)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — спинные матрицы.

Линейные по константе связи слагаемые в (5.18), (5.19) описывают p -волновое притяжение и совпадают при $f = g/2M$, однако для псевдоскалярной связи в нерелятивистском гамильтониане появляется дополнительный член, дающий вклад в s -волновое отталкивание.

В поле нейтральных пионов, когда $\pi(\mathbf{x}) = (0, 0, \pi(\mathbf{x}))$, гамильтониан H_{PS} можно представить в виде

$$H_{PS} = \frac{1}{4M} \{Q_+, Q_-\}, \quad (5.20)$$

где $Q_{\pm}$ — нильпотентные сопряженные друг другу операторы:

$$Q_{\pm} = (\sigma \hat{p} \pm ig\pi(x)) \tau^{\pm}, \quad (5.21)$$

играющие роль суперзарядов. Таким образом, гамильтониан H_{PS} обладает суперсимметрией с двумя суперзарядами, следствием чего является двукратное вырождение уровней энергии нуклонов в произвольном трехмерном поле π^0 -конденсата. Состояния-суперпартнеры имеют различную зависимость от пространственных координат и противоположные значения проекции изоспина.

Псевдовекторная связь не приводит к суперсимметричной структуре гамильтониана, и здесь уместно сравнить пион-нуклонное взаимодействие с электромагнитным (калибровочным) взаимодействием. Суперсимметрия для уравнения Дирака в магнитном поле (см. п. а) гл. 5) была связана с принципом минимального включения взаимодействия заменой

$$\partial_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x). \quad (5.22)$$

Феноменологическое же включение аномального магнитного момента $\mu' \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}/2m$ нарушает суперсимметрию, приводя одновременно и к перенормируемости теории из-за наличия размерной константы. Полностью аналогичная ситуация имеет место и для πN -взаимодействия, поскольку псевдоскалярная связь удовлетворяет принципу минимального включения: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - g\pi(\mathbf{x})$, является перенормируемой и приводит к суперсимметричному гамильтониану. Следует отметить, однако, что в отличие от электродинамики рассматриваемое описание πN -взаимодействия является феноменологическим.

Суперсимметричная структура была обнаружена и непосредственно в нуклон-нуклонном потенциале, точнее, в той его части, которая обусловлена однопионным обменом и зависит от спинов нуклонов⁴⁸.

6. НУЛЕВЫЕ МОДЫ, ТОПОЛОГИЯ И СУПЕРСИММЕТРИЯ

Мы уже видели при рассмотрении суперсимметричной квантовой механики (п. 3) и при рассмотрении задачи об электроны в магнитном поле (п. 5), что наличие или отсутствие уровней с нулевой энергией связано с глобальными характеристиками суперпотенциалов, играющих роль топологических характеристик. Общая постановка задачи об этой связи и подробное рассмотрение принадлежат Виттену^{17, 18}.

В теории поля роль уровней с нулевой энергией играют так называемые нулевые моды. Впервые для ферми-систем они были обнаружены Джэкивом и Реббей⁴⁹ и сыграли значительную роль в последующем развитии теории поля.

В качестве простейшего примера рассмотрим теорию поля в двумерном $(1+1)$ пространстве-времени с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\varphi)^2 - U(\varphi) + \bar{\psi} (i\gamma_{\mu}\partial_{\mu} - g\varphi) \psi, \quad (6.1)$$

где φ — вещественное скалярное поле, ψ — фермионное поле, g — константа связи фермионов с бозонами.

Чтобы определить спектр частиц, следует сначала определить основное состояние (вакуум), так как одночастичные возбуждения — это кванты «малых колебаний» над вакуумом. Вакуум соответствует минимуму потенциальной энергии. Чтобы его определить, находят решение классических уравнений движения для бозонной части лагранжиана в пределе $g \rightarrow 0$, а затем линеаризуют задачу, рассматривая малые отклонения от найденного классического решения.

