

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

537.311.33

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР МЕТАЛЛА И ЕГО ОСОБЕННОСТИ**М. И. Каганов**

Простейшая модель.— Электроны проводимости — квазичастицы.— Фононы.— Электроны, фононы и электрон-фононное взаимодействие.— Низкоэнергетические состояния.— Взаимодействие: перенормировки и особенности.— Перенормировка электронного спектра, обязанная взаимодействию электронов с фононами.— Время жизни электронов и его особенности.— Время жизни фононов и его особенности.— Длинноволновые фононы.— Квазиволны, или неэкспоненциально затухающие волны в металле.

1. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ

Простейшая, но достаточно продуктивная модель металла объединяет подход Друде — Лоренца — Зоммерфельда с подходом Дебая. Характеристикой электронов металла в этой модели служит плотность электронов n , т. е. число электронов в единице объема (для одноатомных металлов оно обычно принимается равным $Z/a^3 = Zn_1$, Z — валентность металлического атома, a^3 — объем приходящейся на один атом ячейки кристалла, а n_1 — плотность ионов); характеристикой фононов служит дебаевская температура θ (или частота ω_D , $\theta = \hbar\omega_D$, или скорость звука s). Считая массу электрона металла совпадающей с массой свободного электрона m , можно вычислить энергию Ферми электронов проводимости ε_F и их скорость v_F , фермиевский импульс p_F (он определяется плотностью n):

$$p_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \hbar = (3\pi^2 Z)^{1/3} \hbar/a, \quad (1)$$

$$v_F = \frac{p_F}{m}, \quad \varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}.$$

Максимальный волновой вектор по дебаевской модели есть $k_m = (6\pi^2)^{1/3}/a$. Поэтому

$$\theta = \hbar\omega_D = (6\pi^2)^{1/3} \hbar s a^{-1}. \quad (2)$$

Вследствие существенного различия масс электронов и ионов ($M \gg m$) имеем *)

$$\frac{s}{v_F} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll 1, \quad \frac{\theta}{\varepsilon_F} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll 1. \quad (3)$$

*) Цепочка приведенных ниже порядковых соотношений показывает происхождение выписанных оценок и подчеркивает их приближительный характер:

$$\omega_D^2 \sim \frac{\kappa}{M}, \quad \kappa \sim \frac{U}{a^2}, \quad U \sim \varepsilon_F, \quad \frac{1}{a^2} \sim p_F^2/\hbar^2, \quad s \sim \omega_D a,$$

κ — жесткость решетки, U — энергия взаимодействия между соседними атомами; оправданием соотношения $U \sim \varepsilon_F$ может служить теорема вириала.

Эти оценки сохраняются и при более реалистичном рассмотрении электронов и фононов, они служат оправданием адиабатического приближения, позволяющего использовать теорию возмущений при учете электрон-фононного взаимодействия. На рис. 1 изображен описанный выше одночастичный спектр модельного «металла».

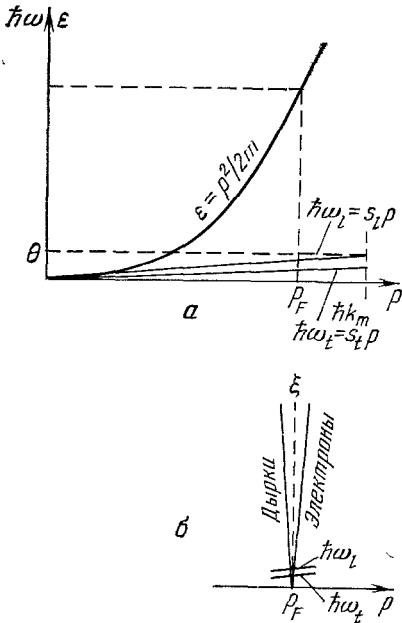


Рис. 1. Электронный и фононный спектр металла в модели Друде — Лоренца — Зоммерфельда — Дебая (схема).

а — Зависимость энергии электрона ε и фононов $\hbar\omega$ от импульса при $\hbar k_m > p_F$; б — зависимость энергии электрона (дырки) и фононов в тех же условиях. Буквы l и i отмечают поляризацию фононов

возникновения нескольких полостей поверхности Ферми в одной зоне (при одном и том же номере α). Суммарный объем поверхности Ферми подчиняется теореме Латтинжера ²:

$$\frac{2\tau_F}{(2\pi\hbar)^3} = n_e, \tag{5}$$

где n_e — число электронов в частично заполненных зонах ($n_e = \sum_{\alpha} n_{\alpha}$, n_{α} — число электронов в α -й зоне, суммирование производится только по частично заполненным зонам).

Следует подчеркнуть, что существование фермиевской поверхности не означает пренебрежения взаимодействием между электронами. Энергия квазичастицы $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p})$ учитывает не только взаимодействие электронов с ионами, но и взаимодействие электронов друг с другом. Важнейшей чертой основного состояния металла может служить факт *частичного* заполнения его пространства квазиимпульсов (периодического \mathbf{p} -пространства). Возбуждение электронной системы металла означает «рождение» электронов и дырок **, их энергии при $|\mathbf{p} - \mathbf{p}_F^{\alpha}| \ll \hbar/a$

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) - \varepsilon_F \approx (\mathbf{p} - \mathbf{p}_F^{\alpha}) \mathbf{v}_F^{\alpha} & \text{(для электронов),} \\ \varepsilon_F - \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) \approx (\mathbf{p}_F^{\alpha} - \mathbf{p}) \mathbf{v}_F^{\alpha} & \text{(для дырок)} \end{cases} \tag{6}$$

*) Речь идет, во-первых, о монокристаллах; во-вторых, о нормальных (несверхпроводящих) металлах (о сверхпроводимости см. ниже).

**) Здесь термин «дырка» употребляется для обозначения свободного состояния с энергией, меньшей фермиевской.

2. ЭЛЕКТРОНЫ ПРОВОДИМОСТИ — КВАЗИЧАСТИЦЫ

Согласно современным представлениям (см. ¹, § 61) о металле *) электроны проводимости образуют ферми-жидкость, а индивидуальными носителями заряда служат квазичастицы, подчиняющиеся фермиевской статике (фермионы). Их состояния описываются в терминах зонной теории — квазиимпульсом \mathbf{p} и номером зоны α , и часто обозначаются $|\alpha, \mathbf{p}\rangle$; число электронов в состоянии $|\alpha, \mathbf{p}\rangle$ обозначим $n_{p\alpha}$: $n_{p\alpha} = 0$ или 1. Основное состояние электронной подсистемы металла подобно основному состоянию ферми-газа: поверхность Ферми

$$\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) = \varepsilon_F \tag{4}$$

отделяет занятые состояния от свободных ($n_{p\alpha} = 1$ при $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) < \varepsilon_F$, $n_{p\alpha} = 0$ при $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) > \varepsilon_F$). Если энергетические зоны перекрываются, поверхность Ферми может иметь полости в нескольких зонах. Локальные минимумы закона дисперсии $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p})$ могут быть причиной существо-

— линейные функции квазимпульса; \mathbf{p}_F^α — точка на α -й полости поверхности Ферми,

$$\mathbf{v}_F^\alpha = \left. \frac{\partial \varepsilon_\alpha(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_F^\alpha} \quad (7)$$

— скорость электрона, совпадающая с нормалью к поверхности Ферми (отметим, что $\xi_\alpha(\mathbf{p}) > 0$).

В случае вырождения поверхность Ферми имеет точки самопересечения, которые, как правило, суть конические точки (см. ³, § 2). Вблизи этих точек закон дисперсии электронов и дырок квадратичен (примером может служить графит, поверхность Ферми которого имеет конические точки; см. ³, § 11, а также ⁴). Характерный интервал изменения энергии электрона и дырки $\xi_\alpha(\mathbf{p})$ определяется зонной структурой. В хороших металлах ширина каждой зоны порядка атомной энергии $\varepsilon_\alpha \sim \hbar^2/ma^2 \sim e^2/a$. Взаимодействие между электронами усложняет не только конкретные расчеты, но и принципы описания электронной системы (в смысле перехода от частиц к квазичастицам), однако не изменяет оценки порядков величин; средняя энергия электрон-электронного взаимодействия, учитываемая ферми-жидкостным описанием, приблизительно равна средней энергии взаимодействия электронов с ионным остовом. Более существенно усложнение структуры спектра, обусловленное периодичностью пространства, в котором движутся электроны. Поверхность Ферми — периодическая структура, период которой задан геометрией кристалла:

$$\xi_{\alpha'}(\mathbf{p} + 2\pi\hbar\mathbf{b}) = \varepsilon_\alpha(\mathbf{p}), \quad (8)$$

где \mathbf{b} — произвольный вектор обратной решетки. Минимальная длина вектора обратной решетки $\sim 1/a$. Поэтому \hbar/a — характерный размер поверхности Ферми: для открытых поверхностей — период, для замкнутых — размер каждой полости, периодически повторяющейся в каждой элементарной ячейке \mathbf{p} -пространства (поверхности Ферми классифицируются по своим геометрическим свойствам ³: открытые и замкнутые, электронные и дырочные *); металлы, у которых объем дырочной части поверхности Ферми равен объему электронной части, называют компенсированными). Пересечение зон или близость к пересечению может несколько изменить эти оценки: у большинства металлов поверхности Ферми наряду с «большими» полостями имеют полости, размеры которых значительно меньше размеров ячейки обратного пространства ⁵. Исследование магнитного пробоя ⁶ показало, что весьма часто полости поверхности Ферми в разных зонах ($\alpha \neq \alpha'$) близко подходят друг к другу, и отделяющие их барьеры малы. Однако, как правило, малость, о которой идет речь, не слишком изменяет оценки, сделанные на основании газовой модели (см. выше): скорость электрона даже на малой полости поверхности Ферми значительно больше скорости звука, а эффективная масса электрона m^* порядка массы свободного электрона m^{**}) и значительно меньше массы иона M . Естественно, условие применимости адиабатического приближения $(m^*/M)^{1/2} \ll 1$ сохраняется.

