

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

548:35+530.145

КВАЗИЧАСТИЦЫ В КВАНТОВЫХ КРИСТАЛЛАХ*Г. А. Варданян*

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	413
1. Теория рассеяния квазичастиц в решеточном пространстве	417
а) Точное решение задачи двухквазичастичного рассеяния	417
б) Рассеяние вакансиона на дефектоне	422
в) Рассеяние вакансиона на примесоне	423
г) Рассеяние одинаковых квазичастиц	425
д) Рассеяние на произвольном потенциале	427
2. Энергетический спектр квантового кристалла	428
а) Вклад в свободную энергию квантового кристалла	428
б) Теплоемкость двумерного кристалла	431
в) Неидеальный бозе-газ квазичастиц	432
3. Теория ферми-бозе-квантового кристалла	434
а) Свободная энергия твердого раствора	434
б) Разделение фаз в твердом растворе $\text{He}^3 - \text{He}^4$	434
в) О структуре вакансий в растворе $\text{He}^3 - \text{He}^4$	437
г) Поглощение звука вакансионными	438
Заключение	439
Цитированная литература	439

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в физике твердого тела возникла новая область исследований — квантовые кристаллы. Имеющиеся в настоящее время теоретические и экспериментальные данные не оставляют никаких сомнений в том, что квантовый кристалл — это новое состояние вещества, предсказанное теоретически Андреевым и Лифшицем¹.

Квантовая теория твердых тел в основе своей предполагает одинаковый порядок величины средних расстояний между атомами. При этом минимуму энергии атомной системы соответствует упорядоченное и локализованное расположение атомов в координатном пространстве, когда все частицы покоятся в некоторых положениях равновесия, называемых узлами кристаллической решетки. Свойство локализации, характеризующее решетку кристалла, в этом случае является классическим, поскольку не учитывает квантовомеханическую неразличимость атомов и их движения, обусловленные туннелированием.

Тепловое движение атомов в большинстве кристаллов при температурах значительно ниже температуры плавления ($T \ll \Theta$) носит характер малых колебаний около узлов кристаллической решетки. Малость колебаний означает, что величина среднего теплового смещения атома из узла очень мала по сравнению с постоянной решетки a , т. е. $\bar{u} \ll a$.

Параметр $\bar{u}^2/a^2 = \Lambda$ легко выразить через характеристики атомов кристалла. Характерная частота колебаний атомов $\omega \sim \sqrt{x/m}$, где $x = U/a^2$ (U — характерная энергия взаимодействия атомов). Температура Дебая $\Theta \sim \hbar\omega = \hbar \sqrt{U/m} a$. Отношение температуры Дебая к величине U есть

параметр Λ , поэтому

$$\Lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{mUa}}.$$

В этом виде параметр Λ известен как параметр де-Бура.

Для большинства кристаллов параметр Λ действительно очень мал. Существуют, однако, кристаллы, для которых Λ имеет большие значения, обусловленные малостью m и слабостью их взаимодействия U . Так, например: для He^3 $\Lambda = 0,49$, для He^4 $\Lambda = 0,43$, для H_2 $\Lambda = 0,28$, для Ne $\Lambda \approx 0,1$ и т. д. Существуют и другие примеры, для которых $\Lambda \geq 1$. Это относится к примесям легких элементов в матрицах тяжелых металлов. Из-за своей малой массы и слабого взаимодействия с атомами матрицы атомы примеси характеризуются параметром $\Lambda \geq 1$. Это имеет место, например, для водорода в матрицах ниобия, циркония, палладия и т. д.

Во всех этих случаях нарушается основное предположение квантовой теории твердого тела о соответствии частиц и узлов кристалла. Благодаря большим величинам параметра Λ , т. е. отношению амплитуд нулевых колебаний \hbar/\sqrt{mU} к постоянной решетки, атомы кристалла находятся в состоянии интенсивного нулевого движения, приводящего к перемещению атома из одного узла в другой. С другой стороны, образующие кристалл частицы являются, вообще говоря, тождественными. В квантовой механике тождественные частицы неразличимы. Возникает ситуация, когда имеется множество тождественных частиц в дискретной решетке кристалла, волновые функции которых сильно перекрываются из-за больших величин амплитуд нулевых колебаний. Перекрывание волновых функций означает, что атомы превращаются фактически в движущиеся квазичастицы в пространстве кристаллической решетки. Нельзя уже говорить, что каждой частице соответствует один определенный узел решетки. Любой атом может находиться в любом узле.

Очевидно, что две квазичастицы одновременно не могут находиться в одном и том же узле решетки. Поэтому существует бесконечно большое отталкивание, когда координаты двух квазичастиц совпадают. Это описывается потенциалом «непроницаемости» квазичастиц в одном и том же узле решетки. Поэтому важно принять во внимание корреляцию между частицами при их сближении.

Таким образом, имеются многочисленные кристаллы, в которых ярко проявляются следующие особенности:

- а) энергия основного состояния кристалла изменяется из-за наличия большого отталкивания между квазичастицами;
- б) атомы превращаются в движущиеся квазичастицы в решеточном пространстве;
- в) волновые функции атомов перекрываются, что приводит к конечной вероятности туннелирования атомов из одного узла в другой.

Указанные особенности приводят к физически новой картине, обладающей уникальными свойствами. Эта картина соответствует квантовым кристаллам.

Основные идеи, описывающие это новое состояние вещества, заложены Андреевым и Лифшицем¹ и были исследованы теоретически и экспериментально^{2-52, 54, 57-61, 63}.

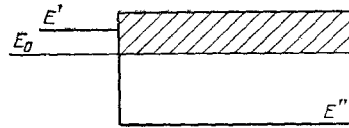
При отличной от нуля температуре кристалл стремится иметь минимальную свободную энергию и, следовательно, может немного проиграть в энергии, слегка увеличив беспорядок. Борьба между этим проигрышем в энергии и ростом беспорядка приводит к тому, что свободная энергия кристалла минимальна, когда существует определенное число вакансий — узлов, не содержащих атомы. Эти вакансии, вследствие больших величин амплитуд нулевых колебаний атомов, превращаются в вакансиионы — квазичастицы, характеризующиеся определенным значением энергии ϵ и квази-

импульса p . В квантовом кристалле, таким образом, имеется газ вакансионных, перемещения которых эквивалентны перемещению атомов.

Вакансионы могут существовать и при абсолютном нуле температуры — нулевые вакансионы. В этом случае они тоже могут двигаться в кристалле в равновесном состоянии. Можно представить себе квантовый кристалл так, как будто он содержит внутри себя жидкость, состоящую из нулевых вакансионных, и поэтому способную легко перемещаться сквозь кристаллическую решетку. Течение этой жидкости сопровождается переносом массы вещества. В отличие от обычной жидкости, в данном случае направление переноса массы противоположно направлению течения вакансионной жидкости^{1, 3}. Вакансионы понижают значение энергии основного состояния кристалла. Дно вакансионной зоны лежит ниже значения энергии основного

Рис. 1. Энергия кристалла с вакансионном.

E_0 — энергия идеального кристалла, E' — энергия кристалла с вакансией, E'' — энергия кристалла с вакансионном. Кристалл с вакансионном может обладать меньшей энергией, чем идеальный кристалл.



состояния кристалла (рис. 1). Ширина вакансионной зоны Δ пропорциональна частоте туннелирования атомов ($\Delta \sim J/\hbar$). Следовательно, скорость движения вакансионна $v \sim aJ$. В некотором смысле, квантовые кристаллы с нулевыми вакансионными аналогичны металлам, т. е. кристаллам, содержащим внутри себя жидкость, состоящую из электронов. Электронная жидкость в металле также может легко двигаться сквозь кристаллическую решетку. Но всякое изменение электронной плотности сопровождается возникновением плотности заряда, которое порождает весьма сильные электрические поля, вследствие которых не происходит пространственного перераспределения массы вещества. Вакансия — электрически нейтральный объект. Течение вакансионной жидкости в квантовом кристалле может сопровождаться изменением пространственного распределения вещества.

Легкий примесный атом в квантовом кристалле тоже ведет себя подобно квазичастице — примесону или волне флуктуаций массы^{3, 4}.

Рассмотрим кристалл He^4 , содержащий один атом He^3 . Этот примесный атом превращается в примесон. Благодаря идеальной периодичности кристалла He^4 энергия примесона является некоторой периодической функцией от квазимпульса p . Ширина энергетической зоны такого примесона $\Delta \ll 10^{-4}$ К, частота туннелирования $J \sim 1$ МГц, следовательно, скорость движения $v \ll 10^{-1}$ см/с.

Ширина зоны Δ значительно меньше всех других энергетических характеристик гелия, поэтому динамика примесонов является весьма своеобразной^{5-12, 13, 15}. Атом He^3 обладает ядерным спином (1/2), поэтому движение соответствующего примесона можно наблюдать в экспериментах ЯМР.

Эти рассуждения о примесных частицах справедливы и в случае растворов легких частиц в матрицах тяжелых металлов. Легкие атомы превращаются в примесоны и имеют специфические свойства¹⁶⁻²².

Любые дефекты в кристаллах, в которых параметр Λ является не малой величиной по сравнению с единицей, делокализуются и превращаются в квазичастицы — дефектоны, характеризующиеся определенным значением энергии и квазимпульса.

Квантовый кристалл — весьма специфическое состояние вещества. Распределение плотности в нем, как отмечалось выше, периодически в пространстве, т. е. по своей симметрии он подобен обычному кристаллу, но по характеру движения квазичастиц он занимает положение, промежуточное между жидкостью и твердым телом. Первый вид движения обладает свойством движения в жидкости — это течение вакансионной жидкости при неподвижных узлах решетки. Второй вид движения обладает свойством движения в твердых

телах и связан со смещением узлов кристаллической решетки. Ясно, что под действием внешних сил квантовый кристалл не сохраняет своей формы. В поле тяжести квантовый кристалл способен протекать из сосуда в сосуд, аналогично жидкостям. Перетекание, однако, здесь является своеобразным: переход вещества сверху вниз осуществляется путем течения вакансионной жидкости снизу вверх по узлам кристаллической решетки.

Движение вышеуказанных квазичастиц является квантовой диффузией в решеточном пространстве, которая была обнаружена экспериментально в Харькове (Григорьев, Есельсон, Михеев, Шульман) и в Сассексе (Англия), (Ричардс, Поун, Вайдом) в 1977 г.^{6, 7}. Коэффициент диффузии является важной экспериментально измеряемой характеристикой газа квазичастиц.

При конечных температурах возможны столкновения квазичастиц с обычными возбуждениями — фононами. Сечение рассеяния при столкновениях с фононами пропорционально четвертой степени частоты. Коэффициент диффузии в этой области пропорционален T^{-9} ^{1, 3, 12, 13}.

При низких температурах фононами можно пренебречь и основную роль играют рассеяния квазичастиц друг на друге. Коэффициент диффузии в этой области пропорционален концентрации квазичастиц и не зависит от температуры^{3, 16-18, 50}.

С повышением температуры увеличивается частота столкновений с фононами и за время нахождения квазичастицы в узле она приходит в равновесие с решеткой. В этом случае диффузия локализованной квазичастицы совершается случайным блужданием с шагом, равным периоду решетки. В этой области коэффициент диффузии не зависит от температуры.

Дальнейшее повышение температуры приводит к сильной локализации атомов в потенциальных ямах кристалла. В этом случае диффузия определяется надбарьерными переходами из возбужденного состояния и описывается чисто классически.

Эта картина движения имеет, очевидно, свои особенности в зависимости от типа квазичастиц (дефектонов, вакансионов, примесонов и т. д.). В рамках такой общей картины имеются, однако, своеобразные предельные ситуации¹⁹⁻²⁷.

Весьма необычные свойства примесных квазичастиц в существенной степени сохраняются даже в условиях, когда длина их свободного пробега значительно меньше периода решетки, как показали Каган, Клиггер и Максимов^{12, 13}.

В зависимости от статистики исходных атомов, из которых состоит кристалл, квазичастицы в квантовом кристалле подчиняются как статистике Бозе — Эйнштейна, так и статистике Ферми — Дирака. Оба эти возбуждения могут встретиться в кристалле в разных концентрациях либо в виде раствора ферми-бозе-квазичастиц. Ярким примером квантового кристалла является раствор He^3 — He^4 . Феноменологические уравнения гидродинамики, описывающие макроскопические движения в квантовых кристаллах, предложены Андреевым и Лифшицем¹. Такие уравнения позволяют исследовать также растворы квантовых кристаллов (см., например,⁴⁹). Методом квантовой теории поля уравнения для ферми-жидкости получены и исследованы для ферми- и бозе-квантовых кристаллов в работах Дзялошинского, Кондратенко и Левченкова¹¹.