Решение классических уравнений движения, соответствующее минимальной энергии, обозначим $\varphi_c(x)$. Оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{dU(\varphi)}{d\varphi}. \quad (6.2)$$

Каким будет спектр фермионных возбуждений в этом классическом бозонном поле $\varphi_c(x)$? Для таких возбуждений получаем

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - m(x)) \psi(x, t) = 0, \quad (6.3)$$

где $m(x) = g\varphi_c(x)$. Поскольку $\varphi_c(x)$ зависит только от x , можно искать решение (6.3) в виде: $\psi(x, t) = \exp(-i\omega t)\psi^*(x)$. Подставляя это решение в (6.3), получаем уравнение

$$H_D \psi(x) = \omega \psi(x). \quad (6.4)$$

При часто употребляемом выборе двумерных γ -матриц $\gamma_0 = -\sigma_1$, $\gamma_1 = -i\sigma_3$ гамильтониан H_D имеет вид

$$H_D = \sigma_2 p - \sigma_1 m(x). \quad (6.5)$$

Он обладает свойствами суперзаряда в суперсимметричной квантовой механике (см. гл. 3) с суперпотенциалом $m(x)$.

Таким образом, мы можем воспользоваться приведенным в п. 3 критерием существования уровня с нулевой энергией, чтобы определить, существует ли решение уравнения Дирака (6.4) с нулевой частотой ω , т.е. с энергией, равной нулю. В применении к данному случаю получаем, что такое решение существует, если знаки $m(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$ различны, т.е. бозонное поле $\varphi_c(x)$ имеет различные асимптотики при $x \rightarrow \pm \infty$. Само существование фермионных «возбуждений» с нулевой энергией в теории поля было неожиданным и вызвало большой интерес. Эти возбуждения называются нулевыми модами; недавно они были обнаружены экспериментально при исследовании свойств проводимости линейного полимера — полиацетилена. Эффективный лагранжиан для этой системы аналогичен модели, рассмотренной здесь.

Стационарные классические решения для бозонного поля могут иметь различные асимптотики при $x \rightarrow \pm \infty$ только в моделях, в которых возможны солитонные решения, — в примере с лагранжианом (6.1) такие решения есть, что обусловлено тем, что потенциал $U(\varphi)$ имеет две ямы. Таким образом, имеется связь между существованием фермионных нулевых мод и существованием солитонов в бозонном секторе. Эти солитонные решения представляют собой топологически нетривиальные основные состояния (вакуумы).

Связь нулевых мод с топологией была использована Витеном¹⁸ для нахождения критериев спонтанного нарушения суперсимметрии. Он ввел величину

$$\Delta_W = n_b^0 - n_f^0, \quad (6.6)$$

где n_b^0 и n_f^0 — числа бозонных и фермионных состояний с нулевой энергией. Условие $\Delta_W = 0$ является необходимым (но не достаточным) условием того, что суперсимметрия спонтанно нарушена. Действительно, если $\Delta_W \neq 0$, то хотя бы одно из чисел n_b^0 или n_f^0 отлично от нуля, т.е. присутствуют состояния с нулевой энергией, а это означает (см. гл. 3), что суперсимметрия точная. Величина Δ_W получила название «индекс Виттена».

Разобьем все пространство состояний на два подпространства — бозонных и фермионных состояний — так, чтобы вектор состояния имел вид

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Генератор суперсимметрии, переводящий бозонные состояния в фермионные и наоборот, имеет в таком представлении структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Выберем Q эрмитовым; тогда M и M^* сопряжены друг другу.