К металлам первой группы таблицы Менделеева (1A: Li, Na, K, Rb, Cs и 1B: Cu, Ag, Au) не относится замечание о малых полостях поверхностей Ферми — их у поверхностей Ферми этих металлов попросту нет. Этот хорошо установленный факт находит свое объяснение в зонных расчетах, исходящих из электронной структуры металлических атомов ⁷.

*) Термин «дырка» здесь имеет не тот смысл, что был использован выше; «дырка» — свободное состояние с отрицательной эффективной массой, отвечающая ему энергия больше энергии Ферми!

**) Хотя эффективная масса может быть введена по-разному, нет необходимости уточнять определение m^* , так как здесь речь идет о качественной картине.

3. ФОНОНЫ

Колебания ионов металла, конечно, не могут быть количественно описаны теорией Дебая. Необходимо исходить из реального периодического расположения ионов в кристаллической решетке. Колебательный спектр кристалла определяется зависимостью частот колебаний от квазиволнового вектора *) \mathbf{k} ($\hbar\mathbf{k}$ — квазимпульс):

$$\omega_\nu = \omega_\nu(\mathbf{k}), \quad \nu = 1, 2, \dots, 3r, \quad (9)$$

где r — число ионов в элементарной ячейке. Для трех из этих ветвей (акустических) частоты обращаются в нуль при $\mathbf{k} = 0$ и линейно зависят от \mathbf{k} при $ak \ll 1$:

$$\omega_a = s_a(\mathbf{n})k, \quad a = 1, 2, 3; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}; \quad (10)$$

$s_a(\mathbf{n})$ — скорость звука a -й ветви. Выбор начала координат в периодическом \mathbf{k} -пространстве условен (периоды, естественно, равны $2\pi b$). Поэтому точнее было бы сказать так: в ячейке \mathbf{k} -пространства есть точка, в которой частоты трех из $3r$ ветвей колебаний обращаются в нуль по закону (9) (если квазиволновой вектор отсчитывать от этой точки). Эта точка совпадает с центром первой зоны Бриллюэна кристалла. При таком выборе начала координат в \mathbf{k} -пространстве квазиволновой вектор \mathbf{k} полностью эквивалентен волновому вектору макроскопической звуковой волны, если $ka \ll 1$. Это соответствие позволяет вывести уравнения теории упругости из динамических уравнений колебаний кристаллической решетки (см., например, ⁸).

Квантование волн смещений ионов вводит фононы — квазичастицы, подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна (бозоны), числа заполнения которых $N_{\mathbf{k}, \nu}$ определяют степень возбуждения кристаллической решетки ($N_{\mathbf{k}, \nu} = 0, 1, 2, \dots$ — целые числа). В основном состоянии фононов нет вовсе: $N_{\mathbf{k}, \nu} \equiv 0$ — пространство квазиволновых векторов пусто. Конечно, это не означает, что ионы не совершают нулевых колебаний.

При вычислении динамической матрицы кристалла учитывать электроны проводимости необходимо — хотя бы потому, что электроны компенсируют кулоновское отталкивание ионов и без электронов стабильная система положительно заряженных ионов не могла бы существовать. Расчеты электронного и фононного спектра должны производиться самосогласованно. Основой таких расчетов служит адиабатическое приближение, позволяющее использовать тот или другой вариант теории возмущений (см., например, ⁹). В простейшем, но весьма физически прозрачном подходе роль электронов (при расчете спектра фононов) сводится к экранировке поля, создаваемого колеблющимся ионом ¹⁰.

4. ЭЛЕКТРОНЫ, ФОНОНЫ И ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Установившаяся традиция завершает самосогласованный расчет энергетического спектра металла формулировкой гамильтониана квазичастиц (фермионов — электронов и дырок, бозонов — фононов)

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha, \mathbf{p}} \xi_\alpha(\mathbf{p}) \hat{a}_{\alpha\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\alpha\mathbf{p}} + \sum_{\nu, \mathbf{p}} \hbar\omega_\nu(\mathbf{p}) \hat{b}_{\nu\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\nu\mathbf{p}} + \mathcal{H}_{\text{int}}; \quad (14)$$

$\hat{a}_{\alpha\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\alpha\mathbf{p}}$ — фермионные* операторы рождения и уничтожения электрона в состоянии $|\alpha, \mathbf{p}\rangle$ (или дырки — в зависимости от значения \mathbf{p} ; см. (6)), спин-

*) Знания законов дисперсии квазичастиц для описания свойств металла, конечно, недостаточно. Надо знать волновые функции стационарных состояний квазичастиц (для электронов и дырок — блоховские волны, для фононов — векторы поляризации колебаний). Мы ограничимся описанием энергетического спектра.

вый индекс включен в α ; $\hat{b}_{\nu\mathbf{p}}^+$, $\hat{b}_{\nu\mathbf{p}}$ — бозонные операторы рождения и уничтожения фонона в состоянии $|\nu, \mathbf{p}\rangle$. При сравнении с (9) и (10) надо учесть, что для фононов $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Гамильтониан \mathcal{H}_{int} описывает взаимодействие между квазичастицами. Выражение (11) носит несколько условный характер. При его конкретизации, может быть, необходимо использовать разные выражения для \mathcal{H}_{int} в электронном и фононном гамильтонианах (ср.^{44,45}). \mathcal{H}_{int} имеет слагаемые, содержащие операторы рождения и уничтожения в числе, большем двух (ангармонизмы). Естественно выделить фонон-фононное взаимодействие

$$\mathcal{H}_{\text{ph, ph}} = \sum_{1, 2, 3} \Phi_{1; 2, 3} \hat{b}_1^+ \hat{b}_2 \hat{b}_3 + \text{э.с.}, \quad (12)$$

электрон-электронное

$$\mathcal{H}_{\text{e, e}} = \sum_{1, 2; 3, 4} \Psi_{1, 2; 3, 4} \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_3 \hat{a}_4 + \text{э.с.} \quad (13)$$

и электрон-фононное, которое и будет интересовать нас главным образом:

$$\mathcal{H}_{\text{e, ph}} = \sum_{1, 2, 3} \lambda_{1, 2, 3}^I \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \hat{b}_3 + \lambda_{1, 2, 3}^{II} \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \hat{b}_3^+ + \text{э.с.} \quad (14)$$

Выписаны слагаемые с наименьшим числом операторов рождения и уничтожения. Индексы 1, 2, 3 . . . означают α_1, \mathbf{p}_1 и т. д., или $\nu_1 \mathbf{p}_1$ и т. д. Суммирование по \mathbf{p}_i ведется в пределах одной элементарной ячейки. Амплитуды $\Phi \dots$, $\Psi \dots$, $\lambda \dots$ обязательно содержат множитель, обеспечивающий закон сохранения квазиимпульса; например, для фонон-фононного взаимодействия

$$\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + 2\pi\hbar\mathbf{b},$$

где \mathbf{b} , как всегда, вектор обратной решетки — такой, что все векторы начального и конечного состояний оказываются в одной элементарной ячейке \mathbf{p} -пространства.

Мы уже отмечали, что детальное рассмотрение электронного и фононного спектров металла не отменяет оценок, основанных на простейших прикидках (см. примечание к с. 507). Поэтому

$$\nu_{\text{F}} \sim \frac{\hbar}{am}, \quad s \sim \frac{\hbar}{a\sqrt{Mm}}, \quad \omega_{\text{D}} \sim \frac{s}{a}. \quad (15)$$

Так как $a \sim \hbar^2/e^2m$, то последним оценкам можно придать совсем простой вид:

$$\nu_{\text{F}} \sim \frac{1}{137} c, \quad s \sim \frac{c}{137} \sqrt{\frac{m}{M}}, \quad \theta \sim \frac{mc^2}{(137)^2} \sqrt{\frac{m}{M}}, \quad \frac{1}{137} \approx \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (15')$$

Для оценки по порядку величины решеточных ангармонизмов (коэффициентов в выражениях (12) и (14)) заметим, что оператор (ν, \mathbf{k}) -й компоненты Фурье вектора смещения пропорционален $(\hat{b}_{\nu\mathbf{k}}^+ + \hat{b}_{\nu\mathbf{k}})/2$, а коэффициент пропорциональности порядка

$$\sqrt{\frac{1}{MN} \frac{\hbar}{\omega_{\nu}(\mathbf{k})}};$$

N — число ячеек кристалла. Воспользовавшись этим, можно получить¹¹

$$\Phi \dots \sim \theta \sqrt{\frac{\theta}{Ms^2}}, \quad \lambda \dots \sim \sqrt{\theta \epsilon_{\text{F}}}. \quad (16)$$

Опущен множитель $N^{-1/2}$, который уничтожается при расчете конкретного процесса за счет суммирования по квазиимпульсам. Кроме того, оценка (16) не содержит зависимости от квазиимпульсов, которая может существенно уменьшить значение амплитуд (например, когда речь идет об испускании

длинноволнового акустического фонона, амплитуда $\lambda \dots$ содержит дополнительный множитель ak ; см. ¹², § 79).

Амплитуда электрон-электронного взаимодействия $\Psi \dots$ определяется кулоновским взаимодействием двух электронов друг с другом, некоторая часть которого, правда, «вошла» в закон дисперсии квазичастиц (электронов и дырок). Кроме того, на больших расстояниях электрон-электронное взаимодействие заведомо нейтрализуется (экранируется) перераспределением других электронов *) (всех остальных, кроме двух рассматриваемых ¹³).

Характерная черта гамильтониана (11) со взаимодействием, заданным формулами (12) — (14), — это, казалось бы, большая величина электрон-фононного и электрон-электронного взаимодействия **, ставящая под сомнение возможность пользоваться представлением о почти независимых квазичастицах — электронах и фононах. В действительности, во всех случаях, кроме исключительных (на некоторых мы остановимся), благодаря существенному различию масс электронов и ионов, взаимодействие оказывается эффективно малым, причем при рассмотрении электронов малым параметром служит не Ψ , а степень возбуждения электронной подсистемы: T/ε_F — при решении макроскопических задач (T — температура), ξ/ε_F — при решении микроскопических задач. Другими словами, важную роль играет *вырождение* электронов металла, из-за которого число квазичастиц (электронов, дырок) мало, и потому их взаимодействие не слишком велико.