Предлагаются новые квантовые кристаллы: He^6 и спин-ориентированный водород³⁴.

В последнее время появились экспериментальные работы по изучению свойств двумерных квантовых кристаллов — адсорбированных на графите пленок гелия⁴². Такие системы в настоящее время интенсивно изучаются с помощью известных современных методов (рассеяние нейтронов, ЯМР, эффект Мёссбауэра и т. д.)⁵⁷.

В адсорбированном двумерном кристалле гелия существуют вакансии с достаточно большой концентрацией. Это обусловлено фазовым переходом

упорядочения в поле графитовой подложки, представляющей собой сеть мелких потенциальных ям в форме правильных шестиугольников, заполняющих всю поверхность. Из-за отталкивания атомов на малых расстояниях это упорядоченное состояние возникает только при такой плотности покрытия, когда один атом гелия приходится на три потенциальные ямы графита.

Исследование периодичности и ее влияния на свойства двумерного кристалла является ключом к полной разгадке поведения адсорбированных систем. Как в этих кристаллах, так и в вышеуказанных кристаллах предсказывается явление сверхтекучести движения — кристалл может течь практически без вязкости в тонких капиллярах.

В данном обзоре рассматривается круг физических явлений, связанных с поведением квазичастиц в квантовых кристаллах. Именно в этих явлениях, как будет видно ниже, проявляются качественно новые эффекты, обусловленные взаимодействием квазичастиц друг с другом. Амплитуда двухквазичастичного рассеяния вычисляется методом И. М. Лифшица, позволяющим выяснить ряд интересных и необычных свойств картины рассеяния в дискретной кристаллической решетке ³².

Движение пары квазичастиц описывается уравнением И. М. Лифшица, которое позволяет связывать форму волновой поверхности и амплитуду рассеянной квазичастицы с произвольным законом дисперсии.

Фундаментальное отличие столкновений квазичастиц от столкновений частиц в вакууме состоит в том, что для квазичастиц принцип относительности Галилея в обычном смысле неприменим. Если отождествить квазиимпульс с обычным импульсом, то удобно представить себе, что кристалл, как нечто целое, может забирать импульс определенными порциями.

Исходя из решения задачи рассеяния, далее излагается способ вычисления добавки к свободной энергии кристалла, обусловленной парными столкновениями квазичастиц. Исследования свободной энергии квантовых кристаллов позволяют получить наблюдаемые физические величины.

В третьей части работы рассматривается раствор парно-взаимодействующих ферми-бозе-квазичастиц. Вычисляется свободная энергия такого раствора, что позволяет построить диаграмму состояния и предсказать свойства таких кристаллов.

1. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ КВАЗИЧАСТИЦ В РЕШЕТОЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

а) Точное решение задачи двухквазичастичного рассеяния

В рассматриваемом случае парных столкновений квазичастиц метод И. М. Лифшица позволяет построить теорию рассеяния в решеточном пространстве без требования малости потенциала взаимодействия, что характерно для теории возмущений ⁵⁶.

Построение теории рассеяния квазичастиц в решеточном пространстве связано с вычислением эффективных сечений различных процессов, определяющих, вообще говоря, поведение экспериментально наблюдаемых характеристик квантового кристалла, таких, как коэффициент квантовой диффузии примесонов, дефектонов, вакансионных или времена ЯМР в системах атомов, обладающих ядерным спином и т. д. Примерами процесса рассеяния являются столкновения различных квазичастиц на классической примеси или дефекте в квантовом кристалле, взаимодействия примесонов друг с другом, вакансионных с примесонами, дефектонами или с другими квазичастицами. Концентрация различных квазичастиц при достаточно низких температурах мала, и поэтому определяющую роль при формировании физической картины, играют парные столкновения. В отличие, однако, от обычного случая парного взаимодействия в вакууме, задача двухквазичастичного рассеяния не сводится к задаче рассеяния одной частицы в поле неподвиж-

ного силового центра. Преобразованием координат двух квазичастиц их импульс их центра тяжести не исключается, так как движение квазичастиц ограничено кристаллической решеткой. Поэтому амплитуда парного рассеяния зависит не только от относительного импульса квазичастицы, но и от импульса центра тяжести. Оба эти импульса определяют форму изоэнергетических поверхностей рассеивающих квазичастиц, законы дисперсии которых являются в общем случае периодическими функциями от этих импульсов. При парных столкновениях, естественно, выполняются законы сохранения квазиимпульса и энергии ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_e + 2\pi\hbar\mathbf{b}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_e$, где \mathbf{p}_i и \mathbf{p}_e — суммы квазиимпульсов до и после столкновения, \mathbf{b} — произвольный вектор обратной решетки, ε_i и ε_e — энергии квазичастиц до и после столкновения). Различаются нормальные процессы ($\mathbf{b} = 0$) и процессы переброса ($\mathbf{b} \neq 0$). Однако это разделение носит относительный характер, так как основную ячейку обратной решетки можно выбирать условно.

В кристалле квазичастицы движутся по узлам решетки. Очевидно, что две квазичастицы одновременно не могут попасть в один и тот же узел. Это обеспечивается наличием потенциала «непроницаемости» (бесконечно большое отталкивание при совпадении их координат):

$$U_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} = \begin{cases} V \rightarrow \infty, & \mathbf{R} = \mathbf{R}', \\ 0, & \mathbf{R} \neq \mathbf{R}', \end{cases} \quad (1.1)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{R}' — дискретные вектора, соответствующие узлам решетки. Это взаимодействие, которое при совпадении координат \mathbf{R} и \mathbf{R}' может быть достаточно большим, в среднем, однако, остается малым, поскольку в остальных точках, кроме узлов, оно равно нулю. Вместе с этим потенциалом между

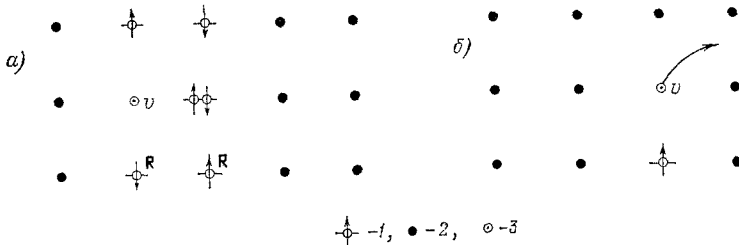


Рис. 2. Рассеяние квазичастиц.
1 — He³, 2 — He⁴, 3 — вакансион $\zeta(v)$.

квазичастицами действует также дальнедействующее притяжение, характер которого зависит от типа квазичастиц и от условий, в которых они проявляются. Так, например, теория упругости приводит к следующему выражению для энергии упругого взаимодействия любых точечных дефектов

$$u(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = V_0(\mathbf{n}) \left(\frac{a}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \right)^3, \quad (1.2)$$

где $V_0(\mathbf{n})$ — характерная энергия, зависящая от взаимной ориентации квазичастиц.

Для исследования процесса рассеяния рассмотрим сначала простой случай потенциала (1.1). Пусть две квазичастицы с импульсами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и энергиями $\varepsilon(\mathbf{k}_1)$ и $\varepsilon(\mathbf{k}_2)$ взаимодействуют через потенциал непроницаемости (рис. 2, а). Такой случай, когда атомы при рассмотрении не меняются местами, соответствует «упругому» рассеянию. При «неупругом» рассеянии атомы мишени уходят из данного узла в другой узел (рис. 2, б). Процесс двуквазичастичного рассеяния описывается уравнением Лифшица^{31, 32, 44}:

$$\sum_{\mathbf{R}''} A_{\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}''} \varphi(\mathbf{R}'', \mathbf{R}_2) + \sum_{\mathbf{R}''} A'_{\mathbf{R}'' - \mathbf{R}_2} \varphi(\mathbf{R}'', \mathbf{R}_1) + \sum_{\mathbf{R}''} V(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}'') = \\ = \varepsilon \varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), \quad (1.3)$$

где величины $A_{\mathbf{R}}$ соответствуют законам дисперсии в импульсном представлении

$$\sum_{\mathbf{R}} A_{\mathbf{R}} \exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{R}) = \varepsilon(\mathbf{k}_1), \quad \sum_{\mathbf{R}} A'_{\mathbf{R}} \exp(i\mathbf{k}_2\mathbf{R}) = \varepsilon(\mathbf{k}_2), \quad (1.4)$$

а $z = E + i0$, E — суммарная энергия.

Это уравнение описывает, вообще говоря, различные процессы рассеяния квазичастиц в дискретном пространстве кристаллической решетки, при разных потенциалах взаимодействия $V(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$. В случае взаимодействия (1.1) это уравнение будет иметь вид

$$\sum_{\mathbf{R}''} A_{\mathbf{R}_1-\mathbf{R}''} \varphi(\mathbf{R}'', \mathbf{R}_2) + \sum_{\mathbf{R}''} A'_{\mathbf{R}''-\mathbf{R}_2} \varphi(\mathbf{R}'', \mathbf{R}_1) + V \sum_{\mathbf{R}''} \delta_{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2} \varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}'') = z\varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2). \quad (1.5)$$

В этом случае уравнение (1.5) решается точно, в результате получается точная волновая функция рассеяния. Оператор взаимодействия (1.1) удовлетворяет условию вырожденности, т. е. может быть представлен в виде суммы конечного числа операторов проектирования на подпространства L^2 . Канонический вид произвольного оператора $\hat{\Lambda}$, являющегося вырожденным, определяется соотношением³¹

$$(\hat{\Lambda}f, g) = \sum_{k=1}^n a_k l^{*(k)}(f) l^{(k)}(g), \quad (1.6)$$

где $l^{(k)}(f)$ — линейные функционалы, a_k — действительные числа, f и g — произвольные функции L^2 . Число слагаемых в формуле (1.6) называется рангом оператора $\hat{\Lambda}$.

Имея в виду в дальнейшем исследование случая произвольного оператора взаимодействия, мы начнем с достаточно наглядного случая оператора первого ранга

$$(\hat{\Lambda}f, g) = al^*(f)l(g). \quad (1.7)$$

Примером такого оператора служит потенциал «непроницаемости» квазичастиц, выражающий тот факт, что в одном узле одновременно две частицы не могут попасть:

$$U_{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2} = V\delta_{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}\delta_{\mathbf{R}'\mathbf{R}_2}, \quad (1.8)$$

где $\delta_{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}$ — δ -символ Кронекера, V — характерная энергия взаимодействия. В результате действия оператора l на функцию $f(\mathbf{R})$ получается значение этой функции в другой точке $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$. Уравнение (1.5) можно переписать в операторном виде следующим образом:

$$(\hat{L}_1 + \hat{L}_2 - \hat{\Lambda})\varphi = z\varphi. \quad (1.9)$$

Здесь члены $\hat{L}_1\varphi$ и $\hat{L}_2\varphi$ соответствуют первым двум членам уравнения (1.5), описывающим переход из узла \mathbf{R}_1 в узел \mathbf{R}_2 . Фактически $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$ — это оператор кинетической энергии невзаимодействующих квазичастиц, для которых можно написать уравнение

$$(\hat{L}_1 + \hat{L}_2)\psi = \lambda\psi. \quad (1.10)$$

Очевидно, что функции ψ имеют вид плоских волн:

$$\psi = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}). \quad (1.11)$$

Уравнение (1.9) с учетом условия (1.8) легко решается. Действуя на уравнение оператором $(\hat{L} - z)^{-1}$, имеем

$$\varphi = \int_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = z} \frac{(\hat{A}\varphi_1\psi) \psi dk}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - z}. \quad (1.12)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, & \mathbf{q} &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1, & \mathbf{q}' &= \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1, & z &= E + i0, \\ E &= \varepsilon \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}'}{2} \right) + \varepsilon \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}'}{2} \right), \end{aligned}$$

тогда выражение для φ будет таким:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \tau V \int \frac{\exp(i\chi\mathbf{R}) d\chi}{\varepsilon(\chi - (\mathbf{q}/2)) + \varepsilon(\chi + (\mathbf{q}/2)) - z}, \quad (1.13)$$

где $\tau = \varphi(0)$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$.

