## УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

#### ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

#### 539,128.53:533,132

# ЯМР-СПЕКТРОСКОПИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СВЕРХТЕКУЧЕГО <sup>3</sup>Не (советско-финляндские исследования по проекту РОТА)

## Ю. М. Буньков, Г. Е. Гургенишвили, М. Крузиус, Г. А. Харадзе

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Начало второго десятилетия исследований сверхтекучести жидкого <sup>3</sup>Не ознаменовалось рядом новых достижений, непосредственно связанных с изучением свойств А- и В-фаз в состоянии вращения. Эти эксперименты, выполненные в рамках советско-финляндского проекта РОТА, позволили глубже изучить характер упорядочения в сверхтекучем <sup>3</sup>Не и проникнуть на расстояния порядка длины когерентности, выявив ряд особенностей внутренней структуры вихрей, образующихся во вращающемся сосуде.

Среди наиболее ярких результатов этого направления следует выделить обнаружение несингулярных вихревых текстур во вращающемся <sup>3</sup>He-A, структурного превращения внутри сердцевины (ко́ра) вихря в <sup>3</sup>He-B, а также гиромагнитного эффекта во вращающемся <sup>3</sup>He-B, обусловленного спонтанным магнитным моментом вихря, сосредоточенным в пределах его ко́ра. Ниже дается обзор основных результатов, полученных при исследовании свойств вращающихся сверхтекучих фаз <sup>3</sup>He.

Если сосуд с обыкновенной вязкой жидкостью привести в равномерное вращение, то вскоре установится равновесное состояние, соответствующее «твердотельному» вращению жидкости с распределением скоростей

$$\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right)=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r},\tag{1}$$

где  $\Omega$  — вектор угловой скорости. Возможность осуществления такого состояния обусловлена тем, что для классической жидкости нет никаких препятствий для совершения локальных вихревых движений с  $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ , а поле скоростей (1) с

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega} \tag{2}$$

как раз и обеспечивает установление равновесия жидкости относительно вращающегося сосуда.

Ситуация в корне меняется для такой упорядоченной жидкости, как сверхтекучий <sup>4</sup>He-II. Известно, что его свойства описываются макроскопической волновой функцией  $\psi = |\psi| e^{i\Phi}$ , причем когерентный (бездиссицативный) перенос массы характеризуется сверхтекучей скоростью

$$\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{m_4} \, \nabla \Phi. \tag{3}$$

Поскольку, в силу (3),  $\nabla \times \mathbf{v}_{s} \equiv 0$ , то ясно, что сверхтекучая компонента в вихревое движение вовлекаться не может и поэтому неспособна совершать чисто «твердотельное» вращение вместе с вращающимся контейне-

ром. Таким образом, сверхтекучая компонента <sup>4</sup>Не-11 должна прийти в равновесие с вращающимся сосудом весьма необычным (с точки зрения классической жидкости) способом, совместимым с требованием обращения в нуль  $oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{v}_{s}$  всюду, кроме, возможно, особых линий, вдоль которых «мощность» завихренности бесконечна (а плотность сверхтекучей компоненты равна нулю). Анализ этой своеобразной ситуации привел к созданию картины, согласно которой равновесное вращение <sup>4</sup>He-II осуществляется благодаря наличию системы сингулярных нитей (вихрей Онсагера — Фейнмана), пронизывающих сверхтекучую жидкость вдоль оси вращения. При этом вихревые нити, несущие локализованную завихренность, вращаются вместе с сосудом, а свертекучая компонента совершает потенциальное (безвихревое) обтекание вокруг индивидуальных вихрей. Важным обстоятельством является то, что в силу (3) циркуляция сверхтекучей скорости вокруг замкнутого контура квантована (в единицах  $h/m_{\rm a}$ ) и каждый вихрь Онсагера — Фейнмана несет единичный квант циркуляции. Описанная выше вихревая структура во вращающемся <sup>4</sup>He-II формируется на фоне чисто «твердотельного» движения нормальной компоненты, совершаемого со скоростью  $\mathbf{v}_{\mathbf{n}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ .

Как известно<sup>1</sup>, многолетние исследования вращающегося <sup>4</sup>He-II привели к целому ряду важных результатов, внесших существенный вклад в физику сверхтекучего состояния вещества. В самое последнее время квантованные вихри в <sup>4</sup>He-II удалось сфотографировать (и заснять на кинопленку), а затем измерить (по расстоянию между вихрями) постоянную Планка<sup>2</sup>.

а затем измерить (по расстоянию между вихрями) постоянную Планка<sup>2</sup>. На примере <sup>4</sup>He-II мы убеждаемся, что упорядоченная (сверхтекучая) жидкость совершает весьма экзотическое вращательное движение. Среди других, известных в настоящее время, упорядоченных состояний вещества особый интерес, несомненно, вызывают обнаруженные в 1971 г. сверхтекучие фазы легкого изотопа гелия<sup>3</sup>. В области температур порядка мК нейтральная квантовая система — жидкий <sup>3</sup>Не переходит в когерентное состояние, которое одновременно обнаруживает свойства, присущие сверхтекучей среде, антиферромагнитному телу и жидкому кристаллу.

антиферромагнитному телу и жидкому кристаллу. Вплоть до недавнего времени все экспериментальные исследования свойств сверхтекучих фаз жидкого <sup>3</sup>Не осуществлялись в неподвижных сосудах. Ясно, однако, что фундаментальное значение имеет вопрос' о том, как же будут вовлекаться эти упорядоченные фазы в состояние вращения? На пути экспериментального исследования упомянутой проблемы стояли большие технические трудности. Недавно они были успешно преодолены благодаря совместным усилиям советских и финских физиков, создавших уникальную вращающуюся сверхнизкотемпературную установку РОТА, которая функционирует в Лаборатории низких температур Хельсинского технологического университета в Отаниеми<sup>4</sup>. За истекшие два года на этой установке были осуществлены первые экспериментальные исследования сверхтекучего <sup>3</sup>Не в состоянии вращения.

Характерной особенностью <sup>3</sup>Не, отличающего его от <sup>4</sup>Не, является то, что свойства сверхтекучих фаз <sup>3</sup>Не можно исследовать высокочувствительными методами ЯМР. Все полученные до сих пор экспериментальные сведения относительно вращающихся фаз <sup>3</sup>Не найдены в результате расшифровки спектров ЯМР. Обзору основных результатов этих исследований предшествует краткое изложение основных теоретических предпосылок, основанных на сложившихся представлениях о природе сверхтекучести жидкого <sup>3</sup>Не.

#### 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ПРЕАМБУЛА

Переход в низкотемпературное упорядоченное состояние в жидком <sup>3</sup>Не осуществляется в результате образования (ниже  $T_c$ ) куперовских пар квазичастиц. Поскольку на малых расстояниях имеет место сильное отталкивание между атомами гелия, то спаривание в состояние с орбитальным моментом L = 0 невозможно <sup>5</sup> и эффективное притяжение, обеспечивающее образова-

ние куперовских пар, осуществляется, как установлено, в состояние с относительным орбитальным моментом L = 1. В результате этого обстоятельства (согласно принципу Паули) куперовские пары в сверхтекучем <sup>3</sup>Не должны обладать суммарным спином S = 1, что подтверждается всей совокупностью имеющихся экспериментальных данных (см. обзоры <sup>6-8</sup>).

В настоящее время довольно подробно исследован интервал температур от 0,1 мК до 3 мК и интервал давлений от 0 бар до  $P_{\rm m}=34$  бар (рис. 1). Кривая непрерывного фазового перехода (второго рода) из нормального состояния жидкого <sup>3</sup>Не в упорядоченное (сверхтекучее) состояние описывает

монотонный рост критической температуры  $T_c(P)$  с ростом давления, причем в области  $P, \delta a p$   $P < P_0 \approx 21$  бар переход осуществляется в сверхтекучую фазу, именуемую В-фазой. Что касается интервала давлений  $P_0 < < < P < P_m$ , то здесь с понижением температуры сперва происходит переход в сверхтекучую А-фазу (резко отличающуюся по свойствам от В-фазы) и лишь при дальнейшем 20 понижении температуры наступает скачкообразный переход (первого рода) в <sup>3</sup>Не-В.

При переходе макроскопической системы в упорядоченное состояние происходит потеря (нарушение) симметрии, присущей ее гамильтониану. Сверхтекучие фазы жидкого <sup>3</sup>Не характеризуются нарушением нескольких типов симметрий, чем и определяется многообразие их физических свойств.

Однородное орбитальное состояние сверхтекучей А-фазы характеризуется макроскопической волновой функцией, которую удобно задать единичным вектором I, вдоль которого направлен орбитальный момент куперовских



Локальное орбитальное состояние <sup>3</sup>Не-А описывается заданием триады  $(\Delta_1, \Delta_2, \mathbf{l})$ , ориентация которой может плавно (в масштабе длины когерентности) меняться в пространстве. Вариация орбитального состояния А-фазынии смещении на расстояние бг описывается поворотом триады на угол

$$\delta \varphi = \mathbf{1} \delta \varphi + \mathbf{1} \times \delta \mathbf{I},\tag{4}$$

причем бф характеризует вращение вокруг локального направления l, a бl описывает изменение ориентации самого вектора l.

Состояние, задаваемое локальной ориентацией триады ( $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ , l) обнаруживает потерю симметрии относительно трехмерных вращений в орбитальном пространстве. Следует, однако, обратить внимание на то, что вращение вокруг l, описываемое углом бф, эквивалентно локальному изменению фазы волновой функции на —  $\delta \phi$  и поэтому может быть скомпенсировано соответствующим калибровочным преобразованием  $\delta \Phi = \delta \phi$ . Таким образом, A-фаза сохраняет симметрию относительно упомянутого комбинированного вращательно-калибровочного преобразования и нарушенной оказывается лишь относительная вращательно-калибровочная симметрия.

В силу упомянутой эквивалентности операции вращения вокруг направления I и калибровочного преобразования, галилеевски-ковариантное выражение сверхтекучей скорости для <sup>3</sup>Не-А дается формулой

$$\mathbf{v}_{s} = -\frac{^{s}\hbar}{2m_{s}} \frac{\delta \varphi}{\delta \mathbf{r}}.$$
 (5)





Поскольку  $\delta_{\Delta_2} = \delta \phi \times \Delta_2$ , то  $\delta \phi = l \delta \phi = -\Delta_1 \delta_{\Delta_2}$ , и из определения (5) следует, что для А-фазы

$$\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{2m_3} \,\Delta_{1i} \boldsymbol{\nabla} \Delta_{2i}. \tag{6}$$

Мы пришли к фундаментальному выводу о том, что скорость когерентного переноса массы в <sup>3</sup>He-A не сводится к градиенту глобально определенной фазы (как это имеет место для <sup>4</sup>He-II). Связано это, разумеется, с тем обстоятельством, что операция  $\delta \phi = -\Delta_1 \delta \Delta_2$  определена ляшь локально и с ее помощью невозможно однозначным способом построить глобально заданную «фазу».

<sup>3</sup>Не-А обнаруживает потерю вращательной симметрии в спиновом пространстве, однако это нарушение является частичным: вращение вокруг направления, задаваемого единичным вектором d, оставляет состояние неизменным, причем вектор d определяет ось, вдоль которой проекция суммарного спина куперовской пары равна нулю (Sd = 0). Можно выбрать такую локальную систему координатных осей, относительно которой куперовское спаривание осуществляется лишь в состояниях с  $S_z = \pm 1$ , причем в отсутствие магнитного поля эти пары представлены с равными весами (антиферромагнитная конфигурация).

Таким образом, при фиксированных внешних условиях <sup>3</sup>Не-А полностью описывается заданием локальной ориентации пары орбитальных ортов ( $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ) и вектора d (ось l автоматически определена соотношением  $l = \Delta_1 \times \Delta_2$ ). Если к этому добавить, что состояние A-фазы не меняется при замене d на —d и одновременном вращении ортов ( $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ) на угол  $\pi$  вокруг направления l, то мы получаем исчерпывающее описание внутренней симметрии сверхтекучего <sup>3</sup>Не-А.

Все перечисленные характеристики можно описать, введя параметр порядка для А-фазы:

$$A_{i\mu} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} (\mathbf{\Delta}_i + i\mathbf{\Delta}_2)_i d_\mu, \tag{7}$$

где  $\Delta = \Delta$  (T) задает амилитуду куперовского спаривания.

