

533.932

ДИФфуЗИОННЫЕ СКАЧКИ В НЕОДНОРОДНОЙ
СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ С ТОКОМ

А. П. Дмитриев, В. А. Рожанский, Л. Д. Цендин

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	237
2. Многокомпонентная слабоионизованная плазма без магнитного поля	240
а) Трехкомпонентная плазма с неподвижными ионами одного сорта	240
б) Структура диффузионного скачка	241
в) Трехмерный случай	242
г) Трехкомпонентная плазма с постоянными подвижностями	243
д) Образование скачков в газоразрядной плазме	245
3. Эволюция разрыва в начальных условиях	247
4. Слабоионизованная плазма в магнитном поле	248
а) Одномерный случай	248
б) Скачки в холловском направлении	251
в) Влияние ионизации и рекомбинации на формирование скачков	253
5. Частично и полностью ионизованная плазма	254
а) Частичноионизованная плазма в магнитном поле	254
б) Полностью ионизованная плазма без магнитного поля	254
в) Полностью ионизованная плазма в магнитном поле	255
6. Диффузионные скачки в полупроводниковой плазме	257
а) Эволюция профиля при разогреве носителей в полупроводнике с полностью ионизованными донорами	257
б) Стационарные профили со скачками	258
в) Скачки в полупроводнике с захватом носителей на ловушки	262
г) Структура скачка в образце с ловушками. Релаксационная зона	263
7. Заключение	264
Список литературы	264

1. ВВЕДЕНИЕ

В различных областях физики возникают задачи о форме и эволюции пространственно-неоднородных распределений концентрации заряженных частиц в присутствии тока, протекающего через систему. Такие задачи весьма актуальны для физики полупроводников, газового разряда, электролитов. Сходные проблемы возникают при анализе движения неоднородностей ионосферной и полностью ионизованной плазмы.

Если ограничиться изотермическим случаем, то эволюция неоднородной плазмы определяется подвижностью и диффузией частиц и описывается, как правило, системой уравнений

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma_{\alpha}^{(t)} = I_{\alpha} - R_{\alpha}, \quad (1.1)$$

$$\Gamma_{\alpha}^{(t)} = \frac{Z_{\alpha}}{|Z_{\alpha}|} \hat{b}_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{E} - \hat{D}_{\alpha} \nabla n_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k; \quad (1.2)$$

здесь Z_{α} — заряд частиц сорта α , D_{α} , \hat{b}_{α} — коэффициенты диффузии и подвижности (в магнитном поле или в анизотропной среде являющиеся тензора-

ми). Будем считать, что выполняются соотношения Эйнштейна

$$\hat{D}_\alpha = \frac{T_\alpha}{e |Z_\alpha|} \hat{b}_\alpha. \quad (1.3)$$

Члены I_α , R_α соответствуют генерации и рекомбинации частиц. Условия квазинейтральности

$$\sum_\alpha Z_\alpha n_\alpha = 0, \quad \sum_\alpha Z_\alpha (I_\alpha - R_\alpha) = 0 \quad (1.4)$$

определяют самосогласованное электрическое поле в системе.

В случае так называемой простой плазмы без магнитного поля, содержащей только носители двух сортов, подвижности которых не зависят ни от концентрации, ни от поля, ни от направления, система (1.1)–(1.4) сводится к известному уравнению амбиполярной диффузии¹

$$-\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} - D_a \Delta n_{1,2} = I_{1,2} - R_{1,2}, \quad (1.5)$$

где $D_a = (b_1 D_2 + b_2 D_1)/(b_1 + b_2)$ — коэффициент амбиполярной диффузии. Это линейное уравнение не содержит электрического поля, так что эволюция неоднородности плазмы не зависит от тока. Такая ситуация является, однако, исключительной. Даже в отсутствие тока в системе, содержащей больше двух типов носителей с постоянными подвижностями (например, электроны и ионы двух сортов в слабоионизованной плазме; электроны, дырки и неподвижные заряженные центры в полупроводнике), систему (1.1)–(1.4) уже нельзя свести к уравнению амбиполярной диффузии. В частности, полевые потоки могут на определенных стадиях эволюции приводить к собиранию некоторых компонент в максимумах их концентрации. Так, например, в газовом разряде амбиполярное поле удерживает электроны в плазме. Так как обычно $T_e \gg T_i$, то в электроотрицательных газах отрицательные ионы втягиваются этим полем в плазму, образуя резко неоднородные оторванные от стенок профили². В общем случае диффузионная эволюция неоднородностей в многокомпонентной плазме является достаточно сложным процессом, зависящим как от формы начальной неоднородности, так и от степени нелинейности, т. е. от относительного перепада концентраций компонент. Ситуация упрощается в линейном случае, когда возмущение концентрации мало по сравнению с однородным стационарным фоном. Общее решение линеаризованной системы (1.1)–(1.4) состоит из суммы $(k-1)$ диффузионных мод $\omega_q = \omega_q(k^2)$, каждая из которых зависит, вообще говоря, от коэффициентов диффузии всех компонент и от генерационно-рекомбинационных членов в (1.1). Переход к амбиполярной диффузии исследован в^{3,4} на примере трехкомпонентной плазмы, в которой подвижности положительных ионов двух сортов совпадают. Оказалось, что линейность уравнения (1.5) является следствием полной компенсации нескольких нелинейных эффектов.

Протекание же достаточно сильного тока в общем случае радикально меняет характер эволюции неоднородности. Можно условно выделить две группы эффектов. Во-первых, это явления, связанные с изменением скоростей генерационно-рекомбинационных процессов в электрическом поле, обусловленном неоднородностью плазмы. Сюда относятся, например, страты^{5,6}, ряд неустойчивостей в газовом разряде^{7,8}, многие приэлектродные явления и т.д. Мы не будем касаться здесь этих сложных и интересных проблем и ограничимся анализом влияния самосогласованного электрического поля неоднородности на ее эволюцию, обусловленного изменением диффузионных и полевых потоков (1.2). Характерным свойством получающихся при этом профилей концентрации является укрупнение неоднородностей — возникновение областей, в которых градиенты концентрации компонент могут значительно превышать начальные значения. Причина этого явления состоит в следующем. Для достаточно плавных неоднородностей, характерный масштаб которых вдоль тока $L \gg l_T = T/eE$, диффузионными членами в пото-

ках (1.2) можно пренебречь. Если генерация и рекомбинация несущественны, то в этом приближении (часто называемом дрейфовым⁹⁾ линеаризованная система (1.1)—(1.4) описывает распространение ($k - 1$) различных типов незатухающих волн *). Нелинейность волн конечной амплитуды проявляется прежде всего в том, что точки профиля волны движутся с различными скоростями. В результате волна опрокидывается — профиль концентрации в дрейфовом приближении становится многозначным. Для получения физически осмысленных решений необходимо учесть диффузионные составляющие потоков (1.2). Диффузия останавливает опрокидывание волн, возникают узкие (шириной $\sim l_T$) области, в которых параметры плазмы резко меняются. Для волн небольшой амплитуды задачу можно свести к уравнению Бюргерса¹³. Эти диффузионные скачки аналогичны ударным волнам в обычной газодинамике¹³⁻¹⁴. Так же, как и там, их можно рассматривать как разрывы в дрейфовых решениях, причем положение и скорость движения этих разрывов можно найти, не исследуя процессов диффузии. Диффузия определит лишь профиль концентрации внутри скачка. Влияние генерации и рекомбинации в ряде случаев удается свести к уширению скачка и к усложнению его структуры — формированию релаксационной зоны, так же, как при распространении ударной волны в релаксирующей газе^{14,15}.

Впервые на явление образования скачков указали Кольрауш и Вебер^{16,17} применительно к электролитам. Они показали, что в полностью диссоциированном электролите, содержащем ионы трех сортов, протекание тока приводит к возникновению разрывов в дрейфовых решениях. Если подвижность ионов зависит от их концентрации, то такие разрывы должны образовываться даже в растворе с ионами двух сортов. Лауэ¹⁸ обобщил полученные в^{16,17} результаты на случай переменной степени диссоциации. Основное внимание в этих работах и в экспериментах¹⁹⁻²¹ уделялось задаче об эволюции произвольного разрыва в начальных условиях. Было показано¹⁶, что в зависимости от направления тока в электролите с ионами двух сортов, подвижность которых зависит от концентрации, граница между растворами с разной концентрацией может двигаться, оставаясь резкой, или размываться. В растворе же с тремя сортами ионов в процессе эволюции резкая граница может расщепиться на два разрыва — движущийся и покоящийся¹⁷. При обратном направлении тока образуется плавный профиль концентрации и один покоящийся разрыв. Структура слабого скачка исследовалась в²⁰, где было получено выражение, аналогичное формуле для профиля слабой ударной волны¹³⁻¹⁵, и выполнены измерения, хорошо согласующиеся с теорией.

Для плазмы, по-видимому, впервые на образование диффузионных скачков указал А. В. Гуревич²² на примере частично-ионизованной плазмы в магнитном поле. Нелинейность системы (1.1)—(1.4), приводящая к опрокидыванию дрейфовых профилей, была обусловлена зависимостью коэффициентов переноса от концентрации заряженных частиц из-за кулоновских столкновений.

В полупроводниках с горячими носителями наблюдались резко неоднородные профили концентрации и поля^{23,24}. В²⁵⁻²⁷ было указано, что они представляют собой покоящиеся диффузионные скачки, возникающие из-за зависимости подвижности электронов от напряженности электрического поля. В²⁸ при численном моделировании эволюции неоднородностей ионосферной плазмы были обнаружены области, в которых градиент концентрации резко возрастал. Эти области также можно интерпретировать как диффузионные скачки^{29,30}. В работах^{30,31} было показано, что в ряде случаев генерационно-рекомбинационные члены в (1.1) приводят к уширению скачков и формированию релаксационной зоны.

*) В случае, когда $k = 3$ и одна из подвижностей равна нулю, скорость соответствующих сигналов называется в физике полупроводников скоростью амбиполярного дрейфа¹⁰. Измерение ее широко используется для исследования переноса в полупроводниках^{11,12}.

Так как уравнения (1.1)–(1.4) имеют широкую область применимости, то образование таких диффузионных скачков является достаточно общим свойством плазмы с током. Такие факторы, как многокомпонентность плазмы, кулоновские столкновения, зависимость подвижности от электрического поля, анизотропия, создаваемая магнитным полем, и неоднородность плазмы поперек поля, совместно с условием квазинейтральности приводят к нелинейности уравнений и к опрокидыванию дрейфовых профилей. Поэтому соответствующие резко неоднородные распределения концентрации заряженных частиц и напряженности электрического поля возникают в самых разнообразных ситуациях при эволюции неоднородностей газоразрядной, ионосферной и полупроводниковой плазмы, а также в электролитах и полностью ионизованной плазме.

Укручение профилей концентрации в плазме с током может явиться, особенно в магнитном поле, причиной развития многочисленных неустойчивостей. Явления эти сложны и малоизучены; в первую очередь они должны проявиться как уширение и турбулизация самого скачка. За исключением случаев, когда имеются прямые экспериментальные свидетельства, мы не будем здесь касаться этих вопросов.

В обзоре рассмотрено несколько примеров, на которых проиллюстрированы основные характерные черты этого явления.

2. МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ СЛАБОИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим плазму, содержащую электроны и положительные ионы двух сортов. Положив $I_\alpha = R_\alpha = 0$, b_α постоянными, пренебрегая диффузией и используя квазинейтральность

$$n_e = n_1 + n_2, \quad (2.1)$$

в одномерном случае получим

$$E = E_0 \frac{(b_1 + b_e) n_1^{(0)} + (b_2 + b_e) n_2^{(0)}}{(b_1 + b_e) n_1 + (b_2 + b_e) n_2} = \frac{j/e}{(b_1 + b_e) n_1 + (b_2 + b_e) n_2}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + b_\alpha E_0 [(b_1 + b_e) n_1^{(0)} + (b_2 + b_e) n_2^{(0)}] \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x} \frac{n_\alpha}{(b_1 + b_e) n_1 + (b_2 + b_e) n_2} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где E_0 , $n_\alpha^{(0)}$ — поле и концентрации компонент однородной плазмы на бесконечности *).

а) Трехкомпонентная плазма с неподвижными ионами одного сорта

Наиболее прост случай $b_e \gg b_1$, $b_2 = 0$ **). При этом $n_2 = n_2^{(0)} = \text{const}$, так что из (2.3) имеем

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + V(n_1) \frac{\partial n_1}{\partial x} = 0, \quad (2.4)$$

*) Если протекающий через плазму ток j зависит от времени, то, введя вместо времени переменную

$$q = \int_0^t j(t') dt'$$

— прошедший через плазму заряд^{18,17}, можно свести уравнение к виду (2.3).

**) Этот случай реализуется, например, в полупроводнике n -типа с полностью ионизованными донорами, концентрация которых равна $n_2^{(0)}$.

где скорость движения точек профиля $V(n_1)$ — нелинейный аналог скорости амбиполярного дрейфа — связана с потоком в дрейфовом приближении $\Gamma_1(n_1)$:

$$V(n_1) = \frac{d\Gamma_1(n_1)}{dn_1} = \frac{j b_1 n_2^{(0)}}{e b_e (n_1 + n_2^{(0)})^2}. \quad (2.5)$$

Решение (2.4) имеет вид¹³

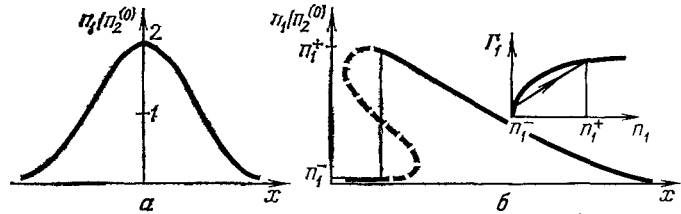
$$n_1(x, t) = n_{10}(x - V(n_1)t), \quad (2.6)$$

где $n_{10}(x)$ — начальный профиль концентрации ионов сорта 1.