Из граничного условия для волновой функции, отвечающего требованию, что две квазичастицы не могут попасть в один узел, имеем уравнение, которое позволяет определить собственные значения энергии

$$1 = V \int \frac{d\chi}{-z + \varepsilon(\mathbf{p} - (\mathbf{q}/2)) + \varepsilon(\mathbf{p} + (\mathbf{q}/2))}. \quad (1.14)$$

Величина τ является важной характеристикой задачи рассеяния. Из полного вида волновой функции для τ можно получить окончательное выражение. Волновая функция, как сумма падающей и рассеянной волн, будет иметь вид

$$\varphi(\mathbf{R}) = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}) + \tau V \int \frac{\exp(i\chi\mathbf{R}) d\chi}{\varepsilon(\chi - (\mathbf{q}/2)) + \varepsilon(\chi + (\mathbf{q}/2)) - z}. \quad (1.15)$$

Отсюда

$$\tau = \left[1 + V \int \frac{dx}{-\varepsilon(\chi - (\mathbf{q}/2)) - \varepsilon(\chi + (\mathbf{q}/2)) + z} \right]^{-1}. \quad (1.16)$$

Интегрирование в последнем выражении производится на поверхности

$$\varepsilon \left(\chi + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) + \varepsilon \left(\chi - \frac{\mathbf{q}}{2} \right) = E.$$

Таким образом, выражения (1.14) — (1.16) описывают процесс рассеяния и позволяют найти точные величины, характеризующие столкновения квазичастиц при вырожденном операторе взаимодействия первого ранга. Этот случай, важный сам по себе в ряде вопросов теории рассеяния, существен также и потому, что для описания общей задачи рассеяния достаточно аппроксимировать оператор взаимодействия вырожденными операторами.

Рассмотрим поведение входящего в выражение (1.15) интеграла

$$I(\mathbf{q}, E) = \int \frac{\exp(i\chi\mathbf{R}) d\chi}{\varepsilon(\chi - (\mathbf{q}/2)) + \varepsilon(\chi + (\mathbf{q}/2)) - z} \quad (1.17)$$

при больших \mathbf{R} . Пусть \mathbf{n} — направление распространения волны. Обозначим $\chi\mathbf{n} = u$ и будем производить интегрирование сначала по ленте на поверхности между u и $u + du$, а затем по переменной u . Это дает

$$I(\mathbf{q}, E) = \int f_{\mathbf{q}, E}(u) \exp(iuR) du, \quad (1.18)$$

где

$$f(u) du = \int_{\substack{\varepsilon(\chi - \frac{\mathbf{q}}{2}) + \varepsilon(\chi + \frac{\mathbf{q}}{2}) = E, \\ u < \chi\mathbf{n} < u + du}} \frac{d\Omega}{|\nabla\varepsilon(\chi - (\mathbf{q}/2)) + \nabla\varepsilon(\chi + (\mathbf{q}/2))|}. \quad (1.19)$$

В асимптотическом выражении интеграла (1.18) члены порядка R^{-1} возникают при интегрировании в окрестности разрывов функции $f(u)$, которые являются эллиптическими точками касания поверхности $\varepsilon(\chi - q/2) + \varepsilon(\chi + q/2) = E$ с опорной плоскостью направления n . Эти точки задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\chi_v + \frac{q}{2}\right) + \varepsilon\left(\chi_v - \frac{q}{2}\right) &= E, \\ \left[n \left\{ \nabla\varepsilon\left(\chi_v - \frac{q}{2}\right) + \nabla\varepsilon\left(\chi_v + \frac{q}{2}\right) \right\} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Разрывы производных от функции $f(u)$ дают члены высшего порядка малости, т. е. $O(R^{-2})$, которыми мы пренебрегаем. В точках χ_v скачки Δ_v определяются равенством

$$\Delta_v du = d\Omega_{\chi_v} \cdot \left| \nabla\varepsilon\left(\chi_v - \frac{q}{2}\right) + \nabla\varepsilon\left(\chi_v + \frac{q}{2}\right) \right|^{-1}, \quad (1.21)$$

где $d\Omega_{\chi_v}$ — площадь поверхности «шпанки» с центром в точке χ_v и высотой du :

$$d\Omega_{\chi_v} = 2\pi K_v^{-1/2} du,$$

K_v — гауссова кривизна поверхности в точке v . Окончательно имеем

$$I = \frac{\exp(i\chi_v R)}{\sqrt{K_v R}} \frac{1}{|\nabla\varepsilon(\chi_v - (q/2)) + \nabla\varepsilon(\chi_v + (q/2))|}. \quad (1.22)$$

Асимптотическое выражение при больших R из выражений (1.15) и (1.22) будет иметь вид

$$\varphi(R) = \exp(ipR) + \tau V \sum_v f_v(p, q, q') \frac{\exp(i\chi_v R)}{R}, \quad (1.23)$$

где

$$f_v(p, q, q') = \frac{\tau V}{|\nabla\varepsilon(\chi_v - (q/2)) + \nabla\varepsilon(\chi_v + (q/2))| \sqrt{K_v}} \quad (1.24)$$

является, следовательно, амплитудой рассеяния двух квазичастиц друг на друге.

Найденное выражение для волновой функции (1.23) позволяет сделать ряд заключений о характере рассеянных волн.

В большинстве случаев волновая функция рассеянной квазичастицы в квантовом кристалле представляет собой суперпозицию нескольких волн, число которых равно числу возможных решений уравнения (1.20). Каждая из этих волн имеет свою форму и свою скорость распространения (рис. 3).

Каждое слагаемое в формуле (1.24) определяет сечение процесса, при котором после рассеяния квазичастицы имеют определенное значение квазимпульса при заданном значении q .

В случае открытых изоэнергетических поверхностей могут существовать такие направления в кристалле, по которым рассеяние «запрещено». Акт рассеяния в этом направлении произойдет, если только одна из квазичастиц перейдет на другую полость поверхности $\varepsilon(\chi_v - q/2) + \varepsilon(\chi_v + q/2) = E$ при фиксированной величине q .

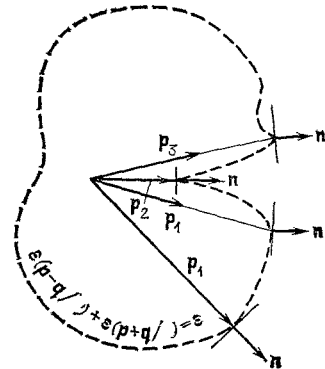


Рис. 3. Изоэнергетическая поверхность рассеянных квазичастиц.

n — направление рассеяния.

б) Рассеяние вакансии на дефектоне

Энергия вакансии является периодической функцией от квазиимпульса. Вид этой функции определяется структурой решетки и ее симметрией. Например, в приближении сильной связи в простой кубической решетке закон дисперсии имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \Delta_v (\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a),$$

где ε_0 — энергия образования вакансии (в ОЦК He^4 при давлениях $P \sim 25$ атм, $\varepsilon_0 \sim 5$ К, в ГПУ He^4 $\varepsilon_0 \sim 15$ К), Δ_v — ширина зоны вакансионных ($\Delta_v \sim 10$ К).

На рис. 4 приведен вид изоэнергетической поверхности, построенной машинным расчетом, в том случае, когда $\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a = 0,9$. Направление рассеяния, как указывалось выше, определяется видом изоэнергетической поверхности. В этом случае рассеяние происходит по четырем направлениям в кристалле, соответствующим пучностям изоэнергетической поверхности.

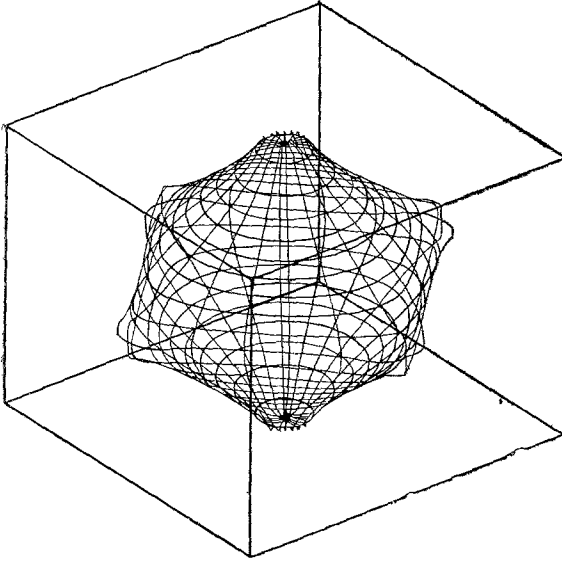


Рис. 4. Изоэнергетическая поверхность в случае кубического кристалла.

Ширина энергетической зоны вакансии значительно превосходит ширину зоны дефектона Δ_i . Поэтому взаимодействие этих квазичастиц можно рассматривать как процесс упругого рассеяния вакансии на классическом дефекте в квантовом кристалле, пренебрегая собственным туннелированием дефекта³. Этот процесс рассеяния описывается уравнением Лифшица⁴⁴:

$$\sum_{\mathbf{R}'} A_{\mathbf{R}-\mathbf{R}'} \varphi(\mathbf{R}') - z\varphi(\mathbf{R}) = V \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \varphi(\mathbf{R}'), \quad (1.25)$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} A_{\mathbf{R}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) \quad (1.26)$$

— закон дисперсии вакансии, V — характерная энергия взаимодействия ($V \sim 10^3 \Delta_v$).

Из выражения волновой функции

$$\varphi(\mathbf{R}) = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}) + \tau V \int \frac{\exp(i\boldsymbol{\chi}\mathbf{R}) d\boldsymbol{\chi}}{\varepsilon(\boldsymbol{\chi}) - z} \quad (1.27)$$

с помощью граничного условия, что вакансион не может находиться в том же узле что и примесь, имеем

$$\tau = \left[1 - V \int \frac{d\boldsymbol{\chi}}{\varepsilon(\boldsymbol{\chi}) - z} \right]^{-1}. \quad (1.28)$$

Собственные значения энергии рассеяния E ($z = E + i0$) определяются уравнением, которое следует из выражения (1.14):

$$1 = V \int \frac{d\boldsymbol{\chi}}{\varepsilon(\boldsymbol{\chi}) - z}. \quad (1.29)$$

Решение уравнения (1.29) представлено графически на рис. 5. Последовательность собственных значений z_p перемежается с последовательностью λ_k .

Кроме состояний рассеяния, уравнение (1.29) в специальных случаях имеет решение, соответствующее связанным состояниям квазичастиц. Вне каждого из интервалов непрерывного спектра значений E уравнение (1.29) имеет не более одного решения. Эти корни отщепляются либо только от правых границ интервалов, либо только от левых границ, в зависимости от знака V , и соответствуют локализованным состояниям.

Рассматривая асимптотические значения Φ при больших R , из выражения (1.27) имеем

$$\Phi(\mathbf{R}) = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}) + \frac{\tau V}{R} \sum_{\nu} f_{\nu} \exp(i\chi_{\nu}\mathbf{R}),$$

где f_{ν} — амплитуда рассеяния на вакансии

$$f_{\nu} = \frac{\tau V}{|\nabla \varepsilon(\chi_{\nu}) \sqrt{K_{\nu}}|},$$

K_{ν} — гауссова кривизна поверхности $\varepsilon(\chi) = E$ в точке касания этой поверхности с плоскостью направления рассеяния \mathbf{n} .

Следовательно, полное сечение рассеяния будет равно

$$\sigma = \frac{V^2}{v(\mathbf{k}_0) v(\mathbf{k}_1) K_{\nu}} \left(1 + V \int \frac{d\chi}{z - \varepsilon(\chi)} \right)^{-2}. \quad (1.30)$$

Вакансион после рассеяния является суперпозицией нескольких волн, число которых равно числу листов изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\chi) = E$.

Анализируя процесс рассеяния вакансии, надо иметь в виду, что при достаточно низких температурах вакансион находится вблизи дна зоны, где его энергия минимальна. Закон дисперсии в этом случае будет квадратичным: $\varepsilon(\chi) = \hbar^2 \chi^2 / 2m^*$ (m^* — эффективная масса вакансии $m^* \sim \hbar^2 / \Delta a^2$). Волновая функция вакансии, согласно выражению (1.27), в этом случае будет

$$\Phi(\mathbf{R}) = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}) - \frac{m^* a^3 \tau V}{2\pi \hbar^2} \frac{\exp(i \cdot 2m^* E R / \hbar^2)}{R}. \quad (1.31)$$

Следовательно, при разл. нии в поле отталкивающего потенциала вакансион все время остается внутри одной ячейки обратной решетки. В том случае, когда энергия близка к максимальной, вакансион переходит в соседнюю ячейку обратной решетки.