В природе не бывает идеальных, бездефектных металлов, бесконечных кристаллов, абсолютного нуля температуры и т. п. упрощенных по воле физика-теоретика объектов. Однако при изучении спектра элементарных возбуждений макроскопического тела естественно исходить именно из предельно упрощенной схемы. Поэтому мы будем считать, что температура металла $T = 0$, а дефекты в нем полностью отсутствуют. Это упрощение позволяет исследовать именно присущие телу (даже идеальному) собственные механизмы диссипации, ограничивающие время жизни τ квазичастиц ***). Сравнение времени, обязанного собственному механизму диссипации, с тем, которое обязано дефектам, дает возможность придать количественный смысл понятию «бездефектный кристалл». Предположение о том, что $T = 0$ не только удобно, но и естественно при исследовании свойств отдельных квазичастиц.

5. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

На рис. 2, а в пренебрежении ангармонизмами изображена зависимость энергии квазичастиц металла от квазимпульса в «хорошем» кристаллографическом направлении. Хотя рисунок напоминает рис. 1, б, имеются и существенные различия, главное из которых — анизотропия: при другом направлении зависимость может отличаться не только количественно (значениями всех параметров), но и качественно. Например, если полость поверхности Ферми не объемлет начала координат (напомним, что оно выбрано фононными ветвями), то в одних направлениях может вовсе не быть электронов (или дырок) и в другом — число электронно-дырочных ветвей удвоено (рис. 2, б).

Мы ограничиваемся обсуждением только наиболее низкоэнергетических состояний металла ($\varepsilon \ll \theta$). Если металл имеет несколько атомов в элементарной ячейке, то к акустическим ветвям фононного спектра (см. рис. 1 и 2) надо добавить оптические ветви.

*) Надо помнить, что перераспределение происходит на фоне положительно заряженных ионов.

***) Фонон-фононное взаимодействие мало по параметру

$$\left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \ll 1.$$

****) Время жизни $\tau = \hbar/\Gamma$, где $\Gamma = \text{Im } E$, а E — комплексная «энергия» квазичастицы — полюс одночастичной функции Грина (¹¹, §§ 8, 65).

Фононы — кванты согласованных колебаний ионов и электронов, сохраняющих локальную нейтральность металла (см. ниже). Электронная жидкость может совершать колебания и другого типа — относительно практически неподвижных ионов. Эти колебания, характерные для любой двухкомпонентной плазмы, из-за нарушения локальной нейтральности обладают высокими

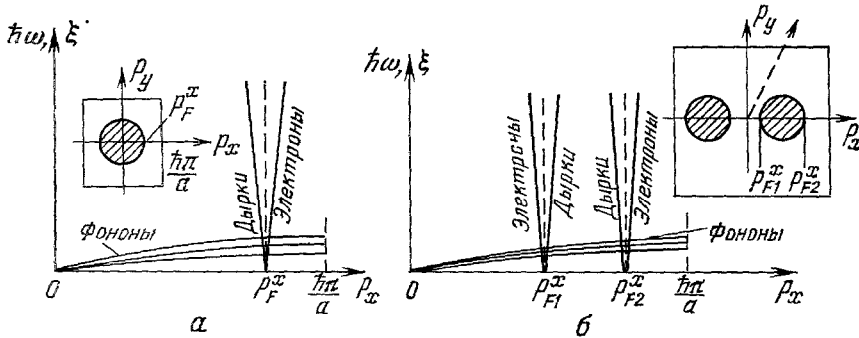


Рис. 2. Схематическое изображение электронного и фононного спектра металлов.

a — Электронная поверхность Ферми объемлет начало координат; *b* — начало координат вне электронной поверхности Ферми (в случае дырочной поверхности Ферми электронная и дырочная ветви меняются местами). На вставках — поверхности Ферми. Пунктиром показано направление, в котором нет дырок, а энергия электронов существенно отличается от энергии Ферми. Заштрихована (на вставках) область занятых электронами состояний ($\epsilon < \epsilon_F$)

частотами $\omega \sim \omega_L = (4\pi n e^2 / m)^{1/2}$. Энергия плазмонов — квазичастиц, соответствующих этим колебаниям, — порядка энергии Ферми:

$$\hbar\omega_L \sim \sqrt{\frac{4\pi\hbar^2 e^2 n}{m}} \sim \sqrt{\frac{\hbar^2}{m a^2} \frac{e^2}{a}} \sim \epsilon_F, \text{ так как } \frac{e^2}{a} \sim \frac{\hbar^2}{m a^2} \sim \epsilon_F$$

(см. выше). Поэтому плазмоны не нанесены на рис. 1 и 2.

В компенсированных металлах в определенных условиях ¹⁴, по-видимому, могли бы наблюдаться квазизвуковые электрон-дырочные колебания с линейным законом дисперсии (амплитуда колебаний плотности заряда в этих модах равна нулю). Однако, насколько нам известно, эти ветви колебаний пока не обнаружены.

Поместив металл в магнитное поле, мы изменяем характер движения электронов в нем. Вращение электронов с циклотронной частотой $\omega_C = eH/m^*c$ создает возможность существования разнообразных незатухающих волн в проводниках, при квантовании — своеобразных квазичастиц-бозонов (геликонов, доплеронов и др.) с энергиями, значительно меньшими, чем ϵ_F и $\hbar\omega_L$. Если бы мы исследовали влияние магнитного поля, эти квазичастицы должны были бы занять свое «важное» место на рисунках и в изложении. Мы же отметим только, что и плазмоны, и квазичастицы, вызванные к жизни магнитным полем, суть модифицированные фотоны — кванты электромагнитного поля *) (исключение составляет продольный плазмон, движение которого не сопровождается колебанием магнитного поля).

Бозевские ветви колебаний не исчерпываются фононами, даже в отсутствие магнитного поля. Если металл обладает спиновой структурой, то колебания средних магнитных моментов (спиновые волны) генерируют своеобразные квазичастицы — магноны, подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна. Характерная энергия магнона (аналог дебаевской энергии) определяется температурой Кюри θ_C (для ферромагнетиков) или температурой Нееля θ_N (для антиферромагнетиков). Как правило, $\theta_C, \theta_N \ll \epsilon_F$, и в этом смысле

*) См. 15, 16, 17.

магноны похожи на фононы. Считая исследуемые металлы парамагнетиками, мы не будем заниматься магنونными ветвями спектра *).

Среди низкоэнергичных колебаний электронной подсистемы металла своеобразное место занимают колебания функции распределения электронов проводимости, которые можно назвать «квазиволнами». Пусть $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)$ — \mathbf{k} -я компонента неравновесной части функции распределения электронов. В бесстолкновительном пределе она может совершать колебания с частотой, зависящей как от волнового вектора \mathbf{k} , так и от квазимпульса \mathbf{p} (см. ¹⁹):

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}(\mathbf{p}). \quad (17)$$

Это соотношение можно трактовать как закон дисперсии «квазиволн». Если электронную систему вывести из состояния равновесия и предоставить самой себе, то после затухания электромагнитных полей (за время, определяемое ландауским затуханием ¹⁹) система электронов будет совершать колебания с частотами, заданными уравнением (17).

Если начальное возмущение достаточно слабое и колебания линейны, то вырождение электронной жидкости из всех скоростей выделяет фермиевские, т. е.

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}(\mathbf{p}_F) \quad (17')$$

(\mathbf{p}_F — принадлежит поверхности Ферми). Хотя при распространении «квазиволн» плотность электронов не колеблется, «квазиволны» вполне реальны. Так поглощение звука электронами металла в бесстолкновительном пределе (см. ниже) есть, по существу, резонанс между звуковой волной и «квазиволной». На роли «квазиволн» в высокочастотных свойствах металла мы еще остановимся.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ: ПЕРЕНОРМИРОВКИ И ОСОБЕННОСТИ

Строго говоря, $\xi_{\alpha}(\mathbf{p})$ и $\hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p})$ — не энергии квазичастиц (электронов, дырок и фононов соответственно). Взаимодействие, описываемое \mathcal{H}_{int} , перенормирует величины $\xi_{\alpha}(\mathbf{p})$ и $\hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p})$, а кроме того, служит причиной конечного времени жизни квазичастиц. Наиболее яркий пример перенормировки — появление щели Δ в спектре электронов и дырок, обязанное образованию куперовских пар, а в результате — переходу в сверхпроводящее состояние (см., например, ¹, гл. V). Хотя этот феномен — следствие электрон-электронного взаимодействия путем обмена виртуальными фононами, его подробное описание выходит за рамки настоящей статьи. Мы ограничимся изображением спектра электронов и дырок в сверхпроводящем состоянии (рис. 3) и подчеркнем, что нас главным образом будут интересовать электроны и дырки с энергиями, существенно превышающими щель Δ , которая порядка градуса или нескольких градусов. Из встречающихся в данном контексте характерных энергий наименьшая $ms^2 \sim \sim 10\text{K}$ в подавляющем большинстве случаев больше

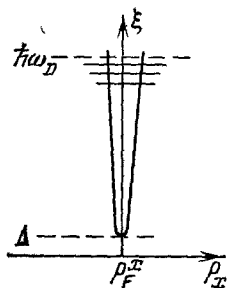


Рис. 3. Сверхпроводящая щель Δ во много раз меньше дебаевской энергии

Δ . Неучет эффекта куперовского спаривания вовсе не требует оправданий, если ограничиться металлами, которые не переходят в сверхпроводящее состояние вплоть до абсолютного нуля — таких не так мало.

Прежде чем изложить результаты ряда конкретных работ, в которых исследуется взаимодействие электронов и фононов, сделаем два необходимых замечания.

*) В магнитном поле, благодаря ферми-жидкостному взаимодействию, в нормальных (немагнитных) металлах могут распространяться и распространяются спиновые волны, предсказанные Силиным ¹⁸.

Первое. Особое внимание будет уделено длинноволновым фононам. Они допускают классическое рассмотрение, так как при $ak \ll 1$ квазиволновой вектор $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ совпадает с истинным волновым вектором (см. выше), а звуковую волну с определенными значениями \mathbf{k} и ω можно считать когерентным состоянием большого числа фононов ($N_{\mathbf{k}} \gg 1$).

