1985 г. Июль *Том 146, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

514.7525:3

ФРАКТАЛИ, ПОДОБИЕ, ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Я. Б. Зельдович, Д. Д. Соколов

Фракталь — толстая линия. Фракталь — толстая поверхность. Фракталь — вспененное пространство-время. — Фракталь — линия уровня. — Фракталь — густое множество точек.

ВВЕДЕНИЕ

«Геометры говорят, что линия есть длина без ширины, а мы, скептики, не можем понять длины, не имеющей ширины, ни в чувственном, ни в умопостигаемом» (Секст Эмпирик, «Против ученых», [32], IX, 391). Итак, еще в древности (цитата относится ко II веку н. э.) люди осознавали ограниченность представления о размерности как непременно о целом числе. Исподволь создавался образ объекта, более объемистого, чем прямая, но все же сходного с линией («линия с шириной»). Показательно, что очень долгое время эта работа была облечена в негативную форму, в форму критики представлений об одно- и двумерных объектах. Это можно почувствовать уже по приведенной цитате из Секста Эмпирика.

Понятие линии сыграло решающую роль в создании аналитической геометрии. Одной ветвью этого направления явилась дифференциальная геометрия. Эта наука не только рассматривает линии и поверхности в нашем родном и близком трехмерном пространстве. Развитие дифференциальной геометрии позволило создать представление об искривленном, неевклидовом пространстве, которое может быть и многомерным, а также об искривленном комплексе пространства и времени.

Но, может быть, еще большую роль в истории естественных наук сыграло создание анализа — дифференциального и интегрального исчисления. Как бы ни развивались иные формализованные и абстрактные определения производных и интегралов, само открытие этих понятий неразрывно было связано с понятием движения и кривых (производная — скорость или наклон, интеграл — путь или площадь). Но важно подчеркнуть, что подразумевались плавное движение и гладкая кривая. Вряд ли Ньютон и Лейбниц пришли бы к понятию производных, изучая броуновское движение, скорость и траекторию микроскопических частиц, участвующих в тепловом движении.

Итак, Ньютон, Лейбниц, к этим именам можно прибавить еще многие другие, вплоть до Эйлера, как нечто само собой разумеющееся принимали гладкость и существование производных. Такая фигура умолчания не осталась незамеченной следующими поколениями. Учебники запестрели формулировками типа «производная, если она существует». Эти оговорки, как дорожные знаки, предупреждающие об опасности автомобилиста, несомненно, имеют глубокий смысл. Можно спорить о том, когда нужно вводить оговорки и усложнения в ходе обучения (успешное развитие так называемого нестандартного анализа [1, 2], который оперирует понятиями бесконечно больших и малых чисел, показало, что иногда школа критиков перегибала палку, и теорию пределов можно рассматривать в духе, гораздо более близком к Ньютону и Лейбницу, чем это обычно делается). Само же существование негладких функций и т. п. сомнению не подвергается.

Действительно, во второй половине прошлого века представители школы математиков, критиковавших основы анализа, и прежде всего Вейерштрасс и Пеано, построили функции, непрерывные, но нигде не имеющие производных, и кривые, всюду плотно заполняющие квадрат. С современной точки зрения странные свойства этих объектов связаны с тем, что они рассматриваются как одномерные, тогда как более естественно считать их объектами более высокой, в том числе и дробной, размерности, по современной терминологии — фракталями. Но этот предварительный этап изучения фракталей был неконструктивным, его связь с физикой и другими приложениями не осознавалась, сам термин «фракталь» принадлежит уже нашему времени (Мандельброт, 1977 г.). Современники часто воспринимали деятельность критиков как разрушение математики: Эрмит писал Стилтьесу в 1893 г.: «Я с дрожью ужаса отворачиваюсь от ваших несчастных проклятых функций, у которых нет производных»[3]. Следующее поколение математиков-критиков подвергло столь же пристальному анализу самые основы своей науки — понятия множества, натурального числа, доказательства и т.п. Реакцией на это прозвучало известное высказывание Гильберта[4] (который сам много сделал в области критики — деление на критиков и некритиков, конечно, очень условно): «Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор».

Позитивное, конструктивное освоение неклассических ситуаций начал на другом материале не математик, а замечательный недавно умерший физик-теоретик П.А.М. Дирак. Его идея δ-функции произвела огромное впечатление на математиков и физиков, заставила обдумать результаты критического направления на предмет извлечения из них полезных, конструктивных идей. Говоря о влиянии идей Дирака на создание теории фракталей, мы имеем в виду прежде всего психологическое воздействие, смену научной обстановки. Дело в том, что эти вопросы принадлежат к «вечным» вопросам науки, которые в каждой научной эпохе переосмысливаются по-новому и для которых смена точки зрения имеет не меньшее значение, чем разработка новой конкретной задачи. Для сравнения укажем на аналогичную смену точки зрения у математиков критического направления в XX веке, когда неожиданно стали актуальными казалось бы давно отброшенные развитием естествознания идеи схоластиков и античных логиков; в XX веке автор может полемизировать с Аристотелем как со своим современником (примеры см. в [4]) *). Реально смена точки зрения занимает довольно большое время, когда сосуществуют и борются разные взгляды. Так, физические приложения фракталей в определенном смысле были начаты работами Эйнштейна и Смолуховского по броуновскому движению еще в самом начале века; с другой стороны, существовавшая еще совсем недавно паническая боязнь сингулярностей в общей теории относительности являлась, в сущности, отголоском представления о неприменимости недифференцируемых объектов.

С точки зрения современной науки функция без производной вовсе не абстрактное понятие из арсенала коварных вопросов на экзамене по математическому анализу, а траектория броуновской частицы. Из-за своей изрезанности она должна рассматриваться как «толстая» линия, фракталь. Как мы увидим ниже, само описание фракталей очень близко к примеру Вейерштрасса недифференцируемой нигде функции. Оказывается, Вейерштрасс, в сущности, владел понятием фракталя, хотя и не подозревал об этом!