При рассеянии в поле притягивающего потенциала картина будет обратной. Ситуация здесь аналогична движению электронов в металлах⁵³ с учетом, однако, того факта, что вакансион, вследствие периодичности закона дисперсии в общем случае, может отражаться не только от точки, в которой энергия достигает максимума, но и от точки, в которой энергия минимальна, так как в этой точке скорость тоже обращается в нуль.

в) Рассеяние вакансии на примесоне

Явление рассеяния вакансии на примесоне имеет существенное значение для объяснения экспериментальных фактов по спиновой диффузии^{4, 7-9}. Здесь следует различать случаи «упругого» и «неупругого» рассеяний — примесон в течение процесса рассеяния не меняет свой узел или перемещается в соседний узел. Рассмотрим сначала наглядный пример одномерного рассеяния. Пусть вакансион рассеивается на примесоне, собственное туннели-

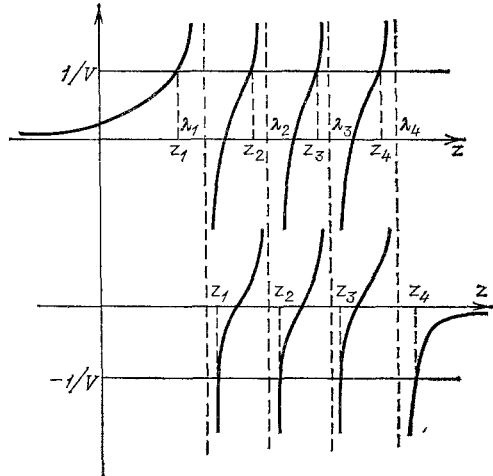


Рис. 5. Графическое решение уравнения (1.29).

рование которого — достаточно малая величина. Вследствие этого за время взаимодействия примесон успевает лишь переместиться на расстояние порядка периода обратной решетки, а вакансион рассеивается на такой примеси. В том случае, когда прицельный параметр рассеяния достаточно велик, вакансион после рассеяния не может стать ближайшим соседом примесона, что исключает возможность одновременного обмена местами этих квазичастиц.

Пусть потенциал взаимодействия вакансиона с примесоном имеет вид

$$V_{R_v R_1} = \frac{V_0 a}{R_v - R_1},$$

где V_0 — характерная энергия взаимодействия, R_v и R_1 — одномерные радиусы-векторы взаимодействующих квазичастиц. Рассматривается случай, когда $R_1 \ll R_v$; так, например, примесон за время взаимодействия из начала координат перемещается лишь на величину a или $-a$. Уравнение Лифшица для этого процесса рассеяния имеет следующий вид:

$$\sum_{R'} A_{R_v - R'} \varphi(R', R_1) - z \varphi(R_1, R_v) = \sum_{R'} V_{R_v - R_1} \varphi(R', R_v). \quad (1.32)$$

Потенциал взаимодействия $V_{R_v R_1}$ при условии $R_1 \ll R_v$ аппроксимируется через вырожденный потенциал в виде конечного ряда, подстановка которого в уравнение (1.32) дает

$$\sum_{R'} A_{R_v - R'} \varphi(R', R_1) - z \varphi(R_1, R_v) = \sum_{R'} V_0 a \left(\frac{1}{R_v} + \frac{R_1}{R_v^2} \right) \varphi(R', R_v). \quad (1.33)$$

Уравнение (1.33) позволяет определить сечение рассматриваемого процесса рассеяния. Для этого, как указывалось в разделе а) гл. 1, нужно найти асимптотическое выражение волновой функции (1.33), что приводит к следующему выражению амплитуды рассеяния:

$$f_{00} = \frac{V_0 a \varepsilon}{|\partial \varepsilon / \partial \chi|} \left(1 + V_0 \varepsilon a \int \frac{d\chi}{-\varepsilon(\chi) + z} \right)^{-1}, \quad (1.34)$$

где $\varepsilon = \sum_{R_v} \exp(i\chi R_v) / R_v$. Аналогично определяется амплитуда рассеяния процесса, в которой примесон перемещается в ближайший соседний узел.

В процессе «неупругого» рассеяния вакансиона на примесоне происходит обмен местами, как только эти квазичастицы окажутся в соседних узлах. Это явление, например, в слабом растворе сильно поляризованного кристалла $\text{He}^3 - \text{He}^4$ обуславливает спиновую диффузию, наблюдаемую в экспериментах.

Уравнение Лифшица, описывающее процесс указанного рассеяния, записывается в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{a}, \\ \mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_v}} A_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_v + \mathbf{a}} \varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_v + \mathbf{a}) - z \varphi(\mathbf{R}_v, \mathbf{R}_1) = \\ = t \sum_{\mathbf{a}} \{ \varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_v) - \varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_v + \mathbf{a}) \} \delta_{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_v + \mathbf{a}}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_v — дискретные координаты примесона и вакансиона соответственно, t пропорционально вероятности перехода вакансиона из узла в соседний узел.

Для простоты предположим, что примесон находится в начале координат. Амплитуда рассеяния определяется из асимптотического выражения решения уравнения (1.35) и будет равна

$$f = \frac{t}{|\nabla \varepsilon(\chi_v)| \sqrt{K_v}} [\varphi(-\mathbf{a}) - \varphi(0)], \quad (1.36)$$

где

$$\varphi(0) = \frac{\int \frac{d\chi}{\varepsilon(\chi) - z}}{\int A_\chi d\chi / [\varepsilon(\chi) - z]}, \quad \varphi(-\mathbf{a}) = \frac{\int \exp(-i\chi\mathbf{a}) d\chi / [\varepsilon(\chi) - z]}{\int A_\chi d\chi / [\varepsilon(\chi) - z]},$$

$$A_\chi = \sum_{\mathbf{a}} e^{i\chi\mathbf{a}}.$$

Совершенно аналогичным образом определяется и амплитуда рассеяния, когда примесон не находится в начале координат. В этом случае в уравнении (1.35) используется выражение $\delta_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_v + \mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{R}''} \delta_{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}''} \delta_{\mathbf{R}'' \mathbf{R}_v + \mathbf{a}}$.

Спиновую диффузию в случае бoльцмановского газа вакансионов вычислим, используя полученное выражение (1.36) для амплитуды рассеяния. Средняя скорость движения перевернутого спина вследствие рассеяния на нем вакансионов записывается следующим образом^{14, 63}:

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{a}} \mathbf{a} W_{\mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{a}} \mathbf{a} \int d\mathbf{k} \sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) [n(\varepsilon) - n(\varepsilon + \mathbf{F}\mathbf{a})], \quad (1.37)$$

где $W_{\mathbf{a}}$ — вероятность смещения перевернутого спина на вектор \mathbf{a} , \mathbf{F} — действующая на нем сила, $n(\varepsilon)$ — функция распределения вакансионов. Используя, например, выражение (1.36) при $\mathbf{F}\mathbf{a} \sim t$, имеем

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{a}} \mathbf{a} \alpha(\mathbf{a}) \int v(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right] d\varepsilon, \quad (1.38)$$

где

$$\alpha(\mathbf{a}) = t^2 [\varphi(-\mathbf{a}) - \varphi(0)] |\nabla_{\varepsilon}(\mathbf{k}_0) \sqrt{K_{\mathbf{v}}}|^{-1}.$$

Последнее выражение позволяет исследовать спиновую диффузию при различных законах дисперсии вакансионов, т. е. при разных $\alpha(\mathbf{a})$ и плотности состояний $v(\varepsilon)$. Например, в случае $v(\varepsilon) \sim (\varepsilon - \varepsilon_0)^{-1/2}$ получаются хорошо известные результаты^{14, 61, 63}, совпадающие с экспериментальными данными (см. обзор экспериментов по ЯМР в работе⁴, а также работы⁶⁻⁹).

г) Рассеяние одинаковых квазичастиц

При достаточно низких температурах экспериментально наблюдаемые характеристики (коэффициент квантовой диффузии, теплоемкость, времена ЯМР релаксации и т. д.) определяются парными столкновениями квазичастиц друг с другом^{-3, -9}. Для выяснения основных особенностей парных столкновений в решеточном пространстве кристалла рассмотрим рассеяние вакансиона на вакансионе и примесона на примесоне.

С точки зрения экспериментальных исследований процесс рассеяния вакансиона на вакансионе представляется интересным для изучения вопроса об образовании связанных состояний вакансионов в кристалле.

Особенности связанных состояний различных квазичастиц в квантовом кристалле, доступные экспериментальной проверке, предсказаны в работах Андреева^{3, 17}. К числу таких особенностей относится, например, корреляция вакансионов, или двух квазичастиц, обусловленная конечностью ширины их зон. Суммарная кинетическая энергия двух вакансионов не может меняться больше, чем на ширину зоны $\Delta_{\mathbf{v}}$. Энергия взаимодействия тоже ограничена величиной $\Delta_{\mathbf{v}}$. Поэтому два вакансиона не могут сблизиться или разойтись друг от друга на произвольное расстояние. Расстояние между ними определяется из условия, что энергия взаимодействия порядка $\Delta_{\mathbf{v}}$. Такая пара квазичастиц, однако, может свободно двигаться в кристалле, но только по некоторым специальным направлениям. В результате возникают двумерные или одномерные квазичастицы в трехмерном квантовом кристалле. Наличие в кристалле кристаллографически эквивалентных точек для нахождения такой пары означает возможность ее движения как целого.

Детальный учет симметрии кристаллической решетки в процессе образования связанных состояний можно произвести, воспользовавшись основополагающей работой Питаевского ⁴¹, в которой показано, что в кристалле возможно образование связанных состояний различных квазичастиц при сколь угодно слабом взаимодействии между ними в некоторых специальных точках решетки.

Образование связанных состояний вакансионов описывается в рамках уравнения Лифшица, решение которого позволяет определить волновые функции и энергии новых возбуждений.

Запишем уравнение Лифшица для рассеивающихся вакансионов

$$\sum_{\mathbf{R}'_V} A_{\mathbf{R}'_V - \mathbf{R}'_V} \Phi(\mathbf{R}', \mathbf{R}_V) + \sum_{\mathbf{R}'_V} A'_{\mathbf{R}'_V - \mathbf{R}'_V} \Phi(\mathbf{R}_V, \mathbf{R}') + t \sum_{\mathbf{R}'_V} \bar{V}_{\mathbf{R}'_V \mathbf{R}'_V} \Phi(\mathbf{R}', \mathbf{R}_V) = z\Phi; \quad (1.39)$$

здесь t — произвольный вещественный параметр, а V — оператор взаимодействия первого ранга. В частности, учитывая, что вакансионы не могут сближаться на расстояние меньше, чем R_0 , можно взаимодействие представить в виде

$$V = V_0 \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}_0},$$

где V_0 — характерная энергия взаимодействия, а $R_0 \sim a (V_0/\Delta)^{1/3}$ (*). Такое представление потенциала важно лишь для простоты изложения и не ограничивает общности.

Из уравнения (1.39) с учетом граничного условия на волновую функцию, заключающегося в том, что два вакансиона не могут попасть в один узел, имеем следующее уравнение для определения собственных значений энергии (см. раздел а) гл. 1):

$$1 = tV_0 \int \frac{d\chi}{\varepsilon(\chi - (q/2)) + \varepsilon(\chi + (q/2)) - z}. \quad (1.40)$$

Это уравнение наряду с собственными значениями энергии рассеяния определяет также энергии связанных состояний вакансионов. Волновые функции, соответствующие этим состояниям, определяются решением уравнения (1.39) (п. а) гл. 1).

Пусть в кристалле, например, имеется ось симметрии шестого порядка. Тогда, как показал Питаевский ⁴¹, вблизи оси симметрии возможно образование связанных состояний, когда $t \rightarrow 0$. Это обусловлено тем, что вблизи оси симметрии существуют такие специальные точки, для которых подынтегральное выражение в уравнении (1.40) расходится. Вследствие этого уравнение имеет решение при бесконечно малых t . Подынтегральное выражение в уравнении (1.40) может быть представлено в виде следующего ряда, в котором члены второго порядка отсутствуют:

$$\varepsilon\left(\chi - \frac{q}{2}\right) + \varepsilon\left(\chi + \frac{q}{2}\right) = 2\varepsilon\left(\frac{q_0}{2}\right) + b\chi_{\perp}^4, \quad (1.41)$$

где q_0 — определенная точка на оси симметрии.