Совершенно иную структуру имеет сверхтекучая В-фаза жидкого <sup>3</sup>Не. Во-первых, у нее нарушена калибровочная симметрия. Во-вторых, утраченной является симметрия при вращении спинового пространства относительно орбитального. Это означает, что при заданных внешних условиях состояние <sup>3</sup>Не-В полностью описывается локальной ориентацией оси упомянутого вращения (задаваемой единичным вектором **n**) и углом поворота θ, а также глобально определенной фазой Ф. Бездиссипативный перенос массы в В-фазе характеризуется сверхтекучей скоростью

$$\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{2m_3} \nabla \Phi, \tag{8}$$

наподобие <sup>4</sup>He-II. Все вышесказанное можно просуммировать, введя параметр порядка для В-фазы:

$$A_{i\mu} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} R_{i\mu} \left( \mathbf{n}, \ \theta \right) e^{i\Phi}$$
(9)

где  $R_{z\mu}$  являются компонентами матрицы трехмерных вращений, осуществляющей поворот спиновых координат относительно орбитальных. Заметим, что в В-фазе куперовское спаривание в спиновых состояниях с проекцией спина на ось вращения  $S_z = \pm 1$  и  $S_z = 0$  происходит с равными весами (в отсутствие внешнего магнитного поля), причем полный механический момент пар  $\mathbf{J} = 0$ .

В отсутствие различных ориентирующих факторов (внешних полей, сверхтекучих потоков, стенок сосуда) равновесное состояние фаз <sup>3</sup>Не должно

144

#### ЯМР-СПЕКТРОСКОПИЯ СВЕРХТЕКУЧЕГО <sup>3</sup>Не

быть пространственно однородным. Однако в реальных условиях, благодаря ориентирующему влиянию стенок сосуда, в который заключена сверхтекучая жидкость, в А-фазе устанавливается некоторое пространственное распределение (текстура) орбитальной оси l (чтобы избежать разрушения куперовских пар и потери энергии конденсации на границе с твердой стенкой. вектор I ориентируется вдоль ее нормали). Учитывая, далее, что внешнее магнитное поле влияет на ориентацию вектора d (магнитная энергия минимальна при d \_ H), а спин-орбитальные силы, обусловленные слабым дипольдипольным взаимодействием между магнитными моментами ядер <sup>3</sup>Не, пытаются ориентировать d вдоль l, становится очевидным, что в результате конкуренции упомянутых факторов установление пространственно неоднородной текстуры по l и d является скорее правилом, чем исключением. Аналогичным образом в В-фазе обычно осуществляется пространственно неоднородная текстура по n, ибо стенки сосуда и внешнее магнитное поле оказывают ориентирующее влияние на п. Что касается угла θ, то его равновесное значение оп зеделяется требованием минимальности сиин-орбитальной (дипольдипольной энергии):  $\theta_0 = \arccos(-1/4) \approx 104^\circ$ .

В выполненных за последнее десятилетие экспериментальных и теоретических исследованиях сверхтекучести жидкого <sup>3</sup>Не значительное место отводилось изучению разнообразных текстур в А- и В-фазах. Удобным методом для исследования этих текстур является ЯМР. При отклонении спиновых степеней свободы от равновесной конфигурации спин-орбитальное взаимодействие создает дополнительный когерентный вращающий момент, действующий на ядерные магнитные моменты <sup>3</sup>Не, и приводит к сдвигу частоты поперечного ЯМР относительно ларморова значения  $\omega_0 = \gamma H$ , наблюдаемого в нормальной фазе жидкого <sup>3</sup>Не<sup>9</sup>.

Ясно, что характер спектра ЯМР сверхтекучего <sup>3</sup>Не существенным образом должен зависеть от равновесной текстуры, на фоне которой происходит осцилляция спиновых степеней свободы. Например, в случае однородного равновесного распределения **l** и **d** в А-фазе частота поперечного ЯМР дается формулой

$$\omega_{\rm tr} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_{\rm A}^2 \cos 2\alpha},\tag{10}$$

где  $\Omega_A$  (T) — дипольная частота, связанная с упомянутым выше когерентным вращающим моментом, а  $\alpha$  — равновесный угол между **d** и **l** (в условиях совокупного влияния стенок сосуда и внешнего магнитного поля угол  $\alpha$ может отличаться от нуля (от  $\pi$ )). Более сложная ситуация осуществляется в присутствии солитонных текстур (доменных стенок), в пределах которых происходит постепенное изменение, на характерной дипольной длине  $\xi_D \approx$  $\approx 10^{-3}$  см, взаимной ориентация векторов **d** и **l** от конфигурации с **d** || **l** к конфигурации с **d** || —**l**. В пределах этих текстур формируются локализованные колебательные моды намагниченности, наблюдаемые в виде сателлитов в спектрах ЯМР сверхтекучего <sup>3</sup>He-A <sup>10</sup>.

В состоянии вращения сверхтекучие фазы жидкого <sup>3</sup>Не должны обнаружить ряд новых любопытных свойств, ибо ограничения, налагаемые внутренней симметрией параметра порядка (топологической структурой пространства вырождения) на способность совершать локальные вихревые движения, могут привести к установлению весьма своеобразного вращательного состояния сверхтекучей компоненты. Примером этого служит <sup>4</sup>He-II, для которого эти ограничения столь жестки ( $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$  всюду кроме, возможно, особых линий), что равновесное вращение сверхтекучей компоненты осуществляется лишь благодаря наличию системы сингулярных квантованных вихрей Онсагера — Фейнмана.

Пространство параметра порядка сверхтекучей А-фазы жидкого <sup>3</sup>Не многомерно (см. формулу (7)), и поэтому топологические ограничения, о которых шла речь, менее обременительны. Действительно, сверхтекучая скорость в <sup>3</sup>Не-А, как мы видели, не сводится к градиенту скаляра (см. (6)), и ее ротор,

10 УФН, т. 144, вып. 1

при соответствующем образом «устроенной» текстуре орбитального вектора l, может быть непрерывно распределен по объему жидкости <sup>11</sup>. Благодаря этому обстоятельству циркуляция сверхтекучей скорости  $v_s$  вдоль некоторого замкнутого контура C

$$\Gamma = \oint_{C} \mathbf{v}_{s} \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}_{s}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$
(11)

может принимать непрерывный ряд значений в зависимости от характера распределения поля l вдоль поверхности  $\Sigma$ , опирающейся на рассматриваемый контур. В этом состоит существенное отличие сверхтекучей A-фазы <sup>3</sup>He от <sup>4</sup>He-II, где циркуляция Г неизбежно квантована (в единицах  $\hbar/m_{\mu}$ ).

Из сказанного можно усмотреть, что должна существовать возможность твердотельного (в среднем) вращения сверхтекучей компоненты <sup>3</sup>He-A без образования решетки сингулярных вихрей за счет формирования плавной периодической текстуры I-поля, не имеющей особенностей. Примером изолированной аксиально-симметричной текстуры без особенностей служит состояние A-фазы со следующей орбитальной структурой параметра порядка <sup>12</sup>:

$$\Delta_1 + i\Delta_2 = (\cos\beta \cdot \rho + \sin\beta \cdot z + i\varphi) e^{i\varphi}, \qquad (12)$$

где  $\rho$ ,  $\phi$  и **z** — орты цилиндрической системы координат, а  $\beta$  ( $\rho$ ) плавно меняется от 0 при  $\rho = 0$  до  $\pi$  на некотором расстоянии от оси текстуры



расстоянии от оси текстуры (направленной вдоль z). Легко убедиться (используя формулу (б)), что рассматриваемая текстура характеризуется распределением сверхтекучей скорости

$$\mathbf{v}_{s} = \frac{\Gamma(\rho) \, \varphi}{2\pi \rho} \,, \qquad (13)$$

с циркуляцией  $\Gamma(\rho) = (h/2m_3) [1 - \cos\beta(\rho)],$  которая вдоль удаленного от оси z замкнутого контура

Рис. 2. Периодическая текстура І-поля вращающейся *А*-фазы (согласно Воловику, и Копнину <sup>13</sup>).

равна удвоенному кванту (в единицах  $\Gamma_0 = h/2m_3$ ), а по мере стягивания контура к оси текстуры плавно стремится к нулю. Существенным обстоятельством является то, что текстура типа (12) может быть непрерывным образом «выдавлена» из однородного состояния А-фазы (ее топологический заряд равен нулю) и поэтому при ее создании не происходит потери энергии конденсации, как это имеет место при образовании сингулярного вихря в <sup>4</sup>He-II.

Теперь ясно, что для имитации твердотельного (в среднем) вращения сверхтекучей компоненты в <sup>3</sup>He-A можно образовать периодическую решетку из несингулярных текстур типа (12), сшив их вдоль границ элементарных ячеек <sup>13</sup>. Одна из таких возможностей изображена на рис. 2. Вдоль границы каждой элементарной ячейки орбитальный вектор **1** «смотрит» вниз, а по мере приближения к центру ячейки постепенно переворачивается в противоположную сторону. Циркуляция сверхтекучей скорости вокруг границы каждой из таких ячеек равна удвоенному кванту ( $\Gamma_c = 2\Gamma_0$ ). Следует напомнить, что поскольку в <sup>3</sup>He-A циркуляция Г не квантуется, то при деформации контура интегрирования она может плавно изменяться. Лишь при обходе вокруг замкнутого контура, идущего вдоль границы элементарных ячеек, циркуляция имеет квантованное значение  $\Gamma = N \cdot 2\Gamma_0$ , где N число ячеек, охваченных этим контуром.

Если периодическая текстура рассмотренного типа реализуется в цилиндрическом сосуде радиуса *R* (приведенная на рис. 2 картина относится к сечению, перпендикулярному оси цилиндра), то вдоль внутренней поверхности сосуда устанавливается циркуляция  $\Gamma = (\pi R^2 / \Sigma_c) \cdot 2\Gamma_0$ , где  $\Sigma_c$  – площадь элементарной ячейки. Для того, чтобы картина имитировала твердотельное (в среднем) вращение сверхтекучей жидкости, приведенное выражение для  $\Gamma$  должно равняться  $2\pi R \cdot \Omega R$ , т. е. во вращающемся сосуде равновесная плотность ячеек  $n_c = 1/\Sigma_c = \Omega/\Gamma_0$ . Ясно, что в случае, когда каждая ячейка «несет» v квантов циркуляции, плотность  $n_c = 2\Omega/v\Gamma_0$ .

Приведенный выше пример служит лишь иллюстрацией того, как можно создать равновесную циркуляцию сверхтекучей скорости во вращающемся <sup>3</sup>Не-А, не прибегая к решетке сингулярных вихрей. Вопрос же о том, какая именно конкретная периодическая структура несингулярных вихревых текстур осуществляется при заданной угловой скорости вращения, требует подробного анализа с привлечением энергетических соображений. Количественные расчеты показали 14, что в отсутствие внешнего магнитного поля энергетически наиболее выгодной является квадратная решетка несингулярных вихревых текстур, каждая элементарная ячейка которой несет четыре кванта циркуляции (v = 4). Подробный анализ <sup>15</sup> цоказал также, что эта структура стабильна лишь при относительно низких значениях  $\Omega < \Omega_1 \approx$ pprox 30 рад/с. При угловой скорости, превышающей  $\Omega_1$ , предпочтительной должна стать решетка, составленная из сингулярных вихревых текстур, не имеющих особенностей в поле скоростей v<sub>s</sub>, но обладающих сингулярными корами благодаря особенностям в l-поле <sup>16</sup> (внутренняя структура этих ко́ров исследовалась в <sup>17</sup>). При дальнейшем увеличении Ω следует ожидать потери устойчивости и у описанной выше решетки сингулярных вихревых текстур с переходом во вращательное состояние, несущее решетку сингулярных вихрей с единичным квантом циркуляции на фоне однородного l-поля, перпендикулярного оси вращения 15-18.