Рассмотрим эволюцию простого гауссова начального профиля $n_{10}(x, 0) = A n_2^{(0)} \exp(-x^2/a^2)$ (рис. 1, а). Из (2.5) видно, что $V(n_1)$ падает с ростом n_1 ,

Рис. 1. а — Начальный профиль концентрации n_1 ; б — профиль n_1 при $t > t_c$, $A = 2$.

На вставке в рис. б — график потока $\Gamma_1(n_1)$



т. е. точки, соответствующие большей концентрации, движутся медленнее. В результате передний фронт профиля выполаживается, задний, напротив, укручается, а затем становится многозначным — волна опрокидывается. Так как при опрокидывании резко возрастает градиент концентрации, то в узкой области становится существенна диффузия. Момент возникновения скачка можно определить согласно¹³⁻¹⁵

$$t_c = \min \left[\frac{dV(n_1(x))}{dx} \right]^{-1} \quad (2.7)$$

— как момент, в который начинают пересекаться характеристики уравнения (2.4) в плоскости (t, x) . Положение скачка и концентрации n_1^- и n_1^+ слева и справа от него легко найти из условия сохранения числа частиц — площадь под кривой $n_1(x)$ со скачком должна быть равна площади под трехзначным дрейфовым решением (рис. 1, б); $n_1^+ > n_1^-$. Скорость скачка W определяется из условия сохранения потока в системе координат, связанной со скачком:

$$W = \frac{\Gamma_1(n_1^+) - \Gamma_1(n_1^-)}{n_1^+ - n_1^-}. \quad (2.8)$$

б) Структура диффузионного скачка

С учетом диффузии вместо (2.4) имеем

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[D_a(n_1) \frac{\partial n_1}{\partial x} \right] = 0, \quad (2.9)$$

где $D_a \approx D_1 (2n_1 + n_2^{(0)}) / (n_1 + n_2^{(0)})$ — коэффициент амбиполярной диффузии при $b_e \gg b_1$. Переходя в систему координат, движущуюся со скоростью скачка W и пренебрегая медленным изменением W со временем, получим

$$-W \frac{dn_1}{dX} + \frac{d\Gamma_1}{dX} - \frac{d}{dX} \left[D_a(n_1) \frac{dn_1}{dX} \right] = 0, \quad (2.10)$$

где $X = x - Wt$. Это уравнение имеет решение, асимптотически стремящееся к n_1^\pm при $X \rightarrow \pm \infty$, если W определяется соотношением (2.8) и

выполнено условие $n_1^+ > n_1^-$. Интегрируя (2.10), получим уравнение

$$\frac{dn_1}{dX} = \frac{j}{b_e T} \frac{(n_1^+ - n_1)(n_1 - n_1^-) n_2^{(0)}}{(2n_1 + n_2^{(0)})(n_1^+ + n_2^{(0)})(n_1^- + n_2^{(0)})}, \quad (2.11)$$

определяющее профиль концентрации в скачке. Пространственный масштаб сильного скачка ($n_1^+ - n_1^- \gg n_2^{(0)}$) равен $\sqrt{l_T^+ l_T^-}$ (l_T^\pm — значения $l_T = T/eE$ слева и справа от скачка), а перепад потенциала в нем $\sim T/e$. Для слабого скачка ($\Delta n_1 = n_1^+ - n_1^- \ll n_2^{(0)}$) из (2.11) следует

$$n_1(X) = \frac{n_1^+ - n_1^-}{2} \operatorname{th} \frac{X(n_1^+ - n_1^-) n_2^{(0)}}{2l_T(n_1^+ + n_2^{(0)})(2n_1^+ + n_2^{(0)})} + \frac{1}{2}(n_1^+ + n_1^-), \quad (2.12)$$

ширина его пропорциональна $(\Delta n_1)^{-1}$ ¹³⁻¹⁵.

Если концентрация плазмы достаточно мала, то дебаевский радиус r_d становится больше, чем l_T . При этом в скачке нарушается квазинейтральность и ширина его становится порядка $l_0 = r_d^2/l_T \gg r_d, l_T$. Перепад потенциала в нем значительно превышает T/e . Такой скачок можно рассматривать как аналог двойного слоя в плазме со столкновениями ⁵⁵. При этом, так же как и в газодинамике, эволюция дрейфового профиля (2.6), положение и скорость движения скачков (2.8) не зависят от их структуры. Везде ниже будем считать l_T (или l_0) малыми по сравнению с характерными масштабами задачи. Таким образом, если начальный профиль концентрации $n_{10}(x)$ имеет разрыв, то при $n_1^+ > n_1^-$ разрыв будет двигаться со скоростью (2.8), не расплываясь из-за диффузии. В обратном же случае характеристики уравнения (2.4) на плоскости (x, t) расходятся веером ¹³⁻¹⁵, так что разрыв с $n_1^+ < n_1^-$ исчезает. Принято говорить, что такой разрыв не удовлетворяет условию эволюционности ^{32,33}. При этом удобно пользоваться графиком дрейфового потока $\Gamma_1(n_1)$ (см. рис. 1, б), который в нашем случае играет такую же роль, как известная адиабата Гюгонио в газодинамике. Направленный отрезок $[n_1^- \rightarrow n_1^+]$ на графике $\Gamma_1(n_1)$ соответствует диффузионному скачку. Тангенс угла его наклона равен, согласно (2.8), скорости движения скачка. Стрелка указывает, что концентрация в скачке, удовлетворяющем условию эволюционности, должна возрастать. Действительно, полный поток в скачке меньше дрейфового, т. е. диффузионный поток должен быть отрицателен, $n_1^- < n_1^+$. В общем случае, согласно ^{14,32}, скачок устойчив, если скорости малых сигналов с обеих сторон от него направлены в скачок, т. е. Γ

$$V(n_1^-) > W_i > V(n_1^+). \quad (2.13)$$

Вследствие выпуклости графика $\Gamma_1(n_1)$ отсюда следует $n_1^- < n_1^+$ *).

Эволюция сложного начального профиля может привести к формированию нескольких разрывов, их слиянию и т. п. Асимптотически при $|n_1/n_1^{(0)} - 1| \ll 1$ произвольное возмущение переходит, вообще говоря, в треугольную волну с диффузионным скачком на заднем фронте при $n_1 > n_1^{(0)}$ и на переднем — при $n_1 < n_1^{(0)}$ ¹³.

в) Трехмерный случай

Вместо (2.4) имеем

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{b_1 n_1 \mathbf{j}}{e b_e (n_1 + n_2^{(0)})} = 0, \quad (2.14)$$

где плотность тока $\mathbf{j} = e b_e (n_1 + n_2^{(0)}) \mathbf{E}$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.15)$$

*) Строгий математический анализ интересующего нас типа квазилинейных уравнений с малым параметром при старшей производной приведен в ³³.

Введем координаты ζ , ξ , нумерующие линии тока, и координату λ вдоль тока. Используя (2.15), вместо (2.14) имеем

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{b_1 j(\zeta, \xi, \lambda)}{eb_e} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{n_1}{n_1 + n_2^{(0)}} = 0. \quad (2.16)$$

Введя

$$s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{j_0}{j(\lambda')} d\lambda'$$

(j_0 — плотность тока на границе), получим уравнение, совпадающее с (2.4):

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + V(n_1) \frac{\partial n_1}{\partial s} = 0,$$

где

$$V = \frac{j_0(\zeta, \xi) b_1 n_2^{(0)}}{eb_e (n_1 + n_2^{(0)})^2}.$$

Таким образом, опрокидывание профиля происходит вдоль линий тока.

Для сферически-симметричного случая, например, имеем

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{b_1 n_2^{(0)} I}{eb_e (n_1 + n_2^{(0)})^2} \frac{\partial n_1}{\partial \Omega} = 0,$$

где Ω — объем, а I — полный ток. Сохранение числа частиц приводит к праву площадей в координатах n_1 , Ω .

г) Трехкомпонентная плазма с постоянными подвижностями

Рассмотрим теперь эволюцию профиля плазмы, состоящей из электронов и нескольких сортов ионов с постоянными подвижностями b_e и b_1, \dots, b_{k-1} . Полагая $I_\alpha = R_\alpha = 0$, пренебрегая диффузией и используя условие квазинейтральности $n_e = \sum_{\alpha=1}^{k-1} n_\alpha$, из (1.1)–(1.2) получим

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + b_\alpha E_0 \sum_{\beta=1}^{k-1} n_\beta^{(0)} (b_\beta + b_e) \frac{\partial}{\partial x} \frac{n_\alpha}{\sum_{\beta=1}^{k-1} (b_\beta + b_e) n_\beta} = 0, \quad (2.17)$$

$$\alpha = 1, \dots, k-1,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1} n_\alpha \frac{b_\alpha + b_e}{b_\alpha b_e} = \psi(x). \quad (2.18)$$

Функция $\psi(x)$ определяется начальным профилем и не зависит от времени. Согласно системе (2.17)–(2.18) произвольное начальное возмущение должно разделиться на $(k-2)$ распространяющихся сигналов и один покоящийся, соответствующий возмущению $\psi(x)$. Вводя безразмерные концентрации

$$\tilde{n}_\alpha = \frac{n_\alpha (b_\alpha + b_e)}{\psi(x) b_\alpha b_e} \quad (2.19)$$

и координату

$$s = \int_0^x \frac{b_e^2 \psi(x') dx'}{\sum_{\alpha=1}^{k-1} n_\alpha^{(0)} (b_\alpha + b_e)}, \quad (2.20)$$

вместо (2.17)–(2.18) будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{n}_\alpha}{\partial t} + b_\alpha E_0 \frac{\partial}{\partial s} \frac{\tilde{n}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{k-1} \tilde{n}_\alpha q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k-1, \quad (2.21)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1} \tilde{n}_\alpha = 1, \quad q_\alpha = \frac{b_\alpha}{b_e}. \quad (2.22)$$

В случае $k = 3$ система (2.21)–(2.22) сводится к уравнению, аналогичному (2.4):

$$\frac{\partial \tilde{n}_1}{\partial t} + \tilde{V}(\tilde{n}_1) \frac{\partial \tilde{n}_1}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{n}_1}{\partial t} + \frac{b_1 E_0 q_2 \partial \tilde{n}_1 / \partial s}{[\tilde{n}_1 (q_1 - q_2) + q_1]^2} = 0. \quad (2.23)$$

Рассмотрим эволюцию возмущения плазмы. Если начальные профили $n_{10}(x)$ и $n_{20}(x)$ подобны:

$$\frac{n_{10}(x)}{n_{20}(x)} = \frac{n_1^{(0)}}{n_2^{(0)}}, \quad (2.24)$$

то, как легко видеть из (2.18) и (2.19), $\tilde{n}_{\alpha 0}$ не зависят от x и равны своим равновесным значениям $\tilde{n}_\alpha^{(0)}$. Следовательно, в этом случае возмущение в дрейфовом приближении не эволюционирует. Учет диффузии приводит к медленному расплыванию начального профиля.

Напротив, когда $\psi(x) = \psi^{(0)}$,

$$\frac{n_1(x, t) - n_1^{(0)}}{n_2(x, t) - n_2^{(0)}} = \frac{n_{10}(x) - n_1^{(0)}}{n_{20}(x) - n_2^{(0)}} = -\frac{b_1}{b_2} \frac{b_2 + b_e}{b_1 + b_e}; \quad (2.25)$$

$\tilde{n}_\alpha \sim n_\alpha$, так что согласно (2.21) такое возмущение полностью выносится полем из области первоначальной локализации L и формируется профиль с диффузионным скачком. Произвольный начальный профиль с масштабом L с течением времени распадается на движущуюся и неподвижную части. При $b_e \gg b_1, b_2$

$$n_\alpha(x, t) = \bar{n}_\alpha(x) + \bar{n}_\alpha(x, t) + n_\alpha^{(0)}, \quad (2.26)$$

где неподвижный профиль есть

$$\bar{n}_\alpha(x) = b_\alpha \psi(x) \tilde{n}_\alpha^{(0)}, \quad (2.27)$$

а движущийся профиль

$$\bar{\bar{n}}_\alpha(x, t) = b_\alpha \psi(x) [\tilde{n}_\alpha(x, t) - \tilde{n}_\alpha^{(0)}] + n_\alpha^{(0)}; \quad (2.28)$$

здесь $\tilde{n}_\alpha(x, t)$ удовлетворяет (2.23) и перемещается со скоростью $\tilde{V}(\tilde{n}_\alpha)$. Из (2.23) видно, что при $b_1 > b_2$ опрокидывается задний фронт профиля $\bar{n}_\alpha(x, t)$, а при $b_2 > b_1$ — передний.

Остановимся на случае, когда $n_{20}(x) = n_2^{(0)}$, а $n_{10}(x) > n_1^{(0)}$. Из (2.18)–(2.27) получим

$$\frac{\bar{n}_2(x) - n_2^{(0)}}{n_{10}(x) - n_1^{(0)}} = \left(\frac{n_1^{(0)}}{n_2^{(0)}} + \frac{b_1}{b_2} \right)^{-1}. \quad (2.29)$$

Отсюда видно, что при

$$\frac{n_1^{(0)}}{n_2^{(0)}} + \frac{b_1}{b_2} \ll 1 \quad (2.30)$$

возмущение ионов второго типа, возникшее в области L в процессе эволюции, значительно превосходит начальное возмущение ионов первого типа.

