

НОБЕЛЕВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ 1983 ГОДА

524.3

**О ЗВЕЗДАХ, ИХ ЭВОЛЮЦИИ И УСТОЙЧИВОСТИ\*)****С. Чандрасекхар****1. ВВЕДЕНИЕ**

Размышляя об атомах, мы имеем в виду ясную картину — центральное ядро и окружающий его рой электронов. Мы представляем их себе как маленькие объекты с размерами, измеряемыми ангстремами ( $\sim 10^{-8}$  см), и знаем, что существует несколько сотен различных видов атомов. Конечно, эта картина становится количественно определенной и точной в современной квантовой теории. А успех всей теории можно проследить на двух основных фактах: *во-первых*, боровский радиус атома водорода в основном состоянии

$$\frac{\hbar^2}{4\pi^2 m e^2} \sim 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}, \quad (1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  — масса электрона, а  $e$  — его заряд, дает правильный порядок величины атомных размеров; *во-вторых*, величина, обратная постоянной тонкой структуры Зоммерфельда

$$\frac{\hbar c}{2\pi e^2} \sim 137, \quad (2)$$

определяет максимум положительного заряда центрального ядра, которое еще допускает существование вокруг него устойчивой электронной орбиты. Этот максимальный предел на заряд центрального ядра возникает из-за влияния эффектов специальной теории относительности на движение орбитальных электронов.

Теперь спросим себя, можем ли мы понять основные факты, относящиеся к звездам, так же просто, как мы понимаем атомы с помощью двух комбинаций фундаментальных констант (1) и (2). В этой лекции я попытаюсь показать, что в некотором смысле такое понимание возможно.

Наиболее важной характеристикой звезды является ее масса. Она измеряется в единицах массы Солнца  $M_\odot$ , которая равна  $2 \cdot 10^{33}$  г: звезды с массами много меньше или много больше массы Солнца относительно редки. Успехи современных теорий структуры и эволюции звезд в большой степени вызваны тем обстоятельством, что следующая комбинация констант с размерностью массы дает правильный порядок величины звездных масс:

$$\left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{H^2} \approx 29,2 M_\odot, \quad (3)$$

\*) Chandrasekhar S. On Stars, Their Evolution and Their Stability: Nobel Lecture. Stockholm, 8 December 1983. — Перевод И. В. Соколова под ред. И. М. Дремина. Субраманьян Чандрасекхар работает в Чикагском университете, США.

© The Nobel Foundation 1984.

© Перевод на русский язык, издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Успехи физических наук», 1985.

где  $G$  — гравитационная постоянная, а  $H$  — масса атома водорода. В первой половине лекции я буду, в основном, заниматься вопросом: почему так происходит?

## 2. РОЛЬ ДАВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

В случае нормальных звезд большую роль играет давление излучения как фактор их гидростатического равновесия. Уравнение, определяющее гидростатическое равновесие звезды, имеет вид

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho, \quad (4)$$

где  $P$  обозначает полное давление,  $\rho$  — плотность и  $M(r)$  есть масса, заключенная в сфере радиуса  $r$ . Вклад в общее давление вносят как давление вещества, так и давление излучения. Если предположить, что вещество находится в состоянии идеального газа в классическом максвелловском смысле, то давление вещества, или газа, дается формулой

$$P_{\text{gas}} = \frac{k}{\mu H} \rho T, \quad (5)$$

где  $T$  — абсолютная температура,  $k$  — постоянная Больцмана и  $\mu$  — средний молекулярный вес (который при нормальных условиях в звезде есть  $\sim 1,0$ ). Давление, обусловленное излучением, определяется формулой

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4, \quad (6)$$

где  $a$  обозначает постоянную излучения Стефана. Следовательно, если вклад излучения составляет долю  $1 - \beta$  от полного давления, то мы можем записать

$$P = \frac{1}{1-\beta} \frac{1}{3} a T^4 = \frac{1}{\beta} \frac{k}{\mu H} \rho T. \quad (7)$$

Чтобы отчетливо выявить роль давления излучения в равновесии звезды, мы можем исключить температуру  $T$  из предыдущих уравнений и выразить  $P$  через  $\rho$  и  $\beta$  вместо  $\rho$  и  $T$ . Находим, что

$$T = \left( \frac{k}{\mu H} \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta} \right)^{1/3} \rho^{1/3} \quad (8)$$

и

$$P = \left( \frac{k}{\mu H} \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta} \right)^{1/3} \rho^{4/3} = C_s(\beta) \rho^{4/3}. \quad (9)$$

На особую важность отношения  $(1 - \beta)$  для теории звездной структуры впервые указал Эддингтон. Действительно, в известном отрывке из его книги «Внутреннее строение звезд» Эддингтон связывал это отношение с «явлением звезды» («happening of the stars») <sup>1</sup>. Менее эмоционален следующий вариант рассуждений Эддингтона, в котором в то же время выделена в явном виде комбинация фундаментальных констант (3).

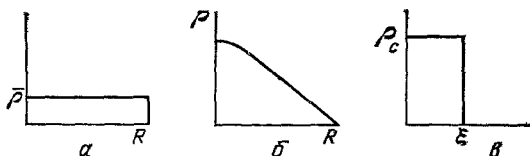
Существует общая теорема <sup>2</sup>, гласящая, что давление  $P_c$  в центре находящейся в гидростатическом равновесии звезды массы  $M$ , в которой плотность  $\rho(r)$  в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от центра, не превышает средней плотности  $\bar{\rho}(r)$  внутренней части радиуса  $r$ , должно удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{2} G \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \bar{\rho}^{4/3} M^{2/3} \leq P_c \leq \frac{1}{2} G \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \rho_c^{4/3} M^{2/3}, \quad (10)$$

где  $\bar{\rho}$  — средняя плотность звезды, а  $\rho_c$  — ее плотность в центре. Содержание этой теоремы есть не более чем утверждение о том, что давление, действующее в центре звезды, должно быть промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью — одна с плотностью, равной средней плотности звезды, а другая с плотностью, равной

плотности  $\rho_c$  в центре (рис. 1). Если бы неравенство (10) нарушалось, то, вообще говоря, должны были бы иметься некоторые области, в которых преобладали бы противоположные градиенты плотности, а это подразумевает

Рис. 1. Сравнение неоднородного распределения плотности в звезде б) с двумя однородными конфигурациями с постоянной плотностью, равной средней плотности а) и равной плотности в центре в)



неустойчивость. Другими словами, мы можем считать, что выполнение неравенства (10) эквивалентно условию устойчивости звезды.

Правая часть неравенства (10) вместе с уравнением (9) дает для устойчивости звезды условие

$$\left[ \left( \frac{k}{\mu H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta_c}{\beta_c^4} \right]^{1/3} \leq \left( \frac{\pi}{6} \right)^{1/3} G M^{2/3}, \quad (11)$$

или это эквивалентно условию

$$M \geq \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{k}{\mu H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta_c}{\beta_c^4} \right] \frac{1}{G^{3/2}}. \quad (12)$$

В предыдущих неравенствах  $\beta_c$  есть значение  $\beta$  в центре звезды. Далее постоянная Стефана  $a$  по закону Планка имеет значение

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3}. \quad (13)$$

Подставляя это значение  $a$  в равенство (12), получаем

$$\mu^2 M \left( \frac{\beta_c^4}{1 - \beta_c} \right)^{1/2} \geq \frac{(135)^{1/2}}{2\pi^3} \left( \frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{H^2} = 0,1873 \left( \frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{H^2}. \quad (14)$$

Мы видим, что неравенство (14) выделило в явном виде комбинацию (3) фундаментальных констант с размерностями массы. При подстановке ее численного значения, приведенного в уравнении (3), получаем неравенство

$$\mu^2 M \left( \frac{\beta_c^4}{1 - \beta_c} \right)^{1/2} \geq 5,48 M_\odot. \quad (15)$$