При включении внешнего магнитного поля структура решеток вихревых текстур будет искажаться благодаря совокупному влиянию магнитной анизотропии и снин-орбитального взаимодействия <sup>18</sup>. Поскольку в равновесии **d** <u>L</u> **H**, а спин-орбитальные силы стараются удержать l вдоль d. то периодическое l-поле вихревых текстур должно сплющиваться, причем по мере увеличения напряженности магнитного поля область, где завихренность сверхтекучей скорости отлична от нуля, будет постепенно стягиваться к центру элементарных ячеек, освобождая место для областей, где поле l 🔔 Н и почти однородно. Таким образом, в присутствии достаточно сильного магнитного поля вокруг оси несингулярной вихревой текстуры формируется «рыхлый» кор, в пределах которого  $\nabla \times \mathbf{v}_s \neq 0$ . Радиус этого несин-гулярного кора в полях  $H \gg H_c \approx 25\Gamma_c$  определяется дипольной длиной ξ<sub>D</sub> ≫ ξ, на которой, благодаря спин-орбитальному взаимодействию, восстанавливается параллельность l и d, нарушенная вблизи центра вихревой текстуры. Ясно, что в случае решетки, составленной из сингулярных вихревых текстур, в центрах «рыхлых» коров сосредоточены компактные сингулярные коры размера ξ, внутри которых А-фаза разрушена.

Заметим, что решетку сингулярных вихревых текстур можно образовать, расщепив каждую несингулярную вихревую текстуру с v = 2 на две сингулярные вихревые текстуры с единичными квантами циркуляции. При этом придется преодолеть значительный (топологический) энергетический барьер, связанный с наличием компактных кбров у сингулярных вихревых текстур, однако, полученное конечное состояние в присутствии сильного магнитного поля оказывается энергетически более выгодным <sup>18</sup>. Таким образом, в полях  $H \gg H_c$  решетка несингулярных вихревых текстур во вращающемся <sup>3</sup>He-A должна быть метастабильной. С другой стороны, следует ожидать, что ее легче образовать однородно по всему объему <sup>3</sup>He-A (путем упомянутого выше «выдавливания» без топологического барьера), чем сформировать решетку сингулярных вихревых текстур, поскольку последние могут войти в объем сверхтекучей жидкости, по-видимому, лишь в результате зарождения на стенках сосуда.

Обращаясь к предполагаемым свойствам вращающейся В-фазы <sup>3</sup>He, следует вспомнить (см. формулу (8)), что в ней сверхтекучее течение потенциально, и поэтому равновесное состояние со средним значением  $\langle \nabla \times \mathbf{v}_s \rangle = 2\Omega$  может быть обеспечено лишь в результате формирования решетки сингулярных вихрей, подобно хорошо изученной картине, имеющей место во вращающемся <sup>4</sup>He-II. С другой стороны, во вращающемся <sup>3</sup>He-B следует ожидать проявления специфических текстурных эффектов, обязанных влиянию противотоков сверхтекучей и нормальной компонент (с относительной скоростью  $\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$ ) на ориентацию оси **n** (директрисы), характеризующей В-фазу.

При  $H \gg H_c$  плотность энергии анизотропии В-фазы, зависящей от ориентации **n** и связанной с совокупным действием магнитного поля и сверх-. текучих противотоков, имеет вид <sup>19</sup>

$$F_{an}(\mathbf{n}) = -a \left\{ (\mathbf{n}\mathbf{H})^2 + \frac{2}{5} (\mathbf{u}\overrightarrow{R}(\mathbf{n})\mathbf{H})^2 \right\}, \tag{14}$$

где  $a \approx 10^{-12}$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{v_s} - \mathbf{v_n})/v_c$ , а  $v_c$  — характеристическая скорость, при которой ориентирующее действие противотока сравнимо с непосредственным ориентирующим влиянием приложенного магнитного поля (нетрудно показать, что  $v_c = \hbar/2m_3\xi_D = \Gamma_0/2\pi\xi_D \approx 0.1$  см/с вблизи  $T_c$ ). Первое слагаемое в (14) описывает ту часть диполь-дипольной энергии, которая проявляется благодаря искажению полностью изотропного состояния В-фазы в присутствии магнитного поля (в результате преимущественного разрушения куперовских пар со спиновой конфигурацией  $\uparrow\downarrow$ ). Вместе с тем, благодаря упомянутому магнитному искажению ( $\sim H^2$ ), кинетическая энергия сверхтекучего потока также приобретает анизотропную добавку, приводящую к появлению второго слагаемого в (14).

Во вращающемся сосуде с <sup>3</sup>Не-В эффект противотоков сверхтекучей и нормальной компонент наиболее ярко должен проявиться сразу после включения вращения, когда нормальная жидкость уже вовлечена в твердотельное движение, а сверхтекучая компонента еще неподвижна (можно предположить, что для формирования равновесной решетки сингулярных вихрей потребуется макроскопическое время, аналогично картине, наблюдаемой в <sup>4</sup>He-II). В этой сильно неравновесной ситуации  $\mathbf{u} = -(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})/v_c$ и, если в заметной части объема жидкости |  $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$  |  $\gg v_c$ , то противотоки должны существенным образом повлиять на характер **n**-поля В-фазы. В дальнейшем, по мере вовлечения в движение сверхтекучей компоненты и формирования вихревой структуры, влияние противотоков будет ослабевать и, после установления равновесного состояния с  $\langle \nabla \times \mathbf{v}_s \rangle = 2\Omega$ , противотоки окажутся сосредоточенными лишь в межвихревых областях.

Для того чтобы описать влияние равновесной решетки вихрей на ориентацию директрисы п В-фазы, второе слагаемое в (14) следует усреднить по сечению, перпендикулярному оси вращения  $z = \Omega/\Omega$ . В результате мы приходим к следующему выражению для эффективной энергии анизотропии равновесно вращающегося <sup>8</sup>Не-В <sup>20</sup>:

$$\langle F_{\rm an} \rangle = -aH^2 \left\{ (\mathbf{nh})^2 - \frac{2}{5} \lambda \left( \overrightarrow{zR} \left( \mathbf{n} \right) \mathbf{h} \right)^2 \right\},\tag{15}$$

где  $\mathbf{h}$  — единичный вектор вдоль направления внешнего магнитного поля, а безразмерный параметр  $\lambda = \lambda$  ( $\Omega$ ) характеризует степень ориентирующего влияния сверхтекучих потоков, обтекающих сингулярные вихри, и дается выражением

$$\lambda = \left(\frac{\xi_D}{r_v}\right)^2 \ln \frac{\sqrt{\pi}r_v}{\xi_c}, \qquad (16)$$

причем  $\pi r_v^2 = \Sigma_c = \Gamma_0/2\Omega$ , а радиус обрезания  $\xi_c$  определяет эффективный размер кора вихря в В-фазе.

Выражение (16) для  $\lambda$  учитывает вклад вихревых эффектов, обусловленных сверхтекучими потоками, обтекающими вихри на расстоянии от их осей, превосходящем  $\xi_c$ . Область внутри коров (где В-фаза полностью разрушена) также может дать вклад в энергию анизотропии вращающегося <sup>3</sup>He-B (об этом подробнее см. ниже).

Рассматривая случай аксиального поля (Н || z), легко установить, что

$$\langle F_{\rm an} \rangle = a H^2 \left[ (1 - \lambda) \sin^2 \beta + \frac{5}{8} \lambda \sin^4 \beta \right] + \text{const}, \tag{17}$$

и в равновесии 20

$$\sin^2\beta = \begin{cases} 0, & \lambda < 1, \\ \frac{4}{5} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), & \lambda > 1. \end{cases}$$
(18)

Таким образом, в большом объеме вращающегося <sup>3</sup>Не-В (когда можно пренебречь ориентирующим влиянием стенок сосуда) существует пороговое значение  $\lambda = 1$ , ниже которого  $\mathbf{n} || \mathbf{H}$ , как и в отсутствие вращения. При  $\lambda = 1$  наступает фазовый переход в состояние с  $\beta \neq 0$ , что должно проявиться в сдвиге частоты поперечного ЯМР относительно ларморовского значения  $\omega_0$  на величину

$$\delta\omega_{\rm tr} = \frac{\Omega_{\rm B}^2}{2\omega_0} \sin^2\beta, \quad H \gg H_{\rm c}, \tag{19}$$

где  $\Omega_{\rm B}$  — дипольная частота продольного ЯМР В-фазы.

Иная ситуация имеет место, если магнитное поле наклонено на некоторый угол  $\vartheta$  относительно оси вращения. Можно показать <sup>20</sup>, что в этом случае порог по  $\lambda$  отсутствует, причем для  $\lambda \ll 1$ 

$$\sin^2 \beta \approx 0.1\lambda^2 \sin 2\theta, \tag{20}$$

и влияние вихревой решетки на ориентацию директрисы <br/>п максимально при  $\vartheta = \pi/4.$ 

Описанные особенности поведения вращающегося сверхтекучего <sup>3</sup>Не вытекали из сложившихся за последнее десятилетие представлений относительно структуры А- и В-фаз, но до недавнего времени они существовали лишь в воображении теоретиков. Разнообразие ожидаемых новых эффектов, а также уверенность в том, что изобретательность Природы неиссякаема, подогревало интерес к экспериментальным исследованиям проблемы вращающегося <sup>3</sup>Не.

#### 3. СВЕРХНИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ВРАЩАЮЩАЯСЯ УСТАНОВКА РОТА И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ КАМЕРА

Для осуществления вращения сверхтекучего <sup>3</sup>Не были созданы мощный криостат растворения <sup>3</sup>Не — <sup>4</sup>Не и криостат адиабатического размагничива ния ядер металлического Cu, собранные на массивной платформе, которая с целью уменьшения трения, «подвешена» на воздушной подушке (давление воздуха 4—6 бар) (рис. 3). Вращение установки с общим весом 350 кг осуществляется ременной передачей от сервомотора с мощностью 18 Вт. Максимальная угловая скорость вращения достигает 2 рад/с. На вращающейся платформе смонтирована измерительная аппаратура, связь которой с компьютером, управляющим экспериментом и накапливающим полученную информацию, осуществляется посредством оптоэлектронной системы. Для уменьшения возможных вибраций, могущих привести к быстрому отогреву, были применены специальные демпферы, а вся установка помещена на изолированном фундаменте весом 5 тонн. Кроме того, криостаты растворения и адиабатического размагничивания были собраны максимально жестко. В результа те оказалось, что система мало чувствительна как к низкочастотным, так и к высокочастотным вибрациям, причем тепловой приток к ядерной ступени составляет 30 мВт и практически не зависит от скорости вращения.

Криостат растворения выполнен с использованием трех спеченных теплообменников Фроссати<sup>21</sup>, общая расчетная площадь которых составляет ~100 м<sup>2</sup>. В процессе охлаждения ядерной ступени криостат растворения



Рис. 3. Схема сверхнизкотемпературной вращающейся установки РОТА.

 Оптоэлектронная линия передачи данных, 2 — жидкомсталлические контакты электропитания приборов, 3 — верхний радиальный и нижний радиальный и аксиальный воздушные подпииники, 4 — труба откачки криостата растворения (при вращении отсоединяется), 5 — крионасос, 6 — одноградусная камера, 7 — критальная камера, 9 — ступень размагничивания, 10 — сверхпроводящий соленоид (80 кЭ). работает в непрерывном режиме. Затем, после завершения адиабатического размагничивания, внешняя система откачки отключается и <sup>3</sup>Не из криостата медленно откачивается криоадсорбционным насосом оригинальной конструкции. Автономный режим работы криостата растворения длится около 17 часов, и длительность экспериментов в состоянии вращения лимитируется объемом <sup>3</sup>Не в камере растворения.

Ядерная ступень криостата содержит 30 молей сверхчистой медной проволоки Ø0,5 мм. Криостат растворения охлаждает ядерную ступень до 20 мК в магнитном поле 8 Тл. Затем методом адиабатического размагничивания ядер Си достигается температура порядка 1 мК, которая через конический переход передается на спеченый серебряный теплообменник в экспериментальной камере. Конический переход унифицирован советскими установками — работающим с стационарным криостатом ядерного размагничивания Института физических проблем АН СССР и строящейся сверхнизкотемпературной вращающейся установкой Института физики АН ГССР, что, позволяет взаимно переносить экспериментальные ячейки.