Для $\bar{n}_\alpha(x, t)$ имеем

$$\bar{n}_1(x, t) = n_1^{(0)} \left(1 + \frac{b_1 n_2^{(0)}}{b_2 n_1^{(0)}} \right) [\tilde{n}_1(x, t) - \tilde{n}_1^{(0)}] + n_1^{(0)} > n_1^{(0)}, \quad (2.31)$$

$$\bar{n}_2(x, t) = n_2^{(0)} \left(1 + \frac{b_2 n_1^{(0)}}{b_1 n_2^{(0)}} \right) [(1 - \tilde{n}_1(x, t)) - \tilde{n}_2^{(0)}] + n_2^{(0)} < n_2^{(0)}. \quad (2.32)$$

Если на бесконечности присутствуют только ионы 2, то вне области начального возмущения

$$\bar{n}_1 = 0, \quad \bar{n}_2 = n_2^{(0)} \left(1 - \frac{\bar{n}_1 b_2}{n_2^{(0)} b_1} \right) > 0. \quad (2.33)$$

Поэтому \bar{n}_1 меньше, чем $b_1 n_2^{(0)} / b_2$. Таким образом, при сильном начальном возмущении, когда максимальное значение n_{10} превышает $b_1 n_2^{(0)} / b_2$, профиль концентрации n_1 длительное время $t \leq t_1 = n_{10} L / b_1 n_2^{(0)} E_0$ в основном неизменен. В направлении же поля вытекает рукав плазмы, в котором ионы 2 практически отсутствуют, а $n_1 \sim n_2^{(0)} b_1 / b_2$. При $t > t_1$ в области начального возмущения остается амбиполярный пик, содержащий только ионы 2.

В плазме с тремя сортами положительных ионов получаем из (2.18) — (2.22) для $b_e \gg b_{1,2,3}$, исключая \tilde{n}_2 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\tilde{n}_1 b_1 E_0}{(q_1 - q_2) \tilde{n}_1 + (q_3 - q_2) \tilde{n}_3 + q_2} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{n}_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\tilde{n}_3 b_3 E_0}{(q_1 - q_2) \tilde{n}_1 + (q_3 - q_2) \tilde{n}_3 + q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Система (2.34) описывает распространение двух типов сигналов. Скорости их различны, так что через время $\sim L / b E_0$ они, вообще говоря, разделяются, и их можно рассматривать независимо. Если третий сорт ионов присутствует в качестве малой добавки, то первая мода практически совпадает с решением (2.23). Для второй же моды нелинейность мала и скорость распространения сигнала близка к $V_0 = b_3 E_0$. При этом малое возмущение \tilde{n}_1 можно получить из первого уравнения, разлагая второй член в ряд и полагая скорость распространения равной V_0 .

д) Образование скачков в газоразрядной плазме

В реальной газоразрядной плазме также возможны ситуации, которые можно описывать с помощью разделения профиля на дрейфовые и резкие участки. Дело осложняется тем, что очень важную роль играют процессы ионизации и рекомбинации заряженных частиц и процессы в приэлектродных областях, механизмы которых достаточно сложны и, как правило, плохо известны.

В качестве первого примера рассмотрим эволюцию неоднородности в разряде постоянного тока с легкоионизируемой присадкой. Считая присадку полностью ионизованной, имеем для концентрации присадки n_1 в дрейфовом приближении

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} n_1 E = 0. \quad (2.35)$$

Для ионов основного газа и электронов можно записать

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} + b_2 \frac{\partial}{\partial x} n_2 E = Z(E) (n_1 + n_2) - \frac{n_2}{\tau}. \quad (2.36)$$

$$j = e (n_1 + n_2) b_e(E) E; \quad (2.37)$$

здесь τ — время жизни относительно рекомбинации; вероятность ионизации Z и подвижность электронов b_e являются, вообще говоря, функциями электрон-

ной температуры T_e . Если масштабы превосходят длину релаксации по энергии ($\sim T_e/eE$), то связь между T_e и E определяется локальным балансом Джоулева тепловыделения и теплоотвода³⁴.

При $L \gg b_2 E \tau$, l_T концентрацию ионов основного газа можно найти, приравняв нулю правую часть (2.36). Подставив в (2.35) E из (2.37), получим нелинейное уравнение для концентрации ионов присадки. Скорость ионизации $Z(E)$ является сильной (как правило, экспоненциальной) функцией поля: $Z = \tau^{-1} \exp[-\alpha(n_1 + n_2)/n_2^{(0)}]$, где $\alpha \gg 1$, $n_2^{(0)}$, E_0 — концентрация ионов и поле в разряде без присадки. При $n_1 \ll n_2^{(0)}$, $b_e = \text{const}$ (такое приближение для b_e применимо, например, для случая, когда основной газ представляет собой гелий или водород) поток ионов присадки есть

$$\Gamma_1(n_1) = \frac{\alpha b_1 E_0 n_1}{\alpha - \ln[1 - (n_1/n_2^{(0)})]} \quad (2.38)$$

При больших же n_1 поток $\Gamma_1 = b_1 j / (e b_e)$ постоянен. Зависимость $\Gamma_1(n_1)$ изображена на рис. 2 штриховой линией. При этом опрокидывается задний фронт

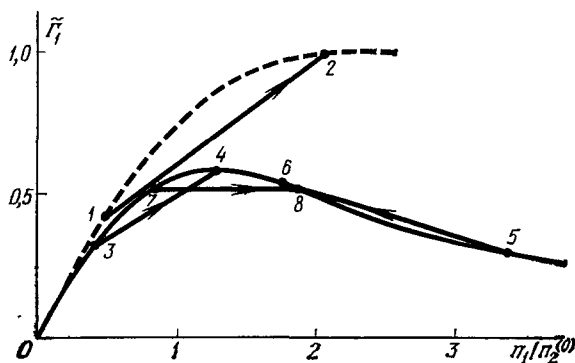


Рис. 2. Поток ионов полностью ионизованной присадки в дрейфовом приближении в ед. $b_1 E_0 n_2^{(0)}$ ($\alpha = 4$)

профиля концентрации присадки — образуется скачок $1 \rightarrow 2$, в котором меняются n_1 , n_2 , E , T_e . Если же b_e зависит от поля, то ситуация определяется видом этой зависимости. График $\Gamma_1(n_1)$ при $b_e \sim E^{-1/2}$ изображен сплошной линией на рис. 2. При этом возможны как движущиеся по полю, $3 \rightarrow 4$, и против поля, $5 \rightarrow 6$, так и неподвижные, $7 \rightarrow 8$, скачки.

Рассмотрим теперь одномерный разряд в потоке газа³⁵. Будем считать, что b_e падает с ростом поля. Тогда скорость амбиполярного дрейфа отлична от нуля даже в простой плазме и равна^{12,35}

$$V(n) = \frac{d\Gamma}{dn} = \frac{b_{ij}}{e} \frac{d}{dn} b_e^{-1}(E) + U, \quad (2.39)$$

где U — скорость потока; связь между E и n задается сохранением тока: $eEnb_e(E) = j$. Первое слагаемое в (2.39) отрицательно — направлено от катода. График потока $\Gamma(n)$ для разных знаков U изображен на рис. 3. При $U < 0$ (кривая а) могут возникать только движущиеся к аноду скачки типа $1 \rightarrow 2$. Если же $U > 0$ (кривая б), то в зависимости от начальных и граничных условий возможны как движущиеся, так и неподвижные скачки.

В стационарном случае для концентрации плазмы имеем

$$V(n) \frac{dn}{dx} = Z_1(E)[n - \beta n^2], \quad (2.40)$$

где β — коэффициент [рекомбинации, L — длина разрядного промежутка. Если $U < 0$, то суммарная скорость дрейфа плазмы (2.39) направлена к аноду. Наложив граничное условие на катоде $n(L) = \infty$ ³⁶, получим, что, за исклю-

чением тонких приэлектродных областей, профиль концентрации есть

$$L - x = \int_n^{\infty} \frac{|V(n)| dn}{Z(n)n - \beta n^2}; \quad (2.41)$$

при достаточно большом L он описывает плавный спад концентрации от катода до равновесного значения n_0 , характерного для положительного столба. Рассчитанные таким образом профили хорошо согласуются с экспериментом³⁶. Если же $U > 0$, то при $n_0 < n_1$ (n_1 соответствует минимуму $\Gamma(n)$) граничному условию $n(0) = \infty$ удовлетворяет решение, состоящее из плавного участка с высокой концентрацией у анода:

$$x = \int_{n_2}^{\infty} \frac{V(n) dn}{\beta n^2 - Z(n)n}.$$

где $\Gamma(n_2) = \Gamma(n_0)$, и скачка $3 \rightarrow 4$. В случае же $n_0 > n_1$ решение со скачком удовлетворяет условию $n(L) = 0$. К сожалению, вопрос о граничных условиях в газоразрядной плазме весьма малоисследован. Неясно, в частности, какие характеристики электродов отвечают тем или иным граничным условиям для наших укороченных уравнений. Формирование резко неоднородного профиля поля у анода наблюдалось в³⁵. Осложняющим обстоятельством явилось то, что в результате шнурования разряд у анода оказывался поперечно-неоднородным. Концентрация в шнурах была значительно выше, чем в столбе, но одновременно возрастало и электрическое поле. По-видимому, обеспечив достаточно интенсивную внешнюю ионизацию в прианодной области ($n(0) = \infty$), можно реализовать описанный поперечно-однородный режим со скачком.

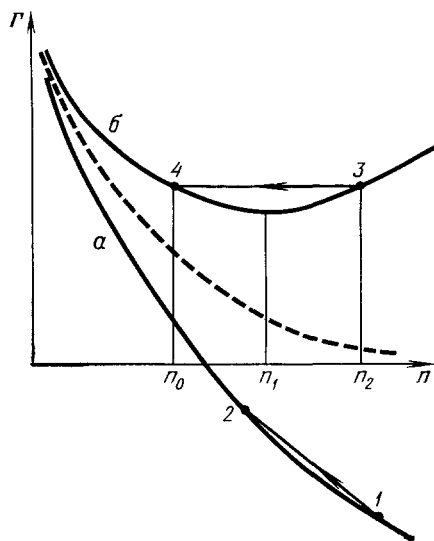


Рис. 3. Дрейфовый поток плазмы в разряде с потоком газа

a — Поток от катода к аноду ($U < 0$) b — поток к катоду Штриховая кривая — $U = 0$
Равновесная концентрация $n_0 = Z(n_0)/\beta$

3. ЭВОЛЮЦИЯ РАЗРЫВА В НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

В многокомпонентной плазме произвольный начальный разрыв, вообще говоря, расщепляется¹⁷. Так, например, в плазме с двумя сортами положительных ионов и постоянными подвижностями произвольный разрыв при $x = 0$, $t = 0$ в концентрациях n_1 и n_2 соответствует разрыву в \tilde{n}_1 и ψ (2.18), (2.21). Согласно (2.23) разрыв в \tilde{n}_1 , удовлетворяющий условию эволюционности, движется со скоростью $\tilde{V}(\tilde{n}_1)$ и расплывается в обратном случае. Уравнение для ψ с учетом диффузии имеет, согласно (1.1), вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D_2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \left(1 + \tilde{n}_1 \frac{D_1 - D_2}{D_2} \right), \quad (3.1)$$

где $T_{e,i}$ — температуры электронов и ионов соответственно. Величина $\tilde{n}_1 < 1$ и вблизи $x = 0$ при $t \neq 0$, согласно (2.23), меняется плавно. Поэтому скобку $(1 + \tilde{n}_1 (D_1 - D_2)/D_2)$ можно вынести из-под производной. При этом (3.1) сводится к уравнению диффузии с плавно зависящим от времени коэффициентом.

Эволюция разрывов в начальных условиях наблюдалась в²⁰ в растворах бинарных электролитов. Если подвижности ионов в полностью диссо-

цированном растворе зависят от концентрации, то имеем ^{16,17}

$$\frac{e}{j} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_1}{b_2 + b_1} \right) \right] = \frac{e}{j} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \quad n_1 = n_2 = n. \quad (3.2)$$

Отношение $b_1/(b_2 + b_1) = R(n)$ называется числом переноса катионов. На опыте исследовалась эволюция резкой границы между двумя растворами раз-

ной концентрации. Если R не зависит от концентрации, то граница неподвижна и расплывается из-за амбиполярной диффузии. Ширина ее растет как \sqrt{t} . Если зависимость $R(n)$ близка к линейной, то скорость движения границы изменяется при обращении тока, а расплывание по-прежнему определяется диффузией. Если же $\partial^2 R / \partial n^2 \neq 0$, то граница, удовле-

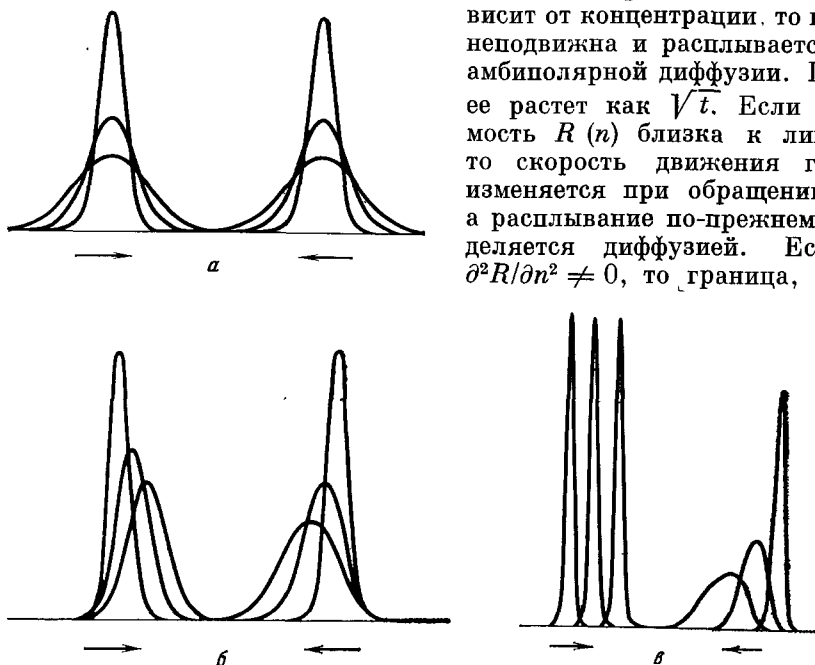


Рис. 4. Эволюция профиля dk/dx при протекании тока через первоначально резкую границу двух растворов.

