

539.01

**КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СРЕДАХ С РАЗМНОЖЕНИЕМ,
РАСПАДОМ И ДИФФУЗИЕЙ****А. С. Михайлов, И. В. Упоров****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	79
2. Системы со случайным размножением и распадом	81
2.1. Сильные и слабые центры размножения	83
2.2. Порог взрывной неустойчивости для сильных центров	84
2.3. Порог взрывной неустойчивости для слабых центров	88
2.4. Роль редких кластеров	91
2.5. Кинетический переход типа «заселения среды»	96
2.6. Гауссовские флуктуации в скоростях распада и размножения	101
3. Процессы конкуренции во флуктуирующих средах	103
4. Диффузия в среде со случайно распределенными ловушками	108
5. Заключение	111
Цитированная литература	112

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все больший интерес привлекают исследования процессов в сильно неравновесных открытых системах потокового типа, поскольку в таких системах наблюдаются эффекты *самоорганизации* — образования макроскопических диссипативных структур.

Системы потокового типа связаны с внешним источником энергии, либо соединены с двумя термостатами, имеющими различную температуру. В результате для этих систем невозможна релаксация к состоянию теплового равновесия. Даже в установившемся состоянии сохраняется поток энергии, проходящий через систему и диссипируемый в окружающую среду.

Когда поток энергии слаб, отклонения от теплового равновесия малы. С увеличением потока энергии эти отклонения возрастают и в системе наблюдается последовательность неустойчивостей, ведущих к качественным перестройкам установившегося кинетического режима. Каждая такая перестройка представляет собой кинетический переход *), сопровождающийся установлением или усложнением порядка в открытой сильно неравновесной системе, т. е. понижением ее симметрии. Исходя из аналогии с соответствующими явлениями в равновесных системах, кинетические переходы иногда характеризуют как неравновесные фазовые переходы. Исследование этих процессов, а также возникающих упорядоченных структур, составляет задачу современной теории самоорганизации.

Существует тесная связь между эффектами самоорганизации и зарождением турбулентности. Как впервые отмечал Л. Д. Ландау¹, переход от ламинарного к турбулентному течению может занимать определенный интервал значений параметра, характеризующего интенсивность подвода энер-

*) Термин «кинетический переход» был введен в работах ^{3, 4}.

гии. В этом интервале течение обладает регулярной (периодической или квазипериодической по времени) структурой, устанавливающейся вследствие нелинейного ограничения роста амплитуд первых неустойчивых мод. Истинная турбулентность, требующая статистического описания, возникает при последовательном усложнении регулярных структур и достижении экспоненциальной неустойчивости устанавливающейся структуры по отношению к сколь угодно слабым возмущениям (см. ²). Для любого квазипериодического режима подобная неустойчивость отсутствует, поэтому механизм Ландау не позволяет рассмотреть переход к подлинно турбулентному режиму *). Идеи Ландау легли, однако, в основу развиваемого сегодня подхода к изучению эффектов самоорганизации.

С общей точки зрения самоорганизация есть свойство открытых потоковых систем на предтурбулентной стадии, когда квазиравновесный (ламинарный) режим уже потерял устойчивость, но макроскопическая хаотизация режима (переход к истинной турбулентности) еще не наступила. Отметим в этой связи аналогию между описанием зарождения турбулентности в механизме Ландау и сформулированной в работах Л. Д. Ландау теорией равновесных фазовых переходов второго рода. Детальное обсуждение такой аналогии проведено Г. Хакеном ⁵.

Наиболее важным примером самоорганизации среди физических систем служит лазерная генерация. Переход от шумовой к когерентной генерации с увеличением уровня накачки может быть интерпретирован в качестве кинетического (или неравновесного фазового) перехода ⁵. В гидродинамике к эффектам самоорганизации относятся образование регулярной структуры конвективных течений в задаче Бенара ⁶, вихри Тейлора ⁷ и т. п. Системы с химическими реакциями характеризуются весьма разнообразными явлениями самоорганизации (см. ⁸). Подробнее всего изучались автоволновые структуры при реакции Белоусова — Жаботинского (см. ⁹).