Поскольку описанные предыдущем в параграфе особенности свойств вращающихся фаз жидкого <sup>3</sup>Не находят отражение в характере их текстур, то естественным явилось применение, в первую очередь, методов ЯМР, оказавшихся столь эффективными при зондировании А- и В-фаз в неподвижных сосудах. Первые экспериментальные исслепования свойств <sup>3</sup>Не-А и <sup>3</sup>Не-В в состоянии вращения были выполнены с помощью наблюдения спектров поперечного ЯМР.

Использовавшаяся экспериментальная камера (рис. 4) представляет собой цилиндрический сосуд длиной 30 мм и диаметром 5 мм, ось которого направлена вдоль оси вращения. Радиочастотное (РЧ) магнитное поле возбуждалось в седловидных катушках, намотанных по образующей цилиндра. Постоянное магнитное поле создавалось двумя ортогональными соленоидами, так что его направление можно было менять в плоскости. перпендикулярной поляризации РЧ поля. Однородность постоянного магнитного поля регулировалось корректирующими катушками с точностью  $\Delta H/H_0 \approx \approx 4 \cdot 10^{-5}$ . Рядом с экспериментальной ячейкой была расположена камера с <sup>3</sup>He, законтаченная с камерой растворения, так что температура в ней была в области 10—15 мК. Сигнал ЯМР от этой камеры служил в качестве реперной точки для градуировки поля. Магнитное поле сканировалось со скоростью порядка 1 Гс/мин, а сигнал ЯМР на частоте 920 кГц записывался в память компьютера и на самописец. Синфазно со сканированием магнитного поля снимались данные с платинового ЯМР термометра PLM-3, датчик которого был расположен в основании экспериментальной камеры. Большинство измерений велось в условиях естественного отогрева образца



со скоростью 1,5 мкК/мин, причем обычно вращение последовательно включалось и выключалось с интервалами, достаточными для установления равновесия, но в ряде случаев эксперименты проводились в непрерывном режиме вращения.

## 4. ЯМР-СПЕКТРОСКОПИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ <sup>3</sup>Не-А

Первые сведения относительно вращающейся А-фазы жидкого <sup>3</sup>Не были извлечены из анализа формы линии поперечного ЯМР. Оказалось, что по мере увеличения угловой скорости пик поглощения при частоте  $\omega_{tr} \approx \omega_0 + (\Omega_A^2/2\omega_0)$  (см. формулу (10) для случая  $\alpha = 0$  и  $\omega_0 \gg \Omega_A$ ) «подсаживается» и уширяется, сохраняя интегральную интенсивность <sup>22</sup>. Пропорциональность наблюденного эффекта угловой скорости давало основания связать его с формированием во вращающейся А-фазе системы вихрей с равновесной плотностью  $n_c \sim \Omega$ .

Дальнейшие экспериментальные исследования <sup>23</sup>, выполненные с улучшенным разрешением, выявили важные детали спектра поглощения поперечного ЯМР во вращающемся <sup>3</sup>Не-А. Выяснилось, что основной пик сопровождается слабым сателлитом с частотой  $\omega_{sat} < \omega_{tr}$ , которая практически не зависит от угловой скорости вращения, а интенсивность  $I_{sat}$  пропорциональна  $\Omega$ . На рис. 5 приведен фрагмент данных, касающихся упомянутого сателлита.

Следует заметить, что в ряде случаев в экспериментах наблюдался второй сателлит, расположенный ближе к основному пику поглощения, причем он появлялся в невращающемся сосуде при быстром вхождении в А-фазу из нормального состояния жидкого <sup>3</sup>Не (см. рис. 5, слева). Анализ характеристик этого побочного пика показал, что он связан с образованием солитонных текстур, обнаруженных ранее в стационарных экспериментах <sup>24</sup>. В цилиндрическом сосуде в присутствии аксиального магнитного поля следует ожидать появления так называемых крутильных составных солитонов (twist composite solitons). Локализованные в пределах симно-орбитальных ям этих солитонов колебания намагниченности как раз и обнаруживаются в виде сателлитов в спектрах поглощения поперечного ЯМР, причем положение упомянутого выше побочного пика прекрасно согласуется с теоретическим предсказанием <sup>10</sup>, основанном на солитонной модели. После приведения сосуда с <sup>3</sup>Не-А во вращение интенсивность солитонного сателлита постепенно уменьшается со временем, и по истечении примерно 30 мин он полностью исчезает.

Обращаясь к характеристике вновь обнаруженного сателлита в спектре поперечного ЯМР вращающейся А-фазы, следует подчеркнуть, что он обладает большой шириной; и не исключено, что на самом деле мы имеем дело



Рис. 5. Спектр основного пика поглощения — 1 и сателлитных линий: спонтанной — 2 и возникающей при вращении — 3. Справа показан вид сателлитных линий (в ед. интенсивности основного сигнала).

с неразрешенной структурой, возникающей в результате наложения близколежащих пиков. Если, однако, интерпретировать его как изолированный



Рис. 6. Температурная зависимость величины  $R_{\rm tr}$  для вихревого сателлита при различных угловых скоростях.  $\Omega$  (рап/с) = 0.60 (1), 1.04 (2), 1.21 (3)

$$\Omega (pag/c) = 0.60 (1), 1.04 (2), 1.21 (3) \pi 1.43 (4).$$

пик поглощения, то соответствующую частоту можно представить в стандартном виде:

$$\omega_{\text{sat}} = \sqrt{\omega_0^2 + R_{\text{tr}}^2 \Omega_A^2} \approx \omega_0 + R_{\text{tr}}^2 \frac{\Omega_A^2}{2\omega_0}, \qquad (21)$$

где ренормирующий множитель  $R_{tr}^2 < 1$ . На рис. 6 изображены экспериментальные результаты, касающиеся температурной зависимости  $R_{tr}^2$  при различных угловых скоростях вращения. Обращает на себя внимание тот факт, что  $R_{tr}^2$ , а следовательно, и частота сателлита, практически не зависит от  $\Omega$ .

На рис. 7 приведены экспериментальные данные о зависимости интенсивности нового сателлита от угловой скорости вращения, которую можно удовлетворительным образом описать следующей эмпирической формулой:

$$\frac{I_{\text{sat}}}{I_0} = 0,058 \,\Omega,$$
 (22)

где  $I_0$  — интенсивность основного пика поглощения при частоте  $\omega_{\rm tr} \approx \omega_0 + (\Omega_{\rm A}^2/2\omega_0)$ , а угловая скорость выражена в рад/ с.

Анализ результатов, приведенных на рис. 6 и рис. 7, показывает, что обнаруженный шик поглощения несомненно связан с вращением <sup>3</sup>He-A и, скорее всего, формируется в пределах достаточно изолированных друг от друга вихревых образований, возникающих во вращающемся сосуде. На это указывает пропорциональность интегральной интенсивности сателлита угловой скорости, с одной стороны, и независимость его положения от  $\Omega$ , с другой.

Дальнейшие подробности о характерных особенностях спектра поперечного ЯМР во вращающейся А-фазе жидкого <sup>3</sup>Не можно найти в работе <sup>25</sup>, где, наряду с упомянутыми выше вопросами, обсуждаются данные о временах формирования вихревого сателлита после включения вращения, а также об уширении основного пика поглощения в состоянии вращения.

Для интерпретации полученных экспериментальных данных следует обратиться к количественному сравнению с теоретическими расчетами. Исходным пунктом здесь является предположение о том, что появление отщепленного пика поглощения (сателлита) связано с формированием локализованных колебаний намагниченности, захваченных, благодаря когерентному спинорбитальному взаимодействию, неоднородностями I-поля, упомянутых в гл. 2, «рыхлых» коров периодической вихревой текстуры вращающегося <sup>3</sup>Не-А. В двумерной потенциальной яме дипольного кора вихря существует, по крайней мере, одно связанное состояние, которое возбуждается в условиях поперечного ЯМР, обнаруживая себя в виде описанного выше сателлита. Для количественного исследования спектра частот локализованных спиновых колебаний следует обратиться к волновому уравнению для поперечной намагниченности

Рис. 7. Зависимость относительной интенсивности вихревого сателлита от угловой скорости вращения. 1 — вращение включалось в состоянии <sup>4</sup>Не-А; 2 — вход в А-фазу совершался в состоянии вращения.

$$\left(-\xi_{\rm D}^2 \nabla^2 + U(\mathbf{r})\right) S_+ = \varepsilon S_+, \tag{23}$$

где  $U(\mathbf{r})$  — безразмерный дипольный потенциал кора вихревой текстуры, а  $\varepsilon = (\omega^2 - \omega_0^2)/\Omega_A^2$ .

При конкретных расчетах спектра локализованных колебаний намагниченности следует исходить из реалистических моделей «рыхлых» коров, формирующихся вокруг осей вихревых текстур в присутствии сильного магнитного поля ( $H \gg H_c \approx 30$  Гс), когда их размер порядка динольной длины  $\xi_D^{18}$ . В самом общем случае триаду ( $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ , I), описывающую локальное орбитальное состояние А-фазы, можно параметризовать с помощью углов Эйлера ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) следующим образом:

$$\boldsymbol{\Delta}_1 + i \; \boldsymbol{\Delta}_2 = (\mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2) \; e^{i\boldsymbol{\gamma}}, \tag{24}$$

причем

$$\mathbf{u}_1 = (\cos \alpha \cdot \mathbf{x} - \sin \alpha \cdot \mathbf{y}) \cos \beta + \sin \beta \cdot \mathbf{z},$$
  
$$\mathbf{u}_2 = \sin \alpha \cdot \mathbf{x} + \cos \alpha \cdot \mathbf{y}.$$
 (25)

Нетрудно убедиться, что орбитальный вектор

$$\mathbf{l} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = -(\cos \alpha \cdot \mathbf{x} - \sin \alpha \cdot \mathbf{y}) \sin \beta + \cos \beta \cdot \mathbf{z}, \quad (26)$$

так что текстура описывается локальными значениями азимутального угла α и полярного угла β.

Воспользовавшись формулой (6), легко показать, что сверхтекучая скорость

$$\mathbf{v}_{s} = \frac{\Gamma_{0}}{2\pi} \left( \nabla \gamma + \cos \beta \nabla \alpha \right), \tag{27}$$

что еще раз подтверждает невозможность сведения  $v_s$  к градиенту глобально определенного ска́ляра. В то же время формула (27) указывает на одно чрезвычайно важное обстоятельство, являющееся ключом на пути аналитического построения различных несингулярных вихревых текстур. Из (27) легко усмотреть, что в области, где соз  $\beta = 1$  можно сконструировать состояние с регулярным поведением  $v_s$ , если величина  $\alpha + \gamma$  не имеет особенностей. Аналогичным образом, в области, где соз  $\beta = -1$ , сверхтекучая скорость будет регулярной, если  $\alpha - \gamma$  — неособая функция.

Следуя сформулированному выше предписанию, легко построить несколько простейших изолированных несингулярных вихревых текстур.

а) Несингулярная радиально-циркулярная вихревая текстура Мермина — Хо:

$$\begin{array}{c} \alpha = -\varphi + \alpha_0, \quad 0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \beta = \beta(\rho), \quad \beta(0) = 0, \quad \beta(\infty) = \frac{\pi}{2}, \\ \gamma = \varphi, \qquad \alpha + \gamma = \alpha_0 = \text{const.} \end{array} \right\}$$
(28)

Этот вихрь характеризуется аксиально-симметричной текстурой

$$\mathbf{l} = -\left(\cos\alpha_0 \cdot \boldsymbol{\rho} + \sin\alpha_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \sin\beta + \cos\beta \cdot \mathbf{z}$$
(29)

и регулярным распределением сверхтекучей скорости

$$\mathbf{v}_{\mathrm{s}} = \frac{\Gamma\left(\rho\right)\,\boldsymbol{\varphi}}{2\pi\rho}\tag{30}$$

с циркуляцией  $\Gamma(\rho) = \Gamma_0 (1 - \cos \beta (\rho))$ , причем  $\Gamma (\infty) = \Gamma_0$ . Заметим, что при  $\alpha_0 = 0$  мы имеем чисто радиальную текстуру, а при  $\alpha_0 = \pi/2$  — чисто циркулярную.