Правые и левые семейства кривых отличаются направлением тока. Последовательные профили сняты через 2 ч. Концентрации растворов n^+ и n^- равны: а — 0,2 н : 0,5 н, KCl; б — 0,1 н : 0,2 н, CaCl₂; в — 0,1 н : 0,2 н, CdI

творяющая условию эволюционности $n^+ > n^-$ при $\partial^2 R / \partial n^2 < 0$, будет двигаться со скоростью

$$W = \frac{j}{e} \frac{R(n^+) - R(n^-)}{n^+ - n^-}, \quad (3.3)$$

не расплываясь из-за диффузии. При обращении тока граница должна быстро расплываться примерно пропорционально t . На рис. 4 изображены измеренные профили градиента показателя преломления dk/dx (примерно пропорционального концентрации раствора) при разных направлениях протекания тока относительно перепада концентрации. Видно, что эволюция хорошо соответствует трем разобранным случаям. Для KCl числа переноса практически не зависят от n , для CaCl₂ зависимость $R(n)$ близка к линейной (отношение $R''(n^+ - n^-)/(2R')$, характеризующее нелинейность функции $R(n)$, равно $\approx 0,1$). Для CdI величина эта существенно больше — порядка 0,4.

4. СЛАБОИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

а) Одномерный случай

В магнитном поле ситуации, в которых возникают диффузионные скачки, становятся еще более разнообразными. Рассмотрим, например, одномерную бесконечную в направлении W и $[E_0 B]$ неоднородность плазмы, содер-

жащую ионы двух сортов ²⁹. Будем полагать $\beta = 8\pi nT/B^2 \ll 1$, так что возмущение магнитного поля несущественно. Концентрация ионов n_1 обращается в нуль при $y \rightarrow \infty$ (ось y совпадает с направлением электрического поля), а n_2 в начальный момент образует однородный фон: $n_2(y, 0) = n_2^{(0)}$. В достаточно сильном магнитном поле подвижность и диффузия электронов поперек магнитного поля пренебрежимо малы по сравнению с ионными. Поэтому в отсутствие генерации и рекомбинации суммарная концентрация плазмы не зависит от времени:

$$n_1 + n_2 = n(y, t = 0). \quad (4.1)$$

Пренебрегая диффузией, имеем из уравнений непрерывности

$$\frac{E}{E_0} = \frac{b_{2\perp} n_2^{(0)}}{b_{1\perp} n_1 + b_{2\perp} n_2}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + b_{1\perp} b_{2\perp} E_0 n_2^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{n_1}{b_{1\perp} n_1 + b_{2\perp} n_2} = 0. \quad (4.3)$$

Решение (4.3) имеет вид

$$g(s, t) = \left(1 - \frac{b_{1\perp}}{b_{2\perp}}\right) \frac{n_1}{n} = g_0 \left[s - \frac{b_{1\perp} E_0 t}{(1 - g_0)^2}\right], \quad (4.4)$$

где

$$s = \int_0^y dy \frac{n(y)}{n_2^{(0)}}.$$

В координатах s, t скорость перемещения точек профиля $\tilde{V}(g) = b_{1\perp} E_0 / (1 - g)^2$ возрастает с ростом функции g , что соответствует при $b_{1\perp} < b_{2\perp}$ опрокидыванию переднего фронта.

Эта задача представляет интерес в связи с эволюцией плазменных облаков в ионосфере. Если такое облако имеет достаточно большой поперечный размер, то для описания ионосферной плазмы применима так называемая двуслойная модель ³⁷. При этом магнитные силовые линии считаются эквипотенциальными, а ионосфера под облаком аппроксимируется слоем плазмы, ограниченным вдоль магнитного поля диэлектрическими стенками, со средней подвижностью \hat{b}_2 и проинтегрированной по высоте (вдоль \mathbf{B}) концентрацией N_2 . (Об обосновании этой модели см. ^{29,30}.) Инжектированные ионы характеризуются интегральной концентрацией

$$N_1 = \int n_1 dz$$

и подвижностью \hat{b}_1 , соответствующей высоте выпуска. Многие черты эволюции реальных плазменных облаков можно понять, анализируя одномерную задачу — бесконечный в холловском направлении шнур плазмы.

Так как электроны могут перетекать практически только вдоль \mathbf{B} , перераспределяясь между неоднородностью и фоновой ионосферной плазмой, то $N_1 + N_2 = N(y)$ аналогично (4.1). Ток инжектированных ионов компенсируется противотоком фоновых, как показано на схематическом рис. 5. До тех пор, пока перемещение ионов по вертикали малосущественно, уравнения, описывающие эволюцию величин $N_{1,2}$, совпадают с (4.1)–(4.3) с заменой $n_{1,2}$ на $N_{1,2}$.

Решение уравнения (5.3) для начального возмущения, имеющего вид

$$N_1(y, t=0) = A N_2^{(0)} \exp\left(-\frac{y^2}{a^2}\right), \quad A > 1, \quad (4.5)$$

было проанализировано в ²⁹.

Так как подвижность ионов поперек магнитного поля в ионосфере сильно спадает с высотой, то $b_{2\perp} \gg b_{1\perp}$. Решение (4.4) для не слишком больших A ,

удовлетворяющих условию

$$1 < A < \frac{b_{2\perp}}{b_{1\perp}}, \quad (4.6)$$

приведено на рис. 6, 7. Из анализа (4.4) нетрудно получить²⁹, что скорость вытекания инжектированных частиц N_1 является переменной. Сначала, до

Рис. 5. Схема замыкания токов в ионосфере.

Исходная неоднородность создана в начале координат. Верхняя часть — линии постоянной концентрации инжектированных ионов, нижняя — фоновой плазмы. Область обеднения заштрихована. $A - A'$, $B - B'$ — диффузионные скачки

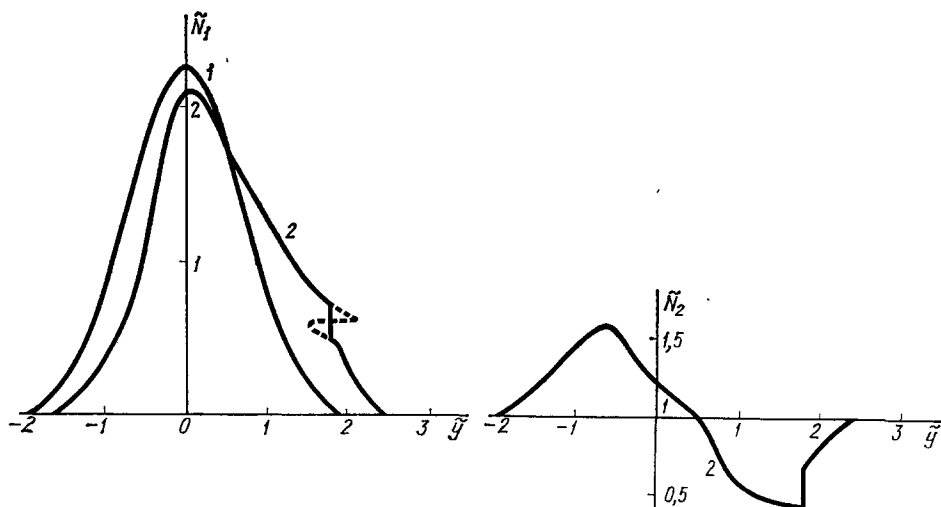
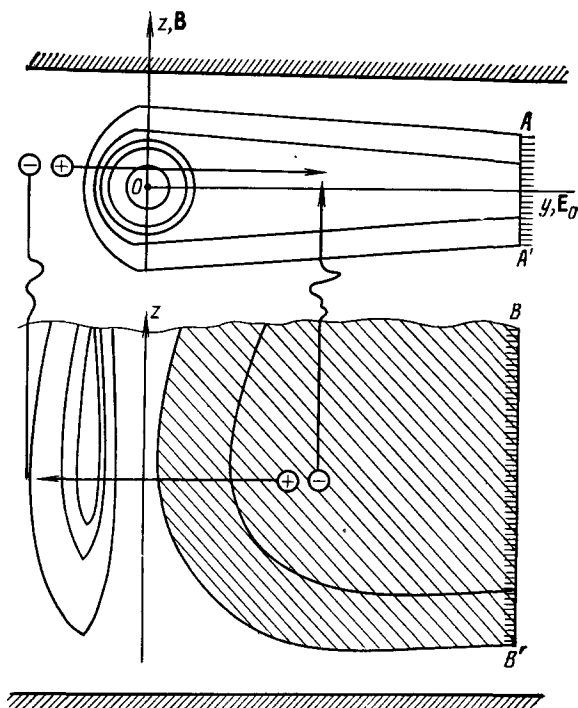


Рис. 6. Профили $\tilde{N}_{1,2} = N_{1,2}/N_2^{(0)}$ для $b_{1\perp} = 0,2b_{2\perp}$.

$A = 4/\sqrt{\pi}$. Кривая 1 — начальный профиль \tilde{N}_1 ; кривые 2 соответствуют $t = 0,5 a/b_{1\perp} E_0$, $\tilde{y} = y/a$

$t \leq t_1 = a(b_{1\perp} E_0 A)^{-1}$ (этой стадии соответствует рис. 6), поле возмущено слабо и исходный профиль N_1 смещается со скоростью $\sim b_{1\perp} E_0$. Лишь на переднем профиле из-за образования области обеднения в фоновой плазме поле

возрастает до $\sim E_0 A$, так что скорость вытекания ионов N_1 здесь велика ($\sim b_{1\perp} E_0 A$). Фоновые ионы, вытесненные из области обеднения, заполняют исходный профиль, уменьшая здесь электрическое поле. Существенное уменьшение происходит за такое время, за которое ΔN_1 в центре профиля становится $\sim N_2^{(0)}$, т. е. за $\sim t_1$. За это же время образуется скачок на переднем

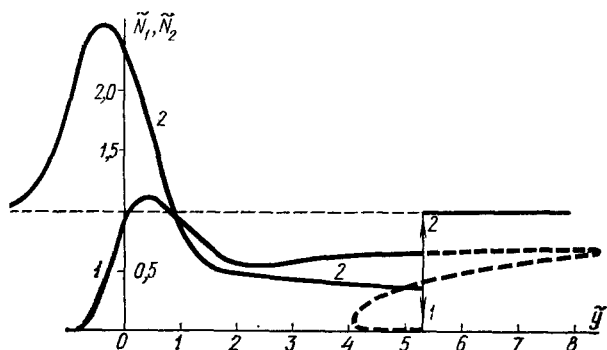


Рис. 7. Профили \tilde{N}_1 (1) и \tilde{N}_2 (2) для тех же условий, что и рис. 6, в момент $t = 2a/b_{1\perp} E_0$

фронте. При $t \gg t_1$ скорость вытекания инжектированных ионов падает до величины $\sim b_{1\perp} E_0$, так что существенная доля их вытекает из исходного профиля за большое время $\sim Aa/b_{1\perp} E_0$ (см. рис. 7). Если $A > b_{2\perp}/b_{1\perp}$, то из (4.2)–(4.4) следует, что электрическое поле внутри неоднородности мало с самого начала: $E \sim E_0/A$, а скорость вытекания инжектированных ионов оказывается порядка $b_1 E_0$.

б) Скачки в холловском направлении

Различие в величине электрического поля (в направлении E_0) на фронте и в центре профиля существенно сказывается на холловском движении реальных неоднородностей. Такое различие при выполнении (4.6) должно приводить к растяжению плазменного сгустка в холловском направлении, причем существенная деформация должна происходить за время $\sim t_1$. Это явление

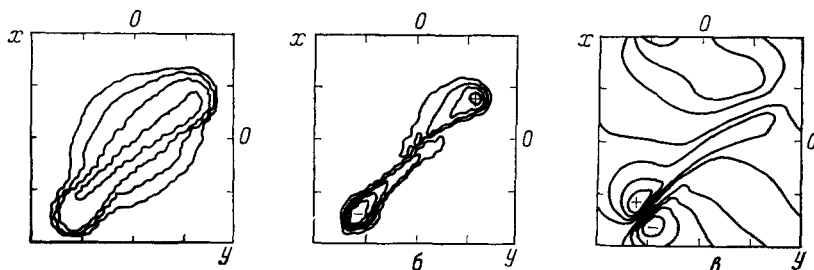


Рис. 8. Линии постоянной концентрации инжектированных (а) и фоновых (б) ионов и эквипотенциали (в) при численном моделировании эволюции бариевого облака в ионосфере в рамках двухслойной модели ²⁸.