Это неравенство дает верхний предел на величину  $(1 - \beta_c)$  для звезды данной массы. Таким образом,

$$1 - \beta_c \leq 1 - \beta_*, \quad (16)$$

где  $1 - \beta_*$  однозначно определяется массой  $M$  звезды и средним молекулярным весом  $\mu$  при помощи уравнения четвертого порядка

$$\mu^2 M = 5,48 \left( \frac{1 - \beta_*}{\beta_*^4} \right)^{1/2} M_\odot. \quad (17)$$

В табл. I мы приводим значение  $1 - \beta_*$  для нескольких значений  $\mu^2 M$ . Из этой таблицы следует, в частности, что для звезды с массой, равной

Таблица I

Максимум давления излучения  $1 - \beta_*$  в центре звезды заданной массы

| $1 - \beta_*$ | $M\mu^2/M_\odot$ | $1 - \beta_*$ | $M\mu^2/M_\odot$ | $1 - \beta_*$ | $M\mu^2/M_\odot$ | $1 - \beta_*$ | $M\mu^2/M_\odot$ |
|---------------|------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|
| 0,01          | 0,56             | 0,20          | 3,83             | 0,50          | 15,49            | 0,80          | 122,5            |
| 0,03          | 1,01             | 0,30          | 6,12             | 0,60          | 26,52            | 0,85          | 224,4            |
| 0,10          | 2,14             | 0,40          | 9,62             | 0,70          | 50,92            | 0,90          | 519,6            |

солнечной, и со средним молекулярным весом, равным единице, давление излучения в центре не может превышать трех процентов от общего давления.

Какой вывод мы делаем из предыдущего вычисления? Мы можем заключить, что в той же степени, в какой уравнение (17) описывает равновесие реальных звезд, комбинация естественных констант (3), которая приводит к величине массы, пригодной для измерения массы звезд, лежит в основе физической теории звездной структуры.

### 3. ОБЛАДАЮТ ЛИ ЗВЕЗДЫ ДОСТАТОЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ДЛЯ ОХЛАЖДЕНИЯ?

Чуть позже та же комбинация естественных констант (3) возникла в гораздо более фундаментальном контексте — при разрешении парадокса, который Эддингтон сформулировал в форме афоризма: «звезде понадобится энергия, чтобы остыть». Этот парадокс возник при рассмотрении окончательной судьбы газовой звезды, когда только что были получены первые сведения о том, что существуют белые карлики, такие как компаньон Сириуса, со средней плотностью от  $10^5$  до  $10^7$  г/см<sup>3</sup>. Эддингтон заявлял:

«Я не понимаю, как звезда, которая пришла в сжатое состояние, собирается выходить из него... Казалось бы, звезда окажется в весьма затруднительном положении, когда ей не будет хватать запасов ядерной энергии».

В более ясных физических терминах парадокс, установленный Эддингтоном, был переформулирован Фаулером <sup>4</sup> в следующем виде:

«Вещество звезды излучает так много энергии при переходе в состояние белого карлика, что оно уже обладает меньшей энергией, чем то же вещество в виде нормальных отдельных атомов при абсолютном нуле температуры. Что могло бы произойти, если бы часть вещества была удалена на звезды и давление уменьшилось?»

На уровне количественных оценок вопрос Фаулера можно сформулировать следующим образом. Оценка электростатической энергии  $E$ , приходящейся на единицу объема ансамбля полностью ионизированных атомов с атомным номером  $Z$ , определяется формулой

$$E_v = 1,32 \cdot 10^{41} Z^2 \rho^{4/3}, \quad (18)$$

в то время как кинетическая энергия тепловых движений  $E_{kin}$  на единицу объема газа свободных частиц с плотностью и температурой  $T$  есть

$$E_{kin} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu H} \rho T = \frac{1,24 \cdot 10^8}{\mu} \rho T. \quad (19)$$

Теперь, если бы такое вещество было освобождено от приложенного давления, оно могло бы вернуться в состояние обычных атомов, только если

$$E_{kin} > E_v, \quad (20)$$

или, в соответствии с уравнениями (18), (19), только если

$$\rho < \left( 0,94 \cdot 10^{-3} \frac{T}{\mu Z^2} \right)^3. \quad (21)$$

Это неравенство явно будет нарушаться, если плотность достаточно высока. В этом сущность парадокса Эддингтона в формулировке Фаулера. Фаулер разрешил этот парадокс в 1926 г. в статье <sup>4</sup>, озаглавленной «Плотное вещество», — одной из великих работ, являющейся важной вехой в области звездной структуры: в ней впервые были введены понятия статистики Ферми и вырождения электронов.

#### 4. РЕШЕНИЕ ФАУЛЕРОМ ПАРАДОКСА ЭДДИНГТОНА, ВЫРОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В БЕЛЫХ КАРЛИКАХ

В полностью вырожденном электронном газе все имеющиеся области фазового пространства с импульсами меньше определенной «пороговой» величины  $p_0$  — фермиевской границы — заняты в соответствии с принципом исключения Паули, т. е. на каждую ячейку объема  $h^3$  шестимерного фазового пространства приходится по два электрона. Следовательно, если  $n(p) dp$  обозначает число электронов на единицу объема с импульсом между  $p$  и  $p + dp$ , то предположение о полном вырождении эквивалентно утверждению

$$\begin{aligned} n(p) &= \frac{8\pi}{h^3} p^2 & (p \leq p_0), \\ &= 0 & (p > p_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Величина порогового импульса  $p_0$  определяется условием нормировки

$$n = \int_0^{p_0} n(p) dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3, \quad (23)$$

где  $n$  обозначает полное число электронов в единице объема.

Для распределения (22) давление  $P$  и кинетическая энергия  $E_{\text{kin}}$  электронов (на единицу объема) получаются равными

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_0} p^3 v_p dp, \quad (24)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_0} p^2 T_p dp, \quad (25)$$

где  $v_p$  и  $T_p$  — скорость и кинетическая энергия электрона, имеющего импульс  $p$ .

Если положить в уравнениях (24), (25)

$$v_p = \frac{p}{m}, \quad T_p = \frac{p^2}{2m}, \quad (26)$$

что соответствует нерелятивистской механике, мы получаем

$$P = \frac{8\pi}{15h^3 m} p_0^5 = \frac{1}{20} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3}, \quad (27)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{8\pi}{10h^3 m} p_0^5 = \frac{3}{40} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3}. \quad (28)$$

Решение Фаулера для парадокса Эддингтона состоит в следующем: при температурах и плотностях, которые, по-видимому, преобладают внутри белых карликов, электроны будут сильно вырождены и  $E_{\text{kin}}$  должна оцениваться в соответствии с уравнением (28), а не (19), и из уравнения (28) получается

$$E_{\text{kin}} = 1,39 \cdot 10^{13} \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{5/3}. \quad (29)$$

Теперь, сравнивая две оценки (18) и (29), мы видим, что для вещества при плотностях, встречающихся в белых карликах, а именно  $\rho \sim 10^5$  г/см<sup>3</sup>, полная кинетическая энергия в 2—4 раза больше отрицательной потенциальной энергии и парадокс Эддингтона не возникает. Фаулер заключает свою статью следующим весьма поучительным утверждением:

«Вещество черного карлика \*) больше всего походит на одну гигантскую молекулу в нижнем квантовом состоянии. Согласно статистике Ферми — Дирака его высокая плотность может быть достигнута одним и только одним путем, который соответствует высокому энергосодержанию. Но эта энергия может расходоваться на излучение не в большей степени, чем энергия нормального атома или молекулы. Единственная разница между веществом черного карлика и нормальной молекулой состоит в том, что молекула может существовать в свободном состоянии, в то время как вещество черного карлика может существовать в этой форме только при очень высоком внешнем давлении».