В этой точке коэффициент разложения, например, при χ_{\perp}^2 обращается в нуль, χ_{\perp} — импульс, перпендикулярный оси симметрии. Такое условие является определением точки q_0 .

Подставляя разложение (1.41) в уравнение (1.40) для энергии связи $\delta_0 = 2\varepsilon(q_0/2) - E$, найдем выражение

$$\delta_0 = \frac{\pi^2 \Lambda^2 t V_0}{16b}, \quad (1.42)$$

где Λ — величина порядка периода обратной решетки.

*) Если вакансионы взаимодействуют через потенциал $V = V_0 (a/R)^3$, то условие $V \sim \Delta$ даст указанное значение R_0 .

В том случае, когда в кристалле имеются оси симметрии второго или четвертого порядков, в разложении суммарной энергии будут присутствовать и члены второго порядка. Подсчет энергии связанных вакансионных пар в таких случаях производится аналогичным образом на основе уравнений (1.39) и (1.40).

Вакансионные пары в зависимости от способа их образования могут подчиняться либо бозе-, либо ферми-статистике. В случае ферми-вакансионных пар возможно образование пары квазичастиц вблизи поверхности Ферми (аналогично куперовским парам в сверхпроводниках)⁵⁶.

В слабом растворе $\text{He}^3 - \text{He}^4$ при достаточно низких температурах имеется разреженный газ примесей. Коэффициент диффузии примесей, как свидетельствуют теоретические и экспериментальные работы^{3, 7-9}, обратно пропорционален концентрации примесей:

$$D \approx \frac{J a^4}{\sigma x}, \quad (1.43)$$

где J — частота туннелирования, σ — сечение рассеяния примеси на примеси, которое при различных законах дисперсии примесей определяется формулой (1.24). В случае простой кубической решетки сечение рассеяния примесей, согласно выражению (1.24) ($q = 0$), будет равно *)

$$\sigma = \frac{16\pi^2 a^2}{\Delta^2 I^2(0)}, \quad I(0) = \int dk [2\epsilon_0 - E + (2\Delta \cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a)]^{-4}. \quad (1.44)$$

Как показано в экспериментальной работе Ричардса и Оуэрс-Бредли⁴⁰, при температурах ниже 5 К и плотностях покрытия от 0,7 до 1,0 (по отношению к плотности покрытия заполненного монослоя) происходящие в двумерной системе процессы квантового туннелирования дают основной вклад во флуктуации локального поля. Сечение рассеяния и, следовательно, коэффициент квантовой диффузии получаются с помощью двумерных аналогов уравнений (1.24) и (1.44).

д) Рассеяние на произвольном потенциале

Взаимодействие квазичастиц изменяет значения равновесных характеристик газа квазичастиц, а значит и характеристик твердого тела: теплоемкости, коэффициента теплового расширения, коэффициента диффузии и т. д. Столкновения обуславливают также релаксационные процессы в кристалле, кинетические явления, резонансные явления и т. д.

С целью изучения общей картины взаимодействия квазичастиц друг с другом на основе метода И. М. Лифшица рассмотрим сначала задачу взаимодействия в операторном виде, который позволяет рассматривать разные конкретные случаи, в зависимости от типа потенциала.

Пусть оператор кинетической энергии для одной квазичастицы \hat{L}_1 , а для второй — \hat{L}_2 . Взаимодействие квазичастиц описывается оператором $\hat{\Lambda}$. Тогда уравнение, соответствующее их рассеянию друг на друге, будет

$$(\hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{\Lambda}) \psi - z\psi = \hat{F}, \quad (1.45)$$

где \hat{F} — оператор, соответствующий некоторой внешней силе.

Обозначим $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$. Уравнение (1.45) при $\hat{\Lambda} = 0$ задает волновые функции ψ и собственные значения взаимодействующих квазичастиц:

$$(\hat{L}_1 + \hat{L}_2) \psi - z\psi = \hat{F}. \quad (1.46)$$

*) Интегралы типа $I(0)$ табулированы в работе⁶³.

Рассмотрим класс вырожденных операторов, удовлетворяющих условию

$$\Lambda\varphi = T\psi, \quad (1.47)$$

которое фактически определяет новый оператор T , действие которого на ψ дает $\Lambda\varphi$.

В конфигурационном пространстве равенство (1.47) приводит к следующему заключению. На малых расстояниях между двумя квазичастицами, где потенциал Λ бесконечен, точная волновая функция должна обращаться в нуль, а произведение $\Lambda\varphi$ будет оставаться конечным. Кроме того, невозмущенная волновая функция ψ нигде не обращается в нуль, поэтому оператор T должен быть регулярным во всем пространстве.

Подставив выражение (1.47) в уравнение (1.45), имеем

$$(\hat{L} - z)\varphi + \hat{T}\psi = \hat{F}. \quad (1.48)$$

Введем резольвенты операторов L и Λ :

$$(\hat{L} - z)^{-1} = \hat{R}_z, \quad (\hat{L} + \hat{\Lambda} - z)^{-1} = \tilde{R}_z. \quad (1.49)$$

Действуя резольвентой \hat{R}_z на уравнение (1.48), получим

$$\varphi = \hat{R}_z \hat{F} - \hat{T} \hat{R}_z \psi. \quad (1.50)$$

Величина T , согласно условию (1.49), определяется выражением

$$T = \tau(\varphi, \psi), \quad (1.51)$$

где τ задает взаимодействие.

Подставив в выражение (1.51) величину волновой функции φ , из (1.50), имеем

$$T = \frac{\tau(\hat{F}, R_z^* \psi)}{1 + \tau(\hat{R}_z \psi, \psi)}. \quad (1.52)$$

Найдем окончательно функцию φ из уравнения (1.52) с помощью выражения (1.50)

$$\hat{R}_z \hat{F} - \hat{R}_z F = - \frac{\hat{F} \hat{R}_z \varphi, R_z \varphi}{1 + \tau(R_z \varphi, \varphi)}. \quad (1.53)$$

Окончательно, для волновой функции имеем

$$\varphi = \psi + \frac{\tau(R_z \psi, \psi)}{1 + \tau(R_z \psi, \psi)}. \quad (1.54)$$

Отметим, что хорошо известны математические методы, позволяющие аппроксимировать любой оператор взаимодействия с помощью вырожденных операторов⁶². Аппроксимация произвольного оператора взаимодействия вырожденными операторами дает, таким образом, эффективный способ решения уравнения (1.3) или (1.45) в широком классе случаев и позволяет связывать форму волновой поверхности и амплитуду рассеянных квазичастиц с их законом дисперсии.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР КВАНТОВОГО КРИСТАЛЛА

а) Вклад в свободную энергию квантового кристалла

При низких температурах вычисление свободной энергии кристалла сводится, фактически, к вычислению свободной энергии газа соответствующих элементарных возбуждений, которые ведут себя как некоторые квазичастицы, движущиеся в занимаемом кристаллом объеме и обладающие определенными

значениями энергии и импульса. Когда концентрация квазичастиц мала, вполне достаточным в этом вычислении оказывается приближение вириального разложения, в котором энергия выражается через амплитуду парного рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Квадратичные по амплитуде рассеяния члены малы, когда столкновения квазичастиц могут быть описаны в борновском приближении.

Вклад этих членов в свободную энергию является поэтому несущественным. Однако при достаточно низких температурах взаимодействие становится сильным, что усложняет ситуацию как за счет квадратичных членов, так и за счет анизотропии кристалла. Примером такой системы является кристалл, в котором рассеяние квазичастиц происходит на неподвижных примесях. Для такого случая И. М. Лифшиц впервые предложил метод вычисления добавки к свободной энергии кристалла, обусловленной наличием примесей³¹. В этом методе не используется борновское приближение и, следовательно, не требуется малость потенциала взаимодействия квазичастиц с примесями.

Ниже мы рассмотрим аналогичный способ вычисления добавки к свободной энергии, обусловленной парными столкновениями квазичастиц друг с другом^{32, 51}. Такие столкновения реализуются, например, в квантовых кристаллах. Однако результат при настоящем рассмотрении выражается не через амплитуду рассеяния, а через связанную с ней, но более простую характеристику задачи, так называемую спектральную функцию, которая содержит вышеуказанные особенности взаимодействующих квазичастиц.

Предположим, что количество квазичастиц достаточно мало, чтобы можно было считать, что одновременно сталкиваются не более одной пары квазичастиц. Очевидно, что в системе N квазичастиц число таких пар будет порядка N^2 . Взаимодействие между квазичастицами будет сильным тогда, когда какие-нибудь две из них будут находиться очень близко друг от друга, т. е. практически будут стремиться попасть в один и тот же узел решетки. Это взаимодействие будет бесконечно большим и отталкивающим при точном совпадении координат двух квазичастиц в кристаллической решетке. Этому соответствует потенциал (1.1) с волновой функцией (1.15). На примере этого потенциала взаимодействия рассмотрим изменение свободной энергии кристалла.

Уравнение (1.8) наряду с решениями, описывающими рассеяние квазичастиц, имеет также решения, соответствующие связанным состояниям. Если концентрация квазичастиц равна c , то концентрация связанных состояний будет пропорциональна c^2 . Как функция переменной $q/2$, собственные значения $\varepsilon(q/2)$ представляют новые ветви возбуждений, отвечающие связанным состояниям.

Представим z в выражении (1.14) в виде

$$z = E + \alpha \xi(E) + O(\alpha^2). \quad (2.1)$$

Имеем

$$1 = V \int \frac{d\mathbf{x}}{\varepsilon(\mathbf{x} - (q/2)) + \varepsilon(\mathbf{x} + (q/2)) - E - \alpha \xi(E)} \quad (2.2)$$

Рассмотрим для простоты последовательность операторов с чисто дискретным спектром \hat{L}_α , сходящихся при $\alpha \rightarrow 0$ к значению \hat{L} . Собственными значениями оператора \hat{L}_α будут числа $E_n = n\alpha$, причем каждое из них будет бесконечно кратным. Как было показано И. М. Лифшицем³¹, для оператора с кратным спектром прибавление оператора первого ранга $\hat{\Lambda}$ (1.1) приводит к понижению кратности каждого собственного значения спектра на единицу, причем точки E_n остаются, а отщепившиеся собственные значения z_n смещаются и располагаются между значениями E_n и E_{n+1} . Таким образом, отщепившиеся собственные значения оператора $\hat{L}_\alpha + \hat{\Lambda}$ представляются

в виде (2.1) или

$$z_n = E_n + \alpha \xi(E_n) + O(\alpha^2).$$

В случае такого дискретного спектра интеграл в (2.2) превращается в сумму по числам n , причем, подставив $d\chi = d\Omega dE$ (где $d\Omega$ — элемент телесного угла), имеем

$$1 = V \sum_m \frac{\nu(E_m, \mathbf{q}) \Delta E_m}{E_m - E_n - \alpha \xi(E_n)}, \quad (2.3)$$

где

$$\nu(E_m, \mathbf{q}) = \int_{E_m}^{E_m + \Delta E_n} \frac{d\Omega}{|\sqrt{\varepsilon}(\chi - (\mathbf{q}/2)) + \sqrt{\varepsilon}(\chi + (\mathbf{q}/2))|}. \quad (2.4)$$

Переходя в уравнении (2.3) к пределу $\alpha \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, так, что $E_n = E$ остается на месте, имеем

$$\tilde{\xi}(E) = \int \xi(E, \mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad \xi(E, \mathbf{q}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi V \nu(E, \mathbf{q})}{1 + V \int \frac{\nu(\varepsilon, \mathbf{q}) d\varepsilon}{E - \varepsilon}}. \quad (2.5)$$

Эта формула определяет спектральное смещение за счет рассеяния двух квазичастиц друг на друге и справедлива для тех собственных значений, которые лежат внутри интервала непрерывного спектра оператора \hat{L} . В пределе $V \rightarrow \infty$ имеем

$$\tilde{\xi}(E) = \int \xi(E, \mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad \xi(E, \mathbf{q}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi \nu(E, \mathbf{q})}{\int \frac{\nu(\varepsilon, \mathbf{q}) d\varepsilon}{E - \varepsilon}}. \quad (2.6)$$

Таким образом, из задачи рассеяния определяем спектральное смещение, знание которого позволяет определить изменение свободной энергии кристалла.