Система координат движется вдоль x со скоростью дрейфа cE_0/B . Отношение $b_{1\perp}/b_{2\perp} = 1,25 \cdot 10^{-2}$, что соответствует высоте выпуска 200 км; $A = 8$; масштаб в единицах $2a = 8$ км; время после выпуска равно $aB/cE_0 \approx 0,8t_1$. Область обеднения фоновой плазмы расположена в левом нижнем углу рис. 6. Тот факт, что неоднородность вытягивается под углом к холловскому направлению, обусловлен протеканием холловского тока по фоновой плазме ($b_{2\perp} \sim b_{2H}$)

наблюдалось на двумерном численном счете ²⁸ (рис. 8). Видны резкие перепады концентрации, соответствующие диффузионным скачкам, возникающим как в направлении E_0 , так и в холловском.

Аналитическое выражение, описывающее возникновение скачка в холловском направлении, нетрудно получить на простом примере ³⁰. Пусть

$\hat{b}_1 = \hat{b}_2$, $A \gg 1$, а исходная неоднородность N_1 вытянута в направлении $x \parallel [E_0 B]$. В двумерном случае вместо (4.3) имеем

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + b_{\alpha\perp} \nabla_\perp N_\alpha E + b_{\alpha H} \left(E_y \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} - E_x \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) = 0, \quad (4.7)$$

где $\alpha = 1, 2$, $b_{\alpha H}$ — холловские подвижности. Будем считать, что ионы замagnetизованы. При этом $b_{eH} = b_{iH} = c/B$.

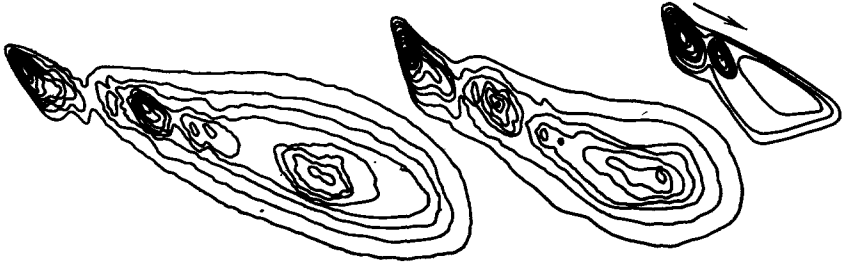


Рис. 9. Облако ионов Ba^+ в эксперименте «Сполох-1»^{38,39} в различные моменты времени. Линии соответствуют равному числу частиц на луче зрения. Стрелкой показано направление дрейфа в скрещенных полях в системе отсчета, движущейся со скоростью ветра нейтральных частиц. Холловский скачок образуется на заднем фронте неоднородности

Для концентрации электронов $N = N_1 + N_2$ вместо (4.1) имеем

$$\frac{\partial N}{\partial t} + b_H \left(E_y \frac{\partial N}{\partial x} - E_x \frac{\partial N}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Для вытянутой в направлении x неоднородности условие сохранения тока

$$\nabla_\perp (NE) = 0 \quad (4.9)$$

дает такое же поле, как в одномерном случае: $E_y = E_0 N_2^{(0)}/N$. Рассмотрим

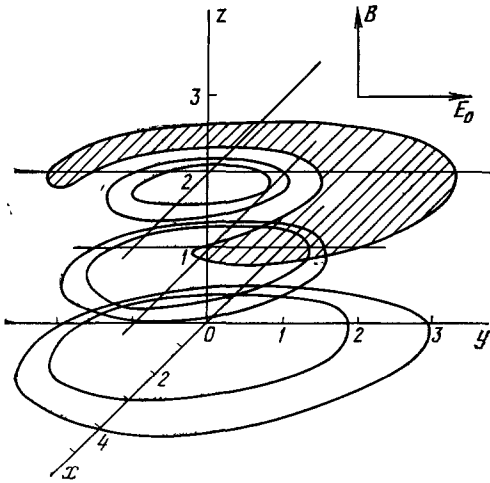


Рис. 10. Трехмерная эволюция гауссова начального профиля $n_1(r, 0) = A n_2^{(0)} \times \exp(-r^2/a^2)$ на фоне однородной изотермической слабоионизованной плазмы в скрещенных полях с учетом дрейфа и диффузии.

$A = 25$; $b_{eH} = b_{iH} = b_H$; $b_{e\perp} = 0$; $b_{e\parallel} = 1,25 b_H$; $b_{i\perp} = 0,5 b_H$. Время соответствует моменту $1,6ea^2/Tb_H = 1,6a/E_0 b_H$; $E_0 y = T/ea$ координаты — в ед. а. Линии уровня в сечениях $z=1-3$ соответствуют суммарной концентрации плазмы $1,5 n_2^{(0)}$ и $2 n_2^{(0)}$. Область обеднения на уровне $0,9 n_2^{(0)}$ заштрихована. Видно значительное укручение профиля в направлении $-[E_0 B]$

эволюцию профиля вблизи $y = 0$. Если начальная неоднородность симметрична по y , то для суммарной концентрации все время $\partial N / \partial y|_{y=0} = 0$. Поэтому в (4.8) можно пренебречь последним членом:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{b_H E_0 N_2^{(0)}}{N} \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) описывает опрокидывающуюся волну, причем скачок возникает на заднем (в направлении $[EB]$) фронте неоднородности, а на разрыве

$N_1^+ > N_1^-$. Укрупнение заднего в холловском направлении фронта неоднократно наблюдалось в экспериментах с бариевыми облаками в ионосфере. Типичный пример из работ ^{38,39} приведен на рис. 9. Численное решение системы уравнений (4.8)–(4.9), выполненное в ^{37,40}, также указывает на укрупнение заднего фронта неоднородности. Там же показано, что в области скачка развивается градиентно-дрейфовая неустойчивость, что приводит к его турбулизации. С другой стороны, вытекающий в холловском направлении хвост бариевой плазмы оказывается стратифицирован. Другими словами, в этой области тоже развивается неустойчивость. Возможный механизм стратификации, связанный с инерциальным дрейфом ионов в нестационарном неоднородном электрическом поле, предложен в ⁴¹. Усредненные же по стратам профили концентрации и скорость вытекания плазмы из облака хорошо согласуются с (4.10) ^{38,39}. В численных расчетах скачок в холловском направлении был получен в рамках полной трехмерной системы уравнений, описывающих эволюцию неоднородности на фоне безграничной однородной плазмы (рис. 10).

в) Влияние ионизации и рекомбинации на формирование скачков

Этим явлениям соответствует пространственный масштаб $W\tau$, где W — скорость скачка, τ — характерное время релаксации. Будем считать, что он намного превосходит толщину диффузионных скачков, но много меньше масштаба начального профиля. Тогда так же, как и в газодинамике ^{14,15}, возможно образование разрывов в дрейфовых решениях, состоящих из диффузионного скачка и релаксационной зоны.

Пусть в рассмотренном выше в п. а) примере происходит быстрая рекомбинация ионов 2^{30} :

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} + b_{2\perp} \frac{\partial}{\partial y} (EN_2) = \frac{N_2^{(0)} - N_2}{\tau}. \quad (4.11)$$

При $\tau \rightarrow 0$ из (4.3) имеем

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial t} + b_{1\perp} b_{2\perp} E_0 N_2^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{N_1}{b_{1\perp} N_1 + b_{2\perp} N_2^{(0)}} = 0. \quad (4.12)$$

При любом соотношении $b_{1\perp}$ и $b_{2\perp}$ скачок образуется на заднем фронте профиля. Структуру его можно исследовать, перейдя в систему $X = y - Wt$, движущуюся со скоростью W . Считая для простоты $b_{1\perp} = b_{2\perp} = b$, получим

$$\begin{aligned} W \frac{\partial N_1}{\partial X} &= N_2^{(0)} b E_0 \frac{\partial}{\partial X} \frac{N_1}{N}, \\ W \frac{\partial N}{\partial X} &= (N - N_1 - N_2^{(0)}) \tau^{-1}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$N_1 \left(W - \frac{b E_0 N_2^{(0)}}{N} \right) = N_1^- \left(W - \frac{b E_0 N_2^{(0)}}{N^-} \right) \equiv K. \quad (4.14)$$

Решение, в котором $N = N_1 + N_2$ обращается в $(N_1^+ + N_2^{(0)})$, $(N_1^- + N_2^{(0)})$ при $X \rightarrow \pm\infty$, соответствует выбору $K = -WN_1^+ N_1^- / N_2^{(0)}$. При этом (4.13) сводится к

$$\frac{dN}{dX} = \frac{(N - N^-)(N^+ - N)}{(1 - WN)\tau}, \quad (4.15)$$

т. е. описывает переход с масштабом $\sim W\tau$, $N^+ > N^-$.

Если время велико по сравнению со временем опрокидывания, то $N_1^- \ll N_1^+$ и $K \rightarrow 0$, $W \rightarrow b E_0 N_2^{(0)} / (N_1^+ + N_2^{(0)})$. В этом случае при $X \rightarrow +\infty$ концентрации N , N_1 меняются очень круто и становится существенной диффузия,

Профили N_1, N_2 при этом состоят из двух участков. Первый из них, аналогичный релаксационной зоне ударной волны^{14,15}, имеет масштаб $W\tau$:

$$N_1 = 0, \quad N_2 = N = N_2^{(0)} + B \exp\left(\frac{X}{W\tau}\right). \quad (4.16)$$

В этой области N_2 возрастает от $N_2^{(0)}$ до $(N_2^{(0)} + N_1^+)$. На правой ее границе расположен диффузионный скачок. Так как толщина его мала, то N в нем непрерывно, N_2 падает до $N_2^{(0)}$, а N_1 возрастает до N_1^+ . Поэтому в (4.16) $B = N_1^+ \exp(-X_c/W\tau)$, где X_c — координата диффузионного скачка.

5. ЧАСТИЧНО И ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННАЯ ПЛАЗМА

а) Ч а с т и ч н о и о н и з о в а н н а я п л а з м а в м а г н и т н о м п о л е

Учет электрон-ионных столкновений приводит к образованию скачков даже в простой плазме, содержащей ионы одного сорта²². В магнитном поле потоки частиц связаны с E -соотношением

$$\mathbf{E}_{e,1} = \mp \hat{b}_{e,1} \mathbf{E}, \quad (5.1)$$

где $\hat{b}_{e,1}$ — тензоры подвижности, зависящие от концентрации⁴². В одномерном случае из условия сохранения тока в направлении неоднородности q имеем

$$E_q = \frac{n_0}{n} [(\hat{b}_e + \hat{b}_i)^{-1} (\hat{b}_e^{(0)} + \hat{b}_i^{(0)}) \mathbf{E}_0]_q. \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в уравнение непрерывности и пренебрегая диффузией, получим нелинейное уравнение первого порядка²²

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n} \left[-n_0 \frac{(b_{e\parallel} \cos^2 \beta + b_{e\perp} \sin^2 \beta) (\hat{b}_i^{(0)} \mathbf{E}_0)_q + (b_{i\parallel} \cos^2 \beta + b_{i\perp} \sin^2 \beta) (\hat{b}_e^{(0)} \mathbf{E}_0)_q}{(b_{e\parallel} + b_{i\parallel}) \cos^2 \beta + (b_{e\perp} + b_{i\perp}) \sin^2 \beta} \right] \times \\ \times \frac{\partial n}{\partial q} = 0, \quad (5.3)$$

где β — угол между q и \mathbf{B} . В отсутствие магнитного поля отношение подвижностей

$$\frac{b_{e\parallel}}{b_{i\parallel}} = \frac{e}{m_e (v_{ea} + v_{ei})} \left(\frac{e}{m_i v_{ia}} \frac{v_{ea}}{v_{ea} + v_{ei}} \right)^{-1} = \frac{m_i v_{ia}}{m_e v_{ea}} \quad (5.4)$$

не зависит от концентрации. Поэтому скорость сигнала равна нулю:

$$V(n) = E_0 n_0 (\hat{b}_{e\parallel}^{(0)} + \hat{b}_{i\parallel}^{(0)}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{b_{i\parallel}}{b_{e\parallel} + b_{i\parallel}} = 0$$

— диффузионный скачок не возникает, несмотря на то, что сами подвижности могут сильно зависеть от концентрации. В магнитном же поле сильная зависимость $V(n)$ имеет место, согласно (5.3), при $v_{ea} \sim v_{ei}$, если параметр замagnetичности плазмы $\omega_{ce} \omega_{ci} / v_{ea} v_{ia} \sim 1$ ($\omega_{ce,1}$ — циклотронные частоты). Соответствующий пример для случая $q \parallel [\mathbf{E}_0 \mathbf{B}]$ приведен в²². При больших магнитных полях $V(n)$ стремится к нулю независимо от ориентации неоднородности относительно \mathbf{E}_0 и \mathbf{B} .