Состояния с нулевой энергией аннигилируются оператором Q , поскольку $H = Q^2$. При этом, согласно (6.7), (6.8), бозонные и фермионные состояния с нулевой энергией удовлетворяют, соответственно, уравнениям $M\psi = 0$ или $M^*\psi = 0$. Таким образом, бозонные состояния с нулевой энергией являются ядром оператора M , а фермионные — M^* , причем размерности ядер равны как раз числам состояний с нулевой энергией:

$$n_b^0 = \dim \text{Ker } M, \quad n_f^0 = \dim \text{Ker } M^*. \quad (6.9)$$

Величина

$$\text{Ind } M = \dim \text{Ker } M - \dim \text{Ker } M^* \quad (6.10)$$

называется, по определению, индексом оператора M . Из (6.6), (6.9) следует, что индекс Виттена Δ_W совпадает с индексом оператора M :

$$\text{Ind } M = \Delta_W. \quad (6.11)$$

Соотношение (6.11) оказалось полезным «в обе стороны». С одной стороны, поскольку индекс оператора является топологической характеристикой, он не меняется при малых деформациях оператора, и это позволяет определить, согласно (6.11), индекс Виттена, а вместе с этим и возможность спонтанного нарушения суперсимметрии в той или иной модели теории поля. При этом используется неизменность индекса Виттена при вариациях параметров теории, и теория «непрерывно» варьируется к такому виду, когда индекс Виттена может быть вычислен явно. С другой стороны, использование формализма суперсимметрии и интегрирования по грассмановым переменным позволило получить простое доказательство известной теоремы Атьи — Зингера об индексе оператора^{37,38}. При этом для данного оператора M (например, оператора Дирака во внешнем калибровочном поле) строится соответствующая суперсимметричная теория, индекс Виттена которой совпадает с индексом оператора M и может быть вычислен с помощью континуального интегрирования.

7. СУПЕРСИММЕТРИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

В задачах теории поля при замене переменных в континуальных интегралах в качестве якобианов перехода появляются функциональные детерминанты. Эти детерминанты могут быть представлены (см. гл. 4) в виде интеграла по грассмановым переменным. Благодаря этому в континуальном интеграле

$$Z = \int D\{\varphi\} e^{-iS\{\varphi\}} \quad (7.1)$$

можно совершить замену переменных, *сохранив* при этом форму записи. чрезвычайно удобную для развития теории возмущений, проведения различных усреднений и т.п. При этом действие модифицируется: в новых переменных оно включает также фиктивные ферми-поля и обладает дополнительной симметрией, имеющей характер суперсимметрии.

а) Стохастические дифференциальные уравнения

Начнем с простейшего примера, когда континуальные интегралы сводятся к обычным. Пусть ρ — случайная величина с функцией распределения $P(\rho)$, удовлетворяющей условию нормировки $\int d\rho P(\rho) = 1$.

Пусть x — другая случайная величина, связанная с ρ соотношением

$$W(x) = \rho, \quad (7.2)$$

и нас интересует среднее какой-либо функции от x :

$$\langle g(x) \rangle = \int g[x(\rho)] P(\rho) d\rho. \quad (7.3)$$

Если зависимость $x(\rho)$, являющаяся обращением формулы (7.2), может быть найдена в явном виде, то для нахождения $\langle g(x) \rangle$ достаточно подставить ее в формулу (7.3). Может случиться, однако, что обращение формулы (7.2) либо невозможно технически, либо нежелательно ввиду того, что эта формула обладает какими-либо свойствами симметрии, а мы хотим сохранить эту симметрию в явном виде. Тогда надо сделать замену переменных в формуле (7.3) и перейти от интегрирования по ρ к интегрированию по x . Якобиан перехода $d\rho/dx = dW/dx$ представим, воспользовавшись формулой (4.22), в виде интеграла по грассмановым переменным и в результате получим

$$\langle g(x) \rangle = \int dx g(x) e^{-F(x)} \frac{d\rho}{dx} = \int dx d\eta d\bar{\eta} g(x) \exp \left[-F(x) + \bar{\eta} \frac{dW}{dx} \eta \right], \quad (7.4)$$

где $F = -\ln P$.