Второе замечание относится к зависимости от квазимпульса величин $\xi_{\alpha}(\mathbf{p})$ и $\hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p})$. Для анализа аналитических свойств спектра возбуждений можно считать, что периодические функции $\xi_{\alpha} = \xi_{\alpha}(\mathbf{p})$ и $\hbar\omega_{\nu} = \hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p})$ не имеют особенностей *) или, если от них не удастся избавиться, они более слабы, чем те, которые возникают за счет перенормировки, обязанной \mathcal{H}_{int} (см. ниже).

Особенности у функций $\xi_{\alpha}(\mathbf{p})$ и $\hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p})$, по-видимому, могут возникать либо из-за приближенного метода расчета (их мы попросту не рассматриваем, считая, что расчет сделан достаточно последовательно **), либо из-за неоднородности заполнения импульсного пространства электронов в основном состоянии (расчет динамических характеристик металла, учитывающий взаимодействие между всеми частицами кристалла, может включать интегрирование по \mathbf{p} -пространству, неоднородность заполнения которого — существование разрывной ферми-ступеньки — в принципе может быть причиной особенностей ***). Однако, как мы убедимся, особенности, о которых пойдет речь ниже, как правило, связаны с интегрированием по поверхности Ферми; их характер и положение в \mathbf{p} -пространстве фононов и электронов определяются локальной структурой поверхности Ферми и ее размерами. Предполагается, что эти особенности отсутствуют у функций $\xi_{\alpha}(\mathbf{p})$ и $\hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p})$.

Повторим, взаимодействие квазичастиц, описываемое гамильтонианом \mathcal{H}_{int} , перенормирует законы дисперсии электронов (дырок) и фононов, а также ограничивает время жизни квазичастицы. Мы выпишем стандартные выражения для мнимых частей энергий электронов и фононов, так как их анализ, из-за наличия δ -функций, отвечающих закону сохранения энергии, более нагляден, чем анализ выражений для перенормировки самих энергий (реальных частей), а особенности энергий можно исследовать, воспользовавшись интегральной связью между действительными и мнимыми частями, обобщающими соотношения Крамерса — Кронига ****). Мы будем использовать теорию возмущений, так как усложнение не изменяет качественной картины, а в большинстве случаев выходит за пределы теории возмущений попросту нет необходимости.

Итак,

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon(\mathbf{p}) &= -\pi \sum_{\nu} \int d^3p' |M_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{\nu}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}') - \hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')) (1 - n_{\mathbf{p}'}), \\ \delta\omega_{\nu}(\mathbf{q}) &= -\pi \int d^3p |M_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{\nu}|^2 (n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) + \hbar\omega_{\nu}(\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{q})), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$M_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^{\nu} = \sqrt{2} \Lambda_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{\nu} |\mathbf{p} - \mathbf{p}'| (2\pi\hbar)^{-3/2} [\rho\hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')]^{-1/2}, \quad (19)$$

*) Под особенностями здесь и далее понимается обращение в бесконечность функций и/или (!) их производных.

**) Например, если при расчете закона дисперсии какой-либо квазичастицы оказывается, что ее скорость в некоторой точке \mathbf{p} -пространства обращается в бесконечность, то очевидно, что при последовательном учете запаздывания этого быть не может.

***) В ряде работ ⁹ особенностью называют существенное отличие закона дисперсии реального фонона от того, который получен на основе более примитивной модели, чем та, которая использована в упоминавшихся работах (например, без учета вклада электронов или без учета взаимодействия электрона с ионным остовом). Подчеркнем: мы исходим из хороших функций $\xi_{\alpha}(\mathbf{p})$ и $\hbar\omega_{\nu}(\mathbf{p})$, которые вместе с геометрией решетки, поверхностью Ферми и амплитудами $\Phi \dots, \Psi \dots, \lambda \dots$ составляют модель металла в нормальном состоянии.

****) Вычисление особенностей времени жизни квазичастиц, кроме того, ликвидирует неоднозначность \mathcal{H}_{int} , обязанную виртуальным процессам (см. [с. 511]).

а Λ_{pp}^y стремится к деформационному потенциалу при $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ и имеет порядок величины ε_F (см. ^{20,21}), ρ — плотность металла (сравнивая (18) и (19) с (14), легко установить связь между амплитудами $\lambda^I \dots, \lambda^{II} \dots$ и $M \dots$; только во избежание громоздкости мы ограничились однозонным приближением и потому опустили индекс номера зоны α); как и раньше, n_p — фермиевская ступенька; квазиимпульс фонона обозначен буквой \mathbf{q} . Выражения (18) записаны не в терминах электронов и дырок. Принятая здесь запись удобнее для геометрической интерпретации. Ясно, что добавив и вычтя под знаком δ -функции энергию Ферми ε_F , мы легко можем перейти от $\varepsilon(\mathbf{p})$ к $\xi(\mathbf{p})$ (ср. с (6)).

Электрон-электронное и фонон-фононное взаимодействия (12) и (13), конечно, тоже вносят вклад в $\text{Im } \varepsilon(\mathbf{p})$ и в $\text{Im } \hbar\omega_v(\mathbf{q})$. Они опущены, так как мы хотим сосредоточиться на электрон-фононном взаимодействии. При этом, правда, надо иметь в виду, что электрон-фононный механизм затухания является основным только при $|\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| > ms^2$, а при меньших энергиях главную роль играют электрон-электронное взаимодействие, в частности, через фононы ^{22,21} — оно приводит к квадратичной зависимости $\text{Im } \varepsilon(\mathbf{p})$:

$$\text{Im } \varepsilon(\mathbf{p}) \sim \varepsilon_F \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F}{\varepsilon_F} \right)^2. \quad (20)$$

7. ПЕРЕНОРМИРОВКА ЭЛЕКТРОННОГО СПЕКТРА, ОБЯЗАННАЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ ЭЛЕКТРОНОВ С ФОНОНАМИ

Влияние на спектр электронов их взаимодействия с фононами было исследовано Мигдалом ²². В ²² спектр электронов предполагался квадратичным и изотропным, а фононы — дебаевскими. Перенормировка, естественно, сводилась к перенормировке эффективной массы. В ²¹ полученные А. Б. Мигдалом формулы обобщены на случай произвольного закона дисперсии электронов и фононов.

На первый взгляд слова «перенормировка» и «произвольный закон дисперсии» не сочетаются. Какой смысл в перенормировке функции $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$, если она только *считается* известной, хотя, по существу, известно о ней весьма мало? (Речь, конечно, идет не столько о приближенном численном значении $\varepsilon(\mathbf{p})$, сколько о функциональной зависимости ε от \mathbf{p} .)

Дело в том, что перенормировка охватывает небольшую область \mathbf{p} -пространства, непосредственно примыкающую к поверхности Ферми $\Delta p \sim \hbar\omega_D/v_F$, причем на этом интервале перенормировка $\delta\varepsilon(\mathbf{p})$ изменяется на величину $\sim \hbar\omega_D$. Это приводит к конечному (в масштабе m/M) изменению скорости электронов: лишь при $\Delta p \gg ms$ скорость «выходит» на свое невозмущенное фононами значение $v = \partial\varepsilon/\partial p$ (см. ^{22,21}). Кроме того, малость интервала Δp , затронутого перенормировкой, позволяет получить выражение для $\text{Re } \delta\varepsilon$ в виде интеграла по поверхности Ферми ²²:

$$\text{Re } \delta\varepsilon(\mathbf{p}) = \oint \frac{dS_F}{v(\mathbf{p}_F)} |M_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_F}|^2 \ln \frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F - \hbar\omega(\mathbf{p} - \mathbf{p}_F)}{\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F + \hbar\omega(\mathbf{p} - \mathbf{p}_F)}, \quad (21)$$

из которого следует, что

$$\text{Re } \delta\varepsilon(\mathbf{p}) \sim \begin{cases} \varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F & \text{при } |\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| \ll \hbar\omega_D, \\ (\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F)^{-1} & \text{при } |\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| \gg \hbar\omega_D. \end{cases} \quad (22)$$

Как показано в ²¹, переход от одной зависимости к другой с обязательностью сопровождается особенностью, а возможно, и несколькими (см. раздел 8).

8. ВРЕМЯ ЖИЗНИ ЭЛЕКТРОНОВ И ЕГО ОСОБЕННОСТИ

Вернемся к формуле (18). Наличие под знаком интеграла δ -функции и множителя $(1 - n_{p'})$, отличного от нуля при $\varepsilon(p') > \varepsilon_F$, показывает, что интегрирование ведется (в p' -пространстве) по той части поверхности

$$\varepsilon(p') + \hbar\omega(p - p') = \varepsilon(p), \tag{23}$$

которая лежит вне поверхности Ферми. Поверхность (23) из-за того, что $\hbar\omega_D \ll \varepsilon_F$, близка к изоэнергетической поверхности

$$\varepsilon(p') = \varepsilon(p), \tag{24}$$

а если взаимодействие происходит с акустическими фононами*), то в одной точке (при $p' = p$) они соприкасаются. При $|\varepsilon(p') - \varepsilon(p)| \rightarrow 0$ поверхность (23) вблизи точки соприкосновения представляет из себя конус

$$\Delta p_n = -\frac{s}{v(p)} |p - p_\varepsilon|, \quad \Delta p_n = p'_n - p_n; \tag{24'}$$

p'_n и p_n — проекции векторов p' и p на нормаль к поверхности (24) в точке p , а p_ε — точка на поверхности (24). Согласно (18) имеем (рис. 4)

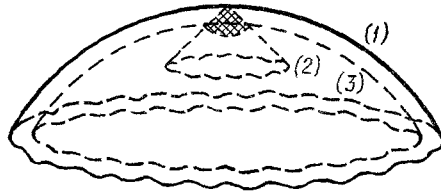
$$\text{Im } \delta\varepsilon(p) \approx \lambda_\varepsilon(p_F) |\varepsilon(p) - \varepsilon_F|^3, \quad |\varepsilon(p) - \varepsilon_F| \ll \hbar\omega_D, \tag{25}$$

$$\lambda(p_F) = -\frac{\pi \sum_a |\Lambda_{p_F}^a|^2}{3(2\pi\hbar)^3 \rho s_a^4 v_F}, \quad \Lambda_{p_F}^a = \Lambda_{p, p'}^a \Big|_{\substack{p=p_F \\ p'=p_F}}, \quad v_F = v(p_F);$$

здесь p_F — квазиимпульс, отвечающий точке на поверхности Ферми, ближайшей к p (p и p_F расположены на одной нормали к поверхности Ферми;

Рис. 4. К выражению (18): область интегрирования в p' -пространстве при $|\varepsilon(p) - \varepsilon_F| \rightarrow 0$ (заштрихована).