б) П о л н о с т ь ю и о н и з о в а н н а я п л а з м а б е з м а г н и т н о г о п о л я

В этом случае диффузионные скачки возникают в многокомпонентной плазме, содержащей ионы с различными зарядами Z_α . Рассмотрим изотермическую полностью ионизованную плазму, содержащую ионы двух сортов — однозарядные 1 и ионы 2 с зарядом eZ . Условия квазинейтральности

и изобаричности имеют вид

$$n_e \equiv n = n_1 + Zn_2, \quad (5.5)$$

$$n + n_1 + n_2 = \frac{p_0}{T}. \quad (5.6)$$

Опустив в уравнениях движения инерцию и градиенты давления компонент, получим

$$eE + \alpha_{e1}n_1(v_e - v_1) + \alpha_{e2}n_2(v_e - v_2) = 0, \quad (5.7)$$

$$eE + \alpha_{e1}n(v_e - v_1) - \alpha_{12}n_2(v_1 - v_2) = 0; \quad (5.8)$$

здесь $\alpha_{e2} \approx Z^2\alpha_{e1}$, $\alpha_{e1}/\alpha_{12} \sim \sqrt{m_e/m_1}/Z^2$. Если на бесконечности плазма покоится, то $v_e \gg v_1, v_2$:

$$v_e = -\frac{j}{en} = -\frac{eE}{\alpha_{e1}n_1 + \alpha_{e2}n_2}, \quad (5.9)$$

где j — плотность тока. Подставляя (5.5)–(5.9) в уравнения неразрывности для ионов (1.1)–(1.2), получим нелинейное уравнение, описывающее опрокидывающуюся волну:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(p_0 - 2nT)(Z+1)}{p_0(Z-1)} \left[\frac{(\alpha_{e2} - Z\alpha_{e1})j}{e\alpha_{12}n} \frac{Zp_0}{T(Z+1)} - F \right] \right\} = 0, \quad (5.10)$$

где

$$F = \frac{j}{e} \frac{(\alpha_{e2} - Z\alpha_{e1})}{\alpha_{12}} + \left[\frac{Zp_0}{T(Z+1)} - n_0 \right] v_1^{(0)} - \left(n_0 - \frac{p_0}{2T} \right) v_2^{(0)}.$$

Выражение в фигурной скобке (5.10) имеет смысл потока $\Gamma(n)$. Так как $d^2\Gamma/dn^2 > 0$, то условие эволюционности приводит к $n^+ < n^-$. Другими словами, так как точки профиля с меньшими значениями n движутся против поля E_0 быстрее, то должен опрокидываться передний фронт профиля концентрации плазмы. Такая ситуация может иметь место в пристеночной области токамака или в сильноточных дуговых разрядах, где температуры и длины пробега невелики, а концентрация примесей может быть значительна.

в) Полностью ионизованная плазма в магнитном поле

Так же, как и в случаях слабо или частично ионизованной плазмы, в магнитном поле диффузионные скачки становятся существенно более разнообразными. Рассмотрим пример, в котором возникают скачки в холловском направлении, напоминающий ситуацию в слабоионизованной плазме (см. п. б) гл. 4). Пусть в полностью ионизованную плазму с концентрацией $n_2(z)$, ограниченную вдоль \mathbf{B} ($\mathbf{B} \parallel z$) диэлектрическими стенками, влетает в направлении x плазменный сгусток с концентрацией $n_1(x, y, z)$. Торможение сгустка вызывает инерциальный дрейф ионов вдоль y , который приводит к появлению поля E_y , поддерживающего движение плазмы в исходном направлении. При этом переменное поле \mathbf{E} генерирует МГД волны, распространяющиеся по фоновой плазме. Через скин-время МГД волны затухают и электрическое поле становится потенциальным.

Эволюция электрического поля происходит в две стадии. На первой, быстрой стадии поле переносится вдоль \mathbf{B} за счет большой подвижности электронов. Инерциальный ток в неоднородности замыкается при этом инерциальным же противотоком по фоновой плазме, причем можно пренебречь членами $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ по сравнению с $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Полагая для простоты массы фоновых и инжектированных ионов равными, имеем

$$\operatorname{div}_{\perp} \int_0^{L_z} \frac{m_i c^2}{B^2} [n_1(x, y, z) + n_2(z)] \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} dz = 0. \quad (5.11)$$

Если L_z не слишком велико, то в конце быстрой стадии поле E перестает зависеть от z (аналогично двуслойной модели, см. п. а) гл. 4). Поэтому, интегрируя (5.11) по времени, получим в конце быстрой стадии

$$\nabla_{\perp} N (E - E_0) = 0, \quad (5.12)$$

где $N = N_1 + N_2$,

$$1248 \quad N_{1,2} = \int_0^{L_z} n_{1,2} dz$$

— интегральные концентрации частиц в неоднородности и фоновой плазме соответственно, $E_0 = Bv_0/c$, v_0 — начальная скорость сгустка. Соотношение (5.12) является начальным условием для медленной стадии и определяет E как функцию от N . С точностью до E_0 (5.12) совпадает с формулой (4.9) для поля в облаке слабоионизованной плазмы в двуслойной модели. На медленной стадии электрическое поле не зависит от z . Так как при этом на границах $z = 0$, L_z возмущение B отсутствует, то полный ток в плоскости x, y равен нулю:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) \mathbf{v} = 0, \quad (5.13)$$

где

$$\mathbf{v} = \frac{c [\mathbf{E} \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (5.14)$$

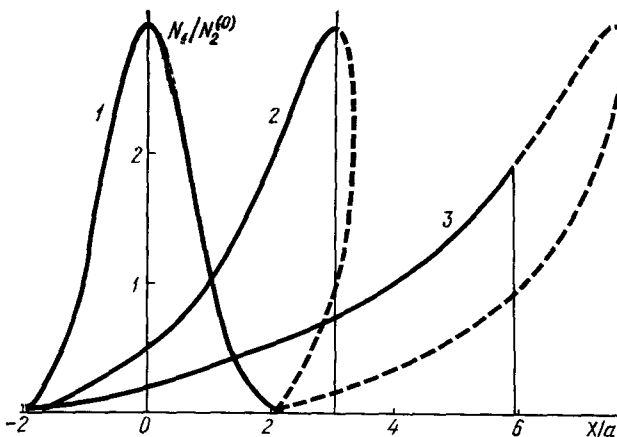


Рис. 11. Эволюция движущегося сгустка плазмы с гауссовым начальным профилем $AN_2^{(0)} \exp(-x^2/a^2)$. $A = 3$; 1 — начальный профиль; 2 — $t = 4a/v_0$; 3 — $t = 10a/v_0$.

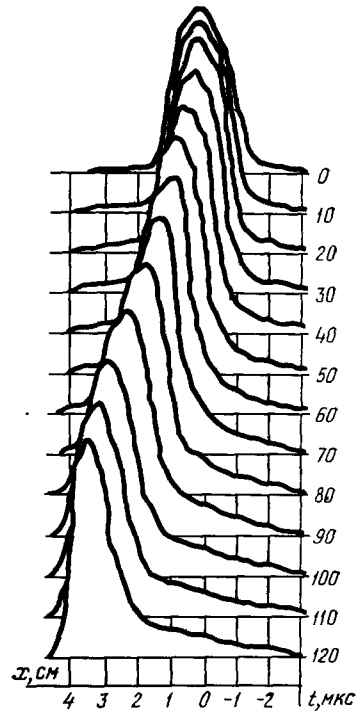


Рис. 12. Движение плотного сгустка плазмы, инжектированного с нулевой начальной скоростью в тороидально изогнутую Q-машину в присутствии фоновой плазмы⁴⁵.

Смещение центра сгустка соответствует (6.18) с $g \approx cT/eBR$

Уравнение непрерывности для ионов сгустка имеет вид

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) N_1 = 0. \quad (5.15)$$

Эти уравнения описывают изотермическое движение несжимаемой жидкости. Течения (5.13), (5.14) представляют собой частный случай плоских МГД-течений^{43,44}, соответствующий постоянному магнитному полю. Система (5.13)—(5.15) имеет решение

$$N_1(\mathbf{r}, t) = N_{10}(s - |\mathbf{V}(N_{10})|t), \quad (5.16)$$

где s — путь, пройденный частицей жидкости (плазмы) за время t , а скорость $V(N_1) \equiv v$ определена согласно (5.12), (5.14). Для вытянутой вдоль x неоднородности в конце быстрой стадии

$$E_y = \frac{N_{10}}{N_0} E_0, \quad (5.17)$$

так что решение (5.16) при малых y описывает опрокидывающуюся волну со скачком на переднем фронте, изображенную на рис. 11.

В присутствии внешних сил или неоднородности магнитного поля вместо (5.13) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = g \frac{N_1}{N}, \quad (5.18)$$

где g — соответствующее ускорение. Для вытянутой вдоль x неоднородности при малых y смещение точек профиля N_1 при $g = \text{const}$ на медленной стадии равно

$$x = v_0 t + \frac{g t^2 N_{10}}{2 N_0}. \quad (5.19)$$

Образование резких профилей в такой ситуации наблюдалось в работе ⁴⁵, где ускорение было обусловлено тороидальным дрейфом плазмы. При малой по сравнению с фоновой концентрации частиц в сгустке профиль был практически неподвижен. Центр плотного сгустка двигался в соответствии с (5.18) с ускорением, не зависящим от концентрации (рис. 12).

6. ДИФФУЗИОННЫЕ СКАЧКИ В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛАЗМЕ

а) Эволюция профиля при разогреве носителей в полупроводнике с полностью ионизованными донорами

В сильных полях подвижности носителей заряда зависят от величины поля E . При этом даже в случае простой плазмы ($p = n$, где p, n — концентрации дырок и электронов соответственно) скорость амбиполярного дрейфа становится отличной от нуля ¹². Ограничимся моделью полупроводника n -типа с $b_n \gg b_p$, когда существен только разогрев электронов, причем ²⁵

$$b_n(E) = \begin{cases} b_{n0} & \text{при } E < E_h, \\ b_{n0} \sqrt{\frac{E_h}{E}} & \text{при } E > E_h. \end{cases} \quad (6.1)$$

Поток дырок в дрейфовом приближении равен

$$\Gamma_p(p) = \begin{cases} \frac{\Gamma_0 p}{p + N_D} & \text{при } p < p_h, \\ \Gamma_0 \frac{j}{j_h} \frac{p N_D}{(p + N_D)^2} & \text{при } p > p_h; \end{cases} \quad (6.2) \quad (6.3)$$

здесь $\Gamma_0 = j b_p / e b_{n0}$, $j_h = e E_h b_{n0} N_D$, $p_h = N_D (j/j_h - 1)$; N_D — концентрация доноров; область концентраций $p < p_h$, $j > j_h$ соответствует горячим электронам.

При $j > 2j_h$ график $\Gamma_p(p)$ содержит падающий участок, где $V(p) < 0$ (рис. 13). В такой ситуации возможны как движущиеся влево и вправо, так и неподвижные скачки. В скачке «под горбом» диффузионный поток отрицателен и, следовательно, концентрация возрастает в направлении поля E . Напротив, скачок «над ямой» возможен лишь с уменьшением концентрации.

Пусть равновесная концентрация $p^{(0)} < N_D$ и максимальная начальная концентрация гауссова профиля p (см. рис. 1, а) превышает p_h ³¹. С течением времени участки профиля с $N_D < p < p_h$ сдвигаются влево (против поля),

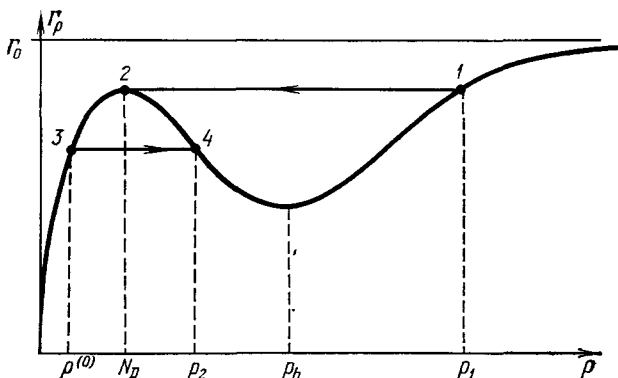


Рис. 13. График дрейфового потока дырок в полупроводнике n-типа, в котором существует разогрев электронов

остальные участки — вправо. Точки, где $p = N_D$ или $p = p_h$, остаются на месте. В результате формируется область повышенной концентрации плазмы, ограниченная двумя диффузионными скачками (рис. 14). В процессе эволюции

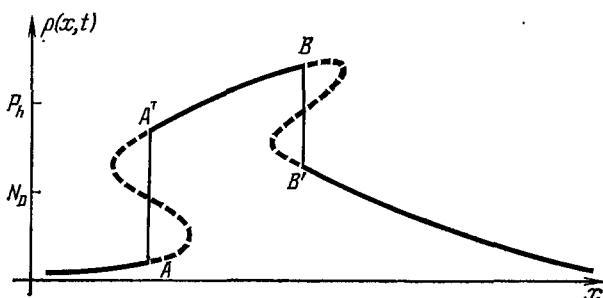


Рис. 14. Эволюция гауссова профиля при $p^{(0)} = 0$, $AN_D > p_h$

скачки сливаются (точка B совпадает с точкой A'), так что образуется один скачок $A \rightarrow B'$. В дальнейшем волна, уменьшаясь по амплитуде, будет двигаться вправо, асимптотически приближаясь к треугольной.