Базовые математические модели самоорганизации едины для широкого класса физических, химических и биологических систем. Их исследование, проводимое с помощью методов современной теоретической физики, иногда выделяют в качестве самостоятельного научного направления, для которого Г. Хакеном было предложено название «синергетика» (от греческого *synergeia* — совместное действие). К задачам синергетики относят изучение критических явлений (т. е. неустойчивостей и кинетических переходов), нелинейных волн и стационарных структур, а также автостохастичности при кооперативном поведении сильно неравновесных систем различного происхождения.

Настоящий обзор посвящен изучению критических явлений — взрывной неустойчивости и кинетического перехода типа «заселения среды» в неравновесных системах с размножением, распадом и диффузией. Рассмотрение проведено на примере ряда простых моделей, которые благодаря своей общности представляются особенно важными. Мы рассматриваем ситуацию, когда размножение (описываемое схемой $X + A \rightarrow 2X$) локализовано внутри определенных пространственных областей (центров размножения), которые случайно и независимо возникают в среде в произвольные моменты времени, обладая одинаковой интенсивностью, формой и длительностью жизни. Одновременно в среде идет однородный процесс распада способного к размножению вещества (эквивалентом этого процесса может быть захват реакционно способных частиц распределенными по среде ловушками).

Мы не конкретизируем природу систем, изучаемых в настоящем обзоре. Эффекты размножения наблюдаются при ядерных реакциях расщепления ¹¹, при цепных химических реакциях ¹², в явлениях автокатализа ⁹, в поведении биологических сообществ ¹³ и т. п. Каждому отдельному случаю свойственна

*) Существенный прогресс в понимании свойств такого перехода намечился лишь в последние годы в связи с изучением странных аттракторов (см. ^{2, 6, 10}).

определенная специфика. Нам представляется, однако, важным акцентировать внимание на общих типичных свойствах этих объектов.

При наличии размножения в среде может развиваться взрывная неустойчивость, заключающаяся в неограниченном росте со временем количества размножающегося вещества. Порог взрывной неустойчивости определяется конкуренцией между процессами размножения и распада.

Если скорости размножения или распада флуктуируют, а размножающееся вещество способно к диффузии, расчет порога взрывной неустойчивости становится сложной задачей, близкой к кругу вопросов теории неупорядоченных сред и перколяционной теории¹⁴⁻¹⁶.

Фактически, как отмечалось в работе¹⁷, переход через порог взрывной неустойчивости может рассматриваться как эффект *динамической* перколяции, заключающейся в смене временной асимптотики средней по объему плотности $\bar{n}(t)$ размножающегося вещества при $t \rightarrow \infty$. В последнее время были предложены дискретные модели «направленной перколяции»¹⁸, в которых возможно сходное поведение. Мы обсуждаем связь с этими моделями в разделе 2.2.

Взрывная неустойчивость может быть подавлена нелинейным механизмом запорогового ограничения. В этом случае выше порога в среде устанавливается отличная от нуля плотность размножающегося вещества, т. е. происходит «заселение» среды этим веществом.

Рассматриваемая нами система является открытой и неравновесной из-за наличия распада и благодаря притоку энергии извне к центрам, где осуществляется размножение вещества. Поэтому мы вправе интерпретировать заселение среды выше порога взрывной неустойчивости как кинетический переход в такой системе. Анализ показывает (см. раздел 2.5), что по ряду характеристик (критическое замедление, обращение в бесконечность корреляционного радиуса) этот эффект напоминает фазовый переход второго рода в равновесных системах. В то же время флуктуационное поведение, обусловленное внешним воздействием, весьма своеобразно.