Нетрудно убедиться, что «действие»

$$I(x, \eta, \bar{\eta}) = F(x) - \bar{\eta} \frac{dW}{dx} \eta,$$

стоящее в экспоненте последнего из интегралов в формуле (7.4), инвариантно относительно преобразований, перемешивающих «бозонную» переменную x и «фермионные» переменные $\eta, \bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x + \bar{\epsilon} \eta + \bar{\eta} \epsilon, \\ \eta &\rightarrow \eta' = \eta + \epsilon \frac{dF}{dW}, \quad \bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}' = \bar{\eta} + \bar{\epsilon} \frac{dF}{dW}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $\epsilon, \bar{\epsilon}$ — грассмановы параметры преобразования. В случае гауссова распределения $F \propto W^2$ «действие» $I(x, \eta, \bar{\eta})$ приобретает вид, типичный для суперсимметричных теорий с суперпотенциалом $W(x)$ (см. гл. 3).

Переход к 1-мерному случаю соответствует переходу от случайной величины ρ к случайной функции $\rho(t)$. Интегралы становятся континуальными (функциональными).

Покажем, следуя ^{40,41}, что задача о диссипативной динамике системы, подверженной воздействию случайной силы $\rho(t)$, оказывается аналогичной рассмотренной в гл. 3 суперсимметричной квантовой механике.

Рассмотрим уравнение Ланжевена

$$\frac{dx}{dt} = -W(x) + \rho(t), \quad (7.6)$$

где $\rho(t)$ — случайная сила с гауссовой функцией распределения

$$\begin{aligned} P\{\rho(t)\} &\propto \int D\rho \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} \int dt \rho^2(t) \right], \\ \langle \rho \rangle &= 0, \quad \langle \rho(t) \rho(t') \rangle = \alpha \delta(t - t') \end{aligned} \quad (7.7)$$

(«белый шум»). Мы будем интересоваться корреляционной функцией

$$\langle x(t) x(t') \rangle \propto \int D\rho x(t) x(t') P\{\rho\}. \quad (7.8)$$

Функциональный интеграл здесь берется по всем реализациям случайного процесса $\rho(t)$. Перейдем к интегрированию по траекториям $x(t)$ и якобиан

перехода $\det |\delta\rho/\delta x|$ представим в виде гауссова интеграла по ферми-полям ψ и $\bar{\psi}$ (см. (4.23)). В результате получим:

$$\langle x(\tau)x(\tau') \rangle \propto \int Dx D\bar{\psi} D\psi x(\tau)x(\tau') \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha} \int d\tau [\dot{x}_\tau + W(x)]^2 + \int d\tau \bar{\psi} [\partial_\tau + W'(x)] \psi \right\}. \quad (7.9)$$

Мы сделали переобозначение $t \rightarrow \tau$, потому что эта корреляционная функция совпадает с функцией Грина во мнимом времени для суперсимметричной квантовой механики Виттена (см. гл. 3). Параметр α , определяющий интенсивность флуктуаций в (7.7), играет роль постоянной Планка, если (7.9) рассматривать как функцию Грина. Полагая $\alpha = 1$ и опуская в показателе экспоненты полную производную по времени $\dot{x}_\tau W(x)$, получаем лагранжиан суперсимметричной квантовой механики:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} W^2(x) + \bar{\psi} [i\partial_t + W'(x)] \psi. \quad (7.10)$$

Интересно, что наличие или отсутствие стационарного режима для случайного процесса $x(t)$ оказывается связанным с наличием или отсутствием спонтанного нарушения суперсимметрии. Покажем это.