б) Стационарные профили со скачками

В рассматриваемой ситуации возможны и неподвижные скачки. Они наблюдались в^{23,24} при инжекции и аккумуляции горячих носителей в n-InSb. Инжекция в полубесконечный образец описывается дрейфовым уравнением

$$\frac{d}{dx} \Gamma_p(p) = -\frac{p - p^{(0)}}{\tau} = -R(p, p^{(0)}) \quad (6.4)$$

с граничным условием $p(0) = \infty$; здесь τ — время жизни избыточных носителей. При $E < E_h$ оно описывает плавное уменьшение концентрации до равновесного значения $p^{(0)}$ с масштабом порядка дрейфовой длины $l_E = b_p E \tau$. С ростом тока, однако, ситуация меняется. Дрейфовое решение при $j > 2j_h$, $p^{(0)} < p_h$ оказывается невозможным. Действительно, поток дырок вследствие рекомбинации должен уменьшаться, тогда как, согласно (6.3), на участке (p_h, N_D) дрейфовый поток растет. Поэтому образуется неподвиж-

ный диффузионный скачок ²⁵. При $p^{(0)} < N_D$ значения концентрации на его границах равны N_D, p_1 , где $\Gamma_p(p_1) = \Gamma_p(N_D)$ ($1 \rightarrow 2$ на рис. 13 *). От $p = \infty$ до $p = p_1$ и от $p = N_D$ до $p = p^{(0)}$ имеет место дрейфовое решение. Если $j > 4j_h$, то $\Gamma_p(N_D) > \Gamma_0$, так что скачок выходит на анод и во всем образце уровень инжекции низок ($p < N_D$). При $p^{(0)} > N_D$ концентрация в скачке меняется от p_1 до $p^{(0)}$, где $\Gamma(p^{(0)}) = \Gamma(p_1)$. Поэтому при $\Gamma(p^{(0)}) > \Gamma_0$ инжекция с большим масштабом l_E вообще невозможна.

Аккумулирующему контакту (катоде) в образце n-типа соответствует граничное условие $\Gamma_p^{(t)}(0) = 0$ ²⁶. Если в полубесконечном образце создана избыточная концентрация пар $p^{(0)}$ (например, подсветкой или ударной ионизацией ²³), то без разогрева концентрация внутри образца всюду равна $p^{(0)}$. Вблизи катода имеется узкая (порядка диффузионной длины $l_D = \sqrt{D\tau}$) область, где $\Gamma_D^{(t)}$ падает до нуля, а концентрация резко возрастает. При наличии разогрева у катода может возникнуть длинная ($\sim l_E$) область высокой концентрации плазмы ²⁶. Это явление, названное аномальной аккумуляцией, наблюдалось в ²³. При этом вольт-амперные характеристики могут иметь S-образный вид (рис. 15). Если $p^{(0)} < N_D$ и $\Gamma_p(p^{(0)}) > \Gamma_p(p_h)$, то концентрация плазмы при приближении к катоду сначала скачком возрастает от $p^{(0)}$ до p_2 (участок 3 \rightarrow 4 на рис. 13), а затем плавно увеличивается с масштабом $\sim l_E$ от p_2 до p_h . Таким образом, в дрейфовом приближении $p(0) = p_h$. Непосредственно к катоду примыкает узкая диффузионная область, где концентрация плазмы велика, а поток спадает до нуля. При $N_D < p^{(0)} < p_h$ концентрация плазмы плавно растет на длине $\sim l_E$ от $p^{(0)}$ до p_h , скачок внутри образца отсутствует.

В ²⁴ исследовалась инжекция дырок в конечный образец n-InSb при 77 К, $p^{(0)} = 0$ с аккумуляющим тыловым контактом. Граничные условия имеют вид $p(0) = \infty, \Gamma_p^{(t)}(L) = 0$, где L — длина образца. В зависимости от тока и длины (точнее, от отношения L/L_h , где $L_h = b_p E_h \tau$) внутри образца могут реализоваться весьма разнообразные профили концентрации ²⁷, состоящие из участков дрейфовых решений и диффузионных скачков (рис. 16). Так как толщина последних пренебрежимо мала, то из (6.4) следует

$$\sum \int V(p) \frac{dp}{R(p, p^{(0)})} = L, \quad (6.5)$$

где сумма берется по участкам дрейфовых решений. Это равенство совместно с условием эволюционности позволяет однозначно построить профиль концентрации в образце. Значение L/L_h в условиях эксперимента ²⁴ было равно 1,3.

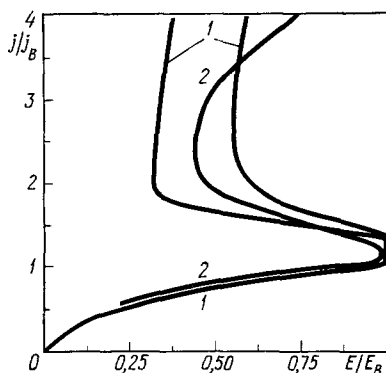


Рис. 15. Вольт-амперные характеристики (ВАХ) при аномальной аккумуляции, снятые между парой зондов, расположенных на расстоянии 0,44 мм друг от друга у катода.

Материал — n-InSb при 77 К. Плазма создавалась при ударной ионизации (E_B — пороговая напряженность поля). 1 — расчет ²⁷; 2 — эксперимент ²³. Падающая ветвь ВАХ обусловлена ростом концентрации плазмы между зондами из-за аномальной аккумуляции

*) Ширина этого скачка $\sim l_T$. Определение же его структуры является достаточно сложной задачей, так как l_T есть длина релаксации электронов по энергии. На таком масштабе локальная связь между b_n и E (6.1) не имеет места ²⁶. Даже если можно ввести электронную температуру, то на таких длинах необходим учет термодиффузии и электронной теплопроводности. В материалах же с неупругим механизмом рассеяния (в частности, в InSb) длина l_T сравнима с длиной пробега, и необходим кинетический анализ. Однако положение и скорость движения скачков не зависят от деталей их структуры.

ВАХ образца для этого случая приведена на рис. 17. S-образность ее обусловлена аномальной аккумуляцией.

Прямое определение профиля концентрации с одновременным учетом дрейфа, диффузии и рекомбинации представляет собой весьма сложную задачу. Для ряда случаев она решена в ^{46,47}. При этом оказалось, что профили концентрации состоят из крутых и плавных участков, соответствующих диф-

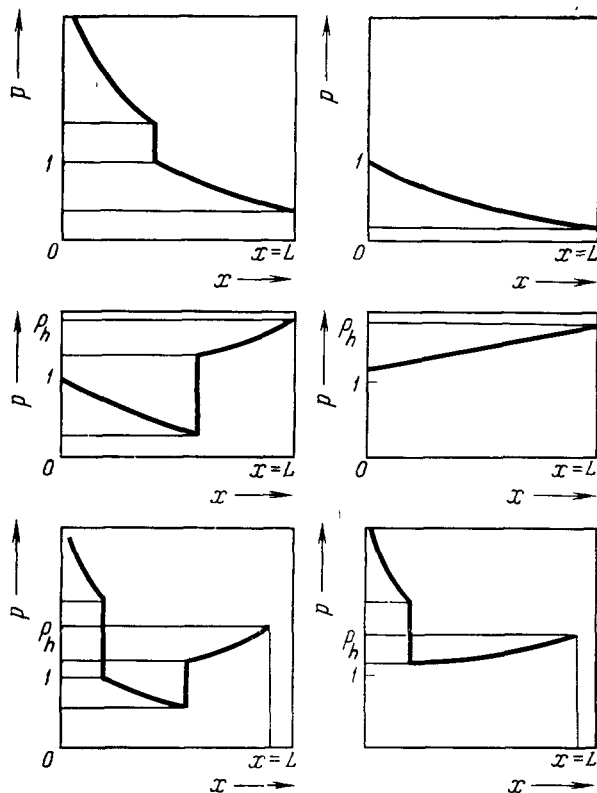


Рис. 16. Профили концентрации плазмы в образце конечной длины.
Концентрация p — в ед. N_D

фузионным скачкам (и приконтактным областям) и дрейфовым решениям. Поэтому основные результаты этих работ можно легко получить описанным выше способом.

В ^{46,47} исследовались явления в конечном образце n -типа в приближении слабого разогрева носителей. В ⁴⁶ был рассмотрен короткий ($L \ll L_h$) образец n -типа ($p^{(0)} < N_D$) с инжектирующим анодом и аккумулирующим катодом. В этом случае концентрация дырок на границе прикатодной диффузионной области $p(j, L)$, которая определяется уравнением

$$\int_{p(j; L)}^{\infty} \frac{dpV(j, p)}{R(p, p^{(0)})} = L, \quad (6.5')$$

при всех токах] больше N_D . Поэтому инжекционный скачок не образуется и при больших токах всюду $p > p_h$ — имеет место холодная инжекция. При токе $j = j' > 2j_h$, который определяется $p(j', L) = p_h$, у катода появляется скачок «над ямой». С ростом тока он движется в глубь образца, разделяя участки холодной инжекции и аномальной аккумуляции. При $j = j'' > 4j_h$ скачок выходит на анод и инжекционный участок исчезает. Вели-

чина j'' определена согласно

$$\int_{p(j'', 0)}^{p_h} \frac{V(j'', p)}{R(p, p^{(0)})} dp = L, \quad \Gamma_p(p(j'', 0)) = \Gamma_0.$$

В ⁴⁷ рассмотрен образец с $p^{(0)} \gg n^{(0)} - p^{(0)} = N_D$ и идеально омическим контактом (S — контакт с бесконечной скоростью рекомбинации). При инжекции им является катод, а при аккумуляции — анод. При инжекции (в $p^+ - n - S$ -структуре) с ростом тока длина l_E , на которую инжектируются носители, возрастает и зависимость тока от напряжения имеет вид $j \sim U^2$ ⁴⁸. При достаточно большом токе на графике $\Gamma_p(p)$ появляется «яма». Например,

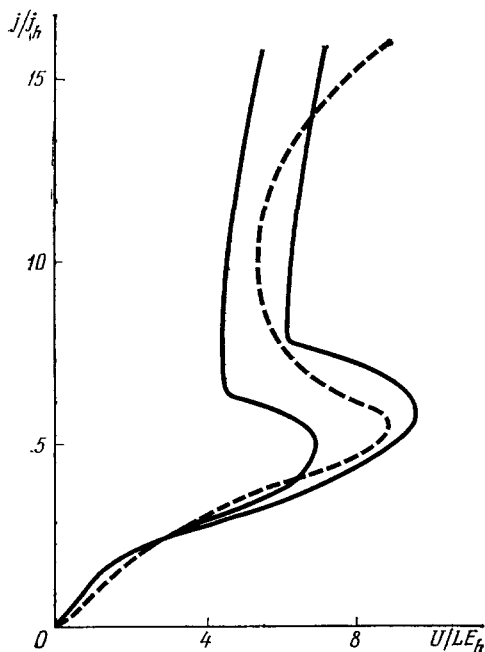


Рис. 17. ВАХ образца n -InSb конечной длины.

Сплошные линии — расчет: для левой $L/L_h = 1$; для правой $L/L_h = 1,5$. Штриховая кривая — эксперимент ⁴⁸; $E_h = 15$ В/см; $L/L_h = 1,3$

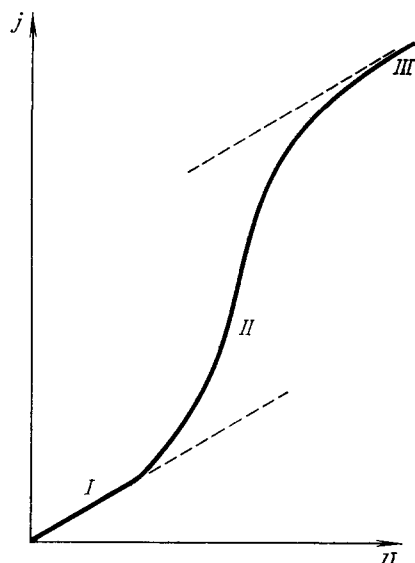


Рис. 18. ВАХ $p^+ - n - S$ -структуры при малых L ⁴⁷.

Участки I, III соответствуют $p = p^{(0)}$; участок II соответствует инжекции; $j \sim U^2$

если L меньше, чем длина, соответствующая инжекционному дрейфовому участку (∞, p_k), где p_k удовлетворяет $\Gamma_p(p_k) = \Gamma_p(p^{(0)})$, то концентрация плавно уменьшается от $p = \infty$ до $p = p(j, L)$ (6.5'), а на катоде резко падает до $p^{(0)}$. С ростом тока $\Gamma_p(p^{(0)})$ растет быстрее, чем $\Gamma_p(p_k)$. Поэтому длина участка (∞, p_k) уменьшается и становится меньше L . При этом инжекционный дрейфовый участок тянется до $p = p_k$, а затем концентрация скачком падает до $p^{(0)}$. В оставшейся части образца вплоть до катода $p = p^{(0)}$. С дальнейшим ростом тока скачок $p_k \rightarrow p^{(0)}$ выходит на анод. Теперь, как и при малых токах, $p = p^{(0)}$ во всем образце; ВАХ выходит на сублинейный закон (рис. 18).

В случае аккумулирующего катода ($S - n - n^+$ -структура) при $j > 2j_h$ концентрация в достаточно длинном образце определяется аномальной аккумуляцией и меняется от $p = p(j, 0)$ до $p = p_h$, где $p(j, 0)$ определяется соотношением

$$\int_{p(j, 0)}^{p_h} \frac{V(p)}{R(p, p^{(0)})} dp = L.$$

С ростом тока $p(j, 0)$ приближается к p_h , поле — к E_h , так что напряжение на образце стремится к $E_h L$.

в) Скачки в полупроводнике
с захватом носителей на ловушки³¹

В реальных полупроводниках часто имеются примеси, создающие глубокие уровни в запрещенной зоне. Они играют роль ловушек носителей. Ситуация в общем случае достаточно сложна. Однако если времена захвата сильно разнятся, то при достаточно большом токе по-прежнему профиль состоит из дрейфовых участков и резких скачков. Структура скачков определяется теперь не только диффузией, но и кинетикой захвата. Пусть, например, в образце наряду с мелкими полностью ионизованными донорами содержится N_l ловушек. Время захвата дырок, а также время межзонной рекомбинации будем

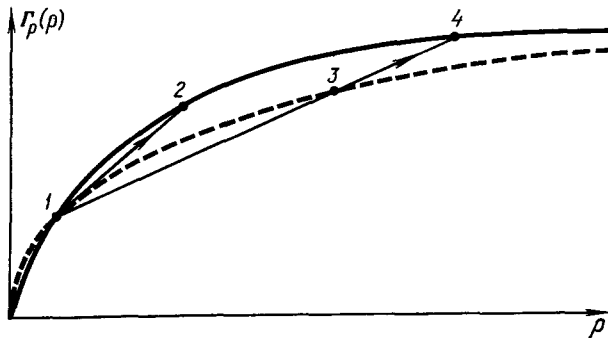


Рис. 19. Дрейфовый поток дырок в полупроводнике с захватом на ловушки.

Штриховая кривая — дрейфовый поток при постоянном уровне заполнения ловушек, соответствующем точке 1

считать большими по сравнению со всеми характерными временами задачи, а время захвата электронов τ_n — малым. Тогда в дрейфовом приближении получим для дырок

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (b_p p E) = 0 \quad (6.6)$$

и для электронов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_n}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (b_n n E) = [(n + n_l) f - n] \tau_n^{-1}, \quad (6.7)$$

где f — степень заполнения ловушек; остальные обозначения стандартные⁴⁸.

Если профиль концентрации является достаточно плавным ($L \gg b_n E \tau_n$), то электроны находятся в равновесии с ловушками, так что из (6.7) следует

$$f = \tilde{f} = \frac{n}{n + n_l}. \quad (6.8)$$

Подставляя (6.8) в условие квазистационарности

$$n = p + N_l (f_0 - f), \quad f_0 = 1 + \frac{N_D}{N_l}, \quad (6.9)$$

получим связь между p и n :

$$p = n - N_l \left(f_0 - \frac{n}{n + n_l} \right). \quad (6.10)$$

Исключая электрическое поле из системы (6.6)–(6.7), получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V(p) \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad V(p) = \frac{j b_n b_p (n - p \, dn/dp)}{e (b_n n + b_p p)^2} = \frac{d\Gamma_p}{dp}. \quad (6.11)$$

Согласно (6.10) $d\Gamma_p/dp > 0$, $d^2\Gamma_p/dp^2 < 0$ (рис. 19). Эволюция и опрокидывание профиля концентрации происходят в этом случае по существу так же, как описано в п. а) гл. 2. Структура скачка, однако, оказывается более сложной.

г) Структура скачка в образце с ловушками.
Релаксационная зона

Степень заполнения ловушек в скачке меняется. Характерное время этого процесса $\sim \tau_n$. При $l_n = W\tau_n \gg l_T$ задача аналогична задаче об ударной волне в среде с релаксацией (п. в) гл. 4¹³⁻¹⁵).

При умеренном перепаде концентрации величины в скачке меняются сравнительно плавно с масштабом $\sim l_n$. Скачок такого типа изображен на рис. 19 отрезком $1 \rightarrow 2$. Согласно условию эволюционности концентрация в скачке возрастает. Перейдем в (6.6)–(6.7) к $X = x - Wt$. Пренебрегая диффузией, получим

$$\frac{\partial}{\partial X} (-Wp + b_p p E) = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} (-Wn - b_n n E) = [(n + n_i) f - n] \tau_n^{-1}. \quad (6.13)$$

Исключая из (6.12)–(6.13) электрическое поле и интегрируя затем (6.12), найдем связь между n и p в скачке:

$$-Wp + \frac{b_p p i}{e(b_n n + b_p p)} = K, \quad (6.14)$$

$$W = \frac{\Gamma_p(p^+) - \Gamma_p(p^-)}{p^+ - p^-}, \quad K = \frac{\Gamma_p(p^-) p^+ - \Gamma_p(p^+) p^-}{p^+ - p^-}, \quad (6.15)$$

p^+ , p^- — концентрации дырок на границах скачка. Учитывая теперь, что согласно (6.12) $d\Gamma_p/dX = d\Gamma_n/dX = W dp/dX$, вместо (6.13) получим

$$W \left(1 - \frac{dn}{dp} \right) \frac{dp}{dX} = [(n + n_i) f - n] \tau_n^{-1} < 0, \quad (6.16)$$

где n и p связаны согласно (6.14), (6.15). Если $dn/dp > 1$, то (6.16) определяет монотонный профиль концентрации в скачке с масштабом $\sim l_n$. Функция заполнения ловушек дается равенством (6.9).

Если перепад концентрации в скачке достаточно велик, то величина $(1 - dn/dp) = N_i df/dp$, полученная из решения (6.16), меняет знак. Поэтому плавный профиль с масштабом l_n невозможен. Профиль состоит из диффузионного скачка $1 \rightarrow 3$ на рис. 19 и участка $3 \rightarrow 4$ решения (6.16) с масштабом l_n ³¹. Эта область аналогична релаксационной зоне в ударной волне.

Большое число практически важных ситуаций можно описать моделью, в которой наряду с мелкими донорами и ловушками имеется акцепторный уровень (компенсатор)^{10,48}. При этом зависимость дрейфового потока от концентрации может быть немонотонной, так что возможны как движущиеся, так и неподвижные скачки. Ситуация, однако, осложняется тем, что в таких веществах уже при сравнительно небольших токах, когда $l_E \sim l_D \sim l_T$, начиная с которых только и имеет смысл разделение на диффузионные скачки и дрейфовые профили, имеет место рекомбинационная неустойчивость⁴⁹.

Развитие неустойчивости, разумеется, изменит характер профиля. Однако резкое разделение образца на две области с разными концентрациями плазмы должно сохраниться. В экспериментах по наблюдению рекомбинационной неустойчивости⁵⁰ действительно имело место ясно выраженное разделение образца на две области с высоким и низким электрическим полем. В области с высоким полем в соответствии с критерием⁴⁹ наблюдались осцилляции большой амплитуды. По-видимому, поэтому положение границы областей не совпадало с положением скачка, даваемым стационарной теорией.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представления об опрокидывании плавных профилей и о формировании ударных волн (разрывов в решениях укороченных уравнений) широко используются для анализа быстрых процессов в плазме. Сюда можно отнести газодинамические ударные волны^{15,51}, бесстолкновительные ударные волны^{32,52}, формирование двойных слоев^{53,54}.

Из рассмотренных в обзоре примеров видно, что укручение дрейфовых профилей и формирование резких скачков концентрации являются также достаточно общим свойством медленных (по сравнению со звуковой и альвеновской скоростями) процессов в неоднородной столкновительной плазме с током. Подход, основанный на понижении порядка исходной системы уравнений (1.1)–(1.3) и сведении их к уравнениям для простых нелинейных волн, оказывается весьма эффективным и позволяет построить физически ясную картину явлений, а в ряде случаев — получить простое аналитическое решение.

Такие явления должны играть существенную роль в физике космической и лабораторной плазмы, в физике и технике газовых разрядов, полупроводников и электролитов. Число же экспериментальных работ, в которых однозначно зарегистрированы такие скачки, пока невелико, а исследования их структуры практически отсутствуют. Поэтому представляется целесообразным выполнить подробные экспериментальные исследования как процессов формирования скачков, так и их структуры. В частности, так как градиент концентрации в скачках велик, то в них в первую очередь могут развиваться разнообразные неустойчивости. В связи с этим необходимо выяснить, в каких случаях структура скачков определяется классическими процессами, а в каких — турбулентными.

Авторы признательны В. И. Перелю за стимулирующие обсуждения.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
АН СССР
Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schottky W.—Phys. Zs., 1924, Bd. 25, S. 342.
2. Sabadil H.—Beitr. Plasmaphys., 1973, Bd. 13, S. 235.
3. Scholer M., Haerendel G.—Planet. and Space Sci., 1971, v. 19, p. 915.
4. Жилинский А. П., Цендин Л. Д.—УФН, 1980, т. 131, с. 343.
5. Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы.—М.: Наука, 1979.
6. Пекарек Л.—УФН, 1968, т. 94, с. 463.
7. Елецкий А. В., Рахимов А. Т.—В кн. Химия плазмы/Под ред. Б. М. Смирнова.—М.: Атомиздат, 1977, вып. 4, с. 123.
8. Напартович А. П., Старостин А. Н.—В кн. Химия плазмы/Под ред. Б. М. Смирнова.—М.: Атомиздат, 1979, вып. 6, с. 153.
9. Ламперт М., Марк П. Инжекционные токи в твердых телах.—М.: Мир, 1973.
10. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников.—М.: Наука, 1977, гл. 7.
11. Shockley W., Haynes J.—Phys. Rev., 1951, v. 81, p. 835.
12. Prior A. C.—Proc. Phys. Soc., 1960, v. 76, p. 465.
13. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.—М.: Физматгиз, 1954.
15. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений.—М.: Наука, 1966.
16. Kolrausch F.—Ann. d. Phys. Chem., 1897, Bd. 62, S. 209.
17. Weber H.—Sitz. Akad. Wiss. Berlin, 1897, Bd. 44, S. 936.
18. Laue M., von.—Zs. anorg. Chem., 1915, Bd. 93, S. 329.
19. Smith E. R.—Bureau Stand. J. Res., 1931, v. 6, p. 917.
20. Longworth A. G.—J. Amer. Chem. Soc., 1943, v. 65, p. 1755.

21. Стефановский А. М. Автореферат канд. диссертации.— Л.: ФТИ АН СССР, 1950.
22. Гуревич А. В.— Письма ЖЭТФ, 1968, т. 8, с. 193.
23. Tosima S.— J. Phys. Soc. Japan, 1965, v. 20, p. 1814.
24. Tosima S., Ando K.— Ibidem, 1967, v. 23, p. 812.
25. Дмитриев А. П., Стефанович А. Е., Цендин Л. Д.— ФТП, 1975, т. 9, с. 1358.
26. Стефанович А. Е., Цендин Л. Д.— ФТП, 1976, т. 10, с. 682.
27. Dmitriev A. P., Stepanovich A. E., Tsendin L. D.— Phys. Stat. Sol. Ser. a, 1978, v. 46, p. 45.
28. Scannapieco A. J., Ossakow S. L., Book D. L., McDonald V. E., Goldman S. R.— J. Geophys. Res., 1974, v. 79, p. 2913.
29. Рожанский В. А., Цендин Л. Д.— Геомагн. и аэроном., 1984, т. 24, с. 414.
30. Рожанский В. А., Цендин Л. Д.— Ibidem, с. 598.
31. Дмитриев А. П., Цендин Л. Д.— ФТП, 1985, т. 19, с. 2025.
32. Электродинамика плазмы/Под ред. А. И. Ахиезера — М.: Наука, 1974, с. 107.
33. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.— УМН, 1959, т. 14, с. 87.
34. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток.— М.: Наука, 1971, с. 450.
35. Акишев Ю. С., Двуреченский С. В., Напартович А. П., Пашкин С. В., Трушкин Н. И.— ТВТ, 1982, т. 20, с. 30.
36. Акишев Ю. С., Высикайло Ф. И., Напартович А. П., Пономаренко В. В.— ТВТ, 1980, т. 18, с. 266.
37. Lloyd K. H., Haerendel G.— J. Geophys. Res., 1973, v. 78, p. 7389.
38. Dzubenko N. I. et al.— Planet. and Space Sci., 1983, v. 31, p. 849.
39. Ивченко И. С., Рожанский В. А., Ружин Ю. Я., Скомаровский В. С., Цендин Л. Д. Препринт ИЗМИРАН, № 6 (417).— Троицк, 1983.
40. Zabusky N. I., Doles J. H. III, Perkins F. W.— J. Geophys. Res., 1973, v. 78, p. 711.
41. Рожанский В. А.— Физ. плазмы, 1981, т. 7, с. 745.
42. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е.— УФН, 1967, т. 91, с. 609.
43. Вейтцнер Г.— В кн. Основы физики плазмы/Под ред. А. А. Галеева, Р. Судана.— М.: Энергоатомиздат, 1983, т. 1, с. 201.
44. Grad H.— Rev. Mod. Phys., 1960, v. 32, p. 830.
45. Fornasa S.— Phys. Fluids, 1983, v. 26, p. 797.
46. Акоруан А. А., Грибников З. С.— Sol. State Electron., 1976, v. 19, p. 41.
47. Акопян А. А., Грибников З. С.— ФТП, 1975, т. 9, с. 1485.
48. Блэкмор Дж. Статистика электронов в полупроводниках.— М.: Мир, 1964.
49. Константинов О. В., Перель В. И.— ФТТ, 1964, т. 6, с. 3364.
50. Каррова I. V., Kalashnikov S. G., Constantinov O. V., Perel V. I., Tsarenkov G. V.— Phys. Stat. Sol., 1969, v. 33, p. 863.
51. Kolb A. C., Griem R. H.— In: Atomic and Molecular Processes/Ed. D. Bates.— N.Y.: Academic Press, 1962; перевод: УФН, 1964, т. 82, с. 83.
52. Сагдеев Р. З.— В кн. Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 20.
53. Альвен Х. Космическая плазма.— М.: Мир, 1983.
54. Липеровский В. А., Пудовкин М. И. Аномальное сопротивление и двойные слои в магнитосферной плазме.— М.: Наука, 1983.
55. Высикайло Ф. И.— Физ. плазмы, 1985, т. 11, с. 2215.