Пусть свободная энергия в невозмущенном случае есть $F_0 = \operatorname{Sp} \Phi(\hat{L})$, где

$$\Phi(\varepsilon) = T \ln(1 - e^{-\varepsilon/T}) + \varepsilon_0, \quad (2.7)$$

а свободная энергия возмущенного кристалла

$$F_1 = \operatorname{Sp} \Phi(\hat{L} + \hat{\Lambda}). \quad (2.8)$$

Тогда изменение свободной энергии, обусловленное возмущением, будет

$$\Delta F = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_n [\Phi(E_n + \alpha \tilde{\xi}(E_n)) - \Phi(E_n)]. \quad (2.9)$$

Отсюда имеем

$$\Delta F = \int_{\Gamma} \tilde{\xi}(E) \Phi'(E) dE, \quad (2.10)$$

интеграл берется по области Γ непрерывного спектра.

Полученная формула, вместе с выражениями (2.5) и (2.6), позволяет найти вклад в свободную энергию взаимодействующих квазичастиц.

Рассмотрим некоторые частные случаи с помощью формулы (2.10). Входящая в (2.5) и (2.6) величина $\nu(E, \mathbf{q})$ имеет смысл плотности состояний и во всех случаях хорошо известна. Так, например, в случае решетки, обладающей кубической симметрией, $\nu(E)$ равна:

$$\nu(E) = \operatorname{const} \cdot E^{-1/4}. \quad (2.11)$$

Для простоты предположим, что $\nu(E, \mathbf{q}) = \nu(E) f(\mathbf{q})$, где $f(\mathbf{q})$ — некоторая функция только от \mathbf{q} . Тогда, подставляя значение (2.11) в

уравнение (2.6), имеем

$$\xi = \frac{1}{4}. \quad (2.12)$$

Аналогичным образом, из тех же формул легко получить, что около границ зоны, когда $v(E) = \text{const} \cdot E^{-1/2}$,

$$\xi = \frac{11}{2}. \quad (2.13)$$

Следовательно, в этих случаях из формулы (2.10) для системы квазичастиц имеем

$$\Delta F = \frac{N^2 T}{V} \frac{a^3 \ln 2}{4}, \quad (2.14)$$

$$\Delta F = \frac{N^2 T}{V} \frac{a^3 \ln 2}{2}. \quad (2.15)$$

Таким образом, вклад в давление будет порядка Nb/V (где b — определенная в выражениях (2.14), (2.15) константа в той области, в которой существенно бесконечно большое отталкивание между парами квазичастиц).

б) Теплоемкость двумерного кристалла

В экспериментальных работах Бретца и других показано, что теплоемкость двумерного кристалла гелия, адсорбированного на графите, при температурах порядка 1 К имеет аномальное поведение — резкий максимум ⁴². В диапазоне значений относительной плотности покрытия от 0,7 до 1,0 в данной системе из-за сил отталкивания атомов на малых расстояниях при упорядочении один атом гелия приходится на три потенциальные ямы подложки (рис. 6). В такой системе между атомами, следующими за ближайшими соседями, имеются силы притяжения. Возникновение вакансий с достаточно большой концентрацией приводит к принципиальной возможности обнаружения сверхтекучей фазы кристалла.

Вычисление теплоемкости с помощью формул (2.5) и (2.10) приводит к зависимости $C \sim |t|^{-\alpha}$, $t = (T_c - T)/T_c$, что качественно совпадает с указанным экспериментальным результатом. Таким образом, данная система ведет себя как двумерный квантовый кристалл с вакансиями (см. также работу ⁴⁰). Интересно отметить, что в такой системе, по мере перехода монослоя в соизмеримую фазу, частота звука, на которой возможно эффективное поглощение, уменьшается, так как добавка к свободной энергии кристалла, обусловленная столкновениями квазичастиц, приводит к увеличению времени релаксации характеризующих фазовый переход параметров ⁴⁸.

Как следует из результатов работ ³³, ⁴⁸, ⁵⁴, вакансии в двумерном кристалле в определенной области температур имеют специфическое поведение (см. также раздел б) гл. 3), приводящее к своеобразному температурному вкладу в теплоемкости.

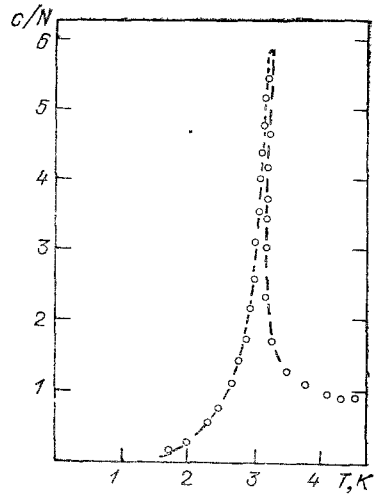


Рис. 6. Теплоемкость двумерного кристалла He⁴ ⁴².

в) Неидеальный бозе-газ квазичастиц

Статистика квазичастиц определяется в общем случае числом частиц, которые необходимо уничтожить или родить для образования соответствующего возбуждения. Каждая квазичастица характеризуется квазиимпульсом \mathbf{k} , соответствующей энергией $\varepsilon(\mathbf{k})$ и спином s . Для процесса квантомеханического туннелирования необходимо, чтобы наличие спина не нарушало периодичность решетки. Для этого они должны быть направлены все в одну сторону.

Вследствие парных столкновений квазичастиц, подчиняющихся статистике Бозе, происходит перестройка энергетического спектра системы. Характерно для такой системы то, что для квазичастиц принцип относительности Галилея непосредственно неприменим, так как для квазичастиц необходимо наличие той среды, в которой они движутся. Этот факт приводит к своеобразному явлению при перестройке энергетического спектра. Возникший бозе-конденсат имеет не нулевой импульс, как в случае обычного бозе-газа, а конечный импульс движения в целом. Следовательно, существуют две избранные системы отсчета, связанные соответственно с конденсатом и с решеткой. Ясно, что каждая квазичастица в конденсате характеризуется квазиимпульсом и энергией, соответствующей этому квазиимпульсу.

Пусть скорости \mathbf{v} конденсата соответствует квазиимпульс \mathbf{p}_0 ($\nabla \varepsilon(\mathbf{k})|_{\mathbf{k}=\mathbf{p}_0} = \mathbf{v}$).

Построим энергетический спектр такой системы, гамильтониан которой имеет вид ^{32, 55, 56}

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} A_{\mathbf{R}-\mathbf{R}'} \hat{a}_{\mathbf{R}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{R}'} + \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}''} U_{\mathbf{R}, \mathbf{R}''} \hat{a}_{\mathbf{R}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{R}''}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{R}'} \hat{a}_{\mathbf{R}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (2.16)$$

где $\hat{a}_{\mathbf{R}}^{\dagger}$, $\hat{a}_{\mathbf{R}}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастиц в узле \mathbf{R} , $U_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}$ — потенциал взаимодействия квазичастиц, а

$$A_{\mathbf{R}} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}). \quad (2.17)$$

Операторы $\hat{a}_{\mathbf{R}}^{\dagger}$ и $\hat{a}_{\mathbf{R}}$ удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям ⁵⁶:

$$\hat{a}_{\mathbf{R}} \hat{a}_{\mathbf{R}'}^{\dagger} - \hat{a}_{\mathbf{R}'}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{R}} = \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}. \quad (2.18)$$

Парные столкновения между квазичастицами через потенциал «непроницаемости» (1.1) не удовлетворяют условию применимости борновского приближения. Потенциал притяжения (1.2) этому условию удовлетворяет, поэтому может быть учтен в (2.16) в члене H_{int} с помощью теории возмущений.

Для описания рассматриваемой системы в импульсном представлении необходимо принять во внимание характерное для квантового кристалла свойство — движение квазичастиц только по узлам и невозможность нахождения более одной частицы в одном узле. Это становится возможным, если при переходе к импульсному представлению учесть точную волновую функцию (1.6) квазичастицы. Перейдем, таким образом, к импульсному представлению слабого потенциала притяжения следующим образом:

$$\bar{U}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2, \mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}'/2, \mathbf{p}+\mathbf{q}'/2} = \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}''} U_{\mathbf{R}\mathbf{R}''} \varphi(\mathbf{R}, \mathbf{R}'). \quad (2.19)$$

Гамильтониан (2.16) в импульсном представлении будет иметь вид

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{q}'} U(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{q}') \hat{a}_{\mathbf{k}-(\mathbf{q}/2)}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}+(\mathbf{q}/2)}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}+(\mathbf{q}'/2)} \hat{a}_{\mathbf{k}-(\mathbf{q}'/2)}. \quad (2.20)$$

Суммирование в последнем члене производится по всем значениям импульсов квазичастиц с соблюдением закона сохранения импульса при парном столкновении.

Рассмотрим случай газового приближения $ka \ll 1$. Тогда с учетом (1.15) из (2.19) имеем

$$U(\mathbf{p}_0) = \tau V \int \frac{d\chi}{\varepsilon(\chi - \mathbf{p}_0) + \varepsilon(\chi + \mathbf{p}_0) - 2\varepsilon(\mathbf{p}_0)}. \quad (2.21)$$

Применение теории возмущений в гамильтониане (2.20) означает теперь формально разложение четверной суммы по степеням малых величин $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}}$. Нулевой член разложения есть число:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}_0}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}_0}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}_0} \hat{a}_{\mathbf{p}_0} = N_{\mathbf{p}_0}^2, \quad (2.22)$$

$N_{\mathbf{p}_0}$ — число квазичастиц в конденсате. Члены второго порядка будут такие:

$$a_{\mathbf{p}_0}^2 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} + 2\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}). \quad (2.23)$$

Так как число квазичастиц в конденсате велико, то мы можем рассматривать операторы как обычные числа, пренебрегая их некоммутативностью. Таким образом, из (2.20), (2.22), (2.23) имеем

$$\hat{H} = \frac{N_{\mathbf{p}_0}^2 U(\mathbf{p}_0)}{2V} + \frac{N_{\mathbf{p}_0} U(\mathbf{p}_0)}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} + 2\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}) + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}. \quad (2.24)$$

Для определения спектра энергии надо привести гамильтониан к диагональному виду, что осуществляется с помощью преобразований Боголюбова. Окончательно имеем

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon'(\mathbf{k}) \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}, \quad (2.25)$$

где E_0 — энергия основного состояния ($\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ — новые бозе-операторы);

$$E_0 = \frac{N_{\mathbf{p}_0}^2}{2} c^2(\mathbf{p}_0) - \beta N_{\mathbf{p}_0} U(\mathbf{p}_0) \varepsilon_0 + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}), \quad (2.26)$$

а $c(\mathbf{p}_0)$ — скорость звука,

$$c(\mathbf{p}_0) = \sqrt{2U(\mathbf{p}_0) \frac{N_{\mathbf{p}_0}}{V}}. \quad (2.27)$$

Новый закон дисперсии $\varepsilon'(\mathbf{k})$ имеет вид

$$\varepsilon'(\mathbf{k}, \mathbf{p}_0) = \left\{ \frac{1}{2} [\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{p}_0) + \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{p}_0) - 2\varepsilon(\mathbf{p}_0)] + \frac{1}{2} c^2(\mathbf{p}_0) [\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{p}_0) + \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{p}_0) - 2\varepsilon(\mathbf{p}_0)] \right\}^{1/2}. \quad (2.28)$$

Величина $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}}$ представляет собой число квазичастиц с импульсом \mathbf{k} , а формула (2.28) определяет зависимость их энергии от квазиимпульса. Энергия квазичастиц, согласно формуле (2.28), зависит также от импульса \mathbf{p}_0 , которому соответствует скорость v движения сверхтекучего бозе-конденсата.

Величина $c(\mathbf{p}_0)$ совпадает со скоростью звука в системе квазичастиц, так как давление $P = -(\partial E / \partial V)_T$, а $c^2(\mathbf{p}_0) = \partial P / \partial \rho$, где $\rho = N_{\mathbf{p}_0} / V$. Наблюдение зависимости скорости звука от \mathbf{p}_0 представляло бы принципиальный интерес.

3. ТЕОРИЯ ФЕРМИ-БОЗЕ-КВАНТОВОГО КРИСТАЛЛА

а) С в о б о д н а я э н е р г и я т в е р д о г о р а с т в о р а

Развитый во второй главе метод применим, например, для вычисления свободной энергии твердого раствора. Приращение свободной энергии, благодаря парным столкновениям, является конечным в пределе при неограниченном увеличении кристалла. Поэтому при вычислении изменения свободной энергии по отношению к классическому кристаллу можно рассматривать предельный случай бесконечного кристалла, для которого спектр энергии является непрерывным.