Помимо критических явлений в средах со случайными центрами размножения, в обзоре обсуждены (гл. 3) особенности процесса конкуренции во флуктуирующих средах. Эффекты конкуренции — важное свойство самоорганизующихся систем. Фактически всякое спонтанное установление макроскопической регулярной структуры есть следствие конкуренции между неустойчивыми нарастающими модами; «выживающая» мода подавляет остальные и навязывает соответствующую структуру системе. Особую роль эффекты конкуренции играют в эволюции биологических и химических систем.

Задача о диффузионном блуждании в среде со случайно распределенными ловушками рассмотрена в гл. 4.

2. СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМ РАЗМНОЖЕНИЕМ И РАСПАДОМ

В простейшем случае подобная система описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{n} = -\alpha n + f(t)n, \quad (2.1)$$

в котором α — постоянная скорость распада, а $f(t)$ — случайно варьирующаяся со временем скорость размножения с заданными статистическими характеристиками.

Если средняя по ансамблю реализаций плотность вещества $\langle n(t) \rangle$ неограниченно возрастает со временем, мы будем говорить, что для системы (2.1) превышен порог взрывной неустойчивости. Величину $\langle n(t) \rangle$ можно рассчитать путем прямого интегрирования уравнения (2.1):

$$\langle n(t) \rangle = n_0 e^{-\alpha t} \left\langle \exp \left(\int_0^t f(t') dt' \right) \right\rangle. \quad (2.2)$$

Последний сомножитель в этом выражении непосредственно связан с важной характеристикой случайного процесса $f(t)$ — его производящим функционалом

$$\Phi[\theta(t)] = \left\langle \exp \left(\int_0^t f(t') \theta(t') dt' \right) \right\rangle. \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.3) и (2.2), мы получаем

$$\langle n(t) \rangle = n_0 e^{-\alpha t} \Phi[1]. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) решает задачу расчета порога взрывной неустойчивости для произвольной случайно варьирующейся скорости размножения. Предположим, например, что процесс размножения представляет собой наложение независимых «вспышек» длительности τ_0 и интенсивности J , возникающих в случайные моменты времени:

$$f(t) = \sum_j J \sigma(t - t_j), \quad (2.5)$$

где $\sigma(\tau) = 1$ при $0 < \tau < \tau_0$ и $\sigma(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ и $\tau > \tau_0$.

Если m — среднее число «вспышек» в единицу времени, производящий функционал пуассоновского случайного процесса (2.5) имеет вид (см. ¹⁹):

$$\Phi[\theta(t)] = \exp \left\{ -m \int_0^t \left[1 - \exp \left(J \int_0^{t'} \sigma(t' - t'') \theta(t'') dt'' \right) \right] dt' \right\}. \quad (2.6)$$

Подставляя в (2.6) $\theta(t) \equiv 1$, мы находим значение $\Phi[1]$ и получаем, таким образом, закон возрастания со временем средней по ансамблю плотности

$$\langle n(t) \rangle = n_0 \exp [(m(e^{J\tau_0} - 1) - \alpha)t]. \quad (2.7)$$

Порог взрывной неустойчивости достигается, следовательно, при среднем числе «вспышек» за единицу времени, равном

$$m_{кр} = \alpha (e^{J\tau_0} - 1)^{-1}. \quad (2.8)$$

При $J\tau_0 \ll 1$ «вспышки» размножения являются слабыми. Как видно из (2.8), в этом случае $m_{кр} = \alpha/J\tau_0$. Такое выражение для порога нетрудно получить, приравняв среднюю скорость размножения $\bar{f} = mJ\tau_0$ и скорость распада α .

С другой стороны, в обратном предельном случае сильных «вспышек» ($J\tau_0 \gg 1$) мы имеем $m_{кр} = \alpha e^{-J\tau_0}$. Это отвечает приравниванию относительного прироста вещества $e^{J\tau_0}$ за одну «вспышку», умноженному на число «вспышек» m в единицу времени, и скорости распада α .