##### 5. ТЕОРИЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ, ПРЕДЕЛЬНАЯ МАССА

Внутренняя энергия ( $= 3P/2$ ) вырожденного электронного газа, находящегося под давлением  $P$ , есть нулевая энергия. Существенный вывод статьи Фаулера состоит в том, что эта нулевая энергия настолько велика, что звезда, как мы можем ожидать, в конце концов, придет в состояние, в котором вся ее энергия будет нулевой. Выводы Фаулера более отчетливо можно сформулировать следующим образом <sup>5</sup>.

В соответствии с выражением для давления, определяемым уравнением (27), имеем соотношение

$$P = K_1 \rho^{5/3}, \quad \text{где } K_1 = \frac{1}{25} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m (\mu_e H)^{5/3}}, \quad (30)$$

$\mu_e$  — средний молекулярный вес, приходящийся на один электрон. Равновесная конфигурация, в которой давление  $P$  и плотность  $\rho$  связаны так, что

$$P = K \rho^{1+(1/n)}, \quad (31)$$

является политропой Эмдена с индексом  $n$ . Вырожденные конфигурации с уравнением состояния (30) являются, следовательно, политропами с индексом  $3/2$ , и теория политроп сразу дает соотношение

$$K_1 = 0,4242 \quad GM^4 R, \quad (32)$$

а для  $K_1$ , определяемого уравнением (30),

$$\lg \frac{R}{R_\odot} = -\frac{1}{3} \lg \frac{M}{M_\odot} - \frac{5}{3} \lg \mu_e - 1,397. \quad (33)$$

Для массы, равной солнечной и  $\mu_e = 2$ , соотношение (33) предсказывает  $R = 1,26 \cdot 10^{-2} R_\odot$  и среднюю плотность  $7,0 \cdot 10^5 \text{ г/см}^3$ . Эти значения точно того же порядка, что и радиусы и средние плотности, встречающиеся в белых карликах. Более того, в соответствии с уравнениями (32) и (33), радиус конфигурации белого карлика обратно пропорционален корню кубическому из массы. Вследствие этого для всех масс предсказываются равновесные конфигурации конечных размеров. Поэтому было принято считать, что белые карлики представляют собой последние стадии эволюции всех звезд.

Но скоро стало ясно, что приведенная выше простая теория, основанная на предположении Фаулера, требует модификации, так как электроны с энергиями порядка фермиевской в центре вырожденных звезд начинают приобретать скорости, сравнимые со скоростью света, по мере того, как масса возрастает. Таким образом, уже для вырожденных звезд с массой, равной солнечной (при  $\mu_e = 2$ ), плотность в центре (которая примерно в шесть раз больше средней плотности) равна  $4,19 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$ . Эта плотность соответствует граничному импульсу  $p_0 = 1,29 \text{ тс}$  и скорости, равной  $0,63 \text{ с}$ . Следовательно, необходимо изменить уравнение состояния, чтобы учитывать эффекты специальной теории относительности. А это легко сделать,

\*) Здесь под термином «черный карлик» имеется в виду идеализация для белого карлика при абсолютном нуле температуры, что не вносит изменений в представления о его структуре. (Прим. ред.)

введя в уравнение (24) и (25) соотношения

$$v_p = \frac{p}{m \sqrt{1 + (p^2/m^2 c^2)}}, \quad T_p = mc^2 \left( \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \quad (34)$$

вместо нерелятивистских соотношений (26). Мы находим, что получающееся уравнение состояния может быть выражено параметрически в форме

$$P = A f(x), \quad \rho = B x^3, \quad (35)$$

где

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3 h^3}, \quad B = \frac{8 \pi m^3 c^2 \mu_e H}{3 h^3}, \quad (36)$$

$$f(x) = x \sqrt{x^2 + 1} (2x^2 - 3) + 3 \operatorname{arcsinh} x, \quad (37)$$

и, аналогично,

$$E_{\text{kin}} = A g(x), \quad (38)$$

где

$$g(x) = 8x^3 (\sqrt{x^2 + 1} - 1) - f(x). \quad (39)$$

Согласно уравнениям (35) и (36), давление аппроксимируется соотношением (30) для достаточно низких электронных концентраций ( $x \ll 1$ ), но при возрастании электронных концентраций ( $x \gg 1$ ) давление стремится к <sup>6</sup>

$$P = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h c n^{4/3}. \quad (40)$$

Эта предельная форма соотношения может быть очень просто получена подстановкой  $v_p = c$  в уравнение (24); тогда

$$P = \frac{8 \pi c}{3 h^3} \int_0^{p_0} p^3 dp = \frac{2 \pi c}{3 h^3} p_0^4, \quad (41)$$

и исключение  $p_0$  при помощи уравнения (23) прямо приводит к уравнению (40).

Несмотря на то, что требуемая специальной теорией относительности модификация уравнения состояния кажется достаточно безобидной, она имеет, как мы сейчас покажем, существенное влияние на предсказанное соотношение масса — радиус для вырожденных конфигураций.

Соотношение между  $P$  и  $\rho$ , соответствующее предельной форме (41), есть

$$P = K_2 \rho^{4/3}, \quad \text{где } K_2 = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{h c}{(\mu_e H)^{4/3}}. \quad (42)$$

В этом пределе конфигурация является политропой Эмдена с индексом 3. А хорошо известно, что, когда индекс политропы равен 3, масса получающейся равновесной конфигурации однозначно определяется коэффициентом пропорциональности  $K_2$  в соотношении давления и плотности. Мы имеем соответственно

$$M_{\text{limit}} = 4 \pi \left( \frac{K_2}{\pi G} \right)^{3/2} \cdot 2,018 = 0,197 \left( \frac{h c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 5,76 \mu_e^{-2} M_{\odot}. \quad (43)$$

(В равенстве (43) 2,018 есть численный коэффициент, возникающий из явного уравнения Лэйна — Эмдена для  $n = 3$ .)

Из общих рассуждений ясно, что точное соотношение массы и радиуса для вырожденных конфигураций должно обеспечивать верхний предел на массу таких конфигураций, который дается равенством (43), и, далее, что средняя плотность конфигурации должна стремиться к бесконечности, в то время как радиус стремится к нулю и  $M \rightarrow M_{\text{limit}}$ . Эти условия, какими бы простыми они ни были, могут быть установлены непосредственно при рассмот-

рении равновесия конфигураций с помощью точного уравнения состояния, которое определяется равенствами (35)–(37). Найдено, что уравнение, определяющее равновесие таких конфигураций, может быть сведено к форме<sup>8,9</sup>

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left( \eta^2 \frac{d\Phi}{d\eta} \right) = - \left( \Phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}, \quad (44)$$

где

$$y_0^2 = x_0^2 + 1, \quad (45)$$

а  $m c x_0$  — граничный импульс электронов в центре конфигурации и  $\eta$  измеряет расстояние от центра в единицах

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi G}} \frac{1}{B y_0} = l_1 y_0^{-1}. \quad (46)$$

Интегрируя уравнение (44) с подходящими граничными условиями и для различных первоначально заданных значений  $y_0$ , мы можем вывести

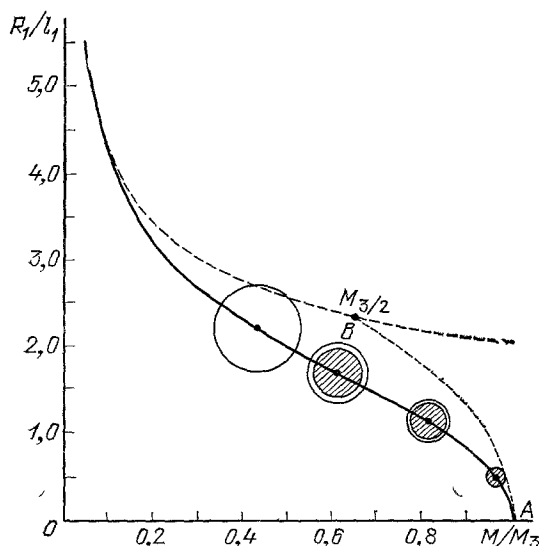


Рис. 2. Сплошная кривая описывает точное соотношение массы и радиуса ( $l_1$  определена в уравнении (46), а  $M_3$  обозначает предельную массу).