1 — поверхность $\varepsilon(p') = \varepsilon(p)$, 2 — поверхность (23), 3 — поверхность Ферми



$s_a = s_a(v_F/v_F)$ — скорость звука в направлении нормали, суммирование ведется по трем акустическим ветвям). Формула (25) обобщает результат Мигдала (см. 22), показывая, что кубическая зависимость $\text{Im } \delta\varepsilon(p)$ от $|\varepsilon(p) - \varepsilon_F|$ не связана с упрощающими предположениями о спектре электронов проводимости. Видно, что локальные свойства поверхности Ферми проявляются благодаря множителю $\lambda(p_F)$, который, конечно, меняется при «движении» p вокруг поверхности Ферми, но если поверхность Ферми гладкая, ожидать каких-либо особенностей у $\lambda(p_F)$ нет оснований. Если же поверхность Ферми имеет коническую точку p_F^c , в которой скорость обращается в нуль, то для квазиимпульсов p , близких к p_F^c , формула (25) перестает быть справедливой. Можно показать, что вокруг конической точки есть небольшая область p -пространства, в которой мнимая часть $\delta\varepsilon(p)$, обусловленная электрон-фононным взаимодействием, равна нулю, а определяется взаимодействием электронов друг с другом (см. (20)). Причина «выключения» электрон-фононного взаимодействия в том, что электрон, скорость которого меньше скорости звука, не может испустить (поглотить) фонон.

*) Только этот случай — одноатомного металла — мы здесь и рассмотрим. В 21 показано, что взаимодействие с оптическими фононами, не изменяя зависимости $\delta\varepsilon(p)$ при $|\varepsilon(p) - \varepsilon_F| \rightarrow 0$, привносит в эту зависимость дополнительную особенность — скачок производной при том значении $\varepsilon(p) - \varepsilon_F$, при котором поверхность (23) касается поверхности Ферми.

При $|\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| \gg \hbar\omega_D$ поверхность (23) целиком расположена вне поверхности Ферми, и $\text{Im } \delta\varepsilon(\mathbf{p})$ слабо зависит от энергии — выходит на «насыщение»:

$$\text{Im } \delta\varepsilon(\mathbf{p}) \approx -\pi \oint \frac{dS_F}{v(\mathbf{p}_F)} |M_{\mathbf{p}_F, \mathbf{p}}|^2. \quad (26)$$

Слово «насыщение» взято в кавычки, так как $M_{\mathbf{p}_F, \mathbf{p}}$ зависит от \mathbf{p} , но изменяется на интервале $\sim \hbar/a$. Динамический характер полученных выражений ($\text{Im } \delta\varepsilon(\mathbf{p}) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$) виден из оценки по порядку величины:

$$|\text{Im } \delta\varepsilon(\mathbf{p})| \sim \begin{cases} \theta \left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F}{\theta} \right)^3, & |\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| \ll \theta, \\ \theta, & |\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| \gg \theta, \end{cases} \quad (27)$$

а $\theta \sim M^{-1/2}$. Сравнение формул (20) и (27) показывает, что последняя справедлива при $|\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| \gg \theta^2/\varepsilon_F$.

Переход от кубической зависимости к насыщению сопровождается особенностями. Среди них заведомо есть *обязательная* — при тех значениях

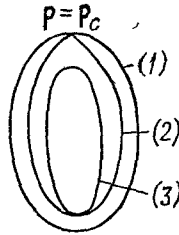


Рис. 5. Расположение в \mathbf{p}' -пространстве встречающихся в тексте поверхностей при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_c$
 1 — $\varepsilon(\mathbf{p}') = \varepsilon(\mathbf{p})$, 2 — поверхность (23),
 3 — поверхность Ферми

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_c$, при которых поверхность (23) полностью выходит за пределы поверхности Ферми *) (рис. 5). При $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_c$ и $\varepsilon \leq \varepsilon_c \equiv \varepsilon(\mathbf{p}_c)$ линия пересечения поверхности Ферми с поверхностью (23) — эллипс. Это позволяет вычислить особую часть (ОЧ) $\text{Im } \delta\varepsilon(\mathbf{p})$ (см. ²¹):

$$\text{ОЧ } \text{Im } \delta\varepsilon(\mathbf{p}) = \begin{cases} K_c (\varepsilon_c - \varepsilon(\mathbf{p})), & \varepsilon(\mathbf{p}) < \varepsilon_c, \\ 0, & \varepsilon(\mathbf{p}) > \varepsilon_c, \end{cases} \quad (28)$$

$K_c = \pi |M_c|^2 m_c^*/v_c$, а $m_c^* = \sqrt{\tilde{M}_1 \tilde{M}_2} \sim \sqrt{mM}$ — параметр размерности массы, возникающий при разложении аргумента δ -функции по отклонению от точки касания; величины, входящие в коэффициент, берутся в точке касания.

Если поверхность Ферми имеет вмятины, перемычки, то практически всегда возможны промежуточные особенности (их геометрическое место точек расположено между поверхностью Ферми и геометрическим местом точек \mathbf{p}_c). Среди них особый интерес представляют те, которые обусловлены изменением топологии линии пересечения поверхности (23) с поверхностью Ферми. Согласно ²¹ особая часть имеет следующую структуру:

$$\text{ОЧ } \text{Im } \delta\varepsilon(\mathbf{p}) = K'_c \Delta \ln \frac{\varepsilon_F}{|\Delta|}, \quad \Delta = \varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}_c'); \quad (29)$$

K'_c отличается от множителя в (28) заменой $(\tilde{M}_1 \tilde{M}_2)^{1/2}$ на $|\tilde{M}_1 \tilde{M}_2|^{1/2}$ (в этом случае $\tilde{M}_1 \tilde{M}_2 < 0$) и отсутствием в множителе π .

Как уже говорилось, легко установить соответствие между особенностями $\text{Im } \delta\varepsilon(\mathbf{p})$ и $\text{Re } \delta\varepsilon(\mathbf{p})$ (табл. I).

*) Электронный и фононный спектры задают геометрическое место особых точек \mathbf{p}_c вокруг каждой полости поверхности Ферми; в общем случае точки \mathbf{p}_c удалены от поверхности Ферми на «расстояние» порядка ms .

Т а б л и ц а I

$\text{Im } \delta \varepsilon (\mathbf{p})$	Скачок производной	$\Delta \ln (\varepsilon_F / \Delta)$
$\text{Re } \delta \varepsilon (\mathbf{p})$	$\Delta \ln (\varepsilon_F / \Delta)$	Скачок производной

Видно, что в результате взаимодействия электронов с фононами в электронном законе дисперсии нормального металла с *обязательностью* возникает особенность типа $\Delta \ln |\Delta|$. Но ведь это означает (формально!), что скорость электрона $v = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ обращается в бесконечность при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_c$. Это обстоятельство заставляет продумать вопрос о механизме «обрезания». В данном случае нет необходимости учитывать запаздывание (см. примечание на с. 515), так как естественным механизмом «обрезания» служит конечность времени жизни электрона с энергией $\varepsilon(\mathbf{p}) > \varepsilon_F$. Поэтому место расходящегося логарифма займет $\ln (\varepsilon_F / \theta) \sim \ln (M/m)$ — характерный множитель, чаще всего возникающий в тех случаях, когда стандартная теория возмущений (адиабатическое приближение) отказывает.

Последние формулы могут претендовать только на качественное описание структуры электронного спектра, так как для выявления особенности в данном случае теория возмущений не пригодна. Коэффициенты в (28) и в (29) ~ 1 , и даже после замены $\ln (\varepsilon_F / |\Delta|) \rightarrow \ln M/m$ изменение скорости при $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_c$ превышает скорость $\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_c$. Судя по работе Мигдала ²², строгое рассмотрение не изменяет качественной картины перенормировки спектра. Однако в ²² не исследовались особенности $\text{Im } \delta \varepsilon$ и $\text{Re } \delta \varepsilon$. И, возможно, рассмотрение, выходящее за пределы теории возмущений, заставит пересмотреть формулы, вошедшие в таблицу. Часто бывает, что точные формулы отличаются от приближенных перенесением расходящегося слагаемого из числителя в знаменатель! Во всяком случае, приведенные здесь результаты (см. также ²¹) означают: при $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_c$ происходит нечто «интересное». И в таком — обращающем внимание на непосредственную окрестность поверхности Ферми — виде они несомненно сохраняются в строгой теории.

9. ВРЕМЯ ЖИЗНИ ФОНОНОВ И ЕГО ОСОБЕННОСТИ

Активно взаимодействуют с фононами *электроны* из тонкого слоя (толщины $\sim ms$) пространства квазиимпульсов вокруг поверхности Ферми. Но в этом взаимодействии принимают участие *все* фононы. Это проявляется в том, что особенности в фононном спектре, обязанные электрон-фононному взаимодействию, могут быть при самых различных квазиимпульсах ²³.

Чтобы не загромождать изложение «тонкостями» (см. ^{23,24}), упростим выражение (18) для $\text{Im } \delta \omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$, воспользовавшись малостью энергии фононов по сравнению с энергией Ферми:

$$\text{Im } \delta \omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = -\pi \hbar \omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \int |M_{\mathbf{p}, \mathbf{p}+\mathbf{q}}^{\mathbf{v}}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F) \delta(\varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - \varepsilon_F) d^3 p \quad (30)$$

(мы заменили] — $\partial n_{\mathbf{p}} / \partial \varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$). Пока поверхность Ферми и ее сдвинутый на $-\mathbf{q}$ аналог пересекаются, $q < 2p_F$, интеграл (30) отличен от нуля, и, как хорошо известно ^{25,26},

$$\frac{\text{Im } \delta \omega}{\omega} \sim \frac{s}{v_F} \sim \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \quad (31)$$

Когда q достигает значения $2p_F$, интеграл скачком обращается в нуль, а в спектре возникает особенность типа $\Delta \ln |\Delta|$ (особенность Мигдала — Кона), где в данном случае $q - 2p_F = \Delta$; обозначение $2p_F$ условное — критические значения q_c квазиимпульса фонона \mathbf{q} равны диаметрам (внут-

ренним и внешним) поверхности Ферми в заданном единичным вектором \mathbf{q}/q направлении *).