*) Укажем еще одну параллель, выпадающую обычно из современных обзоров: антиномии типа Бурали-Форти (сколь велико самое большое множество?) и методы их решения в теории классов в чем-то сходны с проблемами, возникающими при анализе понятия высшего блага в «Большой этике» (Аристотель [33]).

В арсенале математики нашелся и аналитический аппарат для описания таких негладких объектов. Место обычной размерности занимает дробная размерность, впервые введенная Хаусдорфом в начале века [6], а место производной занимает так называемый показатель Гёльдера, или дробная производная (это понятие сформировалось в работах целого ряда математиков). В этой статье мы рассмотрим упомянутые понятия и те физические задачи, в которых они возникают.

Понятие дробной размерности опирается на анализ понятия целой размерности. Все мы имеем представление о том, что значит, что прямая или окружность одномерны, плоскость или сфера двумерны, пространство или шар трехмерны, и т.д. Грубо говоря, это значит, что положение точки на прямой описывается одной координатой, на плоскости — двумя, а в пространстве — тремя. Такая величина — число координат — не может быть дробной. Для того чтобы изыскать путь для введения дробной размерности, надо пройти два этапа: найти некоторое соотношение, характеризующее размерность, входящее в которое число может не быть целым, и найти слабость в нашем наивном понимании размерности, устранение которой позволит приписать некоторым объектам дробное значение размерности.

Намеченную программу можно провести в жизнь следующим образом. С одномерными объектами связано понятие длины, с двумерными — площади, с трехмерными — объема. Их характеризует конструкция, не случайно также называемая размерностью: см, см^2, см^3. Из других областей физики мы знаем, что эти размерности бывают и дробными. Например, в системе СГС размерность электрического заряда равна г$^{1/2}$см$^{3/2}$с$^{-1}$. Для того же чтобы протащить эту дробную размерность в теорию фракталей, нужно несколько шире взглянуть на понятие координат. Точку в квадрате с любой заданной степенью точности можно характеризовать не только двумя, но и одной координатой, если соответствующая координатная линия все более плотно заполняет квадрат. В сущности, такая координата — вовсе не экзотика. Например, адрес человека в городе можно в принципе задать с помощью географических координат его квартиры. Но мы поступаем по-другому, задавая название улицы, номер дома и квартиры (аналог целой и дробной части координаты). В принципе можно было бы ввести сквозную нумерацию всех квартир города (ближе всего к этому адресная система Токио). Теперь уже не кажется казуистическим вопрос о том, какова размерность города — если его рассматривать как собрание улиц, то город одномерен, как место на земной поверхности — двумерен, с учетом высоты домов — трехмерен, а может быть, у него промежуточная размерность? Другими словами, чем следует характеризовать город — суммарной длиной улиц (сумма первых степеней длин малых, от перекрестка до перекрестка, отрезков улиц), его площадью (суммой квадратов длин этих отрезков, если сеть улиц прямоугольна) или — для каких-то вопросов и типов городов — суммой других, скажем полуторных степеней этих длин? Мы более детально расскажем об этом подходе в конце первого раздела.

Трудность понятия дробной — да и целой — размерности в том, что намеченный путь не единствен. Можно сформулировать и другие подходы, столь же естественные, но приводящие к другому результату. Мы начнем именно с другого, менее знакомого физикам, но исторически более раннего подхода Хаусдорфа (он опирается, по существу, на идеи, высказанные еще Евклидом). Основу этого подхода составляет представление о том, что одно- и двумерные образования, по существу, являются трехмерными частями пространства, у которых два или один характерный размер очень малы.

Прежде чем перейти к конкретному рассмотрению фракталей, упомянем о двух основных идеях, лежащих в основе этого понятия. Когда мы говорим об изломанной, негладкой траектории броуновской частицы, о ее бесконечно большой скорости, то мы понимаем, что это — идеализация. В очень малых масштабах сказывается конечность массы броуновской частицы и конечность времени между соударениями, так что траектория становится плавной. Когда мы говорим о фрактальной поверхности, то представляем себе шероховатую поверхность, размер неровностей которой медленно убывает с уменьшением площади проекции неровности. Однако эти неровности должны быть еще много больше межатомных расстояний, иначе вообще неприменимы представления о границе тела. Когда мы говорим, что длинная молекула заполняет пространственную область (соответствующий математический образ называется кривой Пеано), то понимаем, что, начиная с некоторой степени заполнения, придется учитывать не только линейные размеры молекулы, но и ее толщину, и наше описание на языке спутанных линий потеряет смысл. Поэтому в самом общем виде понятие фрактала связано с понятием промежуточной асимптотики [7]: размер неровности мал, но много больше некоторого еще меньшего.

Вторая идея снова поясняется на примере шероховатой поверхности. Можно представить себе, что на поверхности есть целая иерархия бугорков с одной площадью основания, но разной высоты, так что более высокие бугорки встречаются гораздо реже низких. С другой стороны, бывают поверхности, шероховатые только вблизи одной точки. Ясно, что такую шероховатость не опишешь одним числом — дробной размерностью. Поэтому понятие фрактала строится на основе предположения, исключащего такие усложнения,— на предположении о случайности фаз в соответствующих спектральных разложениях. Рассмотрения других ситуаций требует либо отдельного рассмотрения особенности, как в теории δ-функции, либо рассмотрения иерархии размерностей, своей для каждой системы шероховатостей (см. ниже раздел 5).

Вообще, история появления понятия фрактала представляет собой одну из типичных историй о преодолении математической «невозможности». Решающую роль в ней сыграла известная книга Мандельброта [8], первый обзорный материал по фракталям в нашей стране был опубликован в качестве одной из глав книги Баренблатта [9].