Эта кривая асимптотически стремится к штриховой кривой, соответствующей вырожденным конфигурациям малой массы, которые аппроксимируются политропами с индексом  $3/2$ . Заптрихованы области конфигураций, которые можно считать релятивистскими ( $\rho > (K_1/K_2)^{1/2}$ ). (Из работы: Chandrasekhar S.— Mon. Not. RAS, 1935, v. 95, p. 207)

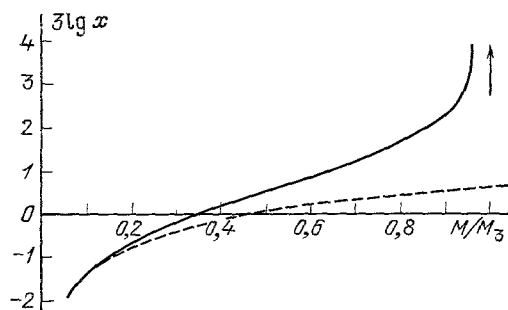


Рис. 3. Сплошная кривая соответствует точному соотношению массы и радиуса для сильно сколлапсированных конфигураций.

Кривая асимптотически стремится к штриховой линии по мере того, как  $M \rightarrow 0$ . (Из работы: Chandrasekhar S.— Mon. Not. RAS, 1935, v. 95, p. 207)

точную связь радиуса с массой, так же как и другие свойства равновесия вырожденных конфигураций. Основные результаты таких вычислений поясняются на рис. 2 и 3.

Из предыдущих рассуждений следуют важные выводы: во-первых, существует верхний предел  $M_{\text{limit}}$  на массу звезд, которые на последней стадии своей эволюции могут стать вырожденными конфигурациями, и, во-вторых, что звезды с  $M > M_{\text{limit}}$  должны иметь конечные состояния, которые не могут быть предсказаны на основании приведенных до сих пор рассужде-



ний. И наконец, мы видим, что комбинация естественных констант (3) теперь возникает в фундаментальном определении величины  $M_{\text{limit}}$ , заданной уравнением (43). Ее значение для теории структуры и эволюции звезд уже не подлежит сомнению.

## 6. ПРИ КАКИХ УСЛОВИЯХ В НОРМАЛЬНЫХ ЗВЕЗДАХ МОГУТ ОБРАЗОВЫВАТЬСЯ ВЫРОЖДЕННЫЕ ЯДРА?

Как только был установлен предел на массу полностью вырожденных конфигураций, возник требовавший решения вопрос о том, как связать существование верхнего предела с эволюцией звезд из газового состояния. Если звезда обладает массой, меньшей чем  $M_{\text{limit}}$ , то кажется разумным предположение, что она будет постепенно эволюционировать к полностью вырожденному состоянию. Но что происходит, если ее масса больше, чем  $M_{\text{limit}}$ ? Ключ к разгадке того, что могло бы произойти, искался в рамках уравнений и неравенств разделов 2 и 3<sup>10,11</sup>.

Первая проблема, которую нужно было решить, относилась к тем условиям, при которых звезда, первоначально находящаяся в газовом состоянии, будет образовывать вырожденное ядро. С физической точки зрения можно легко ответить на вопрос, когда появятся отклонения от уравнения состояния идеального газа и будут проявляться эффекты электронного вырождения.

Предположим, например, что мы непрерывно и равномерно увеличиваем при постоянной температуре плотность сильно ионизованного ансамбля свободных электронов и ядер, который первоначально является идеальным газом и описывается уравнением состояния (5). Сначала давление электронов будет расти пропорционально плотности, но скоро появятся отклонения, и постепенно плотность будет увеличиваться в соответствии с уравнением состояния, которое описывает полностью вырожденный электронный газ (рис. 4). Замечательно, что эта предельная форма уравнения состояния не зависит от температуры.

Однако, чтобы исследовать условия, когда звезда в ходе своей эволюции будет образовывать вырожденное ядро, удобнее выразить электронное давление (определяемое классическим уравнением состояния идеального газа) через  $\rho$  и  $\beta_e$ , введенные так, что (ср. с уравнением (7))

$$p_e = \frac{k}{\mu_e H} \rho T = \frac{\beta_e}{1 - \beta_e} \frac{1}{3} a T^4, \quad (47)$$

где  $p_e$  теперь обозначает электронное давление. Тогда, аналогично уравнению (9), мы можем записать

$$p_e = \left[ \left( \frac{k}{\mu_e H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} \right]^{1/3} \rho^{4/3}. \quad (48)$$

Сравнивая это с уравнением (42), мы делаем вывод, что если

$$\left[ \left( \frac{k}{\mu_e H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} \right]^{1/3} > K_2 = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{(\mu_e H)^{1/3}}, \quad (49)$$

то давление, определенное классическим уравнением состояния идеального газа, будет больше, чем давление при наличии вырождения, не только для определенных  $\rho$  и  $T$ , но и для *всех*  $\rho$  и  $T$ , имеющих одно и то же значение  $\beta_e$ .

Подставляя для  $a$  ее значение из равенства (13), мы находим, что неравенство (49) сводится к

$$\frac{960}{\pi^4} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} > 1 \quad (50)$$

или, что эквивалентно,

$$1 - \beta_e > 0,0921 = 1 - \beta_0 \quad (51)$$

(рис. 5).

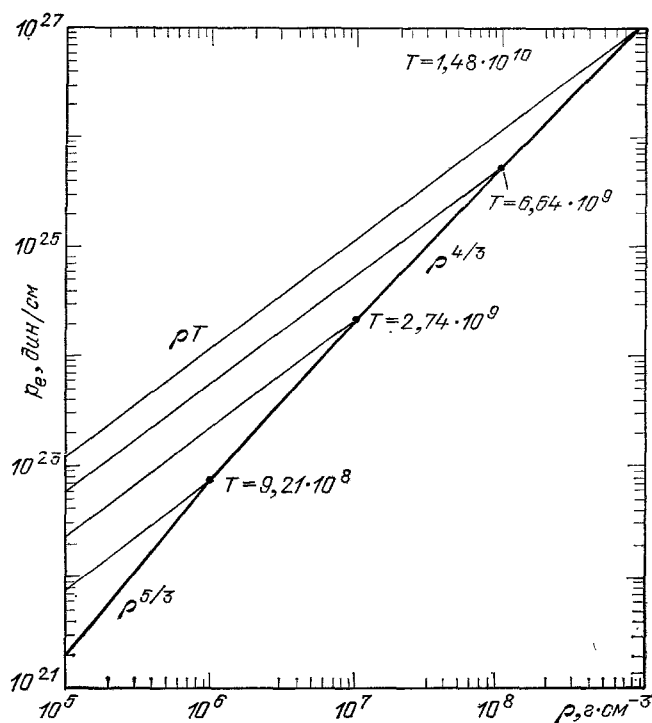


Рис. 4. Демонстрируется, что при возрастании плотности и постоянной температуре всегда возникает вырождение.