б) Несингулярная крестообразная (гиперболическая) вихревая текстура<sup>26</sup>:

$$\alpha = \varphi + \alpha_{0}, \quad 0 \leq \alpha_{0} \leq \frac{\pi}{2},$$
  

$$\beta = \beta(\rho), \quad \beta(0) = \pi, \quad \beta(\infty) = \frac{\pi}{2},$$
  

$$\gamma = \varphi, \quad \alpha - \gamma = \alpha_{0} = \text{const.}$$
(31)

Этот вихрь характеризуется аксиально-несимметричной текстурой

$$\mathbf{l} = -\left[\cos\left(\alpha_0 + 2\varphi\right)\boldsymbol{\rho} - \sin\left(\alpha_0 + 2\varphi\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}\right]\sin\beta + \cos\beta\cdot\mathbf{z} \qquad (32)$$

и регулярным распределением сверхтекучей скорости согласно формуле (30), но с циркуляцией  $\Gamma(\rho) = \Gamma_0 (1 + \cos \beta (\rho))$ , причем снова  $\Gamma(\infty) = \Gamma_0$ .

в) Несингулярная вихревая текстура Андерсона — Тулуза:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = -\varphi, \\ \beta = \beta(\rho), \quad \beta(0) = 0, \quad \beta(\infty) = \pi, \\ \gamma = \varphi. \end{array} \right\}$$
(33)

Этот вихрь, уже упомянутый в гл. 2, характеризуется аксиально-симметричной текстурой (формула (12)) и регулярным распределением сверхтекучей скорости (формула (13)), причем  $\Gamma(\infty) = 2\Gamma_{\theta}$ .

На рис. 8 схематически изображены радиальная, циркулярная и гиперболическая текстуры.

154

Нетрудно понять, что из вихревых текстур типа a) и б) можно сконструировать плавные периодические текстуры, не имеющие особенностей в поле скоростей v<sub>s</sub> и имитирующие твердотельное (в среднем) вращение А-фазы жидкого <sup>3</sup>He. «Кирпичами» здесь могут служить «молекулы», составленные из пар циркулярно-гиперболических вихревых текстур и способные легко



вписываться в однородное 1-поле (рис. 9). Из этих «молекул» можно образовать периодическую структуру, обладающую квадратной симметрией, элементарная ячейка которой изображена на рис. 10 и содержит две циркулярногиперболические «молекулы». Легко установить, что циркуляция сверхтекучей скорости по замкнутому контуру, обегающему вокруг границы этой ячейки, равна 4Г<sub>0</sub>. Описанная периодическая структура во вращающемся



Рис. 9. Схематическое изображение текстуры 1-полл в «молекуле» циркулярно-гиперболического вихря.

При переходе от оси циркулярной текстуры к оси гиперболической вектор I плавно переворачивается в противоположную сторону.



Рис. 10. Схематическое изображение элементарной ячейки, содержащей пару циркулярно-гиперболических вихревых текстур. Циркуляция сверхтекучей скорости вдоль границы ячейки равна 4 Го.

<sup>3</sup>Не-А впервые была рассмотрена в <sup>26</sup>, а в работе <sup>14</sup> было продемонстрировано, что в отсутствие внешнего магнитного поля она является энергетически наиболее выгодной несингулярной вихревой текстурой с равновесной плотностью элементарных ячеек  $n_c = \Omega/2\Gamma_0$ , обеспечивающей в среднем твердотельное вращение <sup>3</sup>Не-А.

В отсутствие магнитного поля размер рассмотренных выше «молекул», из которых сконструирована равновесная вихревая решетка описанного типа, определяется угловой скоростью вращения и не обладает каким-либо собственным характерным размером. При наложении сильного магнитного поля ситуация в корне меняется. Как уже отмечалось в гл. 2, при  $H \gg H_c$ вокруг осей аналитических вихревых текстур формируются «рыхлые» ко́ры, размер которых порядка дипольной длины  $\xi_D$ . При умеренных скоростях вращения размер элементарной ячейки вихревой решетки  $r_p$ , пропорциональный  $1/\Omega$ , заметно превосходит  $\xi_D$ , и поэтому общирная площадь в пределах каждой ячейки будет иметь почти однородное распределение 1-поля, если размер циркулярно-гиперболической «молекулы» сожмется до величины порядка  $\xi_D$ . Таким образом, при  $H \gg H_c$  следует ожидать, что периодическая вихревая текстура во вращающемся <sup>3</sup>Не-А будет сконструирована из компактных «молекул», несущих двойной квант циркуляции сверхтекучей скорости, и, скорее всего, будет иметь треугольную симметрию, наподобие вихревых решеток в сверхпроводниках и в <sup>4</sup>He-II.

Пример упомянутой выше компактной «молекулы» рассмотрен в работе <sup>27</sup> (рис. 11), где был исследован спектр локализованных спиновых колебаний, захваченных в пределах ее дипольной потенциальной ямы. Согласно-



Рис. 11. Поперечное сечение l-поля циркулярно-гиперболической вихревой «молекулы» в присутствии сильного магнитного поля (по Сеппале и Воловику<sup>27</sup>).

теоретическим расчетам, введенная ранее величина  $R_{\rm tr}$ , оцененная для изображенной на рис. 11 текстуры, количественно близка к экспериментально наблюдаемой.

В работе <sup>27</sup> была также оценена частота сателлита, формирующегося в пределах «рыхлого» дипольного кора сингулярной вихревой текстуры в поле  $H \gg H_{
m c}$  (сингулярный вихрь, разумеется, обладает еще и «жестким» кором радиуса ξ). Поскольку, как оказалось, дипольный сингулярной текстуры кор примерно вдвое меньше дипольного кора несингулярного вихря, то локальный колебательный уровень находится довольно близко к верхкраю потенциальной нему ямы и R<sub>tr</sub> близко к единице. Количественный расчет пока-

зал, что для сингулярной текстуры  $R_{\rm tr} \approx 0.98$  и присутствие столь слабо отщепленного сателлита (см. формулу (21)) вряд ли можно было бы обнаружить на фоне уширенного основного пика. Теоретическая оценка относительной интенсивности вихревых сателлитов также говорит в пользу того, что во вращающемся <sup>3</sup>He-A наблюдалась система аналитических вихрей с «рыхлыми» дипольными корами. Следует, однако, иметь в виду, что согласнорасчетам, выполненным в <sup>18,27</sup>, в полях  $H \gg H_c$  энергетически, более выгодной может оказаться решетка, составленная из сингулярных вихревых текстур и поэтому не исключено, что система несингулярных вихрей, обнаруженная экспериментально, является метастабильной. Этот вопрос требуетдальнейшего исследования.

## 5. ЯМР-СПЕКТРОСКОПИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ <sup>3</sup>Не-В

Обращаясь к экспериментальным данным по ЯМР-спектроскопии вращающейся В-фазы жидкого <sup>3</sup>Не и их интерпретации, следует, в первую очередь, иметь в виду, что в <sup>3</sup>Не-В магнитная длина  $\xi_{H}^{B}$ , на которой происходит восстановление параллельности директрисы **n** и поля **H**, нарушенной в некоторой области пространства, определяется конкуренцией весьма слабой энергии анизотропии —  $aH^2$  (**nb**)<sup>2</sup> с энергией неоднородности В-фазы и оценивается по формуле

$$\xi_{H}^{\rm B} \approx \sqrt{\frac{a}{\bar{K}}} \frac{1}{H}, \qquad (34)$$

где К — коэффициент жесткости параметра порядка сверхтекучего <sup>3</sup>Не относительно пространственных искажений конденсата (подробности можно-

найти в обзоре<sup>8</sup>). В силу малости коэффициента *a*, магнитная длина  $\xi_{H}^{B}$  даже в относительно сильных полях  $H \gg H_{c}$  может иметь вполне макроскопическую величину, сравнимую с размером сосуда, содержащего <sup>3</sup>He-B. Например, при  $T = 0.7 T_{c}$  и  $H_{0} = 284$  Гс магнитная длина  $\xi_{H}^{B} \simeq 0.4$  мм, что всего в шесть раз меньше радиуса цилиндрического сосуда, использованного в описанных ниже экспериментах. Это означает, что присутствие стенок сосуда, оказывающих ориентирующее влияние на директрису **n**, должно ощущаться в значительной части объема сосуда, определяя характер равновесной текстуры **n**-поля В-фазы.

В магнитном поле, направленном вдоль оси неподвижного цилиндрического сосуда с <sup>3</sup>He-B, устанавливается аксиально-симметричная конически расширяющаяся (flare out) текстура директрисы, характеризующаяся тем, что вектор **n** на оси сосуда направлен вдоль **H** и по мере удаления от центра к периферии постепенно отклоняется на угол  $\beta = \beta$  ( $\rho$ ) от аксиального направления, достигая угла отклонения  $\beta$  (R)  $\simeq$  63° относительно **H** на стенках сосуда радиуса R. Вместе с тем вектор **n** повернут на угол  $\alpha =$  $= \alpha$  ( $\rho$ ) относительно радиального направления, причем  $\alpha$  (R)  $\approx$  60°.

На фоне равновесной текстуры  $\mathbf{n} = \mathbf{n}$  (р) формируются колебания намагниченности, частотный спектр которых можно исследовать методами ЯМР. Для достаточно плавной текстуры (в масштабе дипольной длины  $\xi_D \ll \xi_H^B$ ) спектр ЯМР в первом приближении можно описать в модели локальных осцилляторов, приписав каждой точке с заданным значением угла  $\beta$  «свою» частоту

$$\omega_{\rm tr}\left(\rho\right) pprox \omega_0 + \frac{\Omega_{\rm B}^2}{2\omega_0} \sin^2\beta,$$
(35)

причем, зная распределение  $\beta = \beta$  (р), можно построить огибающую спектральной плотности по формуле

$$P(\omega) = \frac{2}{R^2} \int \delta(\omega - \omega_{\rm tr}(\rho)) \rho \, d\rho.$$
 (36)

При более строгом подходе следует учитывать, что благодаря жесткости параметра порядка В-фазы колебания намагниченности являются коллективными модами и их следует описывать с помощью волнового уравнения типа (23) с динольным потенциалом  $U(\rho) = \sin^2 \beta(\rho)$ .

Подробный расчет текстуры **n**-поля В-фазы, заключенной в цилиндрический сосуд и помещенной в аксиальное магнитное поле, был выполнен в работе <sup>28</sup> для случая  $\xi_{H}^{B} \ll R$  (см. также <sup>29,30</sup>). На расстоянии от боковой стенки цилиндрического сосуда, превышающем  $\xi_{H}^{B}$ , угол отклонения директрисы от направления магнитного поля мал, и в стационарном случае (т. е. в отсутствие вращения) описывается формулой

$$\beta(\rho) \approx c \sqrt{\frac{2\pi R}{\xi_H}} e^{-R/\xi_H} I_1\left(\frac{\rho}{\xi_H}\right), \qquad (37)$$

где  $c \approx 1$ ,  $\xi_H = (16/13)^{1/2} \xi_H^B$ , а  $I_1(x)$  — модифицированная функция Бесселя нервого рода.

Из (37) легко усмотреть, что при  $\rho \ll \xi_H$ 

$$\beta(\rho) \approx \beta_1 \left(\frac{R}{\xi_H}\right) \frac{\rho}{\xi_H}, \quad \beta_1(x) = \frac{1}{2} c \sqrt{2\pi x} e^{-x}, \quad (38)$$

и, следовательно, вблизи оси цилиндрического сосуда колебания намагниченности происходят в пределах двумерной изотропной гармонической дипольной ямы

$$U(\rho) = \sin^2 \beta(\rho) \approx \beta^2(\rho) \approx \beta_1^2 \left(\frac{R}{\xi_H}\right) \left(\frac{\rho}{\xi_H}\right)^2, \tag{39}$$

что приводит к формированию спектра эквидистантных спин-волновых уровней, наблюдаемых в виде серии пиков поглощения поперечного ЯМР. Обращаясь к уравнению (23) и используя осцилляторный потенциал (39), можноубедиться, что собственные значения величины  $\varepsilon = (\omega - \omega_0)/(\Omega_B^2/2\omega_0)^{\varepsilon}$ даются формулой  $\varepsilon_n = (2n + 1) \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0 = 1,72$  ( $\xi_D/\xi_H$ )  $\beta_1 (R/\xi_H)$ . Таким образом, расстояние между соседними резонансными пиками

$$\Delta \omega = 2 \, \frac{\Omega_{\rm B}^2}{2\omega_0} \, \varepsilon_0. \tag{40}$$

Следует иметь в виду, что модель гармонического осциллятора достаточно хороша лишь в случае, если эффективный радиус локализации снинволновых возбуждений  $\rho_L < \xi_H \ll R$ . Поскольку  $\rho_L^2 \approx \xi_D \xi_H / \beta_1$ , то упомянутое условие выполняется при  $\beta_1 \xi_H > \xi_D$ , т. е. при не слишком малых значениях магнитной длины  $\xi_H$ .