Плотность вероятности $\mathcal{P}\{x(t); t\}$ для случайной функции $x(t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка⁵⁷:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\partial \{W(x)\mathcal{P}\}}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2}. \quad (7.11)$$

Это уравнение имеет стационарное (не зависящее от времени) решение

$$\mathcal{P}(x) \sim \exp \left[-\frac{2}{\alpha} \int_{-\infty}^x dy W(y) \right] \quad (7.12)$$

только в том случае, если сходится нормировочный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{P}(x) = 1. \quad (7.13)$$

Уравнения (7.12) и (7.13) совместны только в том случае, когда «суперпотенциал» $W(x)$, играющий роль детерминированной части случайной силы в уравнении Ланжевена (7.6), имеет разные знаки при $x \rightarrow \pm \infty$. Физически это представляется очевидным: в противном случае закономерная компонента силы унесет частицу на бесконечность. С другой стороны, условие, что $W(x)$ имеет разные знаки при $x \rightarrow \pm \infty$, в точности совпадает с условием того, что суперсимметрия в соответствующей задаче точная — нет спонтанного нарушения (см. п. 3).

б) «Духи» Фаддеева — Попова

Видимо, исторически первый пример введения фиктивных ферми-полей для функциональной замены переменных представляют собой известные духи Фаддеева — Попова⁶³, которые оказались очень полезными при построении квантовой теории калибровочных полей. Наличие суперсимметричной структуры в эффективном действии, включающем ферми-поля духов, было обнаружено Бекки, Рюэ, Сторой⁶⁴ и Тютиным и использовано ими для упрощения доказательств тождеств Славнова — Тейлора^{63, 64}, играющих роль тождеств Уорда в неабелевых калибровочных теориях.

Напомним специфику континуального интегрирования в калибровочных теориях. Классический лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований, содержащих произвольные функции, и поэтому на

самом деле зависит от меньшего количества полей, чем он формально содержит. На поля необходимо наложить дополнительное условие, например условие лоренцевой калибровки, которое уменьшает число независимых компонент полей. В континуальном интеграле следовало бы интегрировать только по физически различным конфигурациям полей (например, только по поперечным полям в лоренцевой калибровке). Однако для построения теории возмущений удобнее проводить интегрирование по **всем** конфигурациям калибровочных полей, введя под интеграл δ -функцию, снимающую интегрирование по нефизическим переменным. Функциональная замена переменных используется затем для того, чтобы не обращать в явном виде условие калибровки.

Простейший пример, когда континуальные интегралы сводятся к обычным, в данном случае может показаться несколько искусственным, однако, на наш взгляд, этот пример позволяет яснее проследить основную идею. Пусть x — «физическая» переменная, а y — «нефизическая» в том смысле, что действие $S(x, y)$, будучи формально функцией x и y , на самом деле является функцией только одной переменной. Это выражается в том, что на x и y наложена связь («условие калибровки»):

$$F(x, y) = \rho, \quad (7.14)$$

где ρ — произвольное число. Нас интересует интеграл по «физической» переменной x :

$$Z = \int dx e^{-S}, \quad (7.15)$$

и мы хотим представить его в форме, в которой x и y входили бы как равноправные переменные — это соответствовало бы интегрированию по всем конфигурациям калибровочных полей. Кроме того, мы желаем сохранить вид интеграла (7.15) как интеграла от экспоненты — это позволяет строить теорию возмущений. Наконец, третье желание — не разрешать в явном виде условие связи (7.14).

Прежде всего введем интегрирование по y :

$$Z = \int dy dx e^{-S} \delta(y - f_\rho(x)), \quad (7.16)$$

где $y = f_\rho(x)$ — решение уравнения связи (7.14) (нам не понадобится его искать в явном виде). δ -функцию, появившуюся в (7.16), снимем дополнительным интегрированием по ρ , которое можно проводить с любым удобным весом, так как интеграл (7.15) не зависит от ρ . По причине, которая объяснена ниже, удобнее интегрировать по ρ с гауссовым весом. Дальнейшее преобразование интеграла (7.16) дает при этом, с использованием формулы (4.22):