Значительная часть обзора посвящена обсуждению расчетов порога взрывной неустойчивости для систем, обобщающих модель (2.1) на случай распределенных систем с диффузией (см. ²⁰⁻²²).

Предположим, что в среде возможны процессы распада и размножения некоторого вещества, причем скорость распада α однородна в пространстве и постоянна во времени, а размножение происходит лишь внутри определенных центров размножения, которые случайно возникают во времени в случайных точках среды, но имеют одинаковую форму, интенсивность и продолжительность жизни. Соответствующей математической моделью является уравнение

$$\dot{n} = -\alpha n + f(r, t) n + D \Delta n, \quad (2.9)$$

где n — плотность вещества, D — коэффициент его диффузии.

Флуктуирующее поле $f(r, t)$ задается суммой расположенных в случайных точках (r_j, t_j) одинаковых импульсов $g(r, t)$:

$$f(r, t) = \sum_j g(r - r_j; t - t_j). \quad (2.10)$$

Среднее число импульсов, приходящихся в единицу времени на единицу объема, постоянно и равно m . Функция $g(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$g(\mathbf{r}, t) = J\chi(\mathbf{r})\sigma(t). \quad (2.11)$$

Величина J характеризует интенсивность центра размножения, функция $\chi(\mathbf{r})$ быстро спадает до нуля при $r > r_0$, так что r_0 дает пространственный размер отдельного центра; $\chi(0) = 1$. Длительность жизни центра равна τ_0 . Функция $\sigma(t)$ определена в (2.5).

Ниже мы часто пользуемся безразмерной пространственно-временной концентрацией центров размножения c , определяемой как

$$c = mr_0^d \tau_0, \quad (2.12)$$

где d — размерность среды.

В зависимости от величины относительного прироста плотности на отдельном центре все центры размножения можно подразделить на сильные и слабые.

2.1. Сильные и слабые центры размножения

Прирост плотности на отдельном центре размножения подчиняется уравнению

$$-\dot{n} = -D\Delta n - J\chi(\mathbf{r})n, \quad 0 \leq t \leq \tau_0, \quad (2.1.1)$$

которое формально совпадает с уравнением Шредингера с мнимым временем и потенциалом $U = -J\chi(\mathbf{r})$. Его общее решение есть

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_i C_i e^{\lambda_i t} \varphi_i(\mathbf{r}) + \int C(\lambda) e^{\lambda t} \varphi_\lambda(\mathbf{r}) d\lambda, \quad (2.1.2)$$

где суммирование ведется по дискретному, а интегрирование — по непрерывному спектру линейного оператора

$$\hat{L} = D\Delta + J\chi(\mathbf{r}). \quad (2.1.3)$$

Для центров размножения ($J > 0$) собственные значения $\{\lambda_i\}$, принадлежащие дискретному спектру, положительны. Им соответствуют (ср. (2.1.1)) уровни отрицательной энергии, отвечающие связанным состояниям в «потенциальной яме» $U(\mathbf{r}) = -J\chi(\mathbf{r})$.

Пусть λ_0 — максимальное из имеющихся собственных значений дискретного спектра. Мы будем называть центры размножения *сильными*, если $\lambda_0 \tau_0 \gg 1$, и *слабыми*, если $\lambda_0 \tau_0 \ll 1$. Как видно из общего решения (2.1.2), прирост вещества на сильном центре экспоненциально велик *).