Из вышесказанного следует, что эффекты влияния вихрей на частотный спектр ЯМР во вращающемся цилиндрическом сосуде с <sup>3</sup>Не-В должны разыгрываться на фоне описанной картины эквидистантных пиков поглощения. Обращаясь к выражению (17) для плотности энергии анизотропии, учитывающему усредненное ориентирующее влияние сверхтекучих вихревых потоков на поле директрисы в вращающегося <sup>3</sup>Не-В, убеждаемся, что вблизи оси цилиндрического сосуда (где  $\beta \ll 1$ )  $\langle F_{\rm an} \rangle \simeq aH^2$   $(1 - \lambda)$   $\beta^2$ , а эффективная магнитная длина (см. формулу (34))

$$\xi_{H}^{\mathrm{B}}(\lambda) = \sqrt{\frac{k}{a(1-\lambda)}} \frac{1}{H} = \frac{\xi_{H}^{\mathrm{B}}(0)}{\sqrt{1-\lambda}}.$$
(41)

Таким образом, по мере увеличения параметра  $\lambda$  ( $\Omega$ ), характеризующего усредненное влияние вихрей на ориентацию оси n,  $\xi_H$  ( $\lambda$ ) возрастает, что должно привести к росту крутизны осцилляторной дипольной ямы (см. формулу (39)) и соответствующему увеличению расстояния  $\Delta \omega$  ( $\lambda$ )<sup>•</sup> между соседними пиками поглощения в спектре поперечного ЯМР вращающегося <sup>3</sup>Не-В.

Экспериментальные исследования частотного спектра ЯМР вращающейся В-фазы жидкого <sup>3</sup>Не были выполнены в цилиндрическом сосуде, который использовался при ЯМР-спектроскопии вращающейся А-фазы (см. рис. 4). Первые же измерения, выполненные в условиях аксиального магнитного поля (H = 284 Гс) при давлении P = 29,3 бар, привели к обнаружениюнеожиданных эффектов <sup>31</sup>. На рис. 12 изображен спектр сигнала поперечного ЯМР для <sup>3</sup>Не-В в состоянии покоя ( $\Omega = 0$ ) и во вращающемся состоянии ( $\Omega = 0,6$  рад/с). Структура спектра характерна для ЯМР В-фазы в условиях ограниченной геометрии, когда влияние стенок сосуда нарушает однородность п-поля, создавая дипольную потенциальную яму, в которой формируются, как это было описано выше, стоячие спиновые волны с дискретным спектром частот. Имевно эта картина и была наблюдена в неподвижном цилиндрическом сосуде в присутствии аксиального магнитного поля (на рис. 12 хорошо видны почти эквидистантные пики поглощения).

Непосредственно после включения вращения в течении 1 ÷ 2 минут наблюдался переходной режим, во время которого описанный выше спектрпоперечного ЯМР резко видоизменяется, причем, судя по всему директриса **n** сильно отклоняется от аксиального направления. Эта картина соответствует описанной в гл. 2 неравновесной ситуации, когда сверхтекучая часть жидкости еще не вовлечена во вращение и большие противотоки сверхтекучей и нормальной компонент <sup>3</sup>Не-В оказывают сильное ориентирующее воздействие на **n**-поле. Ожидаемая при этом спектральная плотность частот поперечного ЯМР (точнее говоря, ее огибающая) для различных значений угловых скоростей Ω изображена на рис. 13, из которого видно, что благодаря ориентирующему влиянию неравновесных противотоков формируется четко выраженный максимум поглощения <sup>33</sup>. Это заключение качественно согласуется с наблюденным переходным эффектом.



Рис. 12. Форма сигнала поперечного ЯМР для В-фазы <sup>3</sup>Не в магнитном поле, направленном вдоль осм цилиндрической камеры.

После завершения переходного режима вращения характер спектра частот ЯМР В-фазы восстанавливается (см. правую часть рис. 12), так как

сформировавшаяся решетка сингулярных вихрей устраняет большие противотоки сверхтекучей и нормальной компонент, существовавшие на начальной (неравновесной) стадии вращения <sup>3</sup>Не-В. Однако, как выяснилось <sup>31</sup>, расстояние  $\Delta \omega$  между эквидистантными пиками поглощения увелачивается по мере роста угловой скорости (рис. 14), что несомпенно связано с описанным выше усредненным влиянием системы вихрей на текстуру п-поля <sup>3</sup>Не-В во вращающемся цилиндрическом сосуде.

Описанное поведение спектра <sup>3</sup>He-B вращающемся ЯМР во вполне соответствует сложившимся представлениям 0 природе сверхтекучей В-фазы и особых неожиданностей не содержит. С другой стороны, характер температурной зависимости  $\Delta \omega$  при  $\Omega \neq 0$ , изображенный на рис. 14, показывает, что при  $T = 0.6 T_{e}$  и P = 29,3 бар мы сталкиваемся с неожилапным эффектом, проявляющемся в виде скачков величины  $\Delta \omega$ . Независимость температуры, при которой происходят эти Рис. 13. Расчет огибающей спектра поглощения поперечного ЯМР для В-фазы в присутствии неравновесных противотоков сверхтекучей и нормальной компонент. режима вращения характер спектра и (см. правую часть рис. 12), так как



Рис. 14. Температурная зависимость расстояния между соседними пиками поперечного ЯМР для <sup>3</sup>Нс-В, помещенного в цилиндрический сосуд, вращающийся с частотой  $\Omega_2$ 

скачки, от угловой скорости вращения  $\Omega$  (т. е. от количества вихрей) несомненно свидетельствует о том, что наблюденное явление связано со скачкообразным изменением структуры отдельных вихрей в В-фазе жидкого <sup>3</sup>Не.



Поскольку возможная перестройка структуры сингулярного вихря должна, в первую очередь, затрагивать его кор, то мы впервые сталкиваемся с явлением, которое разыгрывается на расстоянии порядка длины когерентности ξ, являющейся наименьшим масштабом в иерархии характерных длин сверхтекучего <sup>3</sup>He-B. Таким образом, возникает необходимость исследования вопроса о том, какова структура кора вихря в В-фазе и как проявляются ее особенности в экспериментально наблюденных эффектах.

В силу многокомпонентности параметра порядка сверхтекучего <sup>3</sup>Не, кор вихря в В-фазе может быть устроен различными, отличающимися по



Рис. 15. Температурная зависимость вихревого параметра  $\lambda_f$  при различных давлениях <sup>33</sup>.

быть устроен различными, отличающимися по симметрии, способами. Не исключено, что один из возможных коров заполнен сверхтекучей фазой, не реализующейся в объеме жидкого <sup>8</sup>Не. Обнаруженные в <sup>31</sup> скачки величины Δω связаны с фазовым переходом внутри кора вихря, сопровождающимся скачкообразной перестройкой его структуры.

Ко́ры вихрей вносят определенный вклад в энергию анизотропия (15) вращающегося <sup>3</sup>He-B. Параметр  $\lambda$  характеризует усредненное ориентирующее влияние вихрей на директриу п, причем выражение (16) описывает ту часть, которая обусловлена сверхтекучими потоками в области  $\rho > \xi_c$ . Вклад ко́ра вихря (область  $\rho < \xi_c$ ) в величину  $\lambda$  пропорционален площади его поперечного сечения  $\sigma_c = \pi \xi_c^2$ .

Если предположить <sup>28</sup>, что кор вихря заполнен сверхтекучей жидкостью с анизотропией магнитной восприимчивости  $\delta\chi_c$ , то этот вклад будет характеризоваться параметром  $\lambda_c$ , причем

$$a\lambda_{\rm c} = \frac{1}{2} \,\delta\chi_{\rm c} \,\frac{\sigma_{\rm c}}{\Sigma_{\rm c}}\,,\tag{42}$$

а суммарное значение  $\lambda = \lambda_f + \lambda_c$ , где  $\lambda_f$  определяется сверхтекучими потоками, обтекающими вихри, и дается формулой (16). В результате мы приходим к следующей модельной оценке параметра  $\lambda$ :

$$\lambda = n_{\rm c} \left[ \pi \xi_{\rm D}^2 \ln \frac{\sqrt{\pi} r_{\rm v}}{\xi_{\rm c}} + \frac{1}{2} \frac{\delta \chi_{\rm c}}{\Delta \chi_{\rm B}} \left( \frac{\xi_{\rm D}}{\xi} \right)^2 \sigma_{\rm c} \right]. \tag{43}$$

Вблизи  $T_c$  дипольная длина  $\xi_D$  не зависит от температуры и бл.1зка к  $0, 6 \cdot 10^{-3}$  см, и при  $\Omega = 1$  рад/с величина  $\lambda_f \approx 0, 1$ . С другой стороны, оденка параметра  $\lambda$ , основанная на анализе экспериментальных данных относительно величины  $\Delta \omega$ , показала, что при  $\Omega = 1$  рад/с величина  $\lambda \leqslant 1$ . Это обстоятельство послужило аргументом  $^{28}$  в пользу того, что  $\lambda_c \gg \lambda_f$ , причем для обеспечения требования  $\lambda_c \approx 1$  пришлось постулировать большую анизотронию магнитной восприимчивости ко́ра вихря ( $\delta \chi_c \approx \Delta \chi_B$ ) и его большой поперечный размер ( $\xi_c \approx 10\xi$ ). Следует, однако, иметь в виду, что описанные выше экспериментальные данные относятся к области температур, удаленных от  $T_c$ , причем при P = 30 бар дипольная длина  $\xi_D (0,5T_c) \approx 2\xi_D (T_c)$ , т. е.  $\lambda_f (0,5T_c) \approx 0,4$   $\Omega$  [рад/с], и вклад ко́ра уже не выглядит преобладающим. Заметим, далее, что  $\lambda_f$  возрастает по мере уменьшения давления. На рис. 15 изображена температурная зависимость  $\lambda_f$  при различных давления. На рис. 15 изображена температурная зависимость  $\lambda_f$  при различных давления. На рис. 15 изображена температурная зависимость  $\lambda_f$  при различных давления о структуре ко́ра вихря в В-фазе.

Прежде чем коснуться вопроса о структурных особенностях ко́ра вихря в В-фазе, мы остановимся на методах экспериментального определения параметра  $\lambda$ . Один из них основыва́ется на анализе величины  $\Delta \omega$ , характегвзующей расстояние между соседними пиками поглощения ЯМР во вращающемся цилиндрическом сосуде с <sup>3</sup>Не-В. Выше уже отмечалось, что усредненное влияние вихрей на п-поле приводит к перенормировке эффективной магнитной длины (см. формулу (41)), что проявляется в зависимости  $\Delta \omega$ от  $\lambda$ . Именно она и была первым источником информации относительно  $\lambda = \lambda (\Omega, T)$  при P = 29,3 бар в условиях аксиального магнитного поля. В дальнейшем выяснилось, что более надежные сведения относительно  $\lambda = \lambda (\Omega, T, P)$  можно извлечь из экспериментов, выполненных в присутствии наклонного магнитного поля, составляющего некий угол  $\vartheta$  с осью вращения. В гл. 2 уже упоминалось, что согласно работе <sup>20</sup> при  $\vartheta \neq 0$  должен наблюдаться сдвиг частот поперечного ЯМР относительно ларморова значения  $\omega_0$  на величину

$$\delta\omega_{\rm tr} \approx 0.4 \frac{\Omega_{\rm B}^2}{2\omega_0} \lambda^2 \sin^2 2\vartheta. \tag{44}$$

Приведенное выражение справедливо для  $\lambda \ll 1$  и показывает, что в этом случае эффект максимален при угле наклона  $\vartheta = \pi/4$ . Для произвольных значений нараметра  $\lambda$  сдвиг частот ЯМР во вращающейся В-фазе,



Рис. 16. Зависимость нормированного сдвига частотного спектра поперечного ЯМР для В-фазы, помещенной в наклонное магнитное поле, от вихревого параметра λ (теория).