Благодаря одному акту парного рассеяния свободная энергия раствора меняется на величину ΔF . Тогда при наличии примесей с концентрацией c свободная энергия представляется в виде

$$F = F_0 + Nc \Delta F, \quad (3.1)$$

где F_0 — свободная энергия чистого кристалла, N — полное число атомов.

Очевидно, что настоящие утверждения верны при столкновениях любых квазичастиц друг с другом. Если, например, в растворе ферми-бозе квазичастиц возможны столкновения ферми-ферми-, бозе-бозе- и ферми-бозе-квазичастиц, то это приводит к следующему вкладу в свободную энергию раствора:

$$\Delta F = \Delta F_{\text{Б}} N_{\text{Б}}^2 + \Delta F_{\text{Ф}} N_{\text{Ф}}^2 + \Delta F_{\text{ФБ}} N_{\text{Ф}} N_{\text{Б}}, \quad (3.2)$$

где $N_{\text{Ф}}$ и $N_{\text{Б}}$ — число ферми- и бозе-квазичастиц, ΔF_i ($i = \text{Ф}, \text{Б}, \text{ФБ}$) — приращение свободной энергии [см. (2.5) и (2.10)] при столкновении ферми-ферми, бозе-бозе и ферми-бозе-квазичастиц соответственно.

Выражение (2.5) и (2.10) позволяет также вычислить вклад в свободную энергию, обусловленный возникновением связанных состояний квазичастиц. Как показано в первой главе, в квантовом кристалле вблизи специальных точек в пространстве квазиимпульсов возникают связанные состояния при любом сколь угодно малом взаимодействии между ними ($t \rightarrow 0$). В этом случае формула для ΔF будет иметь вид

$$\Delta F = \int \frac{v(\varepsilon) V t}{1 + V t \int \frac{v(\mu) d\mu}{\mu - \varepsilon}} \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - 1}. \quad (3.3)$$

При концентрации c концентрация связанных пар квазичастиц будет порядка c^2 . Следовательно, вклад в свободную энергию будет $c^2 \Delta F$.

б) Р а з д е л е н и е ф а з в т в е р д о м р а с т в о р е $\text{He}^3 - \text{He}^4$

В растворах квантовых кристаллов одновременно могут существовать квазичастицы, подчиняющиеся и ферми-, и бозе-статистике. Рассмотрим свойства кристалла, который содержит $N_3 = n_3 V$ ферми-квазичастиц и $N_4 = n_4 V$ бозевских квазичастиц. Концентрация ферми-квазичастиц $c = N_3/N$, $N = N_3 + N_4$.

Экспериментально вопрос о разделении фаз возник при изучении упорядочения ядерных спинов He^3 , когда образец содержал заметное количество примеси He^4 ^{4, 59}. Эдвардс, Мак-Вильямс и Даунт обнаружили, что при определенной температуре, зависящей от концентрации примеси, появляется большая аномалия теплоемкости. Большая теплоемкость указывает, что происходит какой-то процесс упорядочения. Такая аномалия может возникнуть в результате распада твердого раствора на две фазы.

Для выяснения вопроса о разделении фаз сначала рассмотрим случай нулевой температуры. Напишем выражение свободной энергии для раствора

He³ — He⁴ в следующем виде ^{1,44} (см. (3.2)):

$$F = \lambda \frac{V_0 - V}{V_0} N_4 + \frac{\pi a}{m_4^*} \frac{\bar{N}_4^2}{V} - \frac{V}{5\pi^{1/3} m_3^*} \left(\frac{N_3}{V} \right)^{5/3} + \frac{\pi a'}{m_3^*} \frac{N_3^2}{V} + 2\pi a_0 \left(\frac{1}{m_3^*} + \frac{1}{m_4^*} \right) \frac{N_3 N_4}{V}, \quad (3.4)$$

где a, a', a_0 — длины рассеяний бозе-бозе-, ферми-ферми- и ферми-бозе-квазичастиц соответственно (см. гл. 1), m_3^* и m_4^* — эффективные массы квазичастиц ($m_3^* \sim \hbar^2/\Delta_3 a^2, m_4^* \sim \hbar^2/\Delta_4 a^2$). V_0 — значение объема, при котором образуются вакансии.

Из общеизвестных формул статистической физики ⁵⁶ можно определить давление и химические потенциалы квазичастиц, что позволяет определить области расслоения раствора на две фазы. Из условий равновесия фаз легко убедиться, что нулевые примесоны, т. е. примесоны, существующие при нуле температуры, в области малых концентраций не дают существенного вклада в давление

$$P = \frac{n\lambda V}{V_0} + \frac{\pi a n^2}{m^*} + 2\pi a_0 \left(\frac{1}{m_3^*} + \frac{1}{m_4^*} \right) n^2 c. \quad (3.5)$$

Примесоны, таким образом, имеют достаточно большую подвижность, иначе кристалл мог бы остаться в метастабильном состоянии при понижении температуры. Экспериментальные факты подтверждают эти результаты ^{59,61}.

Рассмотрим теперь раствор ферми-бозе-квазичастиц в решеточном пространстве при наличии равновесных вакансион и отличной от нуля температуры. Наличие в растворе вакансион приводит к изменению физической картины. Вакансион обладают большой подвижностью, вследствие чего могут появляться некоторые явления, свойственные жидким растворам.

Гамильтониан рассматриваемого раствора в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{R, R'} A_{R-R'} \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_{R'} + \sum_{R, R'} B_{R-R'} \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_{R'} + \frac{1}{2} \sum_{R, R'} U_{RR'}^1 \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_{R'}^\dagger \hat{a}_R \hat{a}_{R'} + \frac{1}{2} \sum_{R, R'} U_{RR'}^2 \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_{R'}^\dagger \hat{b}_R \hat{b}_{R'} + \sum_{R, R'} U_{RR'}^3 \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_{R'}^\dagger \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_{R'}, \quad (3.6)$$

где

$$U_{RR'}^i = \begin{cases} V \rightarrow \infty, & R = R', \\ -v^i (R - R'), & R \neq R' \end{cases} \quad (3.7)$$

— взаимодействие между бозе-бозе ($i = 1$), ферми-ферми ($i = 2$)- и ферми-бозе ($i = 3$)-квазичастицами. $\hat{a}_R^\dagger, \hat{a}_R, \hat{b}_R^\dagger, \hat{b}_R$ — операторы рождения и уничтожения, соответственно бозе- и ферми-квазичастиц в точке R решеточного пространства. Число квазичастиц меньше, чем число узлов решетки. Каждый узел решетки может быть занят либо бозоном, либо фермионом, либо вакансион. Это аналогично тому, что каждый узел может быть в трех различных состояниях. Введем три вектора, которые соответствуют этим состояниям: $(1, 0, 0)$ — состояние, занятое бозоном, $(0, 1, 0)$ — состояние, занятое вакансион, $(0, 0, 1)$ — состояние, занятое фермионом.

Эти векторы являются собственными векторами z -компоненты единичного спинового оператора σ^z , соответствующими собственным значениям $1, 0, -1$. Легко убедиться в том, что, например, бозе-квазичастица рождается тогда, когда оператор $\sigma^z \sigma^+$ действует на состояние с $\sigma^z = 0$. Следовательно, оператор рождения бозона может быть выражен через спиновый

оператор, помноженный на соответствующий проекционный оператор⁵⁶:

$$\hat{a}_R^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_R^z \sigma_R^{\dagger}, \quad \hat{a}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_R^- \sigma_R^z. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом можно ввести операторы рождения и уничтожения фермионов:

$$\hat{b}_{R^+}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_R^z \sigma_R^-, \quad \hat{b}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_R^+ \sigma_R^z. \quad (3.9)$$

Легко проверить, что при этом остаются в силе обычные коммутационные соотношения.

В силу трансляционной симметрии σ не зависит от индекса \mathbf{R} . Приближение молекулярного поля утверждает, что поле в \mathbf{R} -м узле совпадает со средним полем \bar{U} и не зависит от ориентации спина $\sigma_{\mathbf{R}}$ ⁵⁸. В квантовом кристалле спины направлены все в одну сторону так, чтобы система была периодичной. Факт дискретности здесь учитывается, если при переходе к импульсному представлению использовать точные волновые функции рассеяния, полученные в первой главе:

$$\bar{U}_k^i = \sum_{\mathbf{k}'} U^i(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \sigma_{\mathbf{k}'}^z, \quad (3.10)$$

$$U^i(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} U_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^i \varphi(\mathbf{R}, \mathbf{R}'). \quad (3.11)$$

Такая процедура приводит к уравнениям, которые отражают совместное участие всех решеточных квазичастиц в создании самосогласованного поля⁵⁸.

Величины $A_{\mathbf{R}}$ и $B_{\mathbf{R}}$ в гамильтониане (3.6) при переходе к импульсному представлению соответствуют законам дисперсии квазичастиц

$$A_{\mathbf{R}} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_1(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}), \quad (3.12)$$

$$B_{\mathbf{R}} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_2(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}).$$

Представление операторов рождения и уничтожения через спиновые операторы позволяет также вести параметр порядка η :

$$\bar{\sigma}^z = \eta. \quad (3.13)$$

Это означает, что свободную энергию раствора, соответствующую гамильтониану (3.6), можно разложить по степеням величины η , согласно теории Ландау о фазовых переходах второго рода. В результате, приравнявая нулю ко-

Рис. 7. Диаграмма состояния раствора $\text{He}^3 - \text{He}^4$.

Сплошная линия — теория⁵⁸, штриховая — эксперимент^{59, 61}.

эффициент при η^2 , получаем температуру фазового перехода.

Полученная таким образом зависимость температуры разделения фаз от концентрации ферми-квазичастиц, представлена на рис. 7. При $T \ll T_{\text{рф}}$ фазы разделены почти полностью⁵⁸. Разделение происходит не по всему объему, как в жидкости, а осуществляется так, что возникает смесь из маленьких кластеров каждой фазы. Размеры этих кластеров зависят от концентраций вакансионнов. Асимметричность кривой разделения фаз указывает на различное поведение вакансионнов при разных концентрациях ферми-квазичастиц в растворе, о чем свидетельствуют также экспериментальные факты^{59, 61}.

в) О структуре вакансий в растворе $\text{He}^3 - \text{He}^4$

Как показано в предыдущем параграфе, раствор $\text{He}^3 - \text{He}^4$ разделяется на две фазы при температурах $T < T_c$ ($T_c = 0,4$ К) и при концентрации $0 < c < 1$. Разделение при столь низких температурах указывает на то, что в этом кристалле существуют квазичастицы со специфическими поведением.

Поведение, например, вакансионно весьма чувствительно к системе ядерных спинов He^3 . Поэтому в присутствии вакансионно раствор имеет совершенно различные магнитные свойства в зависимости от того, какая ветвь кривой расслоения рассматривается — та ветвь, где $c \ll 1$, или та, на которой $c \sim 1$.

Рассмотрим достаточно широкую область температур, определяемую условием:

$$\varepsilon; J \ll T \ll \Delta, \tag{3.14}$$

где J — величина обменного взаимодействия ($J \sim 10^{-4}$ К), Δ — ширина вакансионной зоны ($\Delta \sim 10$ К), ε — характерная энергия взаимодействия атомов He^4 друг с другом.

В этой области температур вакансион на первой ветви кривой расслоения ведет себя следующим образом. Он вытесняет из области радиуса R атомы He^4 и полностью поляризует ядерные спины в этой области. Это происходит при концентрациях $10^{-4} \ll c < 1$. На другой ветви кривой расслоения при концентрациях $c \ll 1$ вакансион вытесняет атомы He^3 и делокализуется в области R_1 .

Появление упорядоченных макроскопических областей обусловлено тем, что для образования вакансионна требуется идеальная периодичность решетки. Это достигается вытеснением атомов либо He^4 , либо He^3 , в зависимости от относительной концентраций.