Скорость фонона при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_c$, конечно, не обращается в бесконечность; учет конечности времени жизни электрона приводит к замене $\ln(q_c/\Delta)$ на $\ln(\epsilon_F/\hbar\omega_D)$, так как в формировании особенности Мигдала — Кона принимают участие электроны с энергией, превышающей фермиевскую на величину $\sim \hbar\omega_D$ (ср. с предыдущим разделом).

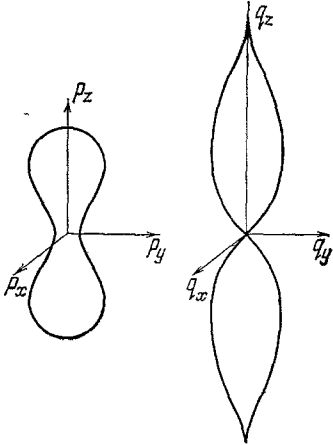


Рис. 6. Геометрическое место точек тейлоровских особенностей в фононном спектре, обязанных полости поверхности Ферми типа «гантель» (одна из возможностей; см. ²³)

Особенности Мигдала — Кона не исчерпывают все особенности в спектре фононов. Если поверхность Ферми имеет вмятины, перешейки (или, другими словами, если на поверхности Ферми есть *линии параболических точек*), то, кроме особенностей Мигдала — Кона, в спектре фононов существуют так называемые тейлоровские особенности ³⁰ — при тех значениях $\mathbf{q} = \mathbf{q}'_c$, при которых линия пересечения поверхности $\epsilon(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \epsilon_F$ с поверхностью Ферми меняет свою топологию, причем вектор \mathbf{q}'_c связывает точки на поверхности Ферми, в которых скорости (нормали) *параллельны* (в концах диаметров, определяющих значение \mathbf{q}_c , скорости *антипараллельны*). Геометрическое место тейлоровских особенностей и характер особенностей подробно исследованы в ²³. Мы обратим здесь внимание только на следующее: в то время как особенности Мигдала — Кона имеют место только при больших значениях квазиимпульса фонона ($q_c \sim \hbar/a$), длина критических квазиимпульсов тейлоровских особенностей, если таковые

существуют, с обязательностью обращается в нуль при определенных направлениях $\mathbf{n} = \mathbf{q}/q$ (рис. 6). Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. В аргументе δ -функции можно удержать $\hbar\omega$ (ср. (30) и (18)), не выходя за рамки сделанного упрощения (переход от разности фермиевских ступенек к производной и замена последней δ -функцией обосновывается неравенствами $T, \hbar\omega \ll \epsilon_F$). Обозначим

$$W_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = \epsilon(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - \hbar\omega(\mathbf{q}) - \epsilon_F \quad (32)$$

где ξ и η — безразмерные ортогональные координаты на поверхности Ферми, по которой ведется интегрирование в (30); элемент площади $dS_F = p^2(\xi, \eta) d\xi d\eta$ (коэффициент при $d\xi d\eta$ записан в таком виде, чтобы подчеркнуть, что он порядка $p_F^2 \sim \hbar^2/a^2$), а элемент объема $d^3p = [p^2(\xi, \eta)/v(\xi, \eta)] d\xi d\eta d\epsilon$. Особенности интеграла (30) как функции квазиимпульса фонона \mathbf{q} возникают тогда, когда аргумент δ -функции имеет кратный нуль, т. е.

$$W_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial W_{\mathbf{q}}}{\partial \xi} = \frac{\partial W_{\mathbf{q}}}{\partial \eta} = 0. \quad (33)$$

Три уравнения относительно пяти переменных (двух координат ξ и η и трех компонент вектора \mathbf{q}) в общем случае имеют двумерное множество решений. Так, задав направление вектора \mathbf{q} , можно найти значения \mathbf{q}_c и \mathbf{q}'_c (тейлоровских особенностей может и не быть, если поверхность не имеет линий параболических точек; см. выше). Можно поступить и иначе. Устремим в (30) и (32)

*) Для сферической поверхности Ферми описанную особенность обнаружили Мигдал ²³ и Кон ²⁷. Усиление особенности в случае цилиндрических и/или плоских поверхностей Ферми предсказали А. М. Афанасьев и Ю. Каган ²⁸, а М. И. Каганов и А. И. Семенин ²⁹ связали характер особенности с *локальной* геометрией поверхности Ферми.

длину квазиимпульса фонона q к нулю *). Тогда (32) примет вид

$$W_{\kappa}(\xi, \eta) = \kappa v(\xi, \eta) - \frac{s(\kappa)}{v(\xi, \eta)}, \quad v = \frac{v}{v}, \quad s(\kappa) = \frac{\hbar\omega(q)}{q}. \quad (34)$$

Функция $W_{\kappa}(\xi, \eta)$ отличается от $W_q(\xi, \eta)$ множителем qv . Как показано в ³¹ (см. также ³²), каждая точка любой линии параболических точек на поверхности Ферми (если таковые есть) продуцирует особенность интеграла (30) как функции направления κ . Критическое направление κ_c однозначно определяется локальной геометрией поверхности Ферми в точке ξ_c, η_c , за счет которой возникает особенность (ее называют критической). Особенности могут быть двух типов: либо конечный скачок, либо логарифмическая расходимость. Между особенностями $\text{Im } \delta\hbar\omega_v(q)$ и $\text{Re } \delta\hbar\omega_v(q)$ как всегда, существует соответствие (табл. II).

Таблица II

Тип особенности		
$\text{Im } \delta\omega$	Скачок	Логарифмическая расходимость
$\text{Re } \delta\omega$	Логарифмическая расходимость	Скачок

Если критическая точка расположена на пересечении двух линий параболических точек, то особенность усиливается, превращаясь в дробностепенную (как правило ³², степень невелика: 1/6, 1/4).

В данном случае (при $q \rightarrow 0, \kappa \rightarrow \kappa_c$) ликвидация расходимости требует более внимательного анализа, чем в ранее рассмотренных случаях, так как электроны, продуцирующие особенность, имеют фермиевскую энергию и поэтому (в отсутствие дефектов) имеют бесконечное время жизни. Мы обсудим этот вопрос в следующем разделе.

10. ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ФОНОНЫ

Распространение и поглощение звука в металлах описывается системой уравнений, состоящих из уравнений теории упругости и уравнений электродинамики **) (уравнений Максвелла). Плотность тока в уравнениях Максвелла и связанная с электронами плотность силы \mathbf{f} в уравнениях упругости выражается через вектор смещения \mathbf{u} и напряженность электрического поля \mathbf{E} с помощью решения кинетического уравнения для функции распределения электронов. Мы выпишем выражение только для \mathbf{f} , не выходя за рамки бесстолкновительного предела:

$$\mathbf{f} = \frac{iek}{\rho} \langle \Lambda R v_l \rangle E_l + \frac{i\omega k^2}{\rho} \langle \Lambda R \Lambda_l \rangle_l^r u_l, \quad R = \frac{1}{i(kv - \omega) + 0}; \quad (35)$$

здесь Λ — вектор с компонентами $\Lambda_{ij}\kappa_l, \kappa = \mathbf{k}/k, \Lambda_{ih} = \lambda_{ih} - \langle \lambda_{ih} \rangle / \langle 1 \rangle$ — перенормированный условием электroneйтральности тензор деформационного потенциала;

$$\langle \dots \rangle = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint \dots \frac{dS_F}{v(\mathbf{p}_F)} \quad (35')$$

*) Эта процедура соответствует изучению участка геометрического места точек при малых q (рис. 6).

**) Недавно в УФН опубликован обзор В. М. Конторовича ²⁰ «Динамические уравнения теории упругости в металлах» (мы на него уже ссылались), в котором детально рассмотрен весь комплекс вопросов, связанных с распространением и поглощением звука в металлах (в частности, библиография в ²⁰ позволяет познакомиться с историей вопроса). Существование этого обзора дает возможность в данном сообщении ограничиться концептивным изложением.

— интегрирование ведется по поверхности Ферми. Тензор λ_{ih} имеет то же происхождение, что и матрицы $M \dots$ и $\lambda \dots$ в формулах (14) и (18), отличаясь несущественными множителями и, конечно, предельным переходом $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ (в выражении для $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$; см. (19)).

При исследовании распространения звуковой волны напряженность электрического поля должна быть определена из уравнений Максвелла и подставлена в выражение для силы, что приводит к *перенормировке* тензора модулей, связывающих вектора \mathbf{f} и \mathbf{u} . Обычно ³² перенормировку производят в два этапа: сначала исключают продольное поле и

$$\mathbf{f} = \frac{i\omega k^2}{\rho} \left(\langle \Lambda R \Lambda_l \rangle - \frac{\langle \Lambda R(\mathbf{k}\mathbf{v}) \rangle \langle (\mathbf{k}\mathbf{v}) R \Lambda_l \rangle}{\langle (\mathbf{k}\mathbf{v}) R(\mathbf{k}\mathbf{v}) \rangle} \right) u_l + \frac{iek}{\rho} \left(\langle \Lambda R v_\alpha \rangle - \frac{\langle \Lambda R(\mathbf{k}\mathbf{v}) \rangle \langle (\mathbf{k}\mathbf{v}) R v_\alpha \rangle}{\langle (\mathbf{k}\mathbf{v}) R(\mathbf{k}\mathbf{v}) \rangle} \right) E_\alpha; \quad (36)$$

индекс l нумерует три проекции, а α — две (в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{k}). Формула (36) по существу нужна для того, чтобы показать, что исключение продольного поля не существенно: появившиеся (в фигурных скобках) в результате перенормировки слагаемые приблизительно в v_F/s раз меньше основных *) $\left(\frac{v_F}{s} \sim \frac{v_F}{\theta} \sim \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}\right)$. Исключение поперечных компонент E_α значительно важнее. Согласно ³²

$$\mathbf{f} = \frac{ik^2\omega}{\rho} \left(\langle \Lambda R \Lambda_l \rangle + \frac{4\pi i\omega e^2}{c^2} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\langle \Lambda R v_\alpha \rangle \langle v_\alpha R \Lambda_l \rangle}{k^2 - \frac{4\pi i\omega e^2}{c^2} \langle v_\alpha^2 R \rangle} \right) u_l. \quad (37)$$

Эта формула показывает, что при конкретных расчетах скорости звука в металле и его коэффициента поглощения учет перенормировки необходим, однако с ростом волнового вектора второе и третье слагаемые в фигурных скобках делаются все меньше, и при $\delta_L k \gg \left(\frac{s}{v_F}\right)^{1/2}$, где $\delta_L = c/\omega_L \sim 10^{-5}$ см ими можно пренебречь. Следует подчеркнуть, что «выключение» слагаемых, обязанных перенормировке, происходит гораздо раньше, чем нарушается условие макроскопичности звуковых волн ($ak \ll 1$). Тем самым оправдывается возможность не учитывать роль электромагнитного поля, рассматривая электрон-фононное взаимодействие при произвольном значении квазимпульса фона \mathbf{q} — за исключением непосредственной окрестности начала координат ($q/\hbar \ll \delta_L^{-1} (s/v_F)^{1/2} \sim 10^3$ см⁻¹).