$$\begin{aligned} Z &= \int dx dy e^{-S} \delta[F(x, y) - \rho] \frac{\partial F}{\partial y} \propto \int dx dy d\rho e^{-S - \rho^2} \delta(F - \rho) \frac{\partial F}{\partial y} = \\ &= \int dx dy e^{-S - F^2(x, y)} \frac{\partial F}{\partial y} = \int dx dy d\bar{\eta} d\eta \exp \left[-S - F^2(x, y) - \bar{\eta} \frac{\partial F}{\partial y} \eta \right]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Эта формула является, как легко видеть, реализацией всех трех упомянутых выше желаний. Интегрирование по ρ с гауссовым весом удобно, как следует из (7.17), в тех случаях, когда уравнение связи (7.14) линейно по x, y — при этом добавка к «действию» оказывается квадратичной.

Перейдем к задаче о квантовании калибровочных полей. Условие связи в лоренцевой калибровке (аналог (7.14)) имеет вид

$$\partial_\mu A_\mu^a = \rho^a(x), \quad (7.18)$$

где a — изотопический индекс, μ — лоренцев.

Интегрирование по $\rho^a(x)$ проводится с гауссовым функционалом распределения во мнимом времени:

$$P\{\rho^a\} \propto \exp\left[-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\rho^a)^2\right]. \quad (7.19)$$

В результате получаем, в соответствии с разобранным выше примером, следующее выражение для континуального интеграла:

$$Z \propto \int DA_\mu^a D\bar{\eta}^a D\eta^a \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}_{g.f} + \mathcal{L}_{gh})\right]. \quad (7.20)$$

Проследим аналогию с (7.14). Прежде всего, интегрирование в (7.20) ведется по всем конфигурациям калибровочных полей $A_\mu^a(x)$ — это соответствует интегрированию по x и y в (7.14). Далее, появляются фиктивные ферми-поля $\eta^a(x)$, $\bar{\eta}^a(x)$, аналогичные грассмановым переменным η , $\bar{\eta}$ в формуле (7.17). Эти ферми-поля и есть духи Фаддеева — Попова. Затем, так же, как и в (7.17), в экспоненте (под интегралом) содержатся три слагаемых: во-первых, исходный лагранжиан для калибровочных полей, формально зависящий от всех компонент полей — он соответствует S в (7.17), во-вторых, член, фиксирующий калибровку (gauge fixing):

$$\mathcal{L}_{g.f} = -(1/2\alpha) (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \quad (7.21)$$

(α — калибровочный параметр), который соответствует $F^2(x, y)$ в формуле (7.17), и, наконец, лагранжиан взаимодействия с духами Фаддеева — Попова (ghosts):

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{\eta}^a \frac{\delta(\partial_\mu A_\mu^a)}{\delta\omega^b} \eta^b, \quad (7.22)$$

который соответствует последнему слагаемому $\bar{\eta} \frac{\partial F}{\partial y} \eta$ в экспоненте в формуле (7.17). Величины ω^b , входящие в (7.22), являются параметрами калибровочных преобразований: при инфинитезимальных преобразованиях

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \omega^b, \quad D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} + f^{abc} A_\mu^c, \quad (7.23)$$

где f^{abc} — структурные константы калибровочной группы симметрии (константа связи калибровочных полей положена здесь равной единице). В лоренцевой калибровке лагранжиан взаимодействия с духами $\mathcal{L}_{gh}$ принимает стандартный вид:

$$\mathcal{L}_{gh} = \partial_\mu \bar{\eta}^a D_\mu^{ab} \eta^b. \quad (7.24)$$

Таким образом, фейнмановский интеграл по конфигурациям полей представлен в формуле (7.20) в виде интеграла от экспоненты с модифицированным действием и с релятивистски-инвариантной мерой.