Рис. 17. Температурная зависимость нормированного сдвига частотного спектра поперечного ЯМР для В-фазы при различных углах наклона  $\theta$ магнитного поля относительно оси вращения. Показанный во вставке спектр поглощения получен при T = 0.53  $T_{c*}$ .

помещенной в наклонное магнитное поле, дается формулой <sup>32</sup>

$$\delta\omega_{\rm tr} = \frac{4}{5} \frac{\Omega_{\rm B}^2}{2\omega_0} \, (1 - u), \tag{45}$$

причем величина  $u = u (\lambda, \vartheta)$  подчиняется уравнению

$$u\cos 2\vartheta + \left(u^2 - \frac{1}{2}\right) (1 - u^2)^{-1/2} \sin 2\vartheta = \frac{1}{\lambda}.$$
 (46)

Легко убедиться, что при  $\lambda \ll 1$  воспроизводится оценка (44), а в общем случае сдвиг частот максимален при углах наклона  $\vartheta_m = \vartheta_m$  ( $\lambda$ ). На рис. 16 изображена зависимость нормированного сдвига частоты от параметра  $\lambda$  при различных значениях угла  $\vartheta$ .

11 УФН, т. 144, вып. 1

В работах <sup>34,35</sup> соотношение (45) было использовано в качестве источника информации относительно величины  $\lambda = \lambda$  ( $\Omega$ ; T, P). На рис. 17 приведены экспериментальные данные относительно сдвига спектра частот поперечного ЯМР, наблюдающегося во вращающемся <sup>3</sup>He-B ( $\Omega = 1,4$  рад/с) при различных углах наклона магнитного поля относительно оси цилиндра. Во вставке показан частотный спектр сигнала ЯМР, который сдвинут относительно спектра поглощения в неподвижной В-фазе.

Следует подчеркнуть, что характер спектра поперечного ЯМР в наклонном поле заметно отличается от спектров поглощения, обнаруженных в экспериментах с аксиальным магнитным полем. По мере увеличения угла Ф



Рис. 18. Температурная зависимость вихревого параметра  $\lambda$ , измеренного для двух значений давления при  $\Omega = 1,40$  рад/с.

левая резкая граница спектра в стационарном случае ( $\Omega = 0$ ) все ближе подходит к ларморовой частоте ω<sub>0</sub> и все большая часть спектральной плотности концентрируется вблизи ее низкочастотной границы. Это обстоятельство **VKAЗЫВАЕТ НА ТО, ЧТО В НАКЛОННОМ** поле равновесная конфигурация п-поля существенным образом отличается от конически расширяюшейся текстуры: в значительной области поперечного сечения цилиндрического сосуда директриса В-фазы ориентирована вдоль направления магнитного поля. Этообстоятельство, по-видимому, можно связать с особой ролью приповерхностной энергии в цилиндрическом сосуде, помещенном в наклонное магнитное поле с  $\vartheta >$ > 14.5° (см. ниже).

Возвращаясь к большому сдвигу частотного спектра ЯМР, связанного с ориентирующим влиянием вихрей на директрису В-фазы в условиях наклонного маг-

нитного поля (см. рис. 17), мы снова обнаруживаем резкие разрывы на кривых температурной зависимости сдвига частоты  $\delta \omega_{\rm tr}$  при  $T = 0,6~T_{\rm c}$ , которые отражают наличие скачкообразного изменения параметра  $\lambda$ , связанного с упомянутой выше перестройкой внутренней структуры ко́ров вихрей в <sup>3</sup>He-B. Опираясь на соотношения (45) и (46). из экспериментальных данных (см. рис. 17) можно получить сведения относительно константы связи  $\lambda$ , описывающей усредненное взаимодействие вихрей с директрисой ѝ. Результат такой обработки изображен на рис. 18. При давлении P = 29,3 бар экспериментальные точки, полученные при различных углах наклона магнитного поля, не обнаруживают заметного разброса, что демонстрирует адекватность интерпретации, основанной на теоретических результатах работы <sup>32</sup>. На том же рисунке приведена температурная зависимость  $\lambda$ , измеренная при давлении P = 20,5 бар. Четко видно увеличение параметра  $\lambda$  при уменьшении давления (ср. с рис. 15).

Теперь мы кратко коснемся вопроса о характере равновесной текстуры п-поля В-фазы, заключенной в цилиндрический сосуд и помещенной в наклонное магнитное поле. При  $\vartheta \neq 0$  граничное значение угла  $\beta$  ( $n_z = \cos \beta$ ) зависит от азимута  $\varphi$ , задающего положение точки на окружности вдоль внутренней поверхности цилиндра. Если угол  $\varphi$  отсчитывать от плоскости,

#### ЯМР-СПЕКТРОСКОПИЯ СВЕРХТЕКУЧЕГО <sup>3</sup>Не

определяемой направлениями векторов Ω и H, то <sup>32</sup>

$$\sin\beta_{\rm s} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1\pm\sin\vartheta\cos\varphi} \tag{47}$$

и равновесная текстура в объеме <sup>3</sup>Не-В должна «вписываться» в это граничное условие. Теперь ясно, что при угле наклона  $\vartheta > 14,5^\circ$ , т. е. при sin  $\vartheta > 1/4$ , необходимо привлечь обе ветви решения (47) с тем, чтобы обеспечить выполнение граничного условия вдоль всей внутренней поверхности цилиндрического сосуда. Такое разрывное поведение угла  $\beta_s$  означает наличие пары линейных поверхностных особенностей (так называемых буджумов) п-поля. Например, эти линейные дефекты могут располагаться вдоль образующих цилиндра с  $\varphi = \pm \pi/2$ . Легко убедиться, что при  $\vartheta > 14,5^\circ$  объемная текстура, состыковывающаяся с описанной поверхностной конфигурацией, такова, что проекция директрисы п на поперечную плоскость почти всюду мало отличается по направлению от проекции магнитного поля. Именно этим и объясняются характерные особенности частотного спектра ЯМР в наклонном поле и наблюдаемый при вращении большой сдвиг частот.

Следует иметь в виду, что описанная выше равновесная текстура в наклонном поле формируется при вхождении в В-фазу <sup>3</sup>Не в присутствии заданной ориентации **H**. Если же направление **H** отклонить от аксиальной ориентации при уже сформировавшейся, конически расширяющейся текстуре, то последняя, в несколько искаженной форме, сохраняется в виде метастабильного состояния (об этом подробнее см. в <sup>35</sup>).

Обращаясь к вопросу о структуре кора вихря в В-фазе и эффектах, непосредственно связанных с ее характерными особенностями, следует начать с общего анализа структуры волновой функции конденсата триплетных куперовских пар с относительным орбитальным моментом L = 1. Естественным базисом является набор состояний  $Y_{1m}$  (**R**)  $\chi_{\mu}$  с заданными проекциями орбитального момента  $m = \pm 1,0$  и суммарного спина  $\mu = \pm 1,0$ на соответствующие оси квантования (сферические гармоники  $Y_{1m}$  являются функциями «внутренней» пространственной координаты  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  куперовской пары).

Любое состояние сверхтекучего конденсата может быть представлено в виде суперпозиция

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{m\mu} a_{m\mu}(\mathbf{r}) Y_{im}(\mathbf{R}) \chi_{\mu}, \qquad (48)$$

причем в неоднородном случае коэффициенты  $a_{m\mu}$  зависят от координаты центра масс  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  куперовских пар. Напомним, что для А-фазы m = +1, а  $\mu = 0$  и, следовательно, единственным отличным от нуля коэффициентом является  $a_{10}$ . С другой стороны, в случае В-фазы, у которой полный механический момент куцеровских пар J = 0, отличны от нуля коэффициенты с  $m + \mu = 0$ , т. е.  $a_{1,-1}$ ,  $a_{00}$  и  $a_{-1,1}$ .

Вдали от ко́ра вихря с единичным квантом циркуляции сверхтекучей скорости состояние В-фазы описывается тройкой коэффициентов (как и выше (р, ф) — полярные координаты)

$$\begin{array}{c} a_{1,-1} = c_{1,-1}(\rho) \ e^{i\varphi}, \\ a_{00} = c_{00}(\rho) \ e^{i\varphi}, \\ a_{-1,1} = c_{-1,1}(\rho) \ e^{i\varphi}, \end{array} \right\}$$

$$(49)$$

причем без учета влияния магнитного поля амплитуды  $c_{m\mu}$  равны между собой и на расстояниях  $\rho \gg \xi_c$  практически не зависят от  $\rho$ . По мере приближения к центру вихря (в области  $\rho < \xi_c$ ) амплитуды  $c_{m\mu}$  ( $\rho$ ) в (49) должны постепенно подавляться, обращаясь в нуль при  $\rho = 0$ . Вместе с тем, в пределах кора к уже рассмотренным состояниям, характеризующим В-фазу, могут примешиваться новые состояния с  $m + \mu \neq 0$  (разумеется, в случае, если это приведет к понижению энергии системы).

11\*

В работе <sup>36</sup> выполнено теоретическое исследование структуры кора вихря в В-фазе с учетом состояний с  $m + \mu = \pm 2$ , т. е. матрица  $\hat{a}$  была выбрана в виде

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} c_{1,1}e^{-i\Phi} & 0 & c_{1,-1}e^{i\Phi} \\ 0 & c_{00}e^{i\Phi} & 0 \\ c_{-1,1}e^{i\Phi} & 0 & c_{-1,-1}e^{3i\Phi} \end{pmatrix},$$
(50)

причем множители при амплитудах  $c_{11}$  и  $c_{-1,-1}$  подбирались так, чтобы плотность энергии вихревого состояния, описываемого матрицей (50), не зависела от азимутального угла  $\varphi$ . Амплитуды  $c_{m\mu}$  следует определить с помощью процедуры минимизации энергии системы (суммы энергии конденсации и энергии неоднородности) при условии, что

$$c_{m\mu}(0) = 0, \quad c_{11}(\infty) = c_{-1,-1}(\infty) = 0.$$
 (51)

На рис. 19 изображены результаты численных расчетов <sup>36</sup> ияти амплитуд  $c_{m\mu}(\rho)$ , выполненных для температурной области Гинзбурга — Ландау (вблизи  $T_c$ ). Разумеется, они могут иметь отношение лишь к В-фазе низкого



Рис. 19. Радиальная зависимость коэффициентов с<sub>ти</sub> для иатипараметрического вихря в В-фазе <sup>36</sup>.

Штриховая кривая изображает плотность энергии вихря.

давления ( $P < P_0$ ), когда <sup>3</sup>Не-В непосредственно примыкает к нормальной фазе жидкого <sup>3</sup>Не. Весьма примечательным является то, что в пределах кора вихря сосредоточено так называемое неунитарное состояние, характеризующееся спонтанной намагниченностью

$$M(\mathbf{r}) \sim \sum_{m} [c_{m1}^{2}(\rho) - c_{m,-1}^{2}(\rho)].$$
 (52)

Заметим, что вихри с намагниченными корами могут существовать, как это было продемонстрировано в <sup>37</sup>, и в сверхтекучих ферми-системах с <sup>3</sup>P<sub>2</sub>спариванием (нейтронных звездах).

Существование вихрей с намагниченными корами во вращающейся В-фазе жидкого <sup>3</sup>Не было недавно обнаружено в работе <sup>38</sup>. Этот гиромагнитный эффект выявлен в результате сравнения спектров ЯМР, полученных при угловых скоростях вращения  $\Omega$  и — $\Omega$  (либо для магнитных полей Н и —Н). Как и в описанных ранее экспериментах, использовались два независимых метода наблюдения за частотными спектрами поперечного ЯМР: измерение расстояния  $\Delta \omega$  между эквидистантными пиками поглощения в условиях аксиального поля и определение сдвига частотного спектра  $\delta \omega_{tr}$  в наклонном поле ( $\vartheta > 14,5^{\circ}$ ). На рис. 20 изображены данные относительно сдвига частот  $\delta \omega_{tr}$ , измеренного при P = 29,3 бар,  $\Omega = 1,4$  рад/с и углах наклона магнитного поля  $\vartheta = 25^{\circ}$  и  $\vartheta = 155^{\circ}$ . Четкий гиромагнитный эффект при T < 0,6  $T_{\circ}$  показывает, что в этой области во вращающейся В-фазе присутствует система магнитных вихрей с неунитарными корами. К аналогичному заключению приводит анализ данных относительно величины Δω, измеренной при параллельной и антипараллельной ориентациях Ω и **H**.