Значение λ_0 можно связать с параметрами J и r_0 , характеризующими свойства отдельного центра. Для этого можно воспользоваться аналогией с уравнением Шредингера и учесть, что λ_0 отвечает наиболее глубокому уровню в потенциальной яме $U = -J\chi$. Как известно (см. ²³), в глубокой яме ($J \gg D/r_0^2$) нижний уровень имеет порядок $\lambda_0 \sim J$. В обратном предельном случае ($J \gg \frac{D}{r_0^2}$), отвечающем мелкой потенциальной яме, оценка для λ_0 зависит от размерности среды d . Для одномерной среды

$$\lambda_0 \sim J \left(\frac{Jr_0^2}{D} \right), \quad d=1, \quad (2.1.4)$$

для двумерной

$$\lambda_0 \sim \frac{D}{r_0^2} \exp \left(-\frac{\nu D}{Jr_0^2} \right), \quad \nu \sim 1, \quad d=2, \quad (2.1.5)$$

*) Заметим, что поскольку величина $\lambda_0 \tau_0$ стоит в показателе экспоненты, центры оказываются интенсивными даже при $\lambda_0 \tau_0 \approx 3-4$.

Оценим величину v . Она приблизительно равна произведению времени τ^* , в течение которого приращение плотности заметно на среднем фоне, на объем пространственной области, занимаемой приращением $n(r, t)$ к этому времени. Характерный объем, занимаемый приращением плотности ко времени τ^* , определяется длиной диффузии за это время, т. е. величиной $(D\tau^*)^{1/2}$. С учетом этого замечания перепишем неравенство (2.2.11) в виде

$$m \ll \frac{1}{\tau^*} (D\tau^*)^{-d/2}. \quad (2.2.12)$$

Для приближенного нахождения v рассмотрим закон изменения плотности в середине пятна со временем. По окончанию существования центра в его середине приращение плотности примерно равно

$$\delta n_0 \sim \bar{n} e^{\lambda_0 \tau_0}, \quad (2.2.13)$$

а размер образовавшегося пятна r_1 определяется радиусом локализации собственной функции $\varphi_0(r)$. После прекращения действия центра пятно начинает расплываться по диффузионному закону:

$$\delta n(r, t) = \int G_d(r - r', t) \delta n(r', 0) dr'. \quad (2.2.14)$$

Поэтому изменение плотности в центре ядра со временем можно оценить как

$$\delta n(t) \sim \frac{r_1^d \delta n_0}{(4\pi Dt)^{d/2}} \sim \bar{n} \frac{r_1^d e^{\lambda_0 \tau_0}}{(4\pi Dt)^{d/2}}. \quad (2.2.15)$$

Пятно заметно на среднем фоне, пока $\delta n(t) \gtrsim \bar{n}$. Исходя из этого условия, мы получаем оценку

$$\tau^* \sim \frac{D}{r_1^2} \exp\left(\frac{2\lambda_0 \tau_0}{d}\right). \quad (2.2.16)$$

Подставляя ее в (2.2.12), заключаем, что взаимным влиянием центров размножения друг на друга можно пренебречь, если

$$m \ll \frac{D}{r_1^{2+d}} \exp\left[-\left(1 + \frac{2}{d}\right) \lambda_0 \tau_0\right]. \quad (2.2.17)$$

Проделав простые преобразования, нетрудно убедиться, что найденное условие эквивалентно неравенству (2.2.10).

Цель проводимого нами рассмотрения — расчет пороговой концентрации центров размножения. Сравнивая (2.2.10) и (2.2.3), мы видим, что кластеры не играют существенной роли в формировании порога взрывной неустойчивости, если выполнено соотношение $\alpha \ll \alpha^*$, где

$$\alpha^* = \frac{D}{r_1^2} \exp\left(-\frac{2}{d} \lambda_0 \tau_0\right). \quad (2.2.18)$$

С увеличением скорости распада α вклад от кластеров из двух центров размножения нарастает. Выражение для порога взрывной неустойчивости в случае сильных центров, учитывающее поправку за счет парных кластеров, имеет при $\alpha \ll \alpha^*$ вид

$$c_{кр} = c_{кр}^{(0)} \left[1 - \gamma_d \left(\frac{\alpha}{\alpha^*} \right)^{d/(d+2)} \right], \quad (2.2.19)$$

где

$$\gamma_d = \begin{cases} \frac{1}{6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), & d=1, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{8}, & d=2, \\ \frac{2}{5} \Gamma\left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^{2/5}, & d=3, \end{cases} \quad (2.2.20)$$

а $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Если $\alpha \geq \alpha^*$, порог существенно понижается по сравнению с $\kappa_{\text{кр}}^{(0)}$. Основную роль в его определении играют тогда кластеры из большого числа центров размножения.