Суперсимметрия довольно неожиданно обнаруживается при рассмотрении поведения различных слагаемых в экспоненте (7.20) при калибровочных преобразованиях. Как полное действие (сумма всех трех слагаемых), так и классическое действие для калибровочных полей (первое слагаемое) не меняются при калибровочных преобразованиях. Таким образом, два последних слагаемых (член, фиксирующий калибровку, и лагранжиан взаимодействия с духами) *в сумме* также инвариантны. Но *по отдельности* каждый из них не является калибровочно-инвариантным. Калибровочная инвариантность суммы этих двух слагаемых связана со своеобразной суперсимметрией модифицированного действия. Преобразования суперсимметрии, перемешивающие фермионные поля духов и продольные компоненты калибровочных полей, имеют вид

$$\delta A_\mu^a = \varepsilon D_\mu^{ab} \eta^b, \quad \delta \bar{\eta}^a = -\frac{1}{\alpha} \varepsilon \partial_\mu A_\mu^a, \quad \delta \eta^a = -\frac{1}{\alpha} \varepsilon f^{abc} \eta^b \eta^c, \quad (7.25)$$

где ε — грассманов параметр.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Может случиться, что природа не пожелает воспользоваться привлекательными свойствами суперсимметрии, чтобы разрешить проблемы физики фундаментальных взаимодействий, такие, как проблема расходимостей, перенормируемость квантовой гравитации и другие. Но и в этом случае суперсимметрия, по-видимому, останется, прежде всего потому, что она представляет собой новый, красивый вид симметрии, объединяющий непрерывные и дискретные преобразования.

Суперсимметрия уже обнаружила себя в задачах квантовой механики и оказалась весьма удобным формализмом для исследования задач, даже не содержащих фермионных степеней свободы в первоначальной постановке. Число работ, в которых используются идеи и методы суперсимметрии, продолжает расти, и обнаруживаются новые области ее применения.

Харьковский физико-технический институт
АН УССР
Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Суперсимметрия появилась в работах:

1. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.— Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 452.
2. Волков Д. В., Акулов В. П.— Ibidem, 1972, т. 16, с. 621; Phys. Lett. B, 1973, v. 46, p. 109.
3. Wess J., Zumino B.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 70, p. 39.

Обзоры по суперсимметрии

4. Огиевецкий В. И., Мезинческу Л.— УФН, 1975, т. 117, с. 673.
5. Fayet P., Ferrara S.— Phys. Rept., 1977, v. 32, p. 249.
6. Salam A., Strathdee J.— Fortschr. Phys., 1978, Bd. 26, S. 57.
7. Волков Д. В.— В кн.: Проблемы современной теоретической физики.— Киев, Наукова думка, 1982, с. 92.
8. Весс Й.— В кн.: Геометрические идеи в физике.— М.: Мир, 1983, с. 125.

Супергравитация: первые работы и обзоры

9. Волков Д. В., Сорока В. А.— Письма ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 529.
10. Freedman D., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 3214.
11. Deser S., Zumino B.— Phys. Lett. Ser. B, 1976, v. 62, p. 335.
12. Van Nieuwenhuizen P.— Phys. Rept., 1981, v. 68, p. 189.
13. Феррара С.— В кн.⁸, с. 104.

Суперматематика

14. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.
15. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
16. Лейтес Д. А. Введение в теорию супермногообразий.— УМН, 1980, т. 35, вып. 1, с. 3; Теория супермногообразий.— Петрозаводск: Карел. фил. АН СССР, 1983.

Суперсимметричная квантовая механика впервые рассмотрена в работах:

17. Witten E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 185, p. 513.
18. Witten E.— Ibidem, 1982, v. 202, p. 253.

Развитие суперсимметричной квантовой механики

19. Solomonson P., van Holten J. W.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 196, p. 509.
20. De Crombrughe M., Rittenberg V.— Ann. Phys. (N.Y.), 1983, v. 151, p. 99.
21. Cooper F., Freedman B.— Ibidem, v. 146, p. 262.
22. Alvarez E.— Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 29, p. 320.