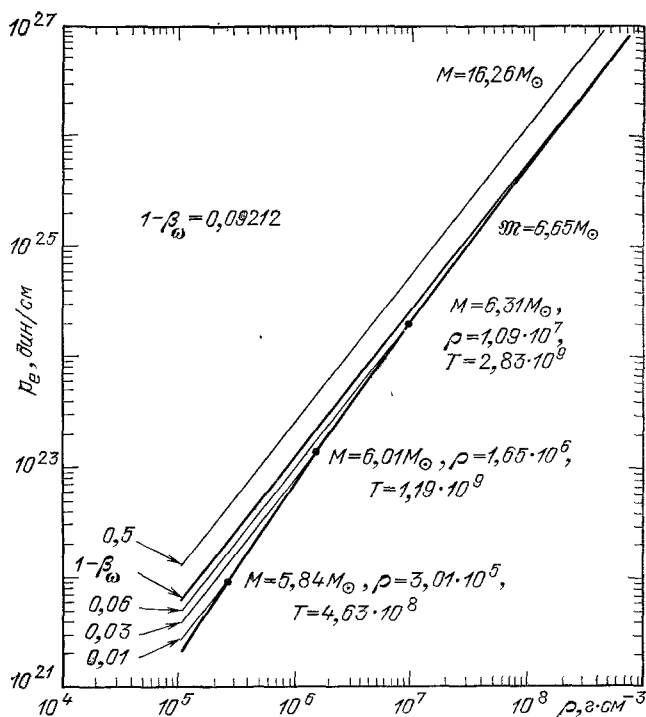


Рис. 5. Иллюстрируется возникновение вырождения при возрастании плотности и постоянном  $\beta$ .

Отметим, что при  $1 - \beta_\omega > 0,0912$  точки пересечения отсутствуют. На рисунке величина  $1 - \beta_\omega$  преобразуется в массу звезды, выведенную согласно стандартной модели.

Для нас главным содержанием неравенства (51) является следующий критерий: чтобы началось вырождение звезды, необходимо, чтобы давление излучения было меньше 9,2% от  $(p_e + p_{\text{rad}})$ .

Этот вывод занимает центральное место во всех современных схемах эволюции звезд, так что стоит повторить простые и прямые первоначальные аргументы в его пользу.

Два главных момента в этих рассуждениях были такими: *во-первых*, давление излучения становится преобладающим по мере увеличения массы звезды, и, *во-вторых*, вырождение электронов возможно только до тех пор, пока давление излучения составляет незначительную часть общего давления — в действительности, как мы видим, оно не должно превышать 9,2 процента от  $(p_e + p_{\text{rad}})$ . Второе утверждение есть прямое и элементарное следствие физики вырожденных состояний, но первое требует некоторых пояснений.

То обстоятельство, что давление излучения должно играть все возрастающую роль по мере увеличения массы звезды, является одним из самых ранних результатов в изучении структуры звезд, установленных Эддингтоном. Количественное выражение этого факта дает *стандартная модель*, которая основана на его ранних исследованиях, резюмированных в книге «Внутреннее строение звезд».

В стандартной модели число  $\beta$  (отношение давления газа к общему давлению) постоянно по всей звезде. При этом предположении звезда является политропой с индексом 3, как это видно из уравнения (9); и, следовательно, имеет место соотношение (ср. с уравнением (43))

$$M = 4\pi \left[ \frac{C(\beta)}{\pi G} \right]^{3/2} \cdot 2,018, \quad (52)$$

где  $C(\beta)$  определяется равенством (9). Равенство (52) приводит к уравнению четвертой степени для  $\beta$ , аналогичному уравнению (17) для  $\beta_*$ . Из уравнения (52) при  $\beta = \beta_0$  следует

$$M = 0,197\beta_0^{-3/2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu H)^2} = 6,65 \cdot \mu^{-2} M_\odot = \mathfrak{M}. \quad (53)$$

Значит, согласно стандартной модели в звездах с массами, превышающими  $\mathfrak{M}$ , давление излучения будет превышать 9,2 процента общего давления. Следовательно, внутри звезд с  $M > \mathfrak{M}$  не может развиваться вырождение ни на какой стадии их эволюции. Поэтому для таких звезд невозможно конечное состояние белого карлика, если только они не смогут сбросить значительную часть своей массы.

Стандартная модель, конечно, представляет собой только простейшую модель. Тем не менее опыт (за исключением некоторых, отмеченных ниже особых обстоятельств) в основном подтвердил качественную справедливость выводов, полученных из стандартной модели, а именно, что эволюция звезд с массами, превышающими  $(7-8) M_\odot$ , сильно отличается от эволюции менее массивных звезд. Эти заключения, к которым пришли всего каких-нибудь сорок лет назад, показались тогда столь убедительными, что с уверенностью ставились вопросы и делались выводы, подобные следующим:

«Что происходит в замкнутом объеме, содержащем электроны и атомные ядра (полный заряд — нуль), если мы продолжаем сжатие вещества до бесконечности?» (1932) <sup>10</sup>.

«Жизненные пути звезд малой массы и звезд большой массы существенно отличаются друг от друга. Для звезды малой массы естественная стадия белого карлика является начальным шагом к полному угасанию. Звезда большой массы не может перейти в состояние белого карлика, и остается только гадать о других возможностях (1934)» <sup>8</sup>.

И эти утверждения остались справедливыми до сих пор.

В то время как эволюция массивных звезд оставалась, таким образом, неопределенной, относительно конечных состояний звезд достаточно малой массы никаких неясностей не было. Причина в том, что опять, вследствие неравенства (10), максимально достижимое давление в центре звезды может быть обеспечено уравнением вырожденного состояния, если только выполнено условие

$$\frac{1}{2} G \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} M^{2/3} < K_2 = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{(\mu_e H)^{4/3}}, \quad (54)$$

или эквивалентное ему неравенство

$$M < \frac{3}{16\pi} \left( \frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 1,74 \mu_e^{-2} M_{\odot}. \quad (55)$$

Мы делаем вывод, что при эволюции звезд с массой, меньшей, чем  $0,43 M_{\odot}$  (если  $\mu_e = 2$ ), никаких неожиданностей быть не может. Конечной стадией эволюции таких звезд могут быть только белые карлики. (В скобках следует заметить, что неравенство (15) подразумевает, что так называемые малые черные дыры с массой  $10^{15}$  г не могут образовываться естественным образом в современной астрономической Вселенной).

#### 7. НЕСКОЛЬКО КОРОТКИХ ЗАМЕЧАНИЙ О СОВРЕМЕННОМ ПРОГРЕССЕ В ЭВОЛЮЦИИ МАССИВНЫХ ЗВЕЗД И О ВОЗНИКНОВЕНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО КОЛЛАПСА

Уже из ранних исследований стало ясно, что невозможность превращения массивных звезд в белые карлики должна приводить к развитию еще более экстремальных условий внутри них и в итоге — к возникновению гравитационного коллапса, сопровождаемого феноменом сверхновой. Но трудно оказалось точно установить, каким образом все это происходит, несмотря на большие усилия нескольких компетентных групп исследователей. При этом, по всей видимости, нужно принять во внимание следующие факты \*).