Минимальная работа, которая необходима для вытеснения атомов, например He^4 , равна ⁵⁶

$$\delta R = \Phi(n) - \Phi(0), \tag{3.15}$$

где

$$\Phi(n) = n\mu_0 + Tn \ln \frac{en}{N} + \psi(p, T), \tag{3.16}$$

$$\Phi(0) = n\mu_0 + n\mu', \tag{3.17}$$

μ' — химический потенциал растворенного вещества,

$$\mu' = T \ln \frac{n}{N} + \psi(p, T). \tag{3.18}$$

Аналогичным образом можно утверждать, что для вытеснения атомов He^3 минимальная работа равна

$$\delta R = cn_4 T, \tag{3.19}$$

c — концентрация атомов He^3 . Тогда в области сферы радиуса R возникает упорядоченное состояние, энергия которого равна

$$F = \varepsilon + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2MR^2} + \frac{4\pi}{3} R^3 n_3 T \ln 2 + c \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 n_3 T; \tag{3.20}$$

здесь ε_0 — энергия вакансионной зоны, третий член в этом выражении соответствует энергии упорядочения ядерных спинов атомов He^3 , а последний член — энергия вытеснения N_4 атомов He^4 из области радиуса R . На другой ветви кривой расслоения, т. е. на ветви, на которой концентрация $c \ll 1$, энергия области радиуса R_1 будет

$$F_1 = \varepsilon_0 + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2MR_1^2} + c \cdot \frac{4\pi}{3} R_1^3 n_4 T. \tag{3.21}$$

Из условий минимальности выражений (3.20) и (3.21) найдем радиусы соответствующих областей (рис. 8):

$$R = \left(\frac{\pi\Delta}{4T(\ln 2 + c)} \right)^{1/5} a, \quad (3.22)$$

$$R_1 = \left(\frac{\pi\Delta}{4Tc} \right)^{1/5} a. \quad (3.23)$$

Область концентраций, которая необходима для проявления указанного явления, найдем из условия, что радиус сферы должен быть достаточно

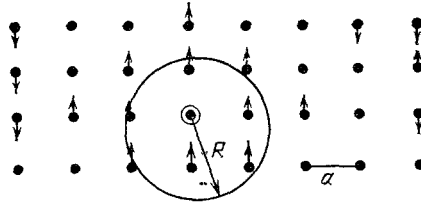


Рис. 8. Макроскопическая область радиуса R в растворе $\text{He}^3 - \text{He}^4$.

большим по сравнению с расстоянием между атомами, подлежащими вытеснению:

$$R \gg ac^{-1/3}. \quad (3.24)$$

Из выражений (3.22) — (3.24) легко видеть, что,

$$\left(\frac{T}{\Delta} \right)^{2/3} \ll c \ll 1 \quad (3.25)$$

— на начальной ветви кривой расслоения и

$$\left(\frac{T}{\Delta} \right)^{3/5} \ll c \ll 1 \quad (3.26)$$

— на другой ветви этой кривой, соответствующей температуре $T \approx 0,4$ К.

Возникновение упорядоченности в макроскопических областях радиусов R и R_1 приводит к заметным изменениям магнитных и термодинамических свойств твердого раствора $\text{He}^3 - \text{He}^4$.

г) Поглощение звука вакансиями

Пусть в растворе имеются вакансии концентрации c . Под действием звуковой волны с энергией $E_0^2 < \Delta$ и длиной волны $2\pi/k > R$ вакансии начнут колебаться и рассеивать энергию, взаимодействуя с решеткой.

В поле звуковой волны частоты ω и волновым вектором \mathbf{k} , направленного вдоль оси x , действует сила $F = F_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$, где \mathbf{r} — x -координата вакансии.

Энергия, поглощаемая за единицу времени вакансией, определяется средним значением $F\dot{x} = A$ (где \dot{x} — скорость вакансии). Учитывая, что подвижность вакансии определяется формулой³⁹ $v^{-1} \sim (a^2/\hbar) (T/\Delta)^{2/5}$, для энергии поглощения имеем выражение⁴⁸

$$A \sim N_3 \frac{k^2 \Delta^2 E_0^2}{\hbar^3} a^4 \left(\frac{T}{\Delta} \right)^{2/5}. \quad (3.27)$$

Коэффициент поглощения имеет следующий вид:

$$\alpha \sim \left(\frac{\Delta}{\hbar} \right)^3 \frac{a^2 \omega}{\hbar} \left(\frac{T}{\Delta} \right)^{2/5}. \quad (3.28)$$

Измерение этих величин в экспериментах по поглощению звука представляет определенный интерес.

Как показано в работе Андреева, Марченко и Мейеровича³⁸, наблюдавшийся в экспериментах рост температуры магнитного упорядочения с увеличением приложенного магнитного поля свидетельствует о возникновении ферромагнитно упорядоченных макроскопических областей вокруг вакансионных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, концепция квазичастиц, предложенная Андреевым и Лифшицем, в совершенстве описывает физическую картину, соответствующую квантовым кристаллам. Описание на языке квазичастиц оказывается столь плодотворным именно потому, что при низких температурах приходится иметь дело с не слишком большим числом типов движения и, следовательно, с не слишком большим числом квазичастиц. Это позволило нам рассматривать квантовый кристалл как разреженный газ квазичастиц в дискретном пространстве кристаллической решетки и применять метод И. М. Лифшица для исследования процесса рассеяния. Дискретность пространства оставляет своеобразный отпечаток на физической картине в целом. Квазичастицы после рассеяния друг с другом являются суперпозицией нескольких волн, число которых зависит от вида изоэнергетической поверхности. Выяснение такого вопроса в экспериментах, например, по квантовой диффузии, представляло бы существенный интерес.

Уникальным объектом является квантовый кристалл, содержащий нулевые вакансии^{1,3}. В нем возможны два сверхтекучих движения, связанные с течением квазичастиц и со смещением узлов решетки. При достаточно низких температурах такой кристалл обладает специфическими термодинамическими и гидродинамическими свойствами.

Своеобразное поведение имеют вакансии в твердых растворах He^3 — He^4 . На кривой разделения фаз появляются макроскопические области, приводящие к изменению термодинамического и магнитного состояний вещества⁴⁸. В таких системах возможны новые фазовые переходы.

Выражаю глубокую благодарность А. Ф. Андрееву и Л. П. Питаевскому за многократные полезные обсуждения и ценные замечания.

Ереванский государственный университет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А. Ф., Лифшиц И. М. — ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 2057.
2. Guyer R. A., Zane L. I. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 660.
3. Андреев А. Ф. — УФН, 1976, т. 118, с. 249.
4. Guyer R. A., Richardson R. C., Zane L. I. — Rev. Mod. Phys., 1971, v. 43, p. 532.
5. Widom A., Richards M. G. — Phys. Rev. Ser. A, 1972, v. 6, p. 1196.
6. Richards M. G., Pore J., Widom A. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 768.
7. Григорьев В. Н., Есельсон Б. Н., Михеев В. А., Шулман Ю. Е. — Письма ЖЭТФ, 1973, т. 17, с. 25.
8. Grigoriev V. N., Eselson B. N., Mikheev V. A., Slusarev V. A., St-hemeschnu M. S., Shul'man Yu. E. — J. Low Temp. Phys., 1973, v. 13, p. 65.
9. Григорьев В. Н., Есельсон Б. Н., Михеев В. А. — ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 321.
10. Leggett A. J. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1543.
11. Дзялошинский И. Е., Кондратенко П. С., Левченков В. С. — ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 1574, 2313.
12. Каган Ю. М., Максимов Л. А. — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 622.
13. Kagan Yu., Klinger M. I. — J. Phys. Ser. C, 1974, v. 7, p. 2791.
14. Андреев А. Ф., Мейерович А. Э. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1559.
15. Пушкарров Д. И. — ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 1755; Письма ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 751.
16. Huang W., Goldberg H. A., Guyer R. A. — Phys. Rev. Ser. B, 1975, v. 11, o. 3374.

17. Андреев А. Ф.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 2341.
18. Мейерович А. Э.— ЖЭТФ, 1972, т. 67, с. 747; ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 1477.
19. Guyer R. A.— Low Temp. Phys., 1972, v. 8, p. 427.
20. Минеев В. П.— ЖЭТФ, 1972, т. 63, с. 1822.
21. Шальников А. И.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1727.
22. Кешишев К. О., Межов-Деглин Л. П., Шальников А. И.— Письма ЖЭТФ, 1970, т. 12, с. 234.
23. Yamashita Y.— J. Phys. Soc. Japan, 1974, v. 37, p. 1210.
24. Landesman A., Winter J. M.— In: Low Temp. Physics LT-13.— N.Y.; Lnd.: Plenum Press, 1974.— V. 2, p. 73—78.
25. Richards M. G., Smith J. H., Tofts P. S., Mullin W. J.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 1545.
26. Андроникашвили Э. Л., Гачечиладзе И. А., Мелик-Шахназаров В. А.— ФНТ, 1975, т. 1, с. 635.
27. Greywall D. S.— Phys. Rev. Ser. B, 1975, v. 11, p. 4717.
28. Sokoloff J. B., Widom A.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 673.
29. Кешишев К. О., Шальников А. И.— ФНТ, 1975, v. 1, p. 590.
30. Sullivan N., Deville G., Landesman A.— Phys. Rev. Ser. B, 1975, v. 11, p. 1858.
31. Lifshits I. M.— Nuovo Cimento Suppl., 1956, v. 3, p. 716.
32. Лифшиц И. М., Варданян Г. А.— ДАН Арм. ССР, 1974, т. 58, с. 80.
33. Андреев А. Ф.— Письма ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 608.
34. Nosalow L. H.— J. Low Temp. Phys., 1976, v. 23, p. 605.
Stwalley W. G., Nosalow L. H.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 910.
35. Слюсарев В. А., Стржеменский М. А., Бурахович И. А.— ФНТ, 1977, т. 3, с. 100.
36. Suzuki M.— Progr. Theor. Phys., 1976, v. 56, p. 77.
37. Мейерович А. Э.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 485.
38. Андреев А. Ф., Марченкø В. И., Мейерович А. М.— Ibid., 1977, т. 26, с. 40.
39. Иорданский С. В.— Ibid., с. 183.
40. Richards M. G., Owers-Bradley J. R.— In: Proc. of Intern. Quantum Crystals Conference.— Colorado State University, 1977.— P. F-11.
41. Пятаевский Л. П.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 738.
42. Bretz M.— Цит. в ⁴⁰ сб.— P.F-1.
43. Пушкаров Д. И.— Письма ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 359.
44. Варданян Г. А.— ФТТ, 1978, т. 20, с. 1347; ДАН Арм. ССР, 1978, т. 17, с. 97.
45. Варданян Г. А.— ФТТ, 1978, т. 20, с. 321.
46. Варданян Г. А.— Изв. АН Арм. ССР. Сер. «Физика», 1978, т. 13, с. 356.
47. Андреев А. Ф., Паршин А. Я.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1511.
48. Анисимова О. П., Варданян Г. А.— ФТТ, 1979, т. 21, с. 573; ДАН Арм. ССР, 1978, т. 14, с. 255; Изв. АН Арм. ССР, 1978, т. 13, с. 489.
49. Варданян Г. А., Седракян Д. М.— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 1731.
50. Варданян Г. А., Саакян А. С.— ФТТ, 1981, т. 23, с. 2881.
51. Vardanian G. A.— Low Temp. Phys., 1983, v. 50, p. 516.
52. Варданян Г. А., Саакян А. С.— ФТТ, 1983, т. 25, вып. 5.
Vardanian G. A., Saakian A. S.— Phys. Lett. Ser. A, 1983, v. 93, No. 6.
53. Каганов М. И., Лифшиц И. М., Фикс В. Б.— ФТТ, 1964, т. 6, с. 2723.
54. Фейгельман М. В.— Письма ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 491.
55. Халатников И. М. Теория сверхтекучести.— М.: Наука, 1971.
56. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Наука, 1974; Статистическая физика.— М.: Наука, 1976.
57. Dash J. G. Films on Solid Surfaces.— N.Y.: Academic Press, 1975.
58. Mullin W. J.— Phys. Rev. Lett., 1968, v. 20, p. 254.
59. Edwards D. O., McWilliams A. S., Dount J. G.— Phys. Lett., 1962, v. 1, p. 218.
60. Косевич А. М. Основы механики кристаллической решетки.— М.: Наука, 1972.
61. Есельсон Б. Н., Григорьев В. Н., Иванцов В. Г., Рудавский Э. Я., Санникадзе Д. Г., Сербин И. А. Растворы квантовых жидкостей.— М.: Наука, 1973.
62. Канторович Л., Крылов В. Приближенные методы высшего анализа.— М.: Гостехиздат, 1940.— С. 157—179.
63. Пирадашвили И. Н.— ЖЭТФ, 1983, т. 84, с. 124.