Если поверхность Ферми имеет линии параболических точек, то входящие в формулы (35) — (37) модули, как функции направления \mathbf{n} , имеют особенности (ср. выражение для R в (35) с формулой (34)). Однако легко показать, что в тех случаях, когда особенность продуцируется одной точкой на поверхности Ферми, то происходит сокращение бесконечностей. Таким образом, строго говоря, коэффициент пропорциональности между силой \mathbf{f} и вектором смещения \mathbf{u} может обратиться в бесконечность только тогда, когда поперечное электрическое поле вовсе не возбуждается **) (например, из соображений симметрии — при распространении продольного звука в «хорошем» направлении).

*) Незначительная роль перенормировки, обязанной исключению продольного поля, — следствие малости скорости звука. Когда речь идет об электромагнитных высокочастотных свойствах, переход от σ_{ih} к $\sigma_{\alpha\beta}^\perp = \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\kappa}\sigma_{\kappa\beta}/\sigma_{\kappa\kappa}$ существенно изменяет величину компонент тензора проводимости.

**) Напомним, что речь идет о том случае, когда $\mathbf{n} = \mathbf{n}_c$ и на поверхности Ферми одна критическая точка (ξ_c, η_c) . С формальной точки зрения и продольное электрическое поле ликвидирует расходимость. Однако для реального осуществления сокращения было бы необходимо, чтобы длина свободного пробега была поистине бесконечной ³².

Формулы (35) — (37) не учитывают ферми-жидкостного взаимодействия электронов. Из-за относительной малости частот звука ($\frac{\omega}{kv_F} \sim \frac{s}{v_F} \ll 1$) ферми-жидкостное взаимодействие, весьма важное при исследовании электромагнитных свойств металлов²⁴, в данном случае существенной роли не играет.

В заключение этого раздела остановимся на том, правда, по-видимому, редком случае, когда поперечное поле не возбуждается и потому не может ликвидировать расходимость. Существует ли при этом бесстолкновительный предел или учет рассеяния необходим? Заметим, что в идеальном (без примесей и нарушений периодичности) кристалле электроны, принимающие участие во взаимодействии со звуком, имеют бесконечную длину пробега, так как их энергия равна фермиевской (см. конец предыдущего раздела).

Можно показать^{33,32}, что существует резонансный механизм самоограничения. Для его рассмотрения надо выйти за пределы теории возмущения, что сводится к следующему: в выражении для силы (35) при $E = 0$ под ω надо понимать *искомую* перенормированную частоту — корень дисперсионного уравнения, получающегося при решении уравнений теории упругости, учитывающих взаимодействие звуковой волны с электронами проводимости. Дисперсионное уравнение определяет конечное значение комплексной скорости звука, мнимая часть которой описывает затухание. Так, если в рамках теории возмущений есть логарифмическая расходимость коэффициента затухания Γ , то учет резонансного механизма самоограничения приводит к конечному значению

$$\frac{\Gamma}{\omega} \sim \frac{s}{v_F} \ln \frac{v_F}{s}. \quad (38)$$

Механизм самоограничения назван резонансным, так как действительно осуществляется резонансное взаимодействие со звуковой волной электронов на поверхности Ферми, для которых $\kappa_c v_c = s$ (или, другими словами, звуковая волна резонирует с квазиволной, закон дисперсии которой $\omega = k(\kappa_c v_c)$; см. следующий раздел).

11. КВАЗИВОЛНЫ, ИЛИ НЕЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ЗАТУХАЮЩИЕ ВОЛНЫ, В МЕТАЛЛЕ

При падении электромагнитной волны на поверхность металла в нем возбуждаются электромагнитные колебания, которые затухают на глубине скин-слоя. В бесстолкновительном пределе металл можно считать электронной плазмой, диэлектрическая функция которой в классическом приближении ($\hbar\omega \ll \epsilon_F$, $T = 0$) выражается в виде интеграла по поверхности Ферми:

$$\epsilon_{ih} = \delta_{ih} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \langle v_i R v_h \rangle \quad (39)$$

(см. формулы (35) и (35')). Как мы уже говорили, при сравнительно низких частотах в спектре электронной плазмы металла нет незатухающих колебаний. Это означает, что решение дисперсионного уравнения

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (40)$$

полученное с помощью выражения (39), имеет только комплексные решения. Известно, что асимптотика поля в глубине образца не всегда определяется нулями дисперсионной функции $D(\omega, \mathbf{k})$. Пусть $D(\omega, \mathbf{k})$ при $k_z = k_z^c$ имеет особенность (как функция k_z ; $k_x = k_y = 0$ и $\text{Im } \omega = 0$); тогда асимптотика поля имеет следующую структуру^{34,32}:

$$\mathbf{E} \propto e^{-i(\omega t - k_z^c z)} (k_z^c z)^{-\alpha}. \quad (41)$$

Показатель степени α определяется структурой особенности. Постановка задачи и ответ (41) предполагает нормальное падение электромагнитной волны на поверхность металла, занимающего полупространство $z > 0$.

Из формул (39) и (35) видно, что особенности дисперсионной функции $D_1^-(\omega, k_z)$ продуцируются кратными нулями знаменателя R , т. е.

$$k_z^c = \frac{\omega}{(\kappa v_F)_{\text{extr}}}, \quad \kappa \parallel Oz, \quad \kappa v_F > 0, \quad (42)$$

а экстремум (κv_F) берется по переменным ξ и η (см. (33) и (34)). При сферической поверхности Ферми есть только одно значение k_z^c , равное ω/v_F . Оно

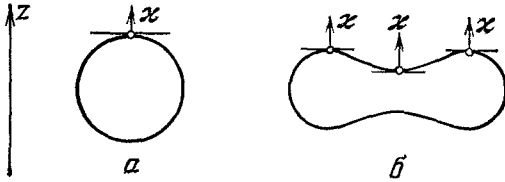


Рис. 7. Положение критических точек на поверхности Ферми при заданном направлении κ
 а — Поверхность Ферми — сфера, одна критическая точка; б — поверхность Ферми типа гантели, три критических точки

соответствует опорной точке (рис. 7, а). Если поверхность Ферми сложнее (общий случай), то имеется несколько значений k_z^c (рис. 7, б). Когда вектор κ

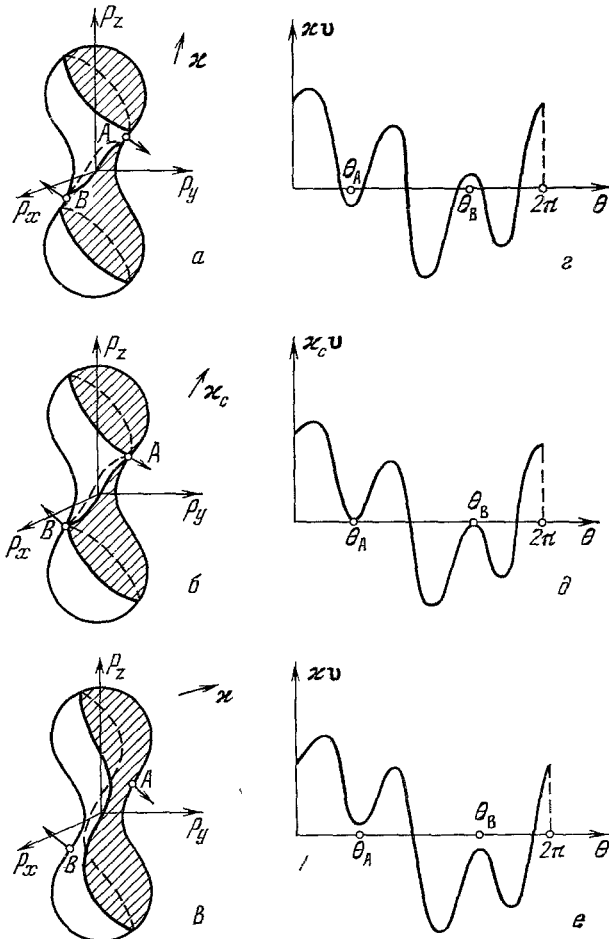


Рис. 8. Пояски $\kappa v = 0$ (жирные линии) на поверхности Ферми типа гантели (а — в) и зависимость κv от угла θ (г — е)
 а, г: $\kappa v_A < 0, \kappa v_B > 0$; б, д: $\kappa v_{A,B} = 0$; в, е: $\kappa v_A > 0, \kappa v_B < 0$. Точки А и В — параболические точки, θ — угол, отсчитываемый от оси гантели ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

имеет критическое направление (это означает, что линия $\kappa v_F(\xi, \eta) = 0$ при $\kappa = \kappa_c$ меняет свою топологию^{24,31}; рис. 8), то $(\kappa v_F)_{\text{extr}}$ обращается

в нуль. Анализ показывает ²⁴, что при этом необходим учет квантовых поправок (слагаемых $\sim \hbar^2 k^2 / m^*$; ср. (32) и (34)), а $k_z^c \sim \left(\frac{\omega}{v_F}\right) \left(\frac{\epsilon_F}{\hbar\omega}\right)^{1/2}$ — любопытный пример *необходимости* учета конечности импульса фотона при рассмотрении распределения *макроскопического* электромагнитного поля в металле ($ak_z^c \sim (\hbar\omega/\epsilon_F)^{1/2} \ll 1$).