В первый момент плотность и температура равномерно возрастают без сдерживающего влияния вырождения, поскольку для рассматриваемых массивных звезд  $1 - \beta_e > 1 - \beta_0$ . Вследствие этого происходит «ядерное возгорание», скажем, углерода, которое сопровождается испусканием нейтрино. Это излучение нейтрино будет вызывать охлаждение и уменьшение величины  $(1 - \beta_e)$ , но она все еще превышает величину  $1 - \beta_0$ . Здесь важно, что излучение нейтрино избирательно воздействует на центральные области и является причиной понижения величины  $1 - \beta_e$  в этих областях. Плотность и температура будут продолжать расти, пока не произойдет следующее «возгорание» — неона, — опять сопровождаемое излучением нейтрино и дальнейшим понижением  $(1 - \beta_e)$ . Эта последовательность ядерных возгораний и понижение  $(1 - \beta_e)$  будет продолжаться до тех пор, пока не выполнится неравенство  $1 - \beta_e < 1 - \beta_0$  и в центре не образуется релятивистски вырожденное ядро с массой, примерно равной предельной массе ( $= 1,4 M_{\odot}$  для  $\mu_e = 2$ ). На этой стадии или вскоре после нее ожидается возникновение некоторой неустойчивости, сопровождаемой гравитационным коллапсом и феноменом сверхновой (II типа). В некоторых случаях то, что первоначально было сильно релятивистским вырожденным ядром с массой примерно  $1,4 M_{\odot}$ , превратится в нейтронную звезду. Возможность этого процесса подтверждается таким обстоятельством: в тех случаях, когда существуют надежные оценки массы пульсаров, все они оказываются близки к  $1,4 M_{\odot}$ . Однако в других случаях — даже, возможно, в большинстве случаев — объект, оставшийся после того, как «вся пыль оседет», будет обла-

\*) Я признателен профессору Д. Арнетту за то, что он ознакомил меня с последней литературой и дал мне несколько советов при написании этого раздела.

дать массой, превышающей допустимые массы стабильных нейтронных звезд, и в этих случаях будут образовываться черные дыры.

В случае менее массивных звезд ( $M \sim (6 - 8) M_{\odot}$ ) вырожденные ядра, которые первоначально образуются, не являются сильно релятивистскими. Но масса ядра возрастает по мере сгорания ядерного горючего на границе ядра и мантии, и, когда ядро достигает предельной массы, вследствие неустойчивости происходит взрыв. Обычно считают, что это является причиной феномена сверхновой I типа.

Из предыдущего краткого описания того, что может происходить на последних стадиях эволюции массивных звезд, ясно, что проблемы, с которыми здесь приходится сталкиваться, имеют исключительную сложность, связанную с большим разнообразием физических факторов. Здесь было бы неуместно подробно вдаваться в описание этих различных вопросов. Кроме того, в следующей лекции профессор Фаулер, возможно, обратится к некоторым из этих проблем.

## 8. НЕУСТОЙЧИВОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭФФЕКТАМИ:

### 1) КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗД

Я теперь перехожу к рассмотрению определенных типов неустойчивости звезд, которые обусловлены эффектами общей теории относительности и не имеют никаких аналогов в рамках механики Ньютона. Будет показано, что эти новые типы неустойчивостей, вызванных релятивистскими эффектами, могут играть существенную роль при обсуждении гравитационного коллапса и поздних стадий эволюции звезд.

Мы рассмотрим сначала проблему устойчивости сферических звезд относительно чисто радиальных возмущений. Критерий устойчивости непосредственно следует из линеаризации уравнений, определяющих сферически симметричные радиальные колебания звезд. В рамках ньютоновской теории гравитации устойчивость относительно радиальных возмущений зависит только от среднего значения показателя адиабаты  $\Gamma_1$ , который является коэффициентом пропорциональности между относительными изменениями давления и плотности движущегося элемента потока жидкости (в лагранжевых координатах), так что

$$\frac{\Delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (56)$$

и критерий устойчивости в ньютоновском пределе есть

$$\bar{\Gamma}_1 = \int_0^M \Gamma_1(r) P(r) dM(r) \left[ \int_0^M P(r) dM(r) \right]^{-1} > \frac{4}{3}. \quad (57)$$

Если  $\bar{\Gamma}_1 < 4/3$ , возникает *динамическая неустойчивость* глобального характера с временем возрастания в  $e$  раз порядка времени распространения звуковой волны от центра до поверхности.

Когда ту же проблему исследуют в рамках теории относительности, получается<sup>12</sup>, что устойчивость снова зависит от средней величины  $\Gamma_1$ , но в отличие от ньютоновского предела устойчивость теперь зависит также от радиуса звезды. Таким образом, оказывается, что как бы ни велика была  $\bar{\Gamma}_1$ , неустойчивость все же возникнет, если только радиус меньше шварцшильдовского радиуса

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (58)$$

помноженного на некоторое определенное число. Так, если для простоты мы положим, что  $\Gamma_1$  является константой и равна  $5/3$ , то звезда станет динамически неустойчивой относительно радиальных возмущений, если

$R_1 < 2,4 R_s$ . И далее, если  $\Gamma_1 \rightarrow \infty$ , неустойчивость возникнет для всех  $R < (9/8) R_s$ . Радиус  $(9/8) R_s$  является в действительности минимальным радиусом, который, в рамках общей теории относительности, может иметь любая гравитирующая масса в гидростатическом равновесии.

Этот важный результат неявно присутствует в фундаментальной работе Карла Шварцшильда, опубликованной в 1916 г. (На самом деле Шварцшильд доказал, что у звезды, в которой плотность энергии однородна,  $R > (9/8) R_s$ ).

В каком-то смысле самым важным следствием этой неустойчивости релятивистского происхождения является то обстоятельство, что если  $\Gamma_1$  (которая для простоты снова предполагается постоянной) отличается от (и больше чем)  $4/3$  лишь на малую положительную величину, то неустойчивость возникает при радиусе  $R$ , который во много раз больше  $R_s$ , а следовательно — при условиях, когда влияние эффектов общей теории относительности на структуру равновесной конфигурации едва ли существенно. Действительно, из уравнений, определяющих радиальные колебания звезд, в первом постньютоновском приближении общей теории относительности следует<sup>13</sup>, что неустойчивость относительно радиальных возмущений возникает для всех

$$R < \frac{K}{\Gamma_1 - (4/3)} \frac{2GM}{c^2}, \quad (59)$$

где  $K$  — константа, которая в рамках ньютоновской механики зависит от *всех* \*) значений плотности и давления в равновесной конфигурации. Таким образом, для политропы с индексом  $n$  значение константы есть

$$K = \frac{5-n}{18} \left[ \frac{2(11-n)}{(n+1)\xi_1^4 |\theta'_1|^3} \int_0^{\xi_1} \theta \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 \xi^2 d\xi + 1 \right], \quad (60)$$

где  $\theta$  — функция Лэйна — Эмдена в стандартной нормировке ( $\theta = 1$  при  $\xi = 0$ ),  $\xi$  — безразмерная радиальная координата,  $\xi_1$  определяет границу политропы (где  $\theta = 0$ ), а  $\theta'_1$  — производная от  $\theta$  в точке  $\xi_1$ .

В табл. II приведены значения  $K$  для различных политропических индексов. Следует особо отметить, что  $K$  неограниченно возрастает при  $n \rightarrow 5$

Таблица II

Значения константы  $K$  в неравенстве (59) для различных политропических индексов  $n$

| $n$ | $K$      | $n$ | $K$      | $n$  | $K$     | $n$  | $K$    |
|-----|----------|-----|----------|------|---------|------|--------|
| 0   | 0,452381 | 2,0 | 0,751296 | 3,25 | 1,28503 | 4,5  | 4,5303 |
| 1,0 | 0,565382 | 2,5 | 0,900302 | 3,5  | 1,49953 | 4,9  | 22,906 |
| 1,5 | 0,645063 | 3,0 | 1,12447  | 4,0  | 2,25338 | 4,95 | 45,94  |

и что конфигурация становится все более сконденсированной к центру. Таким образом, уже для  $n = 4,95$  (для этого политропического индекса  $\rho_c = = 8,09 \cdot 10^6 \bar{\rho}$ )  $K \sim 46$ . Другими словами, для сильно сконденсированных к центру массивных звезд (для которых  $\Gamma_1$  может отличаться от  $4/3$  всего лишь на 0,01 \*\*)), неустойчивость релятивистского происхождения возникает уже, когда радиус звезды станет меньше  $5 \cdot 10^3 R_s$ . Ясно, что в контексте обсуждаемых задач данная релятивистская неустойчивость должна рассматриваться.