Как уже отмечалось во введении, существует сходство между задачей о расчете порога взрывной неустойчивости и вопросами теории перколяции. Наиболее близкой в данном случае является, по-видимому, модель «направленного протекания»¹⁸. Согласно этой модели, среду образуют расположенные в узлах правильной решетки элементы, способные пребывать в состоянии покоя или возбуждения. Если в данный момент времени элемент находится в возбужденном состоянии, то в следующий (дискретный) момент времени он возвращается в исходное состояние покоя, но может при этом с вероятностью p возбудить каждый из своих ближайших соседей по решетке. В результате разыгрывается случайный процесс, напоминающий распространение инфекции с размножением ее переносчиков. Ясно, что когда вероятность p передачи возбуждения очень мала, число возбужденных элементов будет убывать со временем. В обратном пределе, когда вероятность передачи возбуждения близка к единице, число возбужденных элементов неограниченно возрастает со временем. Критическое значение вероятности передачи возбуждения p_c , при котором появляется конечная вероятность неограниченного роста числа возбужденных элементов при одном исходном возбужденном элементе, соответствует перколяционному порогу.

Очевидно, что критическое значение p_c зависит от числа ближайших соседей для заданной решетки, т. е. от ее координационного числа z . Чем большее число элементов находится в контакте с «зараженным», тем выше вероятность размножения «инфекции». Отметим, что координационное число возрастает с увеличением размерности d .

В пределе высоких координационных чисел для расчета перколяционного порога может быть использовано приближение среднего поля. Допустим, что в n -й момент времени доля элементов среды, находившихся в возбужденном состоянии, составляет f_n . Если число ближайших соседей z у каждого элемента среды велико, можно считать, что среди его соседей в n -й момент времени имелось zf_n возбужденных элементов. Следовательно, вероятность обнаружить этот элемент в возбужденном состоянии в следующий $(n+1)$ -й момент времени равняется величине $1 - (1-p)^{zf_n}$, поскольку, как мы предполагаем, вероятность передачи возбуждения от каждого из возбужденных соседних элементов независима. Рассчитанная нами величина дает долю элементов среды, находящихся в возбужденном состоянии в момент времени $(n+1)$, т. е.

$$f_{n+1} = 1 - (1-p)^{zf_n}. \quad (2.2.21)$$

Выше порога перколяции величина f_n должна стремиться к отличному от нуля конечному пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f^*, \quad (2.2.22)$$

который дает долю возбужденных элементов в установившемся режиме, тогда как ниже порога перколяции $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$.

Исследуя точечное отображение (2.2.21), нетрудно показать, что его аттракторами могут быть только стационарные точки, причем потеря устойчивости стационарной точки $f = 0$ и рождение новой устойчивой стационарной точки $f = f^* > 0$ происходит при прохождении вероятности p через значение

$$p_c = 1 - \exp\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \dots, \quad (2.2.23)$$

определяющее перколяционный порог.

При уменьшении координационного числа z приближение среднего поля теряет применимость. В этом случае становятся существенными флуктуационные эффекты¹⁸.

Выражение (2.2.3) для порога взрывной неустойчивости в модели (2.9) — (2.10) получено в приближении среднего поля, поскольку при его выводе предполагалось, что прирост вещества на каждом из центров размножения начинается со среднего по объему значения плотности в соответствующий момент времени. При малых скоростях распада α это приближение оправдано, так как критическая концентрация центров размножения мала (выполнено условие (2.2.10)) и следующий по времени центр размножения возникает вне области, сильно возмущенной одним из предыдущих центров.