Описанные выше эффекты указывают на присутствие в свободной энергии вращающегося <sup>3</sup>He-B линейного по Ω и Н гиромагнитного члена

$$F_{gm} = \frac{4}{5} a \varkappa \left(\Omega R(\mathbf{n}) \mathbf{H}\right) \Omega^{-1}, \tag{53}$$

который был предложен в <sup>39</sup> для описания явлений, связанных с появлением орбитального момента L во вращающейся В-фазе. Как оказалось, благодаря



Рис. 20. Температурная зависимость нормированного сдвига частотного спектра поперечного ЯМР для В-фазы при Ω = 1,40 рад/с в наклонном магнитном поле. Значки О и соответствуют измерениям при противоположных направлениях вращения.

тому, что в сверхтекучем <sup>3</sup>Не куперовские пары сально перекрываются, объемный вклад упомянутого эффекта в константу и пренебрежимо мал и основной вклад в нее дают намагниченные коры вихрей <sup>40</sup>. Нетрудно получить оценку величины гиромагнитной константы и. Поскольку  $a\varkappa \approx n_{\rm c}M_{\rm c}$ , где  $M_{\rm c}$  — спонтанный магнитный момент кора вихря единичной длины  $(M_{\rm c} \sim \Gamma_0 \chi_n / \gamma)$ , то параметр  $\varkappa \approx (\chi_n / a\gamma) \Omega$ .

С учетом описанного выше гиромагнитного члена, усредненная плотность энергии анизотропии n-поля вращающейся В-фазы дается выражением

$$\langle F_{\rm an} \rangle = -aH^2 \left\{ (\mathbf{nh})^2 - \frac{2}{5} \lambda \, (\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{z}R} \, (\mathbf{n}) \, \mathbf{h})^2 \right\} + \frac{4}{5} \, a \varkappa H \, (\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{z}R} \, (\mathbf{n}) \, \mathbf{h}), \tag{54}$$

анализ которого показывает, что в наклонном магнитном поле сдвиг частотного спектра поперечного ЯМР описывается формулой (45), где величина и определена уравнением <sup>39</sup>

$$\lambda \left[ u \cos 2\vartheta \pm \left( u^2 - \frac{4}{2} \right) (1 - u^2)^{-4/2} \sin 2\vartheta \right] + \\ + \varkappa / H \left[ \cos \vartheta \pm u \left( 1 - u^2 \right)^{-1/2} \sin \vartheta \right] = 1.$$
 (55)

Интерпретация экспериментальных данных <sup>38</sup>, основанная на соотношении (55), подтверждает справедливость приведенной оценки гиромагнитной константы  $\varkappa$ . Вместе с тем, результаты измерений температурной зависимости  $\delta\omega_{tr}$  (см. рис. 20) показывают, что если в области  $T < 0.6~T_c$  гиромагнитный эффект ярко выражен, то при  $T > 0.6~T_c$  он почти незаметен. Это обстоятельство еще раз убеждает, что в указанных температурных областях вихри в<sup>3</sup>В-фазе жидкого <sup>3</sup>Не обладают существенно различными характеристиками,



Рис. 21. Фазовая диаграмма вихревых состояний в <sup>3</sup>Не-В (схематически).

в непосредственной окрестности  $T_{\rm C}$  надежные экспериментальные данные отсутствуют. причем разница несомненно связана со скачкообразной перестройкой структуры их коров при  $T = 0.6 T_{\rm c}$  (напомним, что эта точка относится к давлению P = = 29.3 бар).

Температура перехода T<sub>t</sub> зависит от давления. На рис. 21 изображена фазовая диаграмма, отражающая имеющиеся в настоящее время сведения относительно  $T_t = T_t (P)$ . При низких зависимости кривая вихревого фазового давлениях превращения устремляется к Т<sub>с</sub>, однако, вблизи перехода в нормальную фазу точность измерений падает (ввиду ослабления когерентных дипольных эффектов, определяющих характер спектров ЯМР), и достоверных данных относительно поведения кривой  $T_t = T_t(P)$  в непосредственной окрестности Т с пока нет.

Возвращаясь к вопросу о возможных структурах коров вихрей в В-фазе, сле-

дует иметь в виду, что пятипараметрическое решение, исследованное в <sup>36</sup>, описывает наиболее симметричное вихревое состояние. Наряду с ним могут реализовываться другие состояния с более низкой (нарушенной) симметрией, которые отличаются от (50) структурой коров. Исчерпывающая классификация возможных вихревых состояний в <sup>3</sup>Не-В была недавно выполнена в работе <sup>41</sup>, причем на основе компьютерных расчетов удалось установить количественные характеристики вихрей с различной симметрией (энергию, величину спонтанного магнитного момента, константы связи  $\lambda$  и  $\varkappa$ ). Было показано, что экспериментально обнаруженный скачкообразный структурный переход во вращающейся В-фазе можно трактовать как переход между вихревыми состояниями с различной симметрией.

#### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше был дан обзор основных результатов исследоланий свойств сверхтекучих фаз жидкого <sup>3</sup>Не в состоянии вращения. Экспериментальные данные получены на уникальной советско-финской установке РОТА с использованием метода ЯМР-спектроскопии. В результате экспериментальных и теоретических исследований были выявлены характерные особенности текстур во вращающихся А- и В-фазах, анализ которых позволил извлечь богатую информацию о свойствах сверхтекучего <sup>3</sup>Не в состоянии вращения. Было подтверждено соображение о том, что А-фаза может совершать равновесное вращение без наличия сингулярных вихрей. Обнаруженная плавная текстура, несущая распределенную завихренность <sup>1</sup>/<sub>2</sub> $\nabla \times v_s$ , приводит к формированию отщепленного пика поглощения в спектре поперечного ЯМР. При исследовании вращающейся В-фазы обнаружен фазовый переход, связанный со скачкообразной перестройкой структуры коров вихрей. Показано, что в низкотемпературной фазе коры вихрей в <sup>3</sup>Не-В обладают спонтанным магнитным моментом, проявляющемся в виде гиромагнитного эффекта во вращающейся В-фазе.

Все экспериментальные данные, касающиеся перечисленных свойств вращающихся сверхтекучих фаз жидкого <sup>3</sup>Не, получены с помощью наблюдений за характером частотного спектра поперечного ЯМР. Применение других методов исследования (колебания тел, погруженных в сверхтекучую жидкость, поглощение ультразвука, подвижность ионов) позволит в ближайшем будущем получить новую информацию о свойствах А- и В-фаз <sup>3</sup>Не в состоянии вращения.

При работе над настоящим обзором мы широко пользовались сведениями, которые черпали из обсуждений затронутых выше вопросов с нашими коллегами Г. Е. Воловиком, А. Д. Гонгадзе, В. И. Минеевым, Т. Оми, М. Саломаа, А. Феттером, П. Хаконеном, которым выражаем искреннюю признательность.

Институт физических проблем ÂH CCCP Институт физики АН ГССР Лаборатория низких температур Хельсинкского технологического университета

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Andronikashvili E. L., Mamaladze Yu. G.— Rev. Mod. Phys., 1966. v. 38, p. 567.
- 2. Yarmchuk E. J., Packard R. E. J. Low Temp. Phys., 1982, v. 46, p. 479. 3. Osheroff D. D., Richardson R. C., Lee D. M. Phys. Rev. Lett., 1972,
- O sheroff D. D., Richardson R. C., Lee D. M.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 885.
   Hakonen P. J., Ikkala O. T., Islander S. T., Markkula T. K., Roubeau P., Saloheimo K. M., Garibashvili D. I., Tsakad-ze T. S.— Cryogenics, 1983, v. 23, p. 241.
   Питаевский Л. П.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1794,
   Leggett A. J.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 331.
   Wolfle P.— Rept. Progr. Phys., 1979, v. 42, p. 269.
   Минеев В. П.— УФН, 1983, т. 139, с. 303.
   Leggett A. J.— Ann. Phys., 1974, v. 85, p. 11.
   Maki K., Kumar P.— Phys. Rev. Ser. B, 1978, v. 17, p. 1088.
   Mermin N. D., Ho T.-L.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 594.
   Anderson P. W., Toulouse G.— Ibid., 1977, v. 38, p. 508.
   Воловик Г. Е., Копнин Н. Б.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 26.
   Fujita T., Nakahara N., Ohmi T., Tsuneto T.— Progr. Theor. Phys., 1978, v. 60, p. 671.

- 14. Fujita T., Nakahara N., Ohmi T., Tsuneto T.— Progr. Theor. Phys., 1978, v. 60, p. 671.
   15. Fetter A. L., Sauls J. A., Stein D. L. Preprint.—Stanford; Princeton, 1983.
   16. Воловик Г. Е., Минеев В. П.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 2256.
   17. Muzikar P.— J. de Phys., 1978, v. 39, p. C6-53.
   18. Volovik G. E., Hakonen P. J.— J. Low Temp. Phys., 1981, v. 42, p. 503.
   19. Brinkman W. F., Cross M. C.— In: Progress in Low Temperature Physics. 1978.— V. 7a, p. 405.
   20. Гонгадзе А. Д., Гургенишвили Г. Е., Харадзе Г. А.— ФНТ, 1981, т. 7. с. 824

- т. 7, с. 821.
- 23. 1. 7, с. 821.
  24. Frossatti G.— J. de Phys., 1978, v. 39, p. C6-1578.
  22. Hakonen P. J., Ikkala O. T., Islander S. T., Lounasmaa O. V., Markkula T. K., Roubeau P., Saloheimo K. M., Volovik G. E., Andronikashvili E. L., Garibashvili D. I., Tsakadze J. S.— Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, p. 1838.
  23. Hakonen P. J., Ikkala O. T., Islander S. T.— Ibid., v. 49, p. 1258.
  24. Gould C. M., Lee D. M.— Ibid., 1976, v. 37, p. 1223; 1978, v. 41, p. 967.
  25. Hakonen P. J., Ikkala O. T., Islander S. T., Lounasmaa O. V., Volovik G. E.— J. Low Temp. Phys., 1983, v. 53, p. 423.
  26. Ho T. L., Ph. D. Thesis.— Cornell University, 1978.
  27. Seppala H. K., Volovik G. E.— J. Low Temp. Phys., 1983, v. 51, p. 279.
  28. Hakonen P. J., Volovik G. E.— J. Phys. Ser. C, 1983, v. 15, p. L1277.
  29. Maki K., Nakahara M.— Phys. Rev. Ser. B, 1983, v. 27, p. 4181.
  30. Jacobsen K. W., Smith H.— J. Low Temp. Phys., 1983, v. 52, p. 527.
  31. Иккала О. Т., Харадзе Г. А.— Письма ЖЭТФ, 1982, т. 35, c. 338.

- Воловик Г. Е., Гонгадзе А. Д., Гургенишвили Г. Е., Сало-маа М. М., Харадзе Г. А. Письма ЖЭТФ, 1982, т. 36, с. 404.
   Theodorakis S., Fetter A. L. J. Low Temp. Phys., 1983, v. 52, p. 559.
   Буньков Ю. М., Крузиус М., Хаконен П. Ю. Письма ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 395.
   Bunkov Yu. M., Hakonen P. J., Krusius M. In: Proc. of the Sanibel Symposium on Quantum Fluids and Solids. 1983. AIP Conf. Proc., 1983, No. 103, p. 194.
   Ohmi T., Tsuneto T., Fujita T. Progr. Theor. Phys., 1983, v. 70, p. 647.
   Sauls J. A., Stein D. L., Serene J. W. Phys. Rev. Ser. D, 1982, v. 25, p. 967.
- p. 967.
   38. Hakonen P. J., Krusius M., Salomaa M. M., Simola J. T., Bun-kov Yu. M., Mineev V. P., Volovik G. E. Phys. Rev. Lett., 1983, v. 51, р. 1362. 39. Воловик Г. Е., Минеев В. П.— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 103. 40. Воловик Г. Е., Минеев В. П.— ЖЭТФ. 1984, т. 86, с. 1667. 41. Volovik G. E., Salomaa M. M.— Phys. Rev. Lett., 1983, v. 51, p. 2040.