Далее результат, описанный в предыдущем параграфе, будет применяться к вырожденным конфигурациям с массами, близкими к предельной. По-

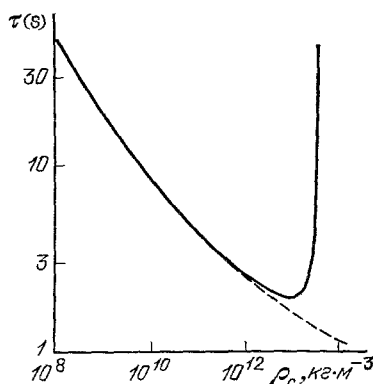
\*) Именно поэтому мы называем данную неустойчивость *глобальной*.

\*\*) Из-за преобладания радиационного давления в этих массивных звездах и близости  $\beta$  к нулю.

сколько электроны в этих сильнорелятивистских конфигурациях имеют скорости, близкие к скорости света, эффективное значение  $\Gamma_1$  будет очень близким к  $4/3$  и постньютоновская релятивистская неустойчивость возникнет для массы, чуть меньшей, чем предельная. Из-за неустойчивости относительно радиальных колебаний, возникающей для масс, меньших  $M_{\text{limit}}$ , период колебаний на последовательности вырожденных конфигураций должен иметь минимум. По оценкам, этот период порядка двух секунд (рис. 6). После того, как были открыты пульсары, и стало известно, что их период гораздо меньше этого минимального значения, сразу же оказалось очевидным, что они не

Рис. 6. Изменение периода радиальных колебаний для полностью вырожденных конфигураций.

Отметим, что период стремится к бесконечности для масс, близких к предельной. Следовательно, для этих конфигураций имеется минимальный период колебаний, примерно равный 2 с. (Из книги: Skilling J. Pulsating Stars.— N.Y.: Plenum Press., 1968, p. 59)



могут являться вырожденными конфигурациями с массой, близкой к предельной. Это было одним из решающих факторов в пользу того, что пульсары являются нейтронными звездами. (Но, по странной иронии, из-за причин, которые мы кратко объяснили в разделе 7, пульсары, возникшие в результате взрывов сверхновых, имеют массы, близкие к  $1,4 M_{\odot}$ ).

Наконец, мы можем отметить, что радиальная неустойчивость релятивистского происхождения является основной причиной существования максимума массы устойчивой звезды. Это — прямое следствие уравнений, определяющих гидростатическое равновесие в общей теории относительности. (Полное исследование периодов радиальных колебаний нейтронных звезд при различных уравнениях состояния проведено в недавней статье Детвейлера и Линдбома<sup>15</sup>.)

## 9. НЕУСТОЙЧИВОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭФФЕКТАМИ:

### 2) ВЕКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЗВЕЗД, ВОЗНИКАЮЩАЯ ИЗ-ЗА ИЗЛУЧЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ МЕТОДАМИ КОЛЕБАНИЙ

Теперь я перехожу к другому типу неустойчивости, который предсказывает общая теория относительности для вращающихся конфигураций. Этот новый тип неустойчивости<sup>16</sup> вызван тем обстоятельством, что согласно общей теории относительности во вращающихся массах возникает диссипативный механизм из-за возможности излучения гравитационных волн при неосесимметричных модах колебаний. По-видимому, эта неустойчивость ограничивает периоды вращения пульсаров. Но прежде всего я объясню природу и происхождение этого типа неустойчивости.

Хорошо известно, что возможной последовательностью фигур равновесия однородных вращающихся масс является последовательность сплюснутых сфероидов Маклорена. При исследовании второй гармоники их колебаний в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью сфероида, можно найти, что для двух мод, зависимость которых от азимутального угла определяется множителем  $e^{2i\varphi}$ , характеристические частоты колебаний  $\sigma$  зависят от

эксцентриситета  $e$  так, как показано на рис. 7. Будет показано, что одна из этих мод становится нейтральной (т. е.  $\sigma = 0$ ), когда  $e = 0,813$ , и что две моды сливаются, когда  $e = 0,9$  и становятся комплексно сопряженными за этой точкой. Соответственно, сфероид Маклорена становится динамически неустойчивым в этой точке (это впервые было получено Риманом). С другой стороны, возникновение нейтральной моды связано с тем, что в этой точке ответвляется новая равновесная последовательность трехосных эллипсоидов — эллипсоидов Якоби. Вследствие этого лорд Кельвин предположил в 1883 г., что «при любой, сколь угодно малой, вязкости равновесие за точкой  $e = 0,81$  не может обладать вековой устойчивостью».

Кельвин рассуждал так: вязкость приводит к диссипации энергии, но не углового момента. А поскольку для равных угловых моментов эллипсоид

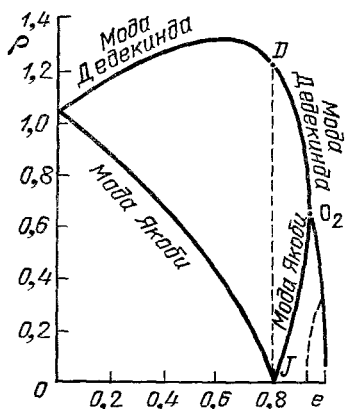


Рис. 7. Характеристические частоты (в единицах  $\sqrt{\pi G \rho}$ ) двух четных мод второй гармоники колебаний сфероидов Маклорена. Последовательность Якоби ответвляется от последовательности Маклорена на моде, которая нейтральна ( $\sigma = 0$ ) при  $e = 0,813$ , а последовательность Дедекинда ответвляется от второй моды в точке D. В точке  $O_2$  ( $e = 0,9529$ ) сфероид Маклорена становится динамически неустойчивым. Действительная и мнимая часть частоты за точкой  $O_2$  показаны соответственно сплошной и штриховой линиями. Вязкая диссипация вызывает неустойчивость на моде Якоби, а реакция излучения — на ветви  $DO_2$  моды Дедекинда

Якоби обладает меньшим энергосодержанием, чем сфероид Маклорена, можно ожидать, что действие вязкости будет диссипировать избыток энергии сфероидов Маклорена и преобразовывать его в эллипсоид Якоби с меньшей энергией. Детальное вычисление<sup>18</sup> влияния вязкой диссипации на две моды колебаний, изображенные на рис. 7, действительно подтверждает предложение лорда Кельвина. Оказалось, что вязкая диссипация делает моду, которая становится нейтральной при  $e = 0,813$ , неустойчивой за этой точкой. Время возрастания неустойчивости в  $e$  раз обратно пропорционально величине кинематической вязкости и монотонно убывает до нуля в точке  $e = 0,953$ , где возникает динамическая неустойчивость.

Поскольку при излучении гравитационных волн не сохраняются ни энергия, ни угловой момент, оно не вызывает неустойчивости моды Якоби; вместо этого излучение приводит к неустойчивости второй моды при том же значении эксцентриситета. В первый момент это может показаться удивительным, но ситуация, с которой мы здесь сталкиваемся, проясняет некоторые важные вопросы.

Если вместо того, чтобы анализировать нормальные моды во вращающейся системе отсчета, мы анализируем бы их в инерциальной системе, было бы видно, что мода, которая становится неустойчивой из-за реакции излучения при  $e = 0,813$ , в действительности нейтральна в этой точке. А нейтральность именно этой моды в инерциальной системе отсчета соответствует тому обстоятельству, что нейтральная деформация связана с ответвлением в этой точке новой, трехосной, последовательности — последовательности эллипсоидов Дедекинда. Эти эллипсоиды, будучи конгруэнтны эллипсоидам Якоби, отличаются от них тем, что они покоятся в инерциальной системе отсчета и своими трехосными фигурами обязаны внутренним вихревым движениям.

Важный вывод, который, по-видимому, следует из этих фактов, заключается в том, что в рамках общей теории относительности мы можем ожидать



возникновения вековой неустойчивости, вызванной реакцией излучения, именно из дедекиндовой моды деформации (которая квазистационарна в инерциальной системе отсчета), а не из моды Якоби (которая квазистационарна во вращающейся системе отсчета).

Еще одно обстоятельство, относящееся к рассматриваемой вековой неустойчивости, было открыто последовательно Фридманом<sup>19</sup> и Коминсом<sup>20</sup>. Оно состоит в том, что моды, принадлежащие к более высоким значениям  $m$  ( $= 3, 4 \dots$ ), становятся неустойчивыми при меньших эксцентриситетах, хотя время возрастания неустойчивости в  $e$  раз быстро увеличивается. Тем не менее, некоторые предварительные вычисления Фридмана<sup>21</sup> показывают, что именно та вековая неустойчивость, которая происходит от мод, относящихся к  $m = 3$  (или 4), ограничивает периоды вращения пульсаров.

Из сказанного выше ясно, что два рассмотренных нами типа неустойчивостей релятивистского происхождения должны играть значительную роль в контексте обсуждаемых проблем.

#### 10. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

До сих пор я рассматривал только те ограничения на последних стадиях эволюции звезд, которые следуют из существования верхнего предела на массу полностью вырожденных конфигураций из-за неустойчивостей релятивистского происхождения. Из этих и связанных с ними рассуждений неизбежен вывод, что в качестве естественного конечного продукта эволюции массивных звезд будут образовываться черные дыры; и далее, что они должны существовать в большом количестве в современной астрономической Вселенной. В этой последней главе я хочу рассмотреть очень кратко, что может сказать о них общая теория относительности. Но сначала я должен точно определить, что такое черные дыры.

Черная дыра разделяет трехмерное пространство на две области; внутренняя область, которая ограничена гладкой двухмерной поверхностью, называемой горизонтом событий, и внешняя по отношению к горизонту область, которая является асимптотически плоской. Как часть определения, требуется, чтобы никакие точки внутренней области не могли сообщаться ни с одной точкой внешней области. Эта невозможность сообщения гарантируется недопустимостью пересечения горизонта событий любым световым сигналом, возникающим во внутренней области. Требование асимптотически плоской метрики внешней области эквивалентно условию, чтобы черная дыра была изолирована в пространстве и чтобы вдаль от горизонта событий пространство—время приближалось к обычному пространству—времени земной физики.

В общей теории относительности мы должны искать решения вакуумных уравнений Эйнштейна, совместные с двумя требованиями, которые я сформулировал выше. Поразителен факт, что при этих очень простых и необходимых условиях общая теория относительности допускает для стационарных (т. е. не зависящих от времени) черных дыр одно двухпараметрическое семейство точных, единственных решений. Это решения Керра, в которых двумя параметрами являются масса черной дыры и ее угловой момент. И, что еще замечательнее, метрика, описывающая эти решения, проста и может быть выписана явно.

Я не знаю, ясна ли вся важность того, что я сказал. Позвольте я объясню.

Черные дыры являются макроскопическими объектами с массами, изменяющимися в пределах от нескольких единиц до миллионов солнечных масс. Поскольку они могут рассматриваться как стационарные и изолированные, постольку все они — каждая из них по отдельности — *точно* описываются решением Керра.

Это единственный имеющийся в нашем распоряжении пример точного описания макроскопического объекта. На окружающие нас макроскопиче-

ские объекты воздействует множество сил, возникающих в разнообразных приближениях различных физических теорий. В противоположность этому, единственными «элементами конструкции» черных дыр являются наши основные представления о пространстве и времени. Таким образом, черные дыры являются, почти по определению, самыми совершенными объектами, существующими во Вселенной. А так как общая теория относительности обеспечивает для их описания одно двухпараметрическое семейство единственных решений, они являются одновременно и самыми простыми объектами.

Переходя к физическим свойствам черных дыр, мы можем изучить их наилучшим образом, исследовав их реакцию на внешние возмущения, такие, как падение различного вида волн. Эти исследования обнаруживают такое аналитическое богатство пространства-времени Керра, которое едва ли можно было предвидеть.

Здесь было бы неуместно подробно разрабатывать эти технические вопросы <sup>22</sup>. Достаточно сказать, что, вопреки любым ожиданиям, все стандартные уравнения математической физики могут быть точно решены в пространстве-времени Керра. Эти решения предсказывают ряд физических эффектов, которые должны проявляться при взаимодействии черных дыр с внешним миром.

Математическая теория черных дыр — предмет чрезвычайной сложности. Но ее изучение убедило меня в справедливости древних изречений: «Простота — признак справедливости»

и

«Красота — привилегия истины» \*).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars. — Cambridge, England: Cambridge University Press, 1926, p. 16.
2. Chandrasekhar S. — Mon. Not. RAS, 1936, v. 96, p. 644.
3. См. <sup>1</sup>, p. 172.
4. Fowler R. H. — Mon. Not. RAS, 1926, v. 87, p. 114.
5. Chandrasekhar S. — Phil. Mag., 1931, v. 11, p. 592.
6. Chandrasekhar S. — Astrophys. J., 1931, v. 74, p. 81.
7. Chandrasekhar S. — Mon. Not. RAS, 1931, v. 91, p. 456.
8. Chandrasekhar S. — Observatory, 1934, v. 57, p. 373.
9. Chandrasekhar S. — Mon. Not. RAS, 1935, v. 95, p. 207.
10. Chandrasekhar S. — Zs. Astrophys., 1932, Bd. 5, S. 321.
11. Chandrasekhar S. — Observatory, 1934, v. 57, p. 93.
12. Chandrasekhar S. — Astrophys. J., 1964, v. 140, p. 417; Phys. Rev. Lett., 1964, v. 12, p. 114, 437.
13. Chandrasekhar S. — Astrophys. J., 1965, v. 142, p. 1519.
14. Chandrasekhar S., Tooper R. F. — Ibidem, 1964, v. 139, p. 1396.
15. Detweiler S., Lindblom L. — Astrophys. J. Suppl., 1983, v. 53, p. 93.
16. Chandrasekhar S. — Astrophys. J., 1970, v. 161, p. 561; Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 611, 762.
17. Обзор этих вопросов, относящихся к классическим эллипсоидам, см. в книге: Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. — New Haven: Yale University Press, 1968. — (Перевод: Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973).
18. Chandrasekhar S. — Ibidem, ch. 5, p. 37. — (Перевод как в <sup>17</sup>, гл. 5).
19. Friedman J. L. — Comm. Math. Phys., 1978, v. 62, p. 247.
20. Friedman J. L., Schutz B. F. — Astrophys. J., 1977, v. 222, p. 281.
21. Comins N. — Mon. Not. RAS, 1979, v. 189, p. 233, 255.
22. Friedman J. L. — Phys. Rev. Lett., 1983, v. 51, p. 11.
22. Исследования автора по математической теории черных дыр, продолжающиеся с 1974 по 1983 гг., резюмированы в книге: Chandrasekhar S. The Mathematical Theory of Black Holes. — Oxford, England: Clarendon Press, 1983.
- Желающие могут ознакомиться с дополнительными источниками:  
Chandrasekhar S. Edward Arthur Milne: His Part in the Development of Modern Astrophysics. — Quart. J. RAS, 1980, v. 21, p. 93.
- Chandrasekhar S. Eddington: The Most Distinguished Astrophysicist of His Time. — Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

\*) «The simple is the seal of the true» and «Beauty is the splendour of truth».