Асимптотические значения электромагнитного поля, описанные выше, как и остаточные колебания электронной функции распределения (см. (17) и дальше) мы назвали *квазиволнами*, подчеркивая то обстоятельство, что это — вынужденные решения, а не собственные.

Говоря о диэлектрической функции электронной плазмы металла, нельзя абстрагироваться от ферми-жидкостного взаимодействия электронов. Его учет изменяет выражение (39) (см. ³⁵):

$$\epsilon_{ik}^{\text{ф.ж}} = \delta_{ik} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \langle v_i R (v_k - \omega J_k) \rangle. \quad (43)$$

Вектор \mathbf{J} удовлетворяет интегральному уравнению, содержащему матрицу Ландау ³⁶ $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, описывающую ферми-жидкостное взаимодействие (при $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 0$ и $\mathbf{J} = 0$). Результатом учета ферми-жидкостного взаимодействия оказывается существенная перестройка особенностей тензора диэлектрических проницаемостей $\epsilon_{ik}^{\text{ф.ж}}$. Согласно неприведенному здесь интегральному уравнению ^{37,24}, значения вектора \mathbf{J} в тех точках (ξ_c, η_c) на поверхности Ферми, в которых знаменатель R имеет кратный нуль, равны v_c/ω ($v_c \equiv v(\xi_c, \eta_c)$) и, следовательно, интеграл по поверхности Ферми *не расходится* (природа не терпит бесконечностей!). Изменение аналитических свойств $\epsilon_{ik}^{\text{ф.ж}}$ (по сравнению с ϵ_{ik}), надо констатировать, не слишком изменяет структуру поля в квазиволне, затрагивая, как правило, только коэффициент в выражениях типа (41).

12. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Поверхность Ферми и область \mathbf{p} -пространства, прилегающая к ней, формирует, как мы попытались здесь рассказать, спектр элементарных возбуждений металла, причем не только фермионов (электронов и дырок), но и бозонов — фононов. За счет электрон-фононного взаимодействия происходит перенормировка законов дисперсии элементарных возбуждений. В результате время жизни элементарных возбуждений оказывается конечным, а в зависимости энергии от квазиимпульса возникают особенности. Характеристика этих особенностей тесно связана с локальной геометрией поверхности Ферми, что отличает их от других особенностей (например, связанных фонон-фононному взаимодействию ³⁸)).

Анизотропия поверхностей Ферми, в частности, существование на них линий параболических точек существенно расширяет спектр особенностей фононов в металлах. Особое место занимают особенности скорости акустических фононов (по направлению распространения), так как эти особенности формируются электронами, расположенными непосредственно на поверхности Ферми, время жизни которых бесконечно. Из-за этого описываемые особенности не размываются, и величины расходящиеся, если пользоваться теорией возмущений, оказываются конечными при последовательном учете резонансного взаимодействия звуковой волны с электронами, проекция скорости которых на звуковой вектор звука равна скорости звука.

*) В бесконечность обращается не $\epsilon_{ik}^{\text{ф.ж}}$, а $d\epsilon_{ik}^{\text{ф.ж}}/dk$.

**) Как показано Л. П. Питаевским ³⁸, в каждом кристалле с обязательностью должны существовать связанные состояния фононов (бифононы) благодаря эффективному притяжению между двумя фононами.

Результаты, здесь изложенные, формулируют *общие* представления о спектре элементарных возбуждений металла и в этом смысле продолжают полуфеноменологический подход, получивший развитие в работах И. М. Лифшица и его учеников (см. ^{3,39}; в ³⁹ можно познакомиться с краткой историей этого направления электронной теории металлов). Наши представления о металлах в настоящее время таковы, что мы можем со сравнительно большой точностью описать их поверхности Ферми, быть уверенными, что на поверхностях Ферми существуют линии параболических точек и их пересечения (точки уплощения).

Есть экспериментальные работы, в которых обнаружены аномалии (особенности), обязанные точкам уплощения: в ⁴⁰ обнаружено логарифмическое возрастание с kl коэффициента поглощения звука в Cu (см. ⁴¹ — объяснение результатов работы ⁴⁰); в ⁴² показано, что существование уплощенного участка на поверхности Ферми Ga приводит к температурной зависимости коэффициента поглощения при $kl \gg 1$, а в ⁴³ по неупругому рассеянию нейтронов найдена аномалия в законе дисперсии фононов, обязанная локальной геометрии поверхности Ферми Cu . Все эти экспериментальные результаты находятся в согласии с теоретическими представлениями, изложенными здесь и в цитированных работах. И все же приходится констатировать, что экспериментальных работ, посвященных выявлению качественных особенностей явлений, обусловленных сложной формой поверхностей Ферми, очень мало *).

У автора создается впечатление, что теория металлов, накопив большой экспериментальный материал по «географии» поверхностей Ферми, находится в ожидании нового всплеска интереса — к драмам, которые разыгрываются между квазичастицами, живущими на поверхностях Ферми. Теория подготовила много предсказаний, тем самым бросив вызов эксперименту.

Пользуюсь случаем и благодарю Л. П. Питаевского и Г. Эшриха за несколько важных (для автора) разговоров, давших стимул продумать и написать то, что стало настоящей статьей. Кроме того, я благодарен Т. Ю. Лисовской и А. Г. Плявенеку, с которыми получены многие результаты, изложенные здесь. Мысли, высказанные всеми нами при подготовке оригинальных публикаций, нашли отражение в тексте.

Институт физических проблем
им. С. И. Вавилова АН СССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2.— М.: Наука, 1978.
2. Lattinger J. M.— Phys. Rev., 1960, v. 119, p. 1153.
3. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов.— М.: Наука, 1971.
4. McClure T. W.— Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 612.
Nozies Ph.— Ibidem, 1958, v. 109, p. 1510.
5. Крэкнелл А., Уонг К. Поверхность Ферми.— М.: Атомиздат, 1978.
6. Stark R. W., Falicov L. M.— Progr. Low. Temp. Phys., 1967, v. 5, p. 235.
Каганов М. И., Slutskin A. A.— Phys. Rept., 1983, v. 98, p. 190.
7. См., например: Хейне В., Коэн М., Уэйр Д. Теория псевдопотенциала.— М.: Мир, 1973.
8. Косевич А. М. Основы механики кристаллической решетки.— М.: Наука, 1972.
9. Бровман Е. Г., Каган Ю. М.— УФН, 1974, т. 112, с. 369.
Каган Ю., Пушкирев В. В., Холас А.— ЖЭТФ, 1983, т. 84, с. 1494.
10. Займан Дж. Принципы теории твердого тела.— М.: Мир, 1974, гл. 6, § 12.
11. Гуревич В. Л. Кинетика фононных систем.— М.: Наука, 1980, гл. 1, § 6.
12. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1978.

*) Мы специально не останавливаемся на работах, теоретических и экспериментальных, в которых исследуются свойства металла в сильном магнитном поле,— это особая тема.

13. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел.— М.: ИЛ, 1956.
14. Гуржи Р. Н., Конторович В. М.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1105.
15. Канер Э. А., Скобов В. Г.— УФН, 1966, т. 89, с. 367; Adv. Phys., 1968, v. 17, с. 69.
16. Демиховский В. Я., Протогенов А. П.— УФН, 1976, т. 118, с. 101.
17. Платцман Ф., Вольф П. Волны и взаимодействие в плазме твердого тела.— М.: Мир, 1975.
18. Силин В. П.— ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 1243.
19. Ландау Л. Д.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 574.
20. Конторович В. М.— УФН, 1984, т. 142, с. 265.
21. Каганов М. И., Лисовская Т. Ю.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 2445.
22. Мигдал А. Б.— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 1438.
23. Каганов М. И., Плявенец А. Г., Хитшольд М.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 2030.
24. Каганов М. И., Плявенец А. Г.— ЖЭТФ, 1985, т. 88, с. 249.
25. Pirnard A. B.— Phil. Mag., 1957, v. 2, p. 1147.
26. Ахизер А. И., Каганов М. И., Любарский Г. Я.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 837.
27. Kohn W.— Phys. Rev. Lett., 1959, v. 3, p. 393.
28. Афанасьев А. М., Каган Ю.— ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1456.
29. Каганов М. И., Семенов А. И.— ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 630.
30. Taylor P. L.— Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 1995.
31. Аванесян Г. Т., Каганов М. И., Лисовская Т. Ю.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 24, с. 381; ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1786.
32. Каганов М. И., Конторович В. М., Лисовская Т. Ю., Степанова Н. А.— ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 1675.
33. Конторович В. М., Степанова Н. А.— Письма ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 381.
34. Reuter G. E. M., Sondheimer E. H.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1948, v. 195, p. 336.
Ивановски Г. И., Каганов М. И.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 2320.
Песчанский В. Г., Лихциер В. С., Тада А.— ФММ, 1983, т. 56, с. 855.
35. Силин В. П.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 495; см. также ¹².
36. Ландау Л. Д.— ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 1058.
37. Каганов М. И., Плявенец А. Г.— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 94.
38. Пятаевский Л. П.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 738.
39. Каганов М. И., Лифшиц И. М.— УФН, 1979, т. 129, с. 487.
40. Masferlan R. E., Raupе J. A.— Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 532.
41. Суслов И. М.— ФТТ, 1981, т. 23, с. 1652.
42. Филь В. Д., Денисенко В. И., Безуглый П. А.— В кн. Тезисы XXI Всесоюзного совещания по физике низких температур.— Харьков, 1980, т. 3, с. 98.
43. Weiss L., Eschrig H.— Phys. Stat. Sol. Ser. b, 1982, v. 114, p. 419.
44. Максимов Г. Г. ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 2236.
45. Browman E. G., Kagan Yu. M.— In: Dynamical Properties of Solids/Eds G. K. Horton, A. A. Maradudin.— Amsterdam: North-Holland, 1974, v. 1, p. 191.