

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.871

**СИЛЫ ТОРМОЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ИЗЛУЧЕНИЕ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ****Н. П. Клепиков**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Сила торможения излучением для одного заряда	317
2. Сила торможения излучением для точечной частицы и ее свойства	318
3. Обоснование выражения для силы торможения излучением	320
4. Баланс энергии, импульса и момента	321
5. Уравнения движения и отбор решений	321
6. Интегральные уравнения, теорема существования и последовательные приближения	323
7. Торможение излучением протяженных частиц	326
8. Торможение излучением в первом приближении	326
9. Приложение уравнений движения с радиационным трением	327
10. Потери энергии, импульса и момента системой частиц	328
11. Спектрально-угловое распределение излучения системы	329
12. Угловое распределение мгновенной интенсивности и полная интенсивность излучения системы частиц	330
13. Совместное синхротронное излучение двух частиц	334
Список литературы	337

1. СИЛА ТОРМОЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОГО ЗАРЯДА

Уравнения движения заряженных частиц включают, как известно, силы радиационного трения, возникающие вследствие обратного действия на частицы электромагнитных полей, создаваемых при их движении. Хотя в лабораторных условиях эти силы обычно малы по сравнению с остальными действующими силами, их присутствие придает уравнениям движения вид, существенно отличающийся от вида уравнений при игнорировании таких сил. Поэтому правильное определение и условия использования сил торможения излучением в уравнениях движения ускоренно движущихся заряженных частиц явились предметом многочисленных исследований, в которых накопилось немало разногласий. Хотя радиационные силы с успехом применяются в расчете движения частиц в ряде физических ситуаций и неоднократно раздавались призывы исключить проблему сил торможения из «вечных» вопросов механики заряженных частиц и классической электродинамики, она до сих пор обсуждается в литературе, а многие фундаментальные монографии и учебники по теории электромагнитного поля излагают ее уклончиво. О связи же торможения системы релятивистских частиц с их совместным излучением до последнего времени вообще ничего не было известно.

Еще в 1871 г. Стьюарт¹ высказал мысль о том, что движущееся тело, взаимодействующее с другими в конечном объеме посредством теплового излучения, должно тормозиться за счет этого излучения. В 1892 г. Лоренц²

показал, что сила, совершающая над частицей с зарядом e работу, равную потере ею энергии на излучение при ее ускоренном квазипериодическом движении, содержит третью производную от радиуса-вектора положения частицы и (в системе отсчета, где скорость частицы мала) равна

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}, \quad (1.1)$$

в силу чего уравнение движения частицы во внешнем электромагнитном поле с напряженностями \mathbf{E} и \mathbf{H} принимает вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.2)$$

Сила (1.1) получила название силы радиационного трения или силы торможения излучением, так как можно было показать, что по крайней мере в некоторых легко анализируемых случаях действие силы (1.1) уменьшает скорость частицы.

В 1904 г. Абрагам³, исходя из баланса энергии и импульса при излучении, нашел, что в произвольной системе отсчета сила (1.1) имеет вид

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \left[\frac{\ddot{\mathbf{v}}}{1-\beta^2} + \frac{\mathbf{v}(\ddot{\mathbf{v}})}{c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{3\dot{\mathbf{v}}(\dot{\mathbf{v}})}{c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{3\mathbf{v}(\dot{\mathbf{v}})^2}{c^4(1-\beta^2)^3} \right], \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (1.3)$$

если исключить как член, бесконечный для точечной частицы, так и все члены, обращающиеся в нуль для такой частицы. Лауэ⁴ показал, что (1.3) получается из (1.1) преобразованием Лоренца. Планк⁵ одним из первых применил уравнение (1.2) к рассмотрению затухающего движения осциллятора.

Сила (1.3) была получена исключением электромагнитного поля из уравнений Максвелла и уравнения движения частицы в заданном поле, но роль отброшенных членов оставалась неясной. В связи с этим дальнейшее развитие теории торможения излучением пошло по двум различным путям. В первом случае (см. гл. 2—6 настоящего обзора) в основу были положены понятие элементарной частицы, а также требования релятивистской ковариантности уравнений и точного соблюдения законов сохранения энергии, импульса и момента. Как известно, элементарность частицы и релятивистская ковариантность ее описания совместимы, если только частица рассматривается как точечная. Во втором случае (см. гл. 7) подчеркивалось влияние возможной структуры частицы на силу торможения излучением. Непротиворечивый учет такого влияния при конечном числе степеней свободы частицы возможен в классической теории только в нерелятивистском пределе. Оказывается, однако, что все реально встречающиеся задачи, включающие торможение излучением и в то же время не требующие применения квантовой теории, допускают приближенное описание, синтезирующее главные черты обеих точек зрения (см. гл. 8).

2. СИЛА ТОРМОЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ ДЛЯ ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЫ И ЕЕ СВОЙСТВА

В 1938 г. Дирак⁶ рассмотрел вопрос о силе торможения излучением точечной частицы в четырехмерном виде и показал, что сила (1.3) получается в предположении, что на частицу действует предел полуразности запаздывающего и опережающего полей, создаваемых при ее движении, если учесть баланс энергии и импульса на трехмерной поверхности бесконечно тонкой трубки, окружающей мировую линию частицы. Предел рассматривается при стремлении к нулю всех компонент четырехмерного вектора, проведенного от частицы к точке поля, трехмерная часть которого перпендикулярна скорости частицы. Член, отброшенный при выводе (1.3) в силу его бесконечной величины для точечной частицы, в процессе этого предельного перехода

сокращается, и (1.3) оказывается точным выражением трехмерной силы \mathbf{f} , определяющей четырехмерную силу *) $g_i = \{f/(c \sqrt{1 - \beta^2}), i\mathbf{f}\mathbf{v}/(c^2 \sqrt{1 - \beta^2})\}$, входящую в уравнения движения точечной частицы:

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ih}^{\text{ext}}(x) u_h + g_i, \quad (2.1)$$

где $ds = c dt \sqrt{1 - \beta^2}$, $u_i = dx_i/ds$ есть четырехмерная скорость, F_{ih}^{ext} — тензор внешнего поля и

$$g_i = \frac{2e^2}{3c} \left(\frac{d^2 u_i}{ds^2} + u_i u_h \frac{d^2 u_h}{ds^2} \right) = \frac{2e^2}{3c} \left[\frac{d^2 u_i}{ds^2} - u_i \left(\frac{du_j}{ds} \right)^2 \right]. \quad (2.2)$$

При преобразовании одного выражения (2.2) в другое, а также ниже, учитываются тождества $d^l/ds^l (u_i u_i + 1) = 0$, $l = 0, 1, \dots$. Используется также, что $u_i = \{v/(c \sqrt{1 - \beta^2}), i/\sqrt{1 - \beta^2}\}$, $w_i = du_i/ds = \{[\mathbf{w}/c^2 (1 - \beta^2)] + [\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{w})/c^4 (1 - \beta^2)^2], i\mathbf{v}\mathbf{w}/c^3 (1 - \beta^2)^2\}$. Дирак также показал там же, что сила (2.2) может быть представлена в виде

$$g_i = \frac{e}{c} F_{ih}^{\text{int}} u_h, \quad F_{ih}^{\text{int}} = \frac{2e}{3} (u_i \ddot{u}_h - u_h \ddot{u}_i). \quad (2.3)$$

где точки означают дифференцирование по ds .

Выражение (2.2) удовлетворяет тождеству

$$g_i u_i = 0 \quad (2.4)$$

и приводит к следующим выражениям для изменения энергии, импульса и момента частицы при прохождении ею некоторой области пространства, где действует внешнее поле:

$$\begin{aligned} p_i(s_2) - p_i(s_1) &= \frac{e}{c} \int_{s_1}^{s_2} F_{ih}^{\text{ext}} u_h ds + \int_{s_1}^{s_2} g_i ds = \\ &= \frac{e}{c} \int_{s_1}^{s_2} F_{ih}^{\text{ext}} u_h ds - \frac{2e^2}{3c} \int_{s_1}^{s_2} w_h^2 u_i ds + \frac{2e^2}{3c} [w_i(s_2) - w_i(s_1)], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} M_{ij}(s_2) - M_{ij}(s_1) &= \frac{e}{c} \int_{s_1}^{s_2} (x_i F_{jh}^{\text{ext}} - x_j F_{ih}^{\text{ext}}) u_h ds + \int_{s_1}^{s_2} (x_i g_j - x_j g_i) ds = \\ &= \frac{e}{c} \int_{s_1}^{s_2} (x_i F_{jh}^{\text{ext}} - x_j F_{ih}^{\text{ext}}) u_h ds - \frac{2e^2}{3c} \int_{s_1}^{s_2} (u_i w_j - u_j w_i) ds - \\ &\quad - \frac{2e^2}{3c} \int_{s_1}^{s_2} (x_i u_j - x_j u_i) w_h^2 ds + \\ &\quad + \frac{2e^2}{3c} \{[x_i(s_2) w_j(s_2) - x_j(s_2) w_i(s_2)] - [x_i(s_1) w_j(s_1) - x_j(s_1) w_i(s_1)]\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Первый член в каждой из правых частей (2.5) и (2.6) есть изменение энергии, импульса и момента частицы под действием внешнего поля. Второй член последнего выражения (2.5) и сумма второго и третьего членов в последнем выражении (2.6) равны, с точностью до знака, как мы проверим ниже, соответственно энергии, импульсу и моменту, уходящим из области движения частицы с излученным ею электромагнитным полем. Последние члены (2.5) и (2.6) представляют собой невязки в балансе энергии, импульса

*) Здесь и ниже четырехмерные векторы взяты в виде, имеющем мнимые четвертые компоненты, индексы суммирования в четырехмерных скалярных произведениях в ряде формул опущены.

и момента, связанные с возможным накоплением (или расходом) этих величин в поле заряда. Точный баланс энергии, импульса и момента без какой-либо невязки соблюдается только в двух случаях, когда либо $w_i(s_2) = w_i(s_1)$ и $x_j(s_2) = x_j(s_1)$, либо $w_i(s_2) = w_i(s_1) = 0$. Первый из этих случаев относится приблизительно к квазипериодическому движению частицы, когда $s_2 - s_1$ составляет один или несколько периодов (чем меньше, тем лучше приближение). Второй же осуществляется либо при произвольных s_1 и s_2 при движении частицы в пространстве, где внешнее поле *полностью* отсутствует, либо при прохождении частицей *всей* области, где действует внешнее поле, причем $s_1 = -\infty$, $s_2 = +\infty$ и предполагается не только $\lim_{s \rightarrow \pm \infty} w_i(s) = 0$, но и $\lim_{s \rightarrow \pm \infty} x_i(s) w_j(s) = 0$. Указанные условия существенно ограничивают отбор физически приемлемых решений уравнения (2.1), чего мы коснемся ниже.

3. ОБОСНОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СИЛЫ ТОРМОЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Поставим теперь вопрос в обратном порядке, рассматривая соотношения (2.4), (2.5) и (2.6) (при отсутствии невязки) как уравнения, определяющие силу g_i . Прежде всего возникает вопрос об однозначности выражения (2.2) как решения этих уравнений. Бэбба⁷ показал, что для точечной частицы, в отличие от протяженной, баланс момента не следует еще из баланса энергии и импульса. Он нашел, что учет потока момента через поверхность бесконечно узкой трубки, окружающей мировую линию частицы, делает (2.2) единственным решением указанной системы уравнений, если исключить члены с более высокими производными скорости. Он же нашел⁸, что к (2.2) можно добавить бесконечное число членов, каждый из которых является некоторым полиномом из компонент вектора u_i и его производных возрастающих порядков, но эти члены учитывают наличие у частицы не только заряда, но и магнитного момента, а для сложных систем — высших электрических и магнитных моментов. Нужное число таких членов легко учесть в (2.2), но, во-первых, при наличии у частицы заряда они в большинстве физических ситуаций дают пренебрежимо малый вклад в силу торможения излучением, поскольку содержат более высокие производные скорости, а во-вторых, все соответствующие моменты имеют квантовое происхождение и учет их в классической теории не оправдан. Тогда мы возвращаемся к выражению (2.2).

Инфельд и Уоллейс⁹ получили уравнение (2.1) с силой (2.2), исходя из уравнений движения общей теории относительности. К тому же уравнению разными путями пришел ряд других авторов¹⁰⁻¹⁸. Такое же уравнение получили Уилер и Фейнман¹⁹, исходя из концепции полного поглощения излучения другими заряженными частицами. С другой стороны, в²⁰⁻²² было показано, что тот же результат может быть получен при использовании одних запаздывающих полей в окрестности мировой линии частицы и перенормировки массы частицы, так как лишь использование предела полурасходимости запаздывающих и опережающих полей обеспечивает автоматическую перенормировку массы. Это не удивительно, так как в пределе нулевых расстояний от частицы опережающее поле, взятое с обратным знаком, отличается от запаздывающего только знаком члена, соответствующего перенормировке массы.

В работах других авторов²³⁻²⁵ высказывались сомнения в убедительности или правильности вывода выражения (2.2), либо вместо него предлагались²⁶⁻³⁷ другие выражения для g_i . Эти предложения не получили поддержки. В частности, в работах³⁸ и²³ показано, что уравнение, предложенное в³⁰, приводит к противоречиям. В³⁹ показано, что уравнения работы³⁴ не могут быть правильными, так как в одномерном случае они сводятся к уравнению движения частицы без торможения излучением.

Штёккель ³⁷, подробно перечисливший все, по его мнению (с аргументами от вполне справедливых, но безвредных для теории, до вздорных) существенные недостатки уравнения (2.1) с силой (2.2), предложил иное уравнение, противоречащее соотношениям (2.5) и (2.6). Одну из последующих работ Дирака ⁴⁰, не получившую развития в литературе, можно считать отрицанием обратного действия излучения на частицу.

4. БАЛАНС ЭНЕРГИИ, ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА

[Выражение (2.2) для силы торможения излучением, удовлетворяющее соотношениям (2.4), (2.5) и (2.6), не может быть представлено в виде, для которого баланс между изменением энергии, импульса и момента, передаваемыми частице внешним полем, энергией, импульсом и моментом, приобретаемыми частицей, и энергией, импульсом и моментом, уносимыми излучением в волновую зону, соблюдается синхронно, для каждого момента времени. Эта проблема, в частности, кажущееся противоречие между исчезновением силы торможением излучением при равномерно ускоренном движении (гиперболическое движение для релятивистских частиц) и наличием излучения, обсуждалась в ^{41-50, 15, 51-60}. Этот баланс соблюдается только для полного периода нахождения частицы в поле. Действительно, для выполнения (2.4) необходимо равенство коэффициентов двух членов выражения (2.2) (в частности, отсюда следует, что коэффициент при первом члене не равен нулю), а тогда для согласия (2.2) с (2.5) необходимо, чтобы интеграл от первого члена (2.2) для указанного периода исчезал. Это возможно, если ускорение частицы w_i либо одинаково на пределах интегрирования, либо достаточно быстро исчезает на каждом из них. Наличие в (2.2) указанного первого члена, интеграл от четвертой компоненты которого по конечному интервалу времени иногда называют шоттовской энергией, отражает тот факт, что энергия и импульс запасаются полем частицы, движущейся ускоренно во внешнем поле, а затем расходуются на излучение или, наоборот, сначала излучение частично или полностью происходит за счет энергии поля частицы, а затем дефицит энергии поля восполняется. Аналогично, должны исчезать интегралы от соответствующих членов, дополнительных к (2.2) и связанных с высшими моментами.

В свое время в ⁴² и ⁴⁵ высказывалось мнение, что при гиперболическом движении излучения не происходит, так как исчезает сила торможения излучением. В ⁶¹ отыскивался способ изменения граничных условий для поля, при котором этого излучения нет. Однако это излучение происходит ^{52, 53} за счет энергии поля, так как шоттовская энергия точно равна излучаемой энергии. Возражение против этого объяснения, основанное на отсутствии излучения, регистрируемого сопутствующим ускоренно движущимся наблюдателем, отвергается ^{62, 60}, так как у такого наблюдателя есть горизонт событий, а все излучение, как оказывается, происходит за этим горизонтом.

Заметим, что первый член силы (2.2), который мешает синхронному балансу энергии и импульса, необходим для согласия между (2.6) и излучаемым моментом.

5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ОТБОР РЕШЕНИЙ

Уравнения (1.2) или (2.1) представляют собой системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трех координат частицы во внешнем поле, заданном как функция координат и скоростей частицы, а также времени. Четвертое уравнение системы (2.1) является следствием первых трех в силу (2.4). Важнейшим их отличием от уравнений механики без радиационного трения является присутствие третьих производных координат частицы по времени (и производных более высоких порядков, если в (2.2) учитываются дополнительные члены). Согласно общей теории систем

обыкновенных дифференциальных уравнений они имеют однозначное решение (по крайней мере, в некотором интервале времени; решение может быть аналитически продолжено, если поле на пути частицы достаточно гладко) при задании 9 произвольных постоянных, например, координат, скоростей и ускорений в начальный момент времени. Однако оказывается, что произвольное задание начального ускорения приводит, как правило, к физически неприемлемым решениям, т. е. нарушающим законы сохранения. В частности, как мы уже видели выше, для частицы, проходящей через область пространства, где есть внешнее поле, законы сохранения энергии, импульса и момента для системы из частицы и поля могут быть выполнены при учете сил торможения излучением, если ускорения частиц исчезают в областях вне поля. Согласно же другим решениям уравнений третьего порядка частица может безгранично ускоряться, расходуя энергию своего электромагнитного поля.

Ситуация здесь напоминает ту, которая существует в ряде других разделов теоретической физики, где из всех решений основных уравнений теории отбираются только те, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Так, в квантовой механике для финитного движения частиц физически приемлемы лишь нормируемые решения уравнения Шрёдингера. В других случаях отбираются решения уравнения Шрёдингера, обладающие определенной симметрией. Из волновых решений уравнений Максвелла используются чаще всего только запаздывающие решения. В этом отношении уравнения движения с радиационным трением не составляют исключения.

Известным примером не всегда приемлемого решения уравнений движения служит решение уравнения (1.2) при отсутствии внешнего поля, имеющее вид $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c} \exp(3mc^3t/2e^2)$. Физически приемлемо только решение с $\mathbf{c} = 0$, а остальные дают «убегающие», «самоускоряющиеся» или «нефизические» решения. Другими примерами служат решения уравнения (1.2) для частицы в постоянном и однородном магнитном поле и уравнения (2.1) для частицы в постоянном и однородном электрическом поле, параллельном начальной скорости и начальному ускорению⁶³. Для последней задачи выражение скорости через быстроту сводит уравнение (2.1) к виду уравнения (1.2). Иные примеры точных решений уравнений (1.2) и (2.1) нашел Пласс⁵⁰, показавший, что авторы работ³⁰ и⁶⁴, утверждавшие, что в некоторых случаях уравнения движения с радиационным трением вообще не имеют физических решений, пропустили именно физические разумные решения. Во всех этих примерах оказывается, что пространство начальных данных, приводящих к физически приемлемым решениям, есть 6-мерное подпространство исходного 9-мерного пространства, причем ускорение в этой точке однозначно выражается через скорость и поле в начальной точке. Именно необходимость выбора среди начальных данных таких их комбинаций, которые дают физически приемлемые решения, породила обширную дискуссию о справедливости выражения для силы радиационного трения. В ней, помимо авторов, упомянутых выше, участвовали авторы работ⁶⁵⁻⁷⁹.

Необходимость отбора начальных данных, приводящих к разумным решениям, следует уже из согласования между потерями и излучением. Действительно, для физического решения интеграл от первого члена (2.2), пропорциональный разности ускорений на пределах интегрирования, должен исчезать не только для любого движения частицы сквозь всю область пространства, занятую полем, но также и для любой области без поля. В противном случае приведенное в предыдущем абзаце решение для движения частицы вне поля пришлось бы и при отличном от нуля \mathbf{c} считать физическим. Следовательно, вне поля частица может иметь только нулевое ускорение. Тогда из теоремы единственности решения системы уравнений при заданных начальных условиях следует, что в области поля имеется всего одно решение, соответствующее заданному вне поля положению, скорости и нулевому

ускорению в начальный момент, а после выхода из поля ускорение исчезает. Самоускорение частицы после прохождения ею любого поля оказывается физическим мифом, относясь к неприемлемым решениям. Поэтому ньютоновский детерминизм — определение ускорений положениями и скоростями тел в тот же момент времени (нерелятивистский случай) — сохраняется при учете силы торможения излучением, размерность фазового пространства не меняется при повышении порядка уравнений, а сила радиационного трения лишается какого-либо мистического оттенка и может использоваться в уравнениях движения даже тогда, когда она не мала по сравнению с силой, действующей со стороны внешнего поля. То же самое относится к уравнениям более высокого порядка, возникающим при учете членов, дополнительных к (2.2), но в этом случае асимптотические ограничения накладываются также на производные координат более высокого порядка.

Остается основной вопрос — как выбирать начальное ускорение при задании начальных данных в точке, где уже имеется внешнее поле, чтобы и в этом случае не сбиться с физически разумного решения уравнений движения? Дирак ⁶ предложил выбирать лишь те решения, для которых ускорение исчезает по прохождении частицей поля или в магнитном поле частица в конце концов останавливается. Бъабъа ⁸ полагал, что нужно выбирать решения уравнений (1.2) или (2.1), непрерывно зависящие от заряда частицы e при $e \rightarrow 0$. Правда, Эрли ⁸⁰ заметил, что для разложимости решения по степеням заряда недостаточно непрерывности, а нужна аналитичность в окрестности $e = 0$, но неизвестно, аналитичны ли физические решения. Калдиrola ⁸¹ предложил считать физическим только такое решение, которое при любом t переходит в решение для свободной частицы, если устремить заряд к нулю. Указанные рецепты, гарантирующие выбор правильного решения, пригодны однако только в тех исключительных случаях, когда удастся точно решить систему уравнений и найти все ее решения, зависящие от 9 произвольных постоянных. В более общем случае применимо нахождение физически приемлемого решения путем использования метода последовательных приближений к уравнениям (1.2) или (2.1), считая, что сила g_i мала по сравнению с силой, действующей со стороны внешнего поля, что мы подробнее обсудим ниже.