23. Aharonov Y., Casher A., Yankielowicz S.— Ibidem, v. 30, p. 386.
24. Karsch F., Rabinovici E., Shore G., Veneziano G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 242, p. 503.
25. Smilga A. V. Instantn Effects in $N=2$ Supersymmetric Quantum Mechanics. Preprint ITP-42—Moscow, 1984.

Спектр уравнения Шрёдингера, факторизация и суперсимметрия

26. Infeld L., Hull T. E.— Rev. Mod. Phys., 1951, v. 23, p. 21.
27. Грин Х. Матричная квантовая механика.— М.: Мир, 1968.
28. Генденштейн Л. Э.— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 299.
29. Андрианов А. А., Борисов Н. В., Иоффе М. В., Эйдем М. И.— ТМФ, 1984, т. 61, с. 17.

Электрон в магнитном поле и суперсимметрия

30. Aharonov Y., Casher A.— Phys. Rev. Ser. A, 1979, v. 19, p. 2461.
31. Дубровин Б. А., Новиков С. П.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1006.
32. Ravndal F.— Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2823.
33. Генденштейн Л. Э.— Письма ЖЭТФ, 1984, т. 39, с. 234; ЯФ, 1985, т. 41, с. 261.
34. Jackiw R.— Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 29, p. 2375.
35. Криве И. В., Латинский С. М.— ЖЭТФ, 1984, т. 87, с. 1145.

Теорема Атьи—Зингера и суперсимметрия

36. Atiyah M. F., Singer I. M.— Bull. Amer. Math. Soc., 1963, v. 69, p. 422.
37. Alvarez-Gaumé L.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 90, p. 161.
38. Windey P.— Acta Phys. Pol. Ser. B, 1984, v. 15, p. 435.
39. Girardello L., Imbimbo C., Mukhi S. On Constant Configurations and the Evaluation of the Witten Index: Preprint IC-88.— Trieste: ICTP, 1983.

Суперсимметрия и стохастические дифференциальные уравнения

40. Parisi G., Sourlas N.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 744; Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 206, p. 231.
41. Фейгельман М. В., Цвеллик А. М.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1430.
42. McClain B., Niemi A., Taylor C., Wijewardhana L. C. R.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 217, p. 430.
43. Bernstein M., Brown L. S.— Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, p. 1933.

Суперсимметрия и физика неупорядоченных сред

44. Ефетов К. Б.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 872.
45. Efetov K. B.— Adv. Phys., 1983, v. 32, p. 53.
46. Bresin E., Gross D., Itzykson C.— Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 235, p. 24.

Суперсимметрия в ядерной физике

47. Iachello F.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 772.
48. Urrutia L. F., Hernandez E.— Ibidem, 1983, v. 51, p. 755.

Нулевые фермионные моды в теории поля и дробление заряда

49. Jackiw R., Rebbi C.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 3398.
50. Goldstone J., Wilczek F.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 988.
51. Bardeen W. A., Elitzur S., Frishman Y., Rabinovici E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 218, p. 445.
52. Semenoff G., Matsumoto H., Umezawa H.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 113, p. 371.

Когерентные состояния

53. Когерентные состояния в квантовой теории.— М.: Мир, 1972.
54. Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.— М.: Наука, 1979.
55. Переломов А. М.— УФН, 1977, т. 123, с. 23.

Монографии по общим вопросам квантовой механики и квантовой теории поля, цитированные в тексте

56. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
57. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.

58. А х и е з е р А. И., Б е р е с т е ц к и й В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1969.
59. А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1966.
60. Ф е й н м а н Р., Х и б б с А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.
61. Ш в е б е р С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля.— М.: ИЛ, 1963.
62. М и г д а л А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях.— М.: Наука, 1978.
63. С л а в н о в А. А., Ф а д д е е в Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.
64. Т е й л о р Дж. Калибровочные теории слабых взаимодействий.— М.: Мир, 1978.
65. Р а ш е в с к и й П. К. Теория спиноров.— УМН, 1955, т. 10, вып. 2, с. 3.