Когда скорость распада α возрастает, величина критической концентрации центров размножения также растет. Первую флуктуационную поправку к порогу взрывной неустойчивости (2.2.3), определяемому в приближении среднего поля, дает учет вклада от парных кластеров центров размножения.

При прохождении скорости распада α через значение α^* осуществляется переход к режиму сильных флуктуаций, в котором порог взрыва определяется возникновением бесконечных временных цепочек близких центров размножения.

Эти результаты можно интерпретировать как уменьшение эффективного координационного числа задачи с увеличением скорости распада в среде. Подобная интерпретация подтверждается анализом роли размерности среды для рассматриваемой задачи. Как известно, координационное число растет с ростом размерности d . Поэтому следует ожидать, что для сред с высокой размерностью всегда будет справедливо приближение среднего поля.

Действительно, как следует из (2.2.18), критическое значение скорости распада α^* , определяющее переход от режима среднего поля к сильно флуктуационному режиму, растет с увеличением размерности среды d . Заметим также, что при очень высоких *) размерностях среды $d \gg 1$ все центры становятся долгоживущими, поскольку соответствующее условие имеет вид $\tau_0 \gg r_0^2/Dd$. Величина J^* , фигурирующая в критерии $J \gg J^*$, который определяет сильные центры размножения, также зависит от размерности среды: $J^* \sim dD/r_0^2$ при $d \gg 1$. Если зафиксировать интенсивность центров J и их размер r_0 , то, благодаря росту J^* при увеличении размерности d , мы всегда приходим к пределу слабых центров размножения.

2.3. Порог взрывной неустойчивости для слабых центров

При расчете порога взрывной неустойчивости в случае центров слабой интенсивности ($J \ll J^*$) можно воспользоваться, в качестве первого приближения, условием равенства средней по объему скорости размножения $\bar{f}$ и скорости распада α . Поскольку средняя скорость размножения есть

$$\bar{f} = m \int g(\rho, \tau) d\rho d\tau = cJ\xi_1, \quad (2.3.1)$$

где

$$\xi_1 = r_0^{-d} \int \chi(\rho) d\rho, \quad (2.3.2)$$

этот способ дает следующее значение безразмерной критической концентрации центров размножения:

$$c_{\text{кр}}^{(0)} = \frac{\alpha}{\xi_1 J}. \quad (2.3.3)$$

*) Разумеется, в физических задачах размерность среды не выше трех. Рассмотрение диффузии в средах более высокой размерности не является, однако, чисто формальным. Задачи о диффузии в пространствах высокой размерности возникают, например, в математических моделях биологической эволюции.

Сразу же подчеркнем, что в действительности выражение (2.3.3) далеко не всегда может служить разумным первым приближением к истинной величине порога взрывной неустойчивости. Корреляционные статистические эффекты понижают порог взрыва, причем это понижение может оказаться весьма существенным. В настоящем разделе мы установим пределы применимости выражения (2.3.3) и вычислим первые поправки к нему в случаях, когда они малы.

Как следует из (2.1), изменение средней по объему плотности со временем подчиняется уравнению

$$\dot{\bar{n}} = -(\alpha - \bar{f}) \bar{n} + \langle \delta f \delta n \rangle, \quad (2.3.4)$$

где $\delta f = f - \bar{f}$ и $\delta n = n - \bar{n}$. Таким образом, приблизительный результат (2.3.3) соответствует пренебрежению корреляцией между флуктуациями плотности δn и скорости размножения δf .

Изменение δn со временем описывается стохастическим уравнением

$$\dot{\delta n} = -(\alpha - \bar{f}) \delta n + D \Delta \delta n + \delta f(\mathbf{r}, t) \bar{n} + (\delta f \delta n - \langle \delta f \delta n \rangle). \quad (2.3.5)$$

Поскольку вблизи порога средняя плотность $\bar{n}$ нарастает или убывает со временем очень плавно по сравнению с характерными «микроскопическими» временами, такими как длительность жизни отдельного центра, величину $\bar{n}$ в уравнении (2.3.5) можно считать постоянной.