6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Автоматический отбор физически приемлемых решений уравнений движения при учете сил торможения излучением возможен при их формулировке в виде интегральных уравнений, эквивалентных как дифференциальным уравнениям, так и начальным и конечным условиям. Для нерелятивистского случая эти уравнения были найдены в работах Хаага ¹⁴ и Рорлиха ²³, а для уравнения (2.1) — Рорлихом ^{23, 71, 15}. При задании конечного условия $w_i = 0$ по прошествии бесконечного времени они имеют вид

$$w_i(\tau) = \frac{e^{\tau/\tau_0}}{\tau_0} \int_{\tau}^{\infty} [F_i(\tau') - \tau_0 w_j(\tau') w_j(\tau') u_i(\tau')] e^{-\tau'/\tau_0} d\tau', \quad (6.1)$$

$$F_i = \frac{e}{mc^2} F_{ik} u_k, \quad \tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3}$$

(τ — собственное время частицы) или, в нерелятивистском пределе,

$$w(t) = \frac{e^{t/\tau_0}}{\tau_0} \int_t^{\infty} F(t') e^{-t'/\tau_0} dt', \quad F = \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [vH] \right), \quad \tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3}. \quad (6.2)$$

Полученные уравнения легко далее формально проинтегрировать, чтобы получить в левой части скорости и координаты соответственно, но мы опустим эти очевидные соотношения.

Если начальные и конечные условия задаются в области без поля, соотношения, аналогичные (6.1) и (6.2), сводятся к равенству $w_i = 0$.

При рассмотрении интегральных уравнений (6.1) и (6.2) прежде всего бросается в глаза, что ускорение частицы в каждый момент времени выражается не через прошлое, а через будущее движение частицы, так что ускорение частицы определяется полями, до которых частица еще не дошла, на протяжении по времени порядка τ_0 . Это явление называют «предускорением» и иногда рассматривают как нарушение причинности.

Грюнбаум и Дженис⁸² показали, что кажущееся нарушение причинности в физических решениях для движения заряженных частиц при учете торможения излучением есть следствие ньютоновской точки зрения на связь между силой как причиной движения и ускорением как ее следствием, тогда как можно лишь говорить о том, что сила и ускорение на всем промежуток времени между моментом задания начального положения и начальной скорости частицы и бесконечно удаленным положением, когда накладывается конечное условие нулевого ускорения, взаимно определяют одна другое. Здесь существенно, что одно из условий задается в будущем. Можно сослаться на аналогию со случаем, когда требуется достичь определенной конечной скорости, например, при запуске космических аппаратов, когда скорость в каждый момент времени определяется с учетом будущего действия силы (разность скоростей выражается через интеграл по времени от будущих сил). Такое описание не вызывает принципиальных возражений с точки зрения ньютоновской механики, тогда как сторонники точки зрения Аристотеля, согласно которой скорость тела определяется силой, действующей на него в тот же момент, сказали бы, что имеется неестественная «предскорость».

В²³ приводятся и другие аргументы в пользу того, что интегральные уравнения (6.1) или (6.2) вовсе не свидетельствуют о нарушении причинности, и их следует рассматривать как математический инструмент для нахождения правильной классической картины движения в течение *всего* времени нахождения частицы в поле.

Образно действие правых частей (6.1) и (6.2) можно описать следующим образом: ускорение в каждый момент времени, получаемое с помощью интегральных уравнений, определяется тем, чтобы в ближайшем будущем решение не уклонялось от физически разумного. Для этого в (6.1) и (6.2) происходит как бы разведка в будущее.

Заметим, что для электрона $\tau_0 = 0,62 \cdot 10^{-23}$ с, а для других заряженных частиц и заряженных макроскопических тел это время еще значительно меньше. Следовательно, все соответствующие эффекты находятся далеко за пределами применимости классической теории и не могут быть непосредственно исследованы с помощью «пробных» частиц. Однако они проявляются и вполне наблюдаемы и измеримы при достаточно длительном действии, например, при спиральном движении частицы в магнитном поле.

Найти решение в квадратурах уравнений (6.1) или (6.2) не проще, а скорее, труднее, чем решить в квадратурах дифференциальные уравнения (2.1) или (1.2). Поэтому (6.1) и (6.2) служат чаще всего для построения метода последовательных приближений для нахождения ускорений в каждый момент времени. Записав (6.1) и (6.2) в виде

$$w_i(\tau) = \int_0^{\infty} [F_i(\tau + \alpha\tau_0) - \tau_0 \Phi_i(\tau + \alpha\tau_0)] e^{-\alpha} d\alpha, \quad \Phi_i = u_i w_j w_j c, \quad (6.3)$$

$$w(t) = \int_0^{\infty} F(t + \alpha\tau_0) e^{-\alpha} d\alpha \quad (6.4)$$

и, разложив подынтегральные функции в ряд по степеням τ_0 , найдем

$$w_{i, n}(\tau) = w_{i, n-1}(\tau) + \tau_0^n (F_i^{(n)}(\tau) - \Phi_i^{(n-1)}(\tau)), \quad (6.5)$$

$$w_n(t) = w_{n-1}(t) + \tau_0^n F^{(n)}(t). \quad (6.6)$$

Для вычисления членов, входящих в последующие приближения (6.5), нужны значения производных от ускорения, вычисляемые путем дифференцирования (6.3) и подстановки более низкого приближения, чем то, в которое они подставляются.

Заметим, что разложения (6.5) и (6.6) совпадает с теми, которые можно непосредственно получить из дифференциальных уравнений (1.2) и (2.1). Это показывает, что решение уравнений (1.2) или (2.1) путем последовательных приближений, при которых на каждом этапе искомая часть силы торможения излучением считается малой по сравнению с внешней силой и суммой уже найденных членов радиационной силы, приводит автоматически к физически разумному решению. Правда, число членов, которое нужно удерживать в таком ряду, зависит от фактической малости изменения внешней силы за время τ_0 в рассматриваемой системе отсчета.

Схема вычисления движения частицы представляется в следующем виде. В произвольной начальной точке, в поле или вне поля, задаются начальное положение и начальная скорость. Затем с помощью (6.5) или (6.6) в той же точке вычисляется ускорение, соответствующее физическому решению. Далее делается конечный шаг $\Delta r = v \Delta t$, $\Delta v = w \Delta t$, соответствующий шагу по времени Δt . В новой точке те же вычисления повторяются. Разумеется, сильное или быстро изменяющееся поле заставляет делать шаг Δt малым, чтобы за счет конечной точности вычислений не отойти слишком далеко от физического решения. Программы и параметры такого вычисления, а также критерии согласия полученного решения с интегральными уравнениями требуют подробного исследования.

Вопросам доказательства существования физического решения уравнений движения в полях общего вида посвящен ряд работ, в частности Эзейло⁸³ и Пласса⁸⁴. Наиболее полно процесс сходимости последовательных приближений при решении интегральных уравнений (6.1) или (6.2) исследовали Хэйл и Стоукс⁸⁵. Они доказали, что для существования физически приемлемого решения достаточно, чтобы сила, действующая на частицу со стороны внешнего поля, убывала быстрее первой обратной степени расстояния от области поля на ее периферии (если частица выходит из области поля) и возростала не быстрее первой степени скорости частицы. Они тем самым доказали, что последовательные приближения (6.5) или (6.6), получаемые с помощью интегральных уравнений (6.3) или (6.4), являются сходящимися (при указанных условиях) методом отыскания решений этих интегральных уравнений.

Эти результаты подтверждаются примерами численного решения (последовательными приближениями) ряда модельных задач на одномерное движение отталкивающихся частиц⁸⁶. В⁸⁷ найдено, что в одномерной задаче с притягивающимися частицами нет физического решения, что не противоречит упомянутой выше теореме, так как в этой задаче не выполнено условие об асимптотическом исчезновении силы в отдаленном будущем, поскольку нет вообще выходной траектории. Последняя задача становится разрешимой, если рассматривать частицы как движущиеся в трехмерном пространстве и не пытаться применять классическую теорию при слишком малом параметре удара.

Могут быть случаи, не охватываемые условиями этой теоремы, например, движение частицы в магнитном поле вплоть до ее остановки.

Рорлих¹⁵ заметил, что результатов работы⁸⁵ недостаточно для доказательства единственности получаемого физического решения. Условия, при которых оно единственно, еще не исследованы. С другой стороны, не найде-

но задач, в которых физическое решение для движения частицы неоднозначно.

В ⁸⁸ дан пример, в котором для задачи о заряде, покоящемся первоначально вблизи плоского слоя, внутри которого действует ускоряющая заряд сила, авторы, как они утверждают, нашли два физических решения. Однако одно из этих решений нельзя считать физически приемлемым, так как, хотя ускорение после прохождения зарядом слоя обращается в нуль, отлично от нуля ускорение в области пространства, где нет никакого внешнего поля. Об этом условии мы уже упоминали в связи с обсуждением соотношений (2.5) и (2.6). Заметим, что в практически реализуемых физических ситуациях такое ограничение не может понадобиться (потому о нем часто и забывают), но его нельзя избежать при рассмотрении модельных задач, в которых пространственные производные поля терпят разрыв.

Разумеется, теорема о существовании физического решения уравнений движения частицы еще не указывает той численной процедуры, которая сочетает точность результатов с экономностью вычислений, особенно если интервал времени, на котором требуется проследить движение частицы, велик. Представляется, что здесь применим метод прогонки, но подробное применение этого метода к рассматриваемым задачам еще не исследовано.

7. ТОРМОЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ ПРОТЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Ряд авторов ^{32,89-100} рассматривал возможность устранения нежелательных, с их точки зрения, свойств уравнения движения точечной частицы путем введения некоторого конечного распределения заряда частицы. Такое описание с конечным числом степеней свободы оказывается возможным только для нерелятивистских частиц, так как иначе приходится рассматривать движение бесконечного числа элементов частицы, движение которых описывается интегральными уравнениями ¹⁰⁰, свойства которых и возможность описания стабильных частиц совершенно не изучены.

С другой стороны, по крайней мере для электронов, идеи о существовании конечной структуры заряда частицы не имеют независимого экспериментального подтверждения. И уж если такая структура проявляется, то размеры ее значительно меньше, чем расстояния, до которых применима классическая электродинамика. Поэтому в пределах применимости классической теории учет структуры заряда представляется превышением допустимой точности. Поскольку настоящий обзор показывает, что и для точечной частицы выражение (2.2) для силы торможения излучением разумно при должном отборе решений, учет возможной структуры некоторых частиц является предметом дальнейших исследований посредством квантовой теории.

8. ТОРМОЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для изученных лабораторных и некоторых космологических ситуаций сила торможения излучением фактически настолько мала по сравнению с силой, действующей со стороны внешнего поля, в лабораторной системе отсчета, что уже первое приближение, когда ускорение, производная от которого входит в радиационную силу, выражается через поле в пренебрежении торможением излучением, оказывается достаточным для получения уравнений движения с необходимой точностью (см. книгу Гайтлера ¹⁰¹). В других же космологических задачах сила торможения излучением может быть велика по сравнению с внешней силой в системе отсчета, связанной с космическим телом, порождающим внешнее поле, но мала в системе отсчета, связанной в некоторый момент с частицей.

Это не дает, однако, основания утверждать, как это делалось в ³³ и ³⁸, что уравнение движения с выражением силы торможения излучением через внешнее поле в первом приближении и есть точное уравнение движения.

Действительно, такое уравнение удовлетворяет балансу энергии, импульса и момента лишь приближенно, а не точно, как уравнение (2.1). Аналогично, замена точного уравнения уравнением, получаемым при некотором конечном числе итераций, нарушает точный баланс между энергией, импульсом и моментом, теряемыми частицей и излученными с полем.

Померанчук ⁶⁷, а также Ландау и Лифшиц (¹⁰ и все последующие издания) полагали, что уравнения (1.2) или (2.1) применимы только тогда, когда сила торможения излучением мала по сравнению с силой, действующей со стороны поля (по крайней мере в системе отсчета, где скорость частицы мала), хотя ⁶⁷ является одним из немногих применений уравнения (2.1), в котором, в системе отсчета, относительно которой частица движется быстро, сила торможения излучением велика по сравнению с силой Лоренца. Необходимо оговаривать систему отсчета, в которой сравниваются силы, так как условие малости рассматриваемой силы в произвольной системе отсчета не является релятивистски инвариантным ¹⁰², хотя условие малости в мгновенной системе покоя частицы инвариантно.

Легко видеть, что сформулированное в ⁶⁷ и ¹⁰ условие применимости радиационной силы не является в сущности каким-либо ограничением круга подлежащих рассмотрению физических ситуаций ⁵⁰, так как теми же авторами показано, что указанная малость силы торможения излучением в мгновенной системе покоя частицы) всегда соблюдается при условиях применимости классической электродинамики. С другой стороны, хотя практически (кроме некоторых модельных задач) используется лишь первое приближение, при теоретическом анализе предпочтительно использование полного выражения (2.2) для силы торможения излучением как удовлетворяющего законам сохранения точно и не означающего поэтому недопустимого превышения точности.

В первом приближении уравнения движения протяженных частиц, упомянутые в разделе 7, совпадают ⁹⁸ с первым приближением для уравнений движения для точечных частиц. Следовательно, в первом приближении сила торможения излучением не зависит от предположений о структуре заряда частицы. Таким образом, первое приближение для силы торможения излучением осуществляет приближенный синтез двух существующих точек зрения или компромисс между ними.

9. ПРИЛОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ С РАДИАЦИОННЫМ ТРЕНИЕМ

Ряд работ посвящен исследованию движения заряженных частиц, не взаимодействующих с другими частицами, в однородном и постоянном магнитном поле при учете торможения излучением: ^{89, 50, 103, 75, 55, 34, 35, 104, 113}. В ^{106, 108, 114–116, 35} было показано, что при движении частиц высоких энергий в сильном магнитном поле спектр синхротронного излучения и, особенно, — его поляризация, существенно изменяются по сравнению с результатами расчета, предполагающего, что частицы движутся точно по окружности. В реальном синхротроне частицы принудительно движутся по траекториям, близким к окружностям, и подпитываются энергией, что подавляет влияние торможения излучением на излучение, но сам расчет этих поправочных воздействий требует учета радиационного трения, хотя бы в виде первой итерации. С другой стороны, эффект радиационного торможения следует обязательно учитывать ¹⁰³ при анализе синхротронного излучения быстрых частиц в сильных магнитных полях внеземного происхождения. Для синхротронного излучения Шен ¹⁰⁸ указал области значений энергии частиц и магнитного поля, в которых следует преимущественно учитывать реакцию излучения и квантовые эффекты. В ¹⁰⁶ показано, что радиационные поправки к излучению частиц в магнитном поле важнее квантовых поправок, если лоренц-фактор превышает 137. Шен и Уайт ¹¹² показали, что радиационное

отклонение пучка частиц больше, чем его расширение за счет квантовых флуктуаций, так как радиационный сдвиг пропорционален LH , где L — длина пути в поле H , а флуктуационный разброс пропорционален \sqrt{LH} .

Чтобы ориентировать читателя в порядках радиационных эффектов, возникающих при движении частиц в магнитном поле, заметим, что относительное сокращение радиуса орбиты за один оборот для нерелятивистских частиц равно $4\pi H/(3H_0)$, где $H_0 = m^2 c^4/e^3 = 6,03 \cdot 10^{11}$ Тл, а для быстрых частиц умножается⁵⁵ на лоренц-фактор. Если $H = 2$ Тл и $\xi/mc^2 = 5 \cdot 10^4$, то $\Delta r/r = -7 \cdot 10^{-7}$. В случае, когда частицы движутся в трубке с отношением радиусов 10^{-4} , уже через сотню оборотов они могли бы войти в стенку трубки, если бы не делались необходимые коррекции и фокусировки. При малых энергиях радиационные изменения движения могут быть менее существенными, чем рассеяние на молекулах среды.

Другие случаи движения частиц с учетом торможения излучением рассматривались в^{97, 50, 117–125}. Разделы 1—9 настоящей статьи явились также предметом обзора¹²⁶.

10. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ, ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА СИСТЕМОЙ ЧАСТИЦ

До сих пор мы учитывали воздействие на заряженные частицы со стороны внешнего поля и поля излучения каждой частицы. Но в достаточно плотных пучках частицы взаимодействуют также между собой, что в некоторых случаях существенно влияет как на их движение, так и на характер потерь частицами энергии, импульса и момента и на возникающее излучение. В нерелятивистском случае некоторые аспекты этого влияния рассматривались в^{127, 128}. Когерентность излучения системы частиц на достаточно низких частотах изучалась в^{129–131}.

Каждая частица с зарядом e_a в четырехмерной точке x_a порождает в полевой точке x (называемой иногда точкой наблюдения) потенциал Лиенара — Вихерта

$$A_i^{(a)}(x) = -e_a u_{ia} ((x - x_a) u_a)^{-1}, \quad (10.1)$$

где

$$(x - x_a)^2 = 0. \quad (10.2)$$

Дифференцируя соотношения (10.2) по x и учитывая, что $\partial x_a / \partial x_j = u_{ja} \partial s_a / \partial x_j$, находим, что $\partial s_a / \partial x_j = (x - x_a)_j / (x - x_a) u_a$. Тогда из (10.1) получаем тензор поля

$$F_{ij}^{(a)}(x) = \frac{e_a}{[(x - x_a) u_a]^3} \{ [(x - x_a)_i u_{ja} - (x - x_a)_j u_{ia}] [1 + (x - x_a) w_a] - [(x - x_a)_i w_{ja} - (x - x_a)_j w_{ia}] (x - x_a) u_a \}, \quad (10.3)$$

где снова учитываются условия (10.2) и отбираются только запаздывающие поля.

Уравнения движения системы N заряженных частиц, находящихся во внешнем электромагнитном поле и взаимодействующих посредством электромагнитного поля, имеют вид

$$dp_{ia} = \frac{e_a}{c} F_{ij}(x_a) dx_{ja}, \quad dx_{ia} = (c^2 p_{ia} / \mathcal{E}_a) dt_a, \quad a = 1, \dots, N, \quad (10.4)$$

где

$$F_{ij}(x_a) = F_{ij}^{\text{ext}}(x_a) + \frac{2e_a}{3} (u_{ia} \ddot{u}_{ja} - u_{ja} \ddot{u}_{ia}) + \sum_{b \neq a} F_{ij}^{(b)}(x_a). \quad (10.5)$$

Первый член (10.5) есть внешнее поле, второй уже записан в (2.3) (точки означают дифференцирование по ds_a), а третий есть сумма полей (10.3), действующих на каждую частицу со стороны остальных. При подстановке (10.3)

в (10.5) x заменяется на x_a , x_a — на координаты $x'_{b,a}$, определяемые для каждой пары частиц с номерами a и b из уравнений $(x_a - x'_{b,a})^2 = 0$ (рис. 1), а u_a, w_a — на $u'_{b,a}, w'_{b,a}$, относящиеся к точкам $x'_{b,a}$ (штрихованный момент времени предшествует нештрихованному). Близкий вид уравнений движения системы частиц записан, например, в ¹⁵.

Система уравнений движения частиц содержит не только члены с производными повышенного порядка, которые мы уже обсуждали выше, но и члены с запаздывающими аргументами. Хотя существует математическая литература относительно дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами, о свойствах систем (10.4) и об эффективных способах их численного решения известно немного. Ясно лишь, что задания конечного числа начальных данных для их однозначного решения недостаточно, а требуется задание асимптотик на периферии поля ¹³²⁻¹³⁴. Впрочем, часто встречается случай, когда на достаточно больших расстояниях между частицами поля взаимодействия значительно слабее внешнего поля, что позволяет задавать на таких расстояниях обычные начальные условия, определяющие асимптотики в соответствии с внешним полем.

Полная интенсивность изменения энергии, импульса и момента системы частиц находится непосредственно из (10.4), когда уравнения движения либо проинтегрированы, либо внешнее поле настолько сильно по сравнению с остальными членами поля (10.5), что движение частиц можно считать заданным:

$$d\mathcal{P}_i = \frac{1}{c} \sum_a e_a F_{ij}(x_a) dx_{ja}, \quad (10.6)$$

$$dM_{ij} = \frac{1}{c} \sum_a e_a (x_{ia} F_{jk}(x_a) - x_{ja} F_{ik}(x_a)) dx_{ka}. \quad (10.7)$$

В (10.6) и (10.7) входит полное поле (10.5). Если движение всех частиц известно в одной и той же (лабораторной) системе отсчета, время в которой мы обозначим через t_0 , то можно положить $t_a = t_0$ для всех a .

Выражения (10.6) и (10.7) совпадают, с точностью до знака, с интенсивностями излучения соответствующих величин, определяемых (с учетом запаздывания) потоками в волновой зоне, только для систем, у которых соответствующие потоки вообще не зависят от времени, а в остальных случаях дают полные потери энергии, импульса и момента, совпадающие с интегралами по времени от этих потоков через бесконечно удаленные от этих систем поверхности, после интегрирования (10.6) и (10.7) по времени по всему периоду ускоренного движения частиц или усреднения для квазипериодического движения.

11. СПЕКТРАЛЬНО-УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ СИСТЕМЫ

Понятие спектрального распределения излучения применимо только к интенсивности излучения, усредненной по всему периоду движения частиц или хотя бы его части (если рассматриваются только достаточно высокие частоты), причем углы направления излучения должны быть определе-

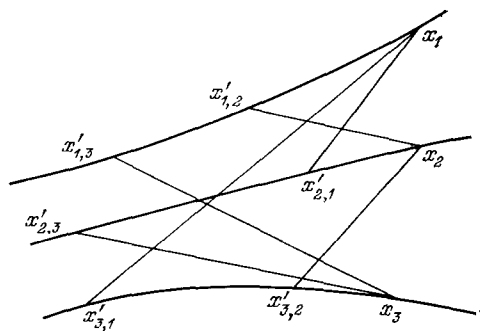


Рис. 1. Координаты при запаздывающем взаимодействии частиц

ны в системе отсчета, не вовлеченной в движение частиц. Для нахождения спектрально-углового распределения излучения потенциалы и поля частиц разлагаются в интеграл или в ряд Фурье в полевой точке \mathbf{r} , t с помощью гармоник, включающих полевое время t , которое можно полагать одинаковым для всех частиц системы и всех направлений излучения. Поэтому разложение запаздывающих потенциалов системы N частиц почти дословно следует изложению соответствующих параграфов книги ¹⁰. В частности, для финитного движения частиц с частотой ω_0 спектр излучения дискретен и гармоники векторного потенциала при больших пространственных расстояниях \mathcal{R} от системы до полевых точек (рис. 2) имеют асимптотический вид

$$A_n = \frac{\omega_0}{\pi \mathcal{R}} e^{ik\mathcal{R}} \sum_{a=1}^N e_a \oint e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} d\mathbf{r}_a, \\ \omega = n\omega_0, \quad \mathbf{k} = n\omega_0 \mathbf{n}, \quad (11.1)$$

где n — номер гармоники, а \mathbf{n} — единичный вектор направления излучения. Мы записали потенциал (11.1) в виде, достаточно точном при $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ для нахождения потоков энергии и импульса поля; при нахождении потока момента требуется также учет членов порядка \mathcal{R}^{-2} .

Фактически для достаточно больших частот в интегралах, входящих

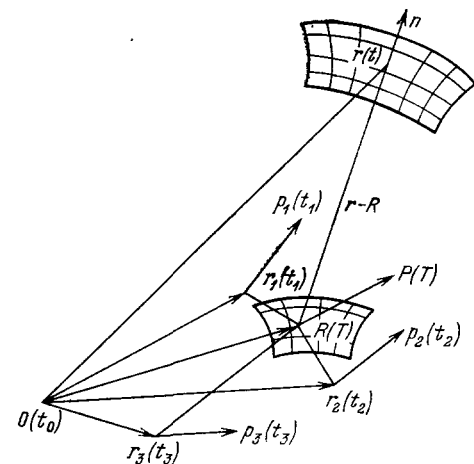


Рис. 2. События излучения, поверхность источников излучения и удаленная поверхность

в (11.1), существенный вклад вносят только достаточно малые части траекторий частиц ^{132, 52} (области формирования излучения).

Угловое распределение интенсивности n -й гармоники излучения энергии относительно осей, фиксированных по отношению к лаборатории, находится в виде

$$dI_n = \lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} \frac{c}{8\pi} |[\mathbf{k}A_n]|^2 \mathcal{R}^2 d\Omega. \quad (11.2)$$

12. УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МГНОВЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ И ПОЛНАЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

При исследовании углового распределения излучения, порождаемого одним зарядом, рассматриваются полевые точки с координатами \mathbf{r} , t , лежащие на сфере радиуса \mathcal{R} , большого по сравнению с длиной излучаемых волн, имеющей центр в точке, где заряд находится в момент t_0 , причем направление к элементу сферы указывает единичный вектор \mathbf{n} , а затем производится предельный переход при $\mathcal{R} \rightarrow \infty$. Этим путем, в частности, в ¹³⁶ проверено, что энергия и импульс излучения частицы составляют четырехмерный вектор и согласуются с (2.5).

Для системы излучающих частиц нужно релятивистски-ковариантным способом характеризовать положение системы как целого в момент t_0 лабораторного времени. Центром событий излучения с координатами \mathbf{r}_a , t_a , не только разноместных, но и, как правило, не одновременных в рассматриваемой системе отсчета, и порождающих поле в точке \mathbf{r} , t , лежащей в направлении \mathbf{n} , служит ¹³⁷ четырехмерный вектор X , определенный в ^{138, 139} и имею-

ций координаты

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Mc^2} \sum_{a=1}^N \left\{ \mathbf{r}_a \left(\mathcal{E}_a - \frac{c^2 \mathbf{P} \mathbf{p}_a}{\mathcal{E} + Mc^2} \right) + c \mathbf{P} \mathbf{r}_a \left[\frac{1}{\mathcal{E} + Mc^2} \left(c \mathbf{p}_a + \mathbf{P} \frac{\mathcal{E}_a}{Mc} \right) - \frac{\mathbf{P}}{NMc} \right] - \right. \\ \left. - ct_a \left[c \mathbf{p}_a + \frac{\mathbf{P}}{Mc} \left(\frac{c^2 \mathbf{P} \mathbf{p}_a}{\mathcal{E} + Mc^2} - \frac{\mathcal{E}}{N} \right) \right] \right\}, \quad (12.1)$$

$$T = \frac{1}{M^2 c^4} \sum_{a=1}^N \left[\mathbf{P} \mathbf{r}_a \left(\mathcal{E}_a - \frac{\mathcal{E}}{N} \right) + t_a \left(\frac{\mathcal{E}^2}{N} - c^2 \mathbf{P} \mathbf{p}_a \right) \right], \quad (12.2)$$

где $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$, $\mathcal{E} = \sum_{a=1}^N \mathcal{E}_a$, $Mc^2 = \sqrt{\mathcal{E}^2 - c^2 \mathbf{P}^2}$, \mathcal{E}_a , \mathbf{p}_a — энергии и импульсы частиц в моменты излучения t_a . В ¹³⁸ показано, что координаты центра, как и координаты событий, преобразуются по представлению группы Пуанкаре при изменении инерциальной системы отсчета. Вектор X_i канонически (посредством $8N$ -мерных скобок Пуассона) сопряжен импульсу P_i системы событий. В нерелятивистском пределе, если времена событий совпадают, \mathbf{R} определяет центр инерции системы частиц. В ¹³⁹ показано, что определение центра X для N частиц содержит N неопределенных постоянных α_a , подчиненных только условию, чтобы сумма их была равна единице. Но в применении к системе излучающих частиц условие симметрии, которого мы коснемся ниже, дает однозначно, что $\alpha_a = 1/N$, что и использовано в (12.1) и (12.2). Можно показать, что требование канонической сопряженности X и P , канонической независимости X от относительных импульсов в системе частиц, правильного нерелятивистского перехода к симплектической структуре обычного координатно-импульсного фазового пространства и симметрии определяют вектор X однозначно *). Время системы в целом (12.2) мы приравняем лабораторному времени t_0 .

Пусть полевая точка \mathbf{r} в момент t отстоит от \mathbf{R} на расстояние \mathcal{R} в направлении \mathbf{n} (рис. 2), а моменты t одинаковы для всех полевых точек. В силу (10.2)

$$t_a = t - \frac{1}{c} \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)^2}. \quad (12.3)$$

Пространственные координаты \mathbf{R} центров событий излучения в различных направлениях \mathbf{n} могут не совпадать. Они в общем случае образуют двумерную замкнутую оболочку (поверхность источников излучения), имеющую в каждый момент времени t_0 свою форму и лежащую внутри системы частиц. В некоторых случаях, например, для частиц, движущихся в одной плоскости, эта оболочка сжимается в двуслойную площадку, а в еще более частных случаях — в одномерный отрезок кривой, точнее — в бесконечно узкий чулок. В нерелятивистском пределе оболочка источников излучения сжимается в точку, совпадающую с положением центра инерции системы в момент t_0 . Полевые точки, удаленные на \mathcal{R} от соответствующих точек поверхности источников излучения, образуют поверхность, переходящую при $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ в бесконечно удаленную сферу (части поверхности источников излучения и удаленной поверхности показаны на рис. 2).

Рассмотрим сумму полей (10.3), создаваемых зарядами системы, на удаленной поверхности в момент полевого времени t . Для этого добавим и вычтем во всех разностях $x_i - x_{ia}$ в (10.3) координаты X_i , сложим поля в \mathbf{r} , t и перейдем к пределу при $\mathcal{R} \rightarrow \infty$. По построению $x_i - X_i = \mathcal{R} n_i$,

*) Попытка введения иных выражений для \mathbf{R} и T , симметричных по частицам, но связанных с внутренними импульсами, зависящими не только от индивидуальных импульсов и энергий, но и от масс частиц, приводит в задаче, рассмотренной в § 14, к противоречию между различными подходами к излучению системы частиц.

$n_i = (\mathbf{n}, in_0)$, $n^2 = 1$, $n_0 = (t - T)/\mathcal{R}$. С помощью (12.2) находим, что

$$\lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} n_0 = 1, \quad \lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} n^2 = 0. \quad (12.4)$$

[Сумма полей (10.3) содержит как члены, убывающие при $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ в порядке \mathcal{R}^{-1} , так и члены, убывающие быстрее. При исследовании потоков энергии и импульса, уносимых излучением, последние члены не нужны. Тогда находим главную часть $T_{ik}^{(2)}$ тензора энергии и импульса на удаленной поверхности:

$$T_{ik}^{(2)} = \frac{n_i n_k}{4\pi \mathcal{R}^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \frac{e_a e_b f_a f_b}{(\mathbf{n} u_a \cdot \mathbf{n} u_b)^3}, \quad f_{ja} = u_{ja} n w_a - w_{ja} n u_a; \quad (12.5)$$

здесь и ниже n означает четверку (\mathbf{n}, i) .

Поток энергии и импульса через элемент бесконечно удаленной сферы, отнесенный к элементу телесного угла и элементу полевого времени, равен

$$d\mathcal{P}_i = \lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} c \sum_{\alpha=1}^3 T_{i\alpha} n_\alpha \mathcal{R}^2 d\Omega dt. \quad (12.6)$$

Элемент dt с помощью (12.2) и следующей при $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ из (10.3) подстановки $t_a = t - [\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)/c]$ может быть выражен через элемент коллективного времени, если учесть, что из (12.3) следует $dt_a = dt/[1 - (\mathbf{n} \mathbf{v}_a/c)]$:

$$\begin{aligned} dt = dt_0 \left\{ 1 + \sum_{a=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{v}_a} \left[\frac{\mathbf{n} \mathbf{v}_a}{cN} + \frac{1}{M^2 c^4} \left(\mathbf{P} \mathbf{v}_a \left(\mathcal{E}_a - \frac{\mathbf{i} \mathcal{E}}{N} \right) + \mathbf{P} \mathbf{r}_a \dot{\mathcal{E}}_a + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + c n \mathbf{v}_a \left(\frac{\mathbf{P}^2}{N} - \mathbf{P} \mathbf{p}_a \right) - n \mathbf{r}_a c \dot{\mathbf{P}} \mathbf{p}_a + \sum_{b=1}^N \left(\dot{\mathbf{p}}_a \mathbf{r}_b \left(\mathcal{E}_b - \frac{\mathcal{E}}{N} \right) + c n \mathbf{r}_b \left(2 \frac{\mathbf{P} \mathbf{p}_a}{N} - \mathbf{p}_b \dot{\mathbf{p}}_a \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{N} \dot{\mathcal{E}}_a \mathbf{P} \mathbf{r}_b - 2 \frac{\mathcal{E} \dot{\mathcal{E}}_a - c^2 \mathbf{P} \mathbf{p}_a}{M^2 c^4} \left(\mathbf{P} \mathbf{r}_b \left(\mathcal{E}_b - \frac{\mathcal{E}}{N} \right) + c n \mathbf{r}_b \left(\frac{\mathbf{P}^2}{N} - \mathbf{P} \mathbf{p}_b \right) \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (12.7) \end{aligned}$$

где $\dot{\mathcal{E}}_a$ и $\dot{\mathbf{p}}_a$ означают производные от \mathcal{E}_a и \mathbf{p}_a соответственно по временам событий излучения t_a , взятые в моменты t_a . Для одной частицы, как обычно, находим $dt = dt_0 (1 - \mathbf{n} \mathbf{v}/c)$.

Полная интенсивность излучения энергии и импульса в единицу лабораторного времени, соответствующая состоянию системы частиц в момент t_0 , находится интегрированием правой части (12.6) по телесному углу:

$$\frac{d\rho_i}{d\Omega dt_0} = \frac{c}{4\pi} \int d\Omega n_i \frac{dt}{dt_0} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \frac{e_a e_b f_a f_b}{(\mathbf{n} u_a \cdot \mathbf{n} u_b)^3}. \quad (12.8)$$

Два наиболее важных способа выбора углов, задающих вектор \mathbf{n} , заключаются в том, что углы либо связаны с установкой, в которой движутся частицы (лабораторные углы), либо с движением группы частиц (углы относительно сопровождающей системы осей).

При $N > 1$ координаты, скорости, ускорения, импульсы и энергии частиц и их производные при вычислении интеграла (12.8) должны быть взяты в моменты излучения t_a , причем это различие зависит от направления излучения. В силу (12.3) при $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ находим систему $N(N-1)/2$ уравнений

$$c(t_a - t_b) = \mathbf{n}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b), \quad (12.9)$$

из которых только $N-1$ независимы. Эти $N-1$ уравнений и уравнение $T = t_0$ являются полной системой N уравнений для численного нахождения N времен t_a при заданных t_0 и \mathbf{n} . Подставляя полученные времена для каж-

дой точки сферы в (12.7) и (12.8), численным интегрированием найдем полное излучение энергии и импульса в единицу лабораторного времени, соответствующее моменту t_0 .

Находимое этим путем излучение системы частиц не должно зависеть от способа введения их нумерации. Для обеспечения этого необходимо, чтобы система уравнений для определения времен событий излучения переходила в себя при перестановке номеров частиц. Уравнения (12.9) действительно удовлетворяют этому условию, а уравнение $T = t_0$ удовлетворяет ему только тогда, когда T взято в виде, симметричном относительно всех частиц, что уже было использовано выше.

Для одной частицы из (12.2) находим $t_1 = t_0$, оболочка источников излучения совпадает с точкой, где в момент t_0 находится частица, интеграл по сфере легко вычисляется при произвольном движении частицы и из (12.8) находится известное выражение

$$d\mathcal{P}_i = \frac{2e^2}{3c} w^2 u_i ds, \quad (12.10)$$

согласующееся с (2.5).

Для потока момента при учете в тензоре энергии-импульса членов порядка \mathcal{R}^{-3} находим

$$\frac{dM_{ih}}{dt_0} = \int d\Omega \frac{dt}{dt_0} \{[(X+m)_i T_{k\alpha}^{(2)} - (X+m)_k T_{i\alpha}^{(2)}] \mathcal{R}^2 + (n_i T_{k\alpha}^{(3)} - n_k T_{i\alpha}^{(3)}) \mathcal{R}^3\} n_\alpha, \quad (12.11)$$

где

$$\begin{aligned} n_i T_{kl}^{(3)} - n_k T_{il}^{(3)} &= \frac{1}{4\pi \mathcal{R}^3} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \frac{e_a e_b}{(nu_a \cdot nu_b)^3} \left[(n_i q_{ka} - n_k q_{ia}) f_a f_b n_l - \right. \\ &\quad - (n_i f_{ka} - n_k f_{ia}) f_b q_a n_l - (n_i f_{ka} - n_k f_{ia}) n g_b n_l + (n_i f_{ka} - n_k f_{ia}) f_{lb} n (q_a + q_b) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (n_i \delta_{kl} - n_k \delta_{il}) f_a f_b \cdot n (q_a + q_b) \right], \\ g_{ia} &= u_{ia} \left(1 + q_a w_a - 3 \frac{nw_a \cdot q_a u_a}{nu_a} \right) + w_{ia} (3q_a u_a - q_a w_a), \\ q_{ia} &= X_i + m_i - x_{ia}, \\ m &= 0, \quad m_i = i \lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} \mathcal{R} (n_0 - 1) = \\ &= i \left\{ n\mathbf{R} - \frac{1}{M^2 c^4} \sum_{a=1}^N \left[c \text{Pr}_a \left(\mathcal{E}_a - \frac{\mathcal{E}}{N} \right) + n\mathbf{r}_a \left(\frac{\mathcal{E}^2}{N} - c^2 \mathbf{Pp}_a \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Для одной частицы интегрирование по сфере дает

$$\frac{dM_{ih}}{ds} = \frac{2e^2}{3c} (u_i w_h - u_h w_i + (x_i u_h - x_h u_i) w^2), \quad (12.13)$$

что согласуется с (2.6).

Совпадение результатов, получаемых из формул разделов 10, 11 и 12 (для полного прохождения области поля или усреднения для периодического движения) гарантируется законами сохранения энергии, импульса и момента для системы из частиц и поля. Мы уже видели это согласие для излучения одной частицы, а для системы частиц оно демонстрируется на приведенном ниже примере. Для того чтобы пояснить различие в смысле времен, входящих в приведенные выше формулы, рассмотрим упрощенный случай, когда частицы излучающей системы движутся ускоренно только в течение конечного промежутка времени Δt_0 по часам лаборатории, а наблюдается оно с помощью прибора, находящегося на достаточно большом расстоянии \mathcal{R} от системы и охватывающего телесный угол $\Delta\Omega$. Предположим, что за время Δt_0 центр системы мало смещается. Тогда наблюдатель будет отмечать наличие

излучения в течение промежутка времени Δt , который иногда может быть значительно короче, чем Δt_0 . Для этого случая интеграл по времени по промежутку Δt_0 от четвертой компоненты (10.6) указывает энергию, потерянную системой, интеграл от четвертой компоненты (12.8) по Δt_0 и $\Delta\Omega$ дает энергию, прошедшую через детектор (по прошествии времени запаздывания R/c) за лабораторный промежуток времени Δt_0 , а аналогичный интеграл от четвертой компоненты (12.6) указывает энергию, прошедшую через детектор за полевой промежуток времени Δt . Последние две энергии близки при достаточно малых Δt_0 и $\Delta\Omega$.

13. СОВМЕСТНОЕ СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ДВУХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим простейший случай, когда две одинаковые частицы движутся с одинаковыми скоростями v по окружностям одинакового радиуса a , лежащим в плоскостях, параллельных плоскости xu и отстоящих одна от другой по оси z на величину h . Пусть одна из окружностей сдвинута по отношению к другой по оси y на величину b , начало координат взято посередине между центрами окружностей, частицы движутся в одну сторону, причем одна частица опережает другую на угол φ , а лабораторное время отсчитывается от момента, когда середина отрезка, соединяющего положения частиц, пересекает ось x . Излучение этих двух частиц может быть синфазным при достаточно малых φ , h/a и b/a . Окружность, к которой обе траектории частиц стремятся при исчезновении этих величин, будем называть центральной.

Излучение системы в каждый момент времени t_0 сосредоточено вокруг прямой, касательной к центральной окружности в точке с угловой координатой $\omega_0 t_0$, $\omega_0 = v/a$. Эту прямую мы возьмем в качестве полярной оси сопровождающей системы координат. Система уравнений для определения моментов излучения t_1 и t_2 принимает вид

$$\frac{1}{2}(t_1 + t_2) = t_0, \quad \gamma = d + \beta \sin \gamma \cos \theta, \quad (13.1)$$

где

$$\gamma = \beta \frac{c(t_1 - t_2)}{2a} + \frac{\varphi}{2},$$

$$d = \frac{1}{2} \left[\varphi + \beta \frac{b}{a} (\sin \omega_0 t_0 \sin \theta \cos \psi + \cos \omega_0 t_0 \cos \theta) - \beta \frac{h}{a} \sin \theta \sin \psi \right], \quad (13.2)$$

а θ и ψ — углы направления \mathbf{n} в сопровождающей системе осей.

Для каждой t_0 и \mathbf{n} система (13.1) решается сходящимися последовательными приближениями, начиная с $t_1 = t_2 = t_0$. Кинематический фактор (12.7) упрощается:

$$\frac{dt}{dt_0} = \frac{[1 - (1/c) \mathbf{n} \mathbf{v}_1][1 - (1/c) \mathbf{n} \mathbf{v}_2]}{1 - [\mathbf{n}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2c]}. \quad (13.3)$$

Тогда с помощью (12.8) находим интенсивность излучения

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt_0} = \frac{ce^2\beta^4}{4\pi a^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{E} \left[\frac{A_+}{A_-^2} - (1 - \beta^2) \frac{F_+^2 A_+}{A_-^2} + \frac{A_-}{A_+^2} - (1 - \beta^2) \frac{F_-^2 A_-}{A_+^2} - \right. \\ \left. - 2(1 - \beta^2 \cos 2\gamma) \frac{F_+ F_-}{A_+^2 A_-^2} - \frac{2\beta \sin 2\gamma}{A_+ A_-} \left(\frac{F_+}{A_-} - \frac{F_-}{A_+} \right) + \frac{2 \cos 2\gamma}{A_+ A_-} \right], \quad (13.4) \end{aligned}$$

где

$$A_\pm = 1 - \beta (\cos \gamma \cos \theta \pm \sin \gamma \sin \theta \cos \psi), \quad E = 1 - \beta \cos \gamma \cos \theta, \quad (13.5)$$

$$F_\pm = \cos \gamma \sin \theta \cos \psi \pm \sin \gamma \cos \theta,$$

а γ подставляется из (13.1).

Поверхность источников излучения для этой задачи оказывается отрезком прямой, перпендикулярной к центральной окружности в точке с угловой координатой $\omega_0 t_0$ и лежащей в ее плоскости. Длина этого отрезка исчезает квадратично при малых φ , h/a и b/a .

Отличие интенсивности совместного излучения энергии двумя частицами от суммы интенсивностей двух независимых частиц удобно характеризовать отношением R полной интенсивности согласно (13.4) к удвоенной интенсивности излучения одной частицы в тех же условиях. При достаточно малых сдвигах φ , h/a и b/a с помощью (13.1), (13.3) и (13.4) находим приближенное выражение

$$R(\varphi, h, b) = 2 - \frac{5 + 21\beta^2 + 9\beta^4}{10} \frac{\varphi^2}{(1 - \beta^2)^3} - \frac{\beta^2(2 + 3\beta^2)}{10} \frac{(h/a)^2}{(1 - \beta^2)^2} - \\ - \frac{\beta^2(7 - 16\beta^2)}{70} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\sin^2 \omega_0 t_0}{(1 - \beta^2)^2} - \frac{\beta^2(14 + 163\beta^2 + 68\beta^4)}{70} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\cos^2 \omega_0 t_0}{(1 - \beta^2)^3} - \\ - \frac{\beta^2(189 + 275\beta^2 + 26\beta^4)}{70} \frac{b\varphi}{a} \frac{\cos \omega_0 t_0}{(1 - \beta^2)^3} + \dots \quad (13.6)$$

Численный расчет посредством (13.4) согласуется с (13.6) и с не выписанными здесь членами более высоких порядков, которые можно найти, и показывает, что отношение $R(\varphi, h, b)$ быстро падает от $R = 2$ при росте φ , h/a и $b \cos \omega_0 t_0/a$, пересекает уровень $R = 1$ и приближается к нему снизу. Точка наиболее быстрого падения кривой $R(\varphi, 0, 0)$ лежит при $\varphi \sim 0,5 (1 - \beta^2)^{3/2}$, кривой $R(0, h, 0)$ — при $h \sim 0,8 \times (1 - \beta^2) a$, кривой $R(0, 0, b)$ (при $t_0 = 0$) — при $b \sim \sim 0,2a (1 - \beta^2)^{3/2}$. Длина волны в максимуме спектра излучения близка к удвоенному расстоянию между частицами в направлении их движения, при котором происходит резкое падение кривой $R(\varphi, 0, 0)$. Размер области синфазности излучения в направлении h больше этой длины волны в $\sim 5/\sqrt{1 - \beta^2}$ раз.

Наиболее интересным оказывается случай, когда $\beta^2 > 7/16$ и $\omega_0 t_0$ близко к $\pi/2$, точнее, $\cos^2 \omega_0 t_0 < 9(1 - \beta^2)/245$. В этом случае $R(0, 0, b)$ не падает, а растет от $R = 2$ при росте b от $b = 0$, проходит максимум, а его плавное падение происходит (если $\omega_0 t_0 = \pi/2$) при $b \sim 25a(1 - \beta^2)$. Этот размер области синфазности излучения в $\sim 100/\sqrt{1 - \beta^2}$ раз больше длины волны в максимуме спектра излучения. Таким образом, область синфазности имеет весьма различные оси, наибольшая из которых значительно превышает интуитивную оценку расстояний между частицами, при которых возможна интерференция излучаемых волн, имеющую порядок длины излучаемой волны. Кривая $R(0, 0, b)$ при $\omega_0 t_0 = \pi/2$ представлена для $1/\sqrt{1 - \beta^2} = 3$ на рис. 3. Она имеет максимум $R = 2,44$ при $b = 0,28a$.

При $\varphi = h = 0$ представляет интерес рассмотреть временную зависимость отношения R и сравнить ее с временной зависимостью потерь энергии, получаемой из (10.6) путем замены знака. Это сравнение дано на рис. 4 для того же значения β и для $b = 0,28a$. Интегрирование изображенных кривых показывает, что их средние совпадают и равны $\bar{R} = 1,041$. Если $b = 0$,

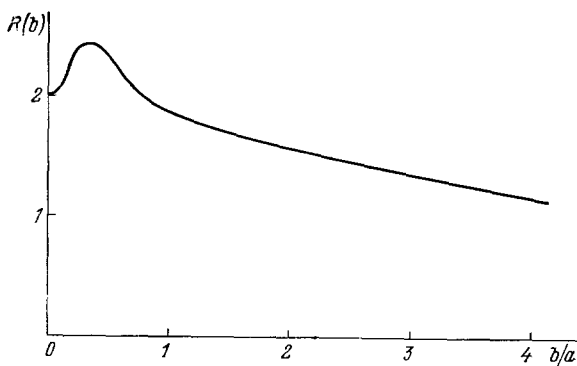


Рис. 3. Полная интенсивность излучения парой частиц как функция сдвига b при $\beta = 2\sqrt{2}/3$

вычисления с помощью (10.6) дают в точности разложение (13.6) и кривые $R(\varphi, h, 0)$.

Расчет с помощью (13.4) показывает, что в общем случае угловое распределение совместного излучения двух частиц шире, чем угловое распределение излучения одной частицы, имеющее ширину порядка обратного лоренц-фактора. Но если $\omega_0 t_0$ близко к $\pi/2$ и сдвиг b близок к значению,

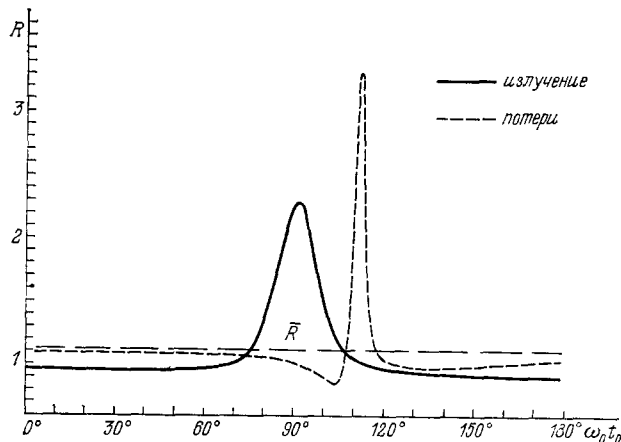


Рис. 4. Интенсивность потерь энергии парой частиц (штриховая кривая) и интенсивность их излучения (сплошная кривая) как функция $\omega_0 t_0$ при $b = 0,28$ и $\beta = 2\sqrt{2}/3$

соответствующему максимуму полной интенсивности, излучение сжимается в луч, значительно более узкий (в области достаточно малых углов), чем излучение одной частицы.

Используя формулы спектрального разложения (11.1) и (11.2), для рассматриваемой задачи находим спектрально-угловое распределение

$$dI_n^{(2)} = 4 \cos^2 \left[\frac{n}{2} \left(\varphi + \beta \frac{b}{a} \sin \theta_L \sin \psi_L + \beta \frac{h}{a} \cos \theta_L \right) \right] dI_n^{(1)}(\theta_L), \quad (13.7)$$

где n — номер гармоники, $dI_n^{(1)}(\theta_L)$ — спектрально-угловое распределение для синхротронного излучения одной частицы, найденное еще Шоттом⁴⁶, и использованы лабораторные углы θ_L и ψ_L . Если $\varphi \ll \pi/n$, в секторе $\cos \theta_L < \pi a / (n \beta h)$, $\sin \psi_L < \pi a / (n \beta b \sin \theta_L)$ спектр излучения совпадает со спектром излучения независимых частиц, но умножен на 4 вместо 2 (на N^2 вместо N для N частиц). Для N частиц подобное усиление излучения возможно, если все частицы сдвинуты в одной плоскости от центральной окружности вдоль одной прямой, причем максимум интенсивности излучения перпендикулярен к указанной прямой, а в остальных направлениях и при других сдвигах траекторий частиц высокочастотная часть спектра оказывается настолько подавленной, что вместо множителя N^2 снова выступает множитель N .

При малых φ , h/a и b/a выражение (13.7) может быть разложено по их степеням, проинтегрировано по углам и просуммировано по спектру. Тогда снова находим выражение (13.6), в котором произведено усреднение по времени.

На разобранном примере продемонстрирована согласованность всех трех возможных подходов к изучению излучения (формулы (10.6), (11.2) и (13.4) соответственно) и, в частности, правомерность использования выражения (2.3) для силы торможения излучением и понятия центра системы событий с релятивистскими частицами. Этот пример также показывает, что теория излучения систем частиц может дать возможность предвидеть новые

явления, проявляющиеся при совместном излучении частиц и могущие быть наблюдаемыми и полезными.

Рассмотрение других примеров показывает, что (12.8) позволяет проследить в нерелятивистском пределе переход к мультипольному излучению системы частиц.

Автор благодарен С. Н. Соколову и участникам семинаров И. М. Тернова, Б. М. Болотовского и Л. В. Келдыша за полезное обсуждение предмета обзора, В. И. Арнольду и А. Н. Шопитайшвили за обсуждение относящихся к нему математических проблем и В. Л. Гинзбургу за полезные замечания к первоначальному варианту обзора.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stewart B.— In: British Association of Advancement of Science. Report of 41st Meeting: Notices and Abstracts.— Edinburgh, 1871, p. 45.
2. Lorentz H. A.— Arch. Néer. Sci. Ex. Nat., 1892, t. 25, p. 363. The Theory of Electrons.— Leipzig: Teubner, 1909, p. 49, 253.
3. Abraham M.— Zs. Phys., 1904, Bd. 14, S. 236; Theorie der Strahlung.— Leipzig: Teubner, 1905, Bd. 2, §§ 13—15.
4. von Laue M.— Ann. d. Phys., 1909, Bd. 28, S. 436.
5. Plank M. Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung.— Leipzig: J. Barth., 1906, § 104—111.
6. Dirac P. A. M.— Proc. Roy. Soc., 1938, v. 167, p. 148.
7. Bhabha H. J.— Proc. Ind. Acad. Sci. Ser. A, 1939, v. 10, p. 324.
8. Bhabha H. J.— Phys. Rev., 1946, v. 70, p. 759.
9. Infeld L., Wallace P. H.— Ibidem, 1940, v. 57, p. 797.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Гостехиздат, 1941, § 75, 76.
11. Eliezer C. J., Mailvaganam A. W.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1945, v. 41, p. 184.
12. Соколов А. А.— Вестн. МГУ, 1947, № 2, с. 33.
13. Иवानенко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля.— М.: Гостехиздат, 1948, §§ 34, 36.
14. Haag R.— Zs. Naturforsch., 1955, Bd. 10a, S. 752.
15. Rohrlich F. Classical Charged Particles.— N.Y.: Addison-Wesley, 1965, § 6-6, 6—8.
16. Tabensky R.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 267.
17. Tirapogui E.— Amer. J. Phys., 1978, v. 46, p. 634.
18. Rowe E. G. P.— Nuovo Cimento. Ser. B, 1983, v. 73, p. 226.
19. Wheeler J. A., Feynman R. P.— Rev. Mod. Phys., 1945, v. 17, p. 157.
20. Havas P.— Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 456.
21. Teitelboim C.— Ibidem Ser. D, 1970, v. 1, p. 1572; 1971, v. 3, p. 297; v. 4, p. 345.
22. Barut A. O.— Ibidem, 1974, v. 10, p. 3335.
23. Rohrlich F.— Ann. Phys. (N.Y.), 1961, v. 13, p. 93.
24. Kalckar J., Ulfbeck O.— Kgl. Danske Vid. Sels., Mat.-Fys. Medd., 1976, v. 39, p. 1.
25. Sorg M.— Zs. Naturforsch., 1976, Bd. 31a, S. 1500.
26. Белоусов А.— ЖЭТФ, 1939, т. 9, с. 658.
27. Bopp F.— Ann. d. Phys., 1942/43, Bd. 42, p. 573.
28. Schönberg M.— Phys. Rev., 1945, v. 67, p. 122.
29. Lopes J. L., Schönberg M.— Ibidem, p. 122.
30. Eliezer C. J.— Rev. Mod. Phys., 1947, v. 19, p. 147; Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1948, v. 194, p. 543.
31. Марков М. А.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 800.
32. Wildermuth K.— Zs. Naturforsch., 1955, Bd. 10a, S. 540.
33. Erber T.— Fortschr. Phys., 1961, Bd. 9, S. 343.
34. Mo T. C., Papas C. H.— Phys. Rev. Ser. D, 1971, v. 4, p. 3566.
35. Bonnor W. B.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1974, v. 337, p. 591.
36. Herrera J. C.— Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 453.
37. Stöckel H.— Fortschr. Phys., 1976, Bd. 24, S. 417.
38. Zin C.— Nuovo Cimento., 1949, v. 6, p. 1.
39. Huschilt J., Baylis W. E.— Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 9, p. 2479.
40. Dirac P. A. M.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1951, v. 209, p. 291.
41. Born M.— Ann. d. Phys., 1909, Bd. 30, S. 1.

42. Von Laue M. Relativitätstheorie.— Braunschweig: Vieweg, 1919, Bd. 1, § 20 (1. Auflage: 1911).
43. Schott G. A. Electromagnetic Radiation.— Cambridge: University Press, 1912, Ch. XI.
44. Schott G. A.— Phil. Mag., 1915, v. 29, p. 49.
45. Pauli W. Relativitätstheorie.— In: Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften, 1921, Bd. 5₂, Nr. 4; перевод: Паули В. Теория относительности.— М.: Наука, 1983, с. 136.
46. Druckey D. L.— Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 543.
47. Bondi H., Gold T.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1953, v. 229, p. 416.
48. Fulton T., Rohrlich F.— Ann. Phys. (N.Y.), 1960, v. 9, p. 499.
49. Leibovitz C., Peres A.— Ibidem, 1963, v. 25, p. 400.
50. Plass G. N.— Rev. Mod. Phys., 1961, v. 33, p. 37.
51. Ковetz A., Таубер Г. Е.— Amer. J. Phys., 1969, v. 37, p. 382.
52. Никишов А. И., Ритус В. И.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 2035.
53. Гинзбург В. Л.— УФН, 1969, т. 98, с. 569.
54. Grandy W. T., Jr.— Nuovo Cimento Ser. A, 1970, v. 65, p. 738.
55. Herrera J. C.— Ibidem Ser. B, 1970, v. 70, p. 12.
56. Соколов А. А., Колесникова М. М.— Вестн. МГУ. Сер. «Физика, астрономия», 1971, т. 11, с. 198.
57. Mitchell P. T., Chivirella J., Lingerfelt J. E.— Plasma Phys., 1971, v. 13, p. 387.
58. Cohn J.— Amer. J. Phys., 1978, v. 46, p. 225.
59. Candelas P., Sciama D. W.— Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 1715.
60. Herrera L.— Nuovo Cimento. Ser. B, 1970, v. 70, p. 12.
61. Milner S. R.— Phil. Mag., 1921, v. 41, p. 405.
62. Boulware D. G.— Ann. Phys. (N.Y.), 1980, v. 124, p. 169.
63. Wessel W.— Zs. Phys., 1934, Bd. 92, S. 407.
64. Steinwedel H.— Fortschr. Phys., 1953, Bd. 1, S. 7.
65. La Théorie du rayonnement et les quanta: Solvay Conf. Rept.— Bruxelles, 1911/Ed. P. Langevin, M. de Broglie.— Paris: Gautier-Villard, 1912, p. 42—46.
66. Page L.— Phys. Rev., 1918, v. 11, p. 376, v. 12, p. 371.
67. Pomeranchuk I.— J. Phys. USSR, 1940, v. 2, p. 65.
68. Loinger A.— Nuovo Cimento, 1949, v. 6, p. 360.
69. Gora E.— Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 1119.
70. Steinwedel H.— Zs. Naturforsch., 1952, Bd. 7a, S. 292.
71. Rohrlich F.— Nuovo Cimento, 1961, v. 21, p. 811.
72. Bradbury T. C.— Ann. Phys. (N.Y.), 1962, v. 19, p. 323.
73. Sokolov A. A., Lysov B. A.— Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 2422.
74. Arzelès H. Rayonnement et dynamique du corpuscule chargé fortement accéléré.— Rabat: Gautier-Villard, 1966, Ch. XII—XIV.
75. Соколов А. А., Жуковский В. Ч., Колесникова М. М., Никитина Н. С., Шипанин О. Е.— Изв. вузов. Сер. «Физика», 1969, № 2, с. 108.
76. Гинзбург В. Л., Сазонов В. И., Сыроватский С. И.— УФН, 1969, т. 94, с. 63.
77. Cloetens J. M., Castillo B., de Escobar E., Merlos R.— Nuovo Cimento. Ser. A, 1969, v. 62, p. 274.
78. Cheng K. S.— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 1656.
79. Sorg M.— Zs. Naturforsch. Ser. a, 1978, Bd. 33, S. 619.
80. Arley N.— Phys. Rev., 1947, v. 71, p. 272.
81. Caldirola P.— Nuovo Cimento, 1948, v. 5, p. 99.
82. Grünbaum A., Janis A. I.— Amer. J. Phys., 1978, v. 46, p. 337.
83. Ezeilo J. O. C.— Quart. J. Math., 1960, v. 11, p. 64.
84. Plass G. N.— Phys. Rev. Lett., 1960, v. 4, p. 248.
85. Hale J. K., Stokes A. P.— J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 70.
86. Huschilt J., Baylis W. E.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 3256.
87. Baylis W. E., Huschilt J.— Ibidem, p. 3262.
88. Baylis W. E., Huschilt J.— Ibidem, p. 3237.
89. Caldirola P.— Nuovo Cimento, 1956, v. 3, Suppl. No. 2, p. 297.
90. Bergman O.— Acta Phys. Austr., 1960, v. 13, p. 33.
91. Kaup D. J.— Phys. Rev., 1966, v. 152, p. 1130.
92. Moniz E. J., Sharp D. H.— Ibidem. Ser. D, 1974, v. 10, p. 1133.
93. Levine H., Moniz E. J., Sharp D. H.— Amer. J. Phys., 1977, v. 45, p. 75.
94. Mass W., Petzold J.— J. Phys. Ser. A, 1978, v. 11, p. 2111.
95. Franca H. M., Margues G. C., da Silva A. J.— Nuovo Cimento. Ser. A, 1978, v. 48, p. 65.
96. Caldirola P.— Riv. Nuovo Cimento, 1979, v. 2, p. 1.
97. Herrera J. C.— Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 384.
98. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1981.
99. Dela Peña L., Jimenez J. L., Montemayor R.— Nuovo Cimento. Ser. B, 1982, v. 69, p. 71.

100. Petzold P.—Ann. d. Phys., 1980, Bd. 37, S. 425; 1981, Bd. 38, S. 451.
101. Heitler W. The Quantum Theory of Radiation.—Oxford: Clarendon Press, 1954, p. 25—38 (1st edition: 1936); перевод: Гайтлер В. Квантовая теория излучения. — М.: ИЛ, 1956, с. 39.
102. Teitelboim C., Villaroel D., van Weert Ch. G.—Riv. Nuovo Cimento, 1980, v. 3, p. 1.
103. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.—УФН, 1965, т. 87, с. 65.
104. Gibson G., Lauer E. L.—Phys. Rev., 1960, v. 117, p. 1188.
105. Гернет Г. Е.—ДАН СССР, 1966, т. 168, с. 63.
106. Shen C. S.—Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 410.
107. Sen Gupta N. D.—Phys. Lett. Ser. A, 1970, v. 32, p. 103.
108. Shen C. S.—Phys. Rev. Ser. D, 1972, v. 4, p. 2736.
109. Lubart N. D.—Ibidem, v. 9, p. 2717, 1974.
110. Herrera J. C.—Ibidem, v. 10, p. 4297.
111. Борисов А. В., Грац Ю. В.—Изв. вузов. Сер. «Физика», 1972, № 3, с. 87.
112. Shen C. S., White D.—Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 455.
113. Багров В. Г., Тернов И. М., Федосов Н. И.—ДАН СССР, 1982, т. 263, с. 1339.
114. Гальцов Д. В., Лосев В. А.—ЯФ, 1973, т. 17, с. 109.
115. Гальцов Д. В., Лосев В. А.—Вестн. МГУ. Сер. «Физика, астрономия», 1975, № 1, с. 37.
116. Pasqual P., Mas L.—Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 9, p. 2482.
117. Соколов А. А.—ЖЭТФ, 1948, т. 18, с. 280.
118. Schwartz M.—Phys. Rev., 1961, v. 123, p. 1903.
119. Anderson J. L., Ryon J. W.—Ibidem, 1969, v. 181, p. 1765.
120. Gunn J. E., Ostriker J. P.—Astrophys. J., 1971, v. 165, p. 523.
121. Grewing M., Heintzmann H.—Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 381.
122. Jaffe J.—Phys. Rev. Ser. D, 1972, v. 5, p. 2909.
123. Barut A. O., Villaroel D.—J. Phys. Ser. A, 1975, v. 8, p. 156.
124. Barut O. A., Villaroel D.—Ibidem, p. 1537.
125. Jackson E. A.—J. Math. Phys., 1984, v. 25, p. 1584.
126. Клепиков Н. П. О силе торможения излучением: Обзор. М.: — ВИНТИ, № 4923-82 деп., 1982.
127. Kates R. E.—Phys. Rev. Ser. D, 1982, v. 25, p. 2487.
128. Kates R. E., Rosenblum A.—Ibidem, p. 2494.
129. Arzimovich L., Romeranchuk I.—J. Phys. USSR, 1945, v. 9, p. 267.
130. Гинзбург В. Л., Озерной Л. М.—Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1966, т. 9, с. 221.
131. Железняков В. В.—Астрон. журн., 1967, т. 44, с. 42.
132. Driver R. D.—Ann. Phys. (N.Y.), 1963, v. 21, p. 122.
133. Driver R. D., Norris M. J.—Ibidem, 1967, v. 42, p. 347.
134. Nava P.—In: Proc. of Intern. School of Physics «Enrico Fermi». Course LXVII/Ed. J. Ehlers.—Bologna: 1979, p. 74.
135. Schwinger J.—Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1912.
136. Schild A.—J. Math. Anal. Appl., 1960, v. 1, p. 127.
137. Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Излучение системы релятивистских частиц. Препринт ИФВЭ 84-57.—Серпухов, 1984.
138. Клепиков Н. П., Шатный А. Н.—ЯФ, 1980, т. 31, с. 841; ТМФ, 1981, т. 46, с. 50.
139. Датта М., Клепиков Н. П.—ТМФ, 1981, т. 48, с. 210.