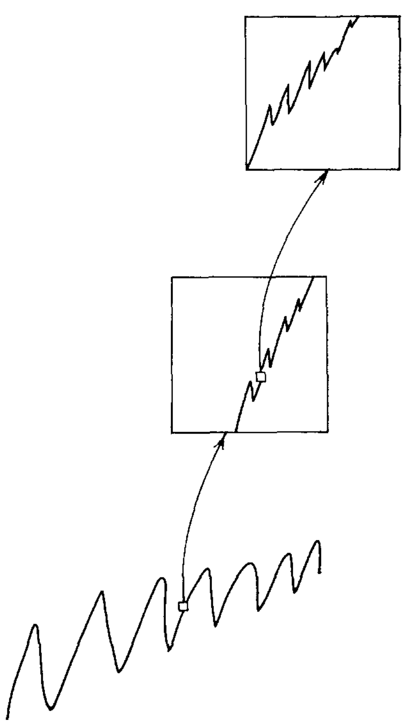

Рис. 1. Фрактальная кривая единообразно устроена в широком диапазоне масштабов

1. ФРАКТАЛЬ — ТОЛСТАЯ ЛИНИЯ

Пусть мы рассматриваем лезвие бритвы во все более сильный микроскоп. Сначала оно кажется для невооруженного глаза гладким, потом, при повышении увеличения, на нем возникают шероховатости и зазубрины, они увеличиваются, потом мы видим кристаллическую структуру тела, понятие границы исчезает и мы вступаем в мир квантовых представлений. Для того чтобы характеризовать область промежуточной асимптотики, когда поверхность тела и лезвие уже негладкие, но мы еще далеки от межатомных размеров, и необходимо понятие фрактала (рис. 1).

Мы уже говорили, что один из первых конкретных математических примеров фрактала был построен К.Вейерштрассом [10] как пример функции без производной. Эта функция геометрически представляет собой кривую $y = y(x)$, однозначно проектирующуюся на ось x и задающуюся как сумма ряда

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cos(B^n \pi x),$$

где $0 < A < 1$, а произведение AB достаточно велико (в оригинальной работе $AB > 1 + (3/2)$, подразумеваемое нами условие $AB > 1$ установлено Харди [11]). Нам удобно сразу рассмотреть более общий случай функций вида

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a(k_n)\cos(k_n x+\varphi_n), \tag{1}$$

где $a(k_n) \sim k_n^{-\alpha}$, $k_n \sim n \to \infty$.

Пример Вейерштрасса легко представляется в виде (1), однако суммирование ведется с большими пропусками и все фазы φ_n равны нулю. Как хорошо известно (см., например, [12]), скорость убывания фурье-спектра α соответствует числу производных функции $y(x)$. В самом деле, почленное дифференцирование ряда (1) дает

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} y(x)=\sum a(k_n)(k_n)^j \cos(k_n x+\psi_n).$$

Для сходимости исходного ряда нам было нужно $a_n \sim k^{-\alpha}$ с $\alpha > 0$. Ясно, что ряд для j-й производной сходится лишь при $\alpha > j$.

Важно подчеркнуть, что все следующие рассуждения основаны на приближении случайных фаз, т. е. применимы для типичного представителя функций вида

$$y(x)=\sum a(k_n)\cos(k_n x+\varphi_n),$$

где φ_n — последовательность независимых случайных чисел, равнораспределенных между 0 и 2π. Для отдельной функции медленность убывания спектра может быть связана и просто с негладкостью в одной точке. Например, δ-функция имеет плоский спектр, $a(k)=\mathrm{const}$, для θ-функции $a(k) \sim 1/k$, но эти функции разрывны лишь в начале координат. Фрактальные же кривые устроены так, что все их точки в статистическом смысле подобны друг другу. Обратим также внимание на то, что мы не отождествляем k_n и n, а только указываем, что $k_n \sim n$. Другими словами, для нас важно, чтобы при суммировании сбивались не только фазы, но и частоты суммируемых гармоник. Иначе при достаточно малых α ($\alpha < 1/2$) на кривой $y(x)$ могут появиться случайные распределенные пики, уходящие в бесконечность. На такую возможность указывает тот факт, что ряд вида $y=\sum(\sin nx/n^{\alpha})$ неограничен вблизи точек $x=0$ и $x=2\pi$ (действительно, в этом случае

$$\int_0^{2\pi} y^2(x)\,\mathrm{d}x=\infty,$$

а признаки сходимости рядов таковы, что не гарантируют непрерывности суммы ряда именно в этих точках, где $\sin(x/2)=0$).

С современной точки зрения основная часть работы Вейерштрасса как раз и состояла в проверке того, что построенная им функция удовлетворяет условию «общего положения». Однако само соображение об «общем положении» было сформулировано позже, после создания Кантором теории множеств. Это соображение заметно изменило психологию математика: в XIX веке люди тратили годы на доказательство, скажем, того, что число π трансцендентно, а сейчас мы обычно удовлетворяемся тем фактом, что практически все числа трансцендентны.

Итак, согласно теории тригонометрических рядов, если $0 < \alpha < 1$, то функция $y(x)$ непрерывная, но не дифференцируемая. Соответствующая ей кривая — фракталь. Если $1 < \alpha < 2$, то «траектория» $y = y(x)$ гладкая, но скорость на ней фрактальна. Если же мы хотим, чтобы все производные не были фрактальны ($y(x) = 1/(1+x^2)$, e^{-x^2}), то спектр $a(k)$ должен убывать быстрее, чем любая степень k ($\sim e^{-k}$, e^{-k^2}).

Мы привели отрицательные, ограничительные формулировки: к функциям с не слишком быстро убывающим спектром идеи анализа применимы не в полной мере. С помощью показателей Гёльдера этим утверждениям можно придать позитивный характер, сказать, что функция $y(x)$ имеет не одну, а меньшее число производных, именно α производных. Если основная формула «гладкого» анализа такова:

$$\Delta y = \mu\,\Delta x,$$

то для нашей функции нужно написать (рис. 2)

$$\Delta y = \mu_{\text{H}}\,(\Delta x)^\alpha,$$

где μ, μ_{H} — соответственно обычная и гельдеровская производные (точнее, возникают левая и правая производная μ_{H_-}, μ_{H_+} для $\Delta x < 0$ и $\Delta x > 0$). После этого с функцией $y(x)$ можно работать примерно так же, как с гладкой функцией.

Хорошо известно два примера физических объектов с такой низкой гладкостью. Один из них — это винеровский процесс, т. е. математическая

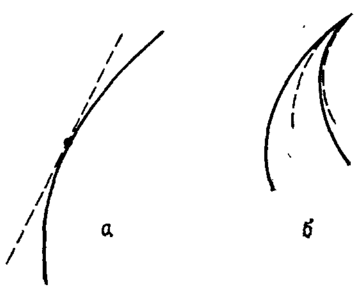

Рис. 2. Строение гладкой и фрактальной кривых в окрестности некоторой точки.
а — Гладкая кривая имеет касательную прямую (изображена штриховой линией); *б* — фрактальная кривая имеет в качестве касательной криволинейный конус $\Delta y \sim |\Delta x|^\alpha$ (изображена штриховой линией)

абстракция броуновского движения, когда масса броуновской частицы и время между столкновениями устремляется к нулю. Винеровским процессом называется само смещение броуновской частицы за время t: $x(t) = w_t$ (обозначение w указывает на фамилию Н. Винера, а не, как это принято во многих областях физики, на вероятность). В этом случае частица в каждый момент времени испытывает ускорение, сходное с δ-функцией, его коррелятор имеет плоский спектр. Поэтому сумма многих мгновенных воздействий дает смещение $w_{t+\mathrm{d}t} - w_t = w_{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}w_t \sim (\Delta t)^{1/2}$, т. е. показатель Гёльдера равен 1/2 (у траектории броуновской частицы половина производной). Мы не будем подробно рассказывать о математическом анализе для функций типа броуновского движения. Упомянем только о замечательной формуле Ито [13] для вычисления дифференциала функции $F(w_t)$, где функция F гладкая. В этом случае $\mathrm{d}F$, т. е. приращение до величины порядка $\mathrm{d}t$, равно не $F'\mathrm{d}w_t$, а $\mathrm{d}F = F'\mathrm{d}w_t + (1/2)\,F''(\mathrm{d}w_t)^2$. Именно второй член в формуле Ито дает с аналитической точки зрения возможность описывать диффузию не только на языке уравнения диффузии (по Ланжевену — Смолуховскому — Винеру), а в дальнейшем получить формулы типа формулы Каца — Фейнмана для решения эволюционных уравнений с помощью винеровских (или — в квантовой механике — фейнмановских) интегралов. Более подробно об этой аналитической технике и ее применении для описания теплопроводности и диффузии см. [14, 15].

Другим примером является колмогоровская турбулентность. Если мы отвлечемся от того, что на очень малых расстояниях (или, что то же самое, при очень больших волновых числах) в игру вступает вязкость, то вариации поля скорости имеют порядок $\delta v \sim (\delta r)^{1/3}$. Это означает, что поле скорости колмогоровской турбулентности непрерывное, но имеет лишь 1/3 производной. Конечно, здесь мы имеем дело с более сложным объектом — негладким векторным полем.

Посмотрим теперь, какова размерность получающихся фрактальных кривых. По идее Хаусдорфа дробная размерность определяется следующим образом. Построим вокруг каждой точки нашего множества кружок радиуса $\varepsilon \to 0$ и подсчитаем площадь объединения всех кружков $S(\varepsilon)$ (на самом деле достаточно построить конечное число кружков $\sim 1/\varepsilon$). Разумеется, площадь перекрытия нескольких кружков при вычислении $S(\varepsilon)$ учитывается только один раз. Скорость убывания площади $S(\varepsilon)$ с убыванием ε и определяет размерность. Действительно, для гладкой кривой $S(\varepsilon) \sim \varepsilon L$, где L — длина кривой. Если кривая вырождается в точку, то $S(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$; наоборот, для плоской области $S(\varepsilon) \sim \varepsilon^0$. Для нашего фракталя оценка площади производится следующим образом (рис. 3). Если волновой вектор $k = 1/\varepsilon$, то отдельные периоды синусоиды укладываются в кружке размера ε, и, если $a(k_n) \equiv a(1/\varepsilon)$ убывает медленнее, чем ε при $\varepsilon \to 0$, то ширина полосы кружков не порядка ε, а порядка $a(1/\varepsilon)$. Если же $a(1/\varepsilon) < \varepsilon$, то полоса кружков успевает отслеживать все изгибы кривой и она является не фрактальной, а гладкой.

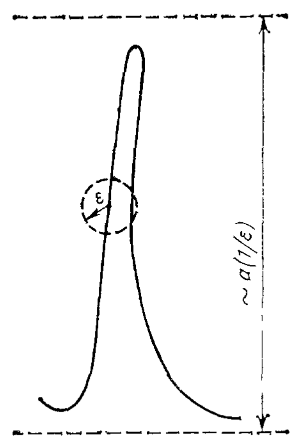

Рис. 3. К определению внешней размерности фракталя.

Ширина окрестности кривой определяется во фрактальном случае не радиусом кружка, а размером изгибов кривой

Вернемся к фрактальной кривой. Пусть длина проекции кривой порядка единицы. Суммарная площадь объединений всех кружков $S(\varepsilon) \sim a(1/\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha}$. Если $0 < \alpha < 1$, то $S(\varepsilon)$ убывает медленнее, чем для гладкой кривой, и наш фракталь занимает промежуточное положение между линией и областью. Хаусдорф предложил определение, согласно которому размерность такого образования равна

$$\dim_{\text{ext}} \gamma = 2 - \alpha.$$

Индекс ext — «внешняя» — указывает, что при построении этой величины нам пришлось выйти за пределы самой кривой.

Серьезным недостатком этого примера была выделенность оси x. Нетрудно модифицировать его так, чтобы оси стали равноправными. Для этого нужно считать, что кривая γ задана параметрически, т. е.

$$x = \sum a(k_n) \cos(k_n t + \varphi_{1n}),$$
$$y = \sum b(k_n) \cos(k_n t + \varphi_{2n}).$$

Для равноправия направлений нужно, чтобы коэффициенты a и b убывали по одному закону

$$a \sim b \sim k^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Оценка площади ε-окрестности нашей кривой в двумерии даст, как легко видеть, также ε^{α} (а не $\varepsilon^{2\alpha}$, как может показаться на первый взгляд, поскольку теперь надо считать уклонение шероховатостей от некоторого ее среднего положения). Снова имеем $\dim_{\text{ext}} \gamma = 2 - \alpha$.

Можно по-другому подойти к определению фрактальной размерности нашей кривой, используя только понятия, связанные с ней самой, а не с тем, каким способом кривая γ расположена на плоскости. Мы уже говорили об этом пути во введении. Введем на нашей кривой γ параметр t. Разобьем ось t на участки длины ε и вычислим длину кривой γ, учитывая лишь те ее изгибы, на которых t изменяется не менее чем на ε. Получим, что сумма длин этих отрезков порядка $a\,(1/\varepsilon)\,(1/\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha-1}$ и стремится к бесконечности с уменьшением ε. Подчеркнем, что при проведении этого рассмотрения для нас важно только измерение расстояния на кривой в определенном масштабе изменения t, а не расположение кривой в плоскости.

Попытаемся осмыслить получившуюся расходимость длины при уменьшении ε. Предположим, что мы ошиблись в определении размерности нашего объекта и на самом деле мы не изучаем кривую, а пытаемся параметризовать одним параметром область. Конечно, эта параметризация очень плоха — координатная линия все более и более плотно, с самопересечениями заполняет область, образуя на ней что-то вроде решетки (рис. 4). Расстояние между ее полосами $\sim\varepsilon$, а число квадратов $\sim 1/\varepsilon^2$ (каждая полоска соответствует одной шероховатости кривой). Сумма длин отрезков ломаной $\sim\varepsilon\cdot 1/\varepsilon^2 \to \infty$. На самом деле область двумерна, и нужно подсчитывать не ее длину, а площадь, т. е. суммировать не длины сторон, а квадраты длин.

В случае дробной размерности нужно суммировать не первые или вторые, а некоторые μ-е степени длин. Для конечности получающихся сумм (в этом случае мы правильно подобрали размерность, как в примере с областью) нужно положить $\mu = 1/\alpha$. Размерность этой суммы равна см$^{1/\alpha}$, а само число $1/\alpha$ является, очевидно, размерностью. Итак, в качестве внутренней размерности фрактала естественно принять число

$$\dim_{\mathrm{int}}\gamma = \frac{1}{\alpha}.$$

Эта формула сохраняется, конечно, и для кривых в пространстве любого числа измерений.

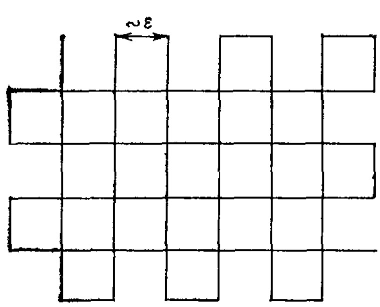

Рис. 4. К определению внутренней размерности фрактала.

Размеры звеньев ломаной, плотно устилающей плоскость, малы, но число их очень велико. Однако сумма квадратов длин звеньев конечна

Внешняя размерность кривой фрактального типа на плоскости изменяется от 1 до 2 (размерность пространства), а внутренняя — от 1 до бесконечности, и они совпадают только для тривиального случая гладкой кривой. Очевидно, что в разных физических задачах нужно пользоваться разными определениями фрактальной размерности. Например, если мы интересуемся задачей адсорбции на тонкую нитку, то для нас важно знать, сколько атомов сможет поместиться вблизи нитки, т. е. внешнюю размерность. Если же мы хотим оценить вес нитки, то важна размерность внутренняя.

Подсчитаем внешнюю размерность фрактальной кривой в пространстве. В этом случае

$$x_i = \sum a_i\,(k_n)\cos\,(k_n t + \varphi_{in}), \quad a_i\,(k) \sim k^{-\alpha}.$$

Оценка объема ε-окрестности кривой дает, как легко понять, $V\,(\varepsilon) \sim \varepsilon^{2\alpha}$. По аналогии с двумерным случаем

$$\dim_{\mathrm{ext}}\gamma = 3 - 2\alpha.$$

В n-мерии

$$\dim_{\mathrm{ext}}\gamma = n - (n - 1)\,\alpha.$$

Итак, внешняя размерность фрактальной кривой изменяется от размерности гладкого объекта до размерности пространства, а внутренняя — от размерности гладкого объекта до бесконечности.

2. ФРАКТАЛЬ — ТОЛСТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Аналогично можно ввести понятие фрактальной размерности негладкой поверхности. Пусть наша поверхность Φ задана параметрическими уравнениями

$$x_i(u, v) = \sum\sum a_i(k) e^{i(k_u u + k_v v)},$$
$$a_i \sim |k|^{-1-\alpha}.$$

Поскольку теперь мы имеем дело с двойным рядом Фурье, то для существования его суммы нужно, чтобы показатель α был больше 1. Другими словами, в интересующей нас фрактальной области $0 < \alpha < 1$ двойной ряд в обычном смысле расходится, и мы его суммировать можем только в смысле главного значения, т. е. сначала гармоники внутри шара фиксированного радиуса, а затем по радиусам.

Разобьем область параметров u, v на треугольники диаметра ε. Более наглядно разбиение на квадраты, но разбиение на треугольники (триангуляция) намного проще технически потому, что треугольник, в отличие от четырехугольника, жесткая фигура, т. е. определяется только длинами своих сторон.

Подсчитаем сумму площадей соответствующих треугольников поверхности, снова учитывая гармоники не короче, чем ε. Эта сумма будет иметь порядок $[a(1/\varepsilon)(1/\varepsilon)]^2 (1/\varepsilon^2)$ и при $0 < \alpha < 1$ неограниченно возрастать с уменьшением ε. Для конечности суммы нужно суммировать $1/\alpha$-е степени площадей, так что за размерность объекта нужно принять (для получения правильной степени единицы длины) величину

$$\dim_{\text{int}}\Phi = \frac{2}{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Что касается внешней размерности фрактальной поверхности, то она равна, по Хаусдорфу,

$$\dim_{\text{ext}}\Phi = 3 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

поскольку объем ε-окрестности поверхности имеет порядок $a(1/\varepsilon)\cdot 1/\varepsilon$.

То, что внешняя и внутренняя размерности поверхности-фракталя не совпадают, означает, что, в отличие от регулярных, много раз дифференцируемых поверхностей, для фракталя нарушается связь между внутренними и внешними характеристиками. Другими словами, если для регулярной поверхности можно, скажем, подсчитать кривизну двумя способами — с помощью тензора кривизны Римана, как в общей теории относительности, и с помощью кривизн сечений, причем результаты совпадают, то для фракталя это, вообще говоря, не так. Поразительно, что для гладких, но не регулярных поверхностей, т. е. для поверхностей, у которых есть касательная плоскость, но нет следующих производных, также наблюдается подобное «фрактальное» поведение, хотя их размерность уже равна двум. Проявляется это интересное явление, обнаруженное американским математиком Дж. Нэшем, в следующем. Рассмотрим сначала регулярную поверхность площади $\sim S$. Если она замкнута, то естественно ожидать, что объем тела, заключенного внутри этой поверхности, порядка $\sim S^{3/2}$. Конечно, точный коэффициент в этих соотношениях зависит от конкретного вида поверхности, от распределения гауссовой кривизны, но размерностные множители сохраняются. Нэш обнаружил [16], что если гладкость поверхности находится между 1 и 2 (т. е. внешним образом кривизну еще нельзя вычислить по стандартным формулам), то площадь поверхности никак не связана с заключенным внутри нее объемом: внутрь сколь угодно малого шара можно поместить сильно скрученную (но с сохранением метрики, т. е. всех расстояний между точками, измеряемых вдоль поверхности) сферу сколь угодно большой площади. Точная граница гладкости, начиная с которой исчезает этот феномен, по современным оценкам [17], лежит между 1,07 и 1,7. Другими словами, для нэшевских поверхностей в некотором роде наблюдается эффект, предсказанный Я. Гашеком, который устами одного из своих героев утверждал, что «внутри земного шара имеется другой шар, значительно больше наружного». Простейшее понятие размерности, как это всем хорошо известно, широко используется в биологии для объяснения пропорций различных животных. Возможно, что для некоторых видов можно усмотреть и некоторые свойства, связанные с «нэшевским» характером границы. Фрактальная же размерность уже привлекалась для объяснения поглотительной способности легких [18].

3. ФРАКТАЛЬ — ВСПЕНЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Внутренняя размерность поверхности без существенных изменений переносится на случай искривленных пространств общей теории относительности (при этом, конечно, пространство надо разбивать не на треугольники, а на их четырехмерные аналоги — симплексы). Если в микромасштабах пространство-время подобно пене, как это представляет себе Уилер [19], то размерность, наблюдаемая макроскопическим наблюдателем, может быть существенно иной, чем микроскопическая. Однако эти вопросы еще очень мало исследованы математиками, хотя некоторые оценки можно сделать уже сейчас.

В космологии часто применяется так называемый плоский спектр возмущений, в котором все гармоники возмущений плотности фридмановской космологической модели равновероятны. Понятно, что этот плоский спектр может рассматриваться лишь как промежуточная асимптотика. Первоначально этот спектр рассматривался как удобное и разумное предположение в той ситуации, когда у нас нет более определенной информации [20], однако сейчас стало ясно, что в рамках так называемой инфляционной теории [21] действительно предсказывается космологическая модель с критической плотностью (т. е. евклидовым сопутствующим пространством) и с плоским спектром возмущений плотности [36]. В этом случае кривизна модели также будет иметь плоский спектр, т. е. будет подобна второй производной винеровского процесса. Тогда естественно полагать, что сама метрика подобна винеровскому процессу. Это означает, как мы видели, что в области промежуточной асимптотики размерность сопутствующего пространства не 3, а несколько больше.

Позднее фрактальность пространства исчезает. Возникающая в это время сетчатая структура [23] является структурой распределения вещества, а не пространства. Конечно, в силу уравнений Эйнштейна там, где в этой структуре обращается в бесконечность плотность, имеет особенность и метрика. Эта особенность подобна особенности при пересечении двух несоосных цилиндров [31]. Однако соответствующее спектральное разложение метрики будет сильно сфазированным, а не фрактальным.

По-видимому, при описании развития малых возмущений, темпа расширения и темпа роста возмущений учет фрактальной размерности все же не сможет привести к изменению существующих оценок и быть полезным для решения трудностей [35], связанных с малыми значениями угловых вариаций реликтового излучения.

В многомерии интересно рассмотрение и нэшевских поверхностей. Такая многомерная поверхность, находясь в пространстве достаточно большого числа измерений, может обнаруживать нэшевские свойства, даже будучи сколь угодно много раз дифференцируемой [22]. Для четырехмерных поверхностей эта оценка размерности объемлющего пространства, в котором появляются такие «измятые» поверхности, лежит [24] где-то между 11 и 29. В этой связи уместно вспомнить о далеких от теории фракталей многомерных обобщениях теории поля типа Калуцы — Клейна. В этих моделях в микромасштабе пространство имеет бо́льшую размерность, чем в макромасштабе, поскольку дополнительные размерности оказываются периодическими координатами, период которых исчезающе мал. Предлагалось и другое объяснение понижения размерности при переходе к макромасштабу [30]. Можно считать, что в многомерном пространстве-времени образуется потенциал типа потенциала, удерживающего кварки в нуклоне, но препятствующий не свободному существованию кварков, а свободному существованию частиц вне четырехмерной пространственно-временной поверхности. Представляется, что наличие в объемлющем пространстве нэшевских измятых поверхностей должно сделать эту картину невозможной, т. е. размерность объемлющего пространства лежит где-то между 11 и 29. Нижняя граница этого интервала изменения размерности находится в интригующем соответствии с той размерностью объемлющего пространства, которая получается из теории частиц [25].

4. ФРАКТАЛЬ — ЛИНИЯ УРОВНЯ

Первоначально понятие фракталя в физике сформировалось в связи с обсуждением одного яркого примера — определения длины береговой линии Англии. Напомним, что береговую линию можно определить так. Введем на плоскости функцию $h\,(x;\,y)$ — высоту над уровнем моря. Тогда «береговая линия»—решение уравнения $h\,(x;\,y) = 0$.

Оказалось, что чем более крупномасштабная берется карта, тем более длинным оказывается берег, т. е. береговая линия оказывается фракталем, для измерения которого нужно вводить «квазидлину» размерности сантиметра в некоторой степени. Несмотря на то, что специалистам это соображение давно и хорошо известно, в практике картографии оно еще не привилось. В качестве примера укажем, что администрация Национального парка Литовской ССР указывает для находящихся в парке озер площадь, глубину и длину береговой линии, причем последняя вряд ли может быть корректно определена, тогда как поперечник озера (величина вполне корректная) не указывается. Разумеется, на практике длину береговой линии можно применять, если знать, в каком масштабе она измерена, однако это-то как раз и не бывает указано.

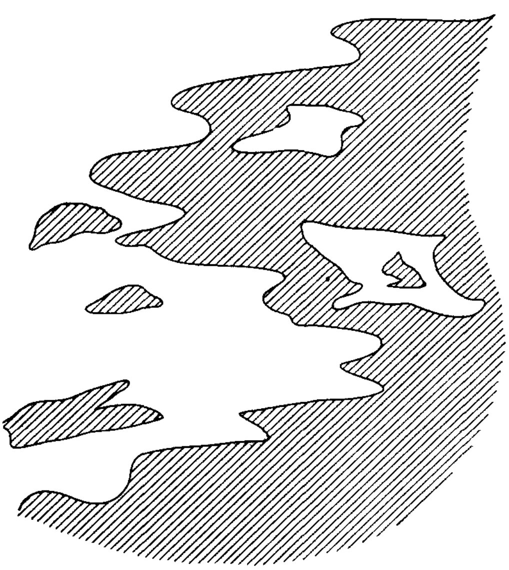

Рис. 5. Схема строения линии уровня случайной функции.

Заштрихованы части, находящиеся «ниже уровня моря». Видна система островов — «шхер»

Рассматривавшееся нами выше определение фракталей не вполне соответствует этой классической задаче. Дело в том, что при микроскопическом изучении береговой линии, кроме основной береговой линии, появляется система шхер, т. е. множество мелких линий, отделяющих озера и острова поблизости от основной линии (рис. 5). Напротив, рассмотренные параметрические фрактальные образования могут иметь точки самопересечения (например, в двумерном движении типа броуновского), а для линии уровня с вероятностью 1 самопересечений не возникает (условие обращения случайной функции в 0 и обращения в 0 ее градиента, что нужно для самопересечения линии уровня, дают переопределенную систему уравнений).

Для того чтобы определить фрактальную размерность линии уровня случайной функции, нужно снова определить, сколько у нее гёльдеровских производных. Это число α определяется, как известно, поведением пространственного коррелятора на малых расстояниях. Для гладкого случайного поля

$$\langle \varphi (x) \varphi (x + r) \rangle = 1 - Ar^2$$

при $r \to 0$, для фрактального

$$\langle \varphi (x) \times \varphi (x r) \rangle = 1 - Ar^{\alpha}.$$

Фрактальная размерность границы определяется показателем α.

5. ФРАКТАЛЬ — ГУСТОЕ МНОЖЕСТВО ТОЧЕК

До сих пор размерность фрактала была не слишком маленькой. Для того чтобы получить объекты размерности, скажем, 1/10, нужно рассмотреть наборы большого (в пределе — бесконечно большого) числа точек, густо заполняющих фрактальное образование. Для того чтобы определить хаусдорфову размерность такого фрактала на плоскости, каждую его точку нужно окружить кружком радиуса ε, подсчитать площадь объединения всех кружков и установить, как эта площадь зависит от ε. В математике подобные фрактали давно известны; таково, скажем, канторовское множество (пример всюду несвязного множества мощности континуума); однако казалось, что

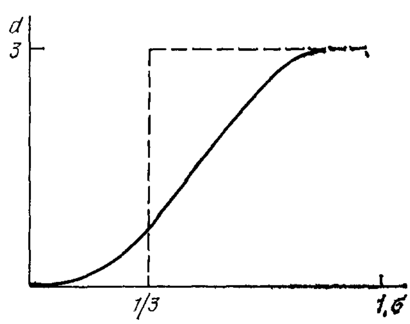

Рис. 6. К характеристике перемежаемости турбулентности с помощью дробной размерности.

Штриховой линией показана размерностная характеристика колмогоровской турбулентности, сплошной линией — реальной турбулентности

эти объекты не более чем игра ума математиков. Сейчас мы знаем, что множества типа канторовского являются притягивающими множествами странных аттракторов [34], фрактально множество нулей одномерного винеровского процесса (размерность 1/2). Недавно было предложено [26,27] использовать фрактальные объекты такого типа для описания перемежаемости турбулентности.

Как мы уже говорили, в колмогоровской турбулентности скорость непрерывна, но имеет лишь 1/3 производной. Это можно изобразить на графике следующим образом. Отложим по одной оси число производных σ скорости, а по другой оси — хаусдорфову размерность d множества тех точек, в которых скорость не имеет данное число производных (рис. 6). Тогда для колмогоровской турбулентности

$$d(\sigma) = 3\theta\,(-{}^1/_3 + \sigma),$$

т. е. если $\sigma < 1/3$, то соответствующая дифференцируемость наблюдается практически везде, а если $\sigma > 1/3$, то такой дифференцируемости нет практически нигде. Такой вид функции d (σ) соответствует гауссовскому полю скорости, отсутствию перемежаемости.

Если в турбулентности имеются структуры и она существенно негауссовская, то можно ожидать, что функция d (σ) переходит от 3 к 0 постепенно. Практически в эксперименте удобнее определять некоторое соотношение для изменения с расстоянием и номером момента для высоких моментов поля скорости [27]. Такие измерения были проведены [28] и позволяют, используя методы [27], построить функцию d (σ) для реальной турбулентности (см. рис. 6). Точность ее определения пока невелика, но уверенно обнаруживает некоторые отклонения от гауссовости. Словесно эту кривую можно описать так: около 1/10 производной поле скорости имеет практически всюду, а 9/10 производной не имеет практически нигде; в промежутке происходит плавное изменение размерности множества точек с данной гладкостью.

Заключая это рассмотрение фрактальных образований, мы хотим напомнить, что следующая за эпохой, давшей начало теории фракталей (XIX век), эпоха математической критики (XX век) дала нам много других странных объектов, с которыми, в отличие от фракталей, пока не ясно, что делать. Это такие монстры, как экстраординарные множества, сами являющиеся своими элементами, неаристотелевы логики, интуиционистский математический анализ. Может быть, и они со временем найдут применение в физике. Для тех, кто хотел бы подумать на эту тему, укажем одну из немногих монографий в этой области, написанную на языке, доступном неспециалисту [29].

Подумайте о структуре пространства и полей при учете квантовых нулевых колебаний, но подумайте и о том, что частицы не рассеиваются на этих структурах.

Институт физических проблем им. С. И. Вавилова
АН СССР
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Картье П.— УМН, **1984**, т. 39, вып. 2, с. 57.
2. Звонкин А. К., Шубин М. А.— Ibidem, с. 77.
3. Hermite C. Correspondance.— Paris, 1905, v. II, p. 317.
4. Hilbert D.— Math. Ann., **1925**, Bd. 95, s. 161.
5. Микеладзе З. Основоположения логики Аристотеля.— В кн.: Аристотель. Сочинения.— М.: Мысль, 1978, т. 2, с. 5.
6. Hausdorff F.— Math. Ann., **1918**, Bd. 79, S. 157.
7. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.— УМН, **1976**, т. 26, вып. 4, с. 70.
8. Mardelbrot B. B. Fractals, Form, Chance and Dimension.— San Francisco. W. H. Freeman, 1977.
9. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика.— М.: Гидрометеоиздат, 1978.
10. Weierstrass K. Abhandlungen aus der Funktionlehre.— Berlin, 1886.
11. Hardy G. H.— Trans. Amer. Math. Soc., **1916**, v. 17, p. 301.
12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1.— М.: Мир, 1965.
13. Ito K.— Proc. Japan Acad., **1946**, v. 1, p. 32.
14. Мак-Кин Г. Стохастический интеграл.— М.: Мир, 1973.
15. Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.— УФН, **1984**, т. 145, с. 592.
16. Nash J.— Ann. of Math., **1954**, v. 60, p. 383.
17. Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом».— М.: Наука, 1973.
18. Barenblatt G. I., Monin A. S. — Proc. Amer. Acad. Sci., **1984**, v. 73, p. 105.
19. Уилер Дж., Гравитация, нейтрино, Вселенная.— М.: ИЛ, 1962.
20. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика.— М.: Наука, 1967.
21. Starobinsky A. A.— Phys. Lett. Ser. B, **1982**, v. 117, p. 175.
22. Nash J. Ann. of Math., **1956**, v. 63, p. 20.
23. Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. — Phys. Rev. Lett., **1984**, v. 52, p. 1488.
24. Громов М. Л.— ДАН СССР, **1970**, т. 192, с. 1206.

25. Cremmer E., Julia B., Sherk J. — Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 76, p. 409.
26. Frisch U. Preprint Observ. de Nice.— 1983.
27. Parisi G.— Preprint Observ. de Nice.— 1983.
28. Abselment E., Gagne J., Hopfinger E. J., Antonia R. A. Preprint Institut de Mecanique de Grenoble.— 1983.
29. Френкель А., Бар-Хилел И. Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966.
30. Joseph D.— Phys. Rev., 1962, v. 126, p. 319.
31. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д., Старобинский А. А.— В кн.: 150 лет геометрии Лобачевского.— М.: ВИНИТИ, 1977, с. 271.
32. Секст Эмпирик. Сочинения. Т. 1.— М.: Мысль, 1975.
33. Аристотель Сочинения. Т. 2.— М.: Мысль, 1978.
34. Рабинович М. И.— УФН, 1978, т. 125, с. 123.
35. Старобинский А. А.— Письма Астрон. ж., 1983, т. 9, с. 579.
36. Halliwell J. J., Hawking S. W.— Phys. Rev. Ser. D, 1985, v. 31, p. 1777.