Для вычисления поправок к выражению (2.3.3) для порога взрывной неустойчивости нам необходимо рассчитать с помощью (2.3.5) величину коррелятора $\langle \delta f \delta n \rangle$ при фиксированном $\bar{n}$. Последовательный способ ее расчета дает диаграммная техника теории возмущений для случайных процессов, разрабатывавшаяся в ²⁴⁻²⁷. Отсылая читателя за выяснением деталей к работе ²², мы изложим ниже главные особенности применения этой техники к рассматриваемой задаче *).

В уравнении (2.3.5) можно перейти к фурье-компонентам флуктуирующих полей, в результате чего оно приобретает вид

$$\delta n_q = G_q^0 [\bar{n} \delta f_q + \int (\delta f_{q-q'} \delta n_{q'} - \langle \delta f_{q-q'} \delta n_{q'} \rangle) dq'], \quad (2.3.6)$$

где использовано обозначение $q \equiv (\omega, \mathbf{k})$, и

$$G_q^0 = (-i\omega + \alpha - \bar{f} + Dk^2)^{-1}. \quad (2.3.7)$$

Формальное решение интегрального уравнения (2.3.6) дается бесконечным итерационным рядом по степеням δf_q . Домножая этот бесконечный ряд на $\delta f_{q'}$ и производя усреднение по ансамблю функций δf , можно получить выражение для коррелятора $\langle \delta n_q \delta f_{q'} \rangle$ и, после интегрирования, для $\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta n(\mathbf{r}, t) \rangle$. В графической форме первые несколько членов бесконечного ряда для этого коррелятора имеют вид

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta n(\mathbf{r}, t) \rangle = \bar{n} \left\{ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \dots \right\}. \quad (2.3.8)$$

Тонкая сплошная линия со стрелкой обозначает функцию G_q^0 , штриховые линии со стоящими на них точками — неприводимые корреляторы (кумулянты) случайных полей δf_q . В отличие от гауссовских случайных полей, для которых все корреляторы высших порядков распадаются на парные,

*) Получаемые результаты можно, по-видимому, воспроизвести и с помощью функциональных методов (формулы Фуруцу — Новикова ²⁸).

пуассоновское случайное поле (2.10) обладает ненулевыми кумулянтами всех порядков. Поэтому в одной точке могут сходиться («спариваться») сразу несколько штриховых линий.

Особенность ряда (2.3.8) состоит также в том, что он не содержит слабо-связанных диаграмм, распадающихся при рассечении одной из линий. Такие диаграммы выпадали при усреднении благодаря второму подынтегральному члену в (2.3.6).

Обычным образом определяя «собственно-энергетическую» функцию Σ_q и функцию Грина G_q , связанные уравнением Дайсона

$$\langle \delta f \delta n \rangle = \bar{n} \Sigma_0, \quad G_q^{-1} = G_q^{0-1} - \Sigma_q, \quad (2.3.9)$$

и производя с помощью функции G_q частичное суммирование диаграмм в ряде для Σ_q , мы приходим к графическому выражению

$$\Sigma_q = \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \text{[diagram 3]} + \text{[diagram 4]} + \dots \quad (2.3.10)$$

Порог взрывной неустойчивости дается уравнением

$$\alpha = \bar{f} + \Sigma_0. \quad (2.3.11)$$

Таким образом, величина Σ_0 определяет флуктуационный сдвиг порога взрывной неустойчивости.

Воспользовавшись уравнением Дайсона (2.3.9) и формулой (2.3.7), мы находим выражение для функции Грина:

$$G_q^{-1} = -i\omega + \alpha - \bar{f} + Dk^2 - \Sigma_q. \quad (2.3.12)$$

Видно, что на пороге функция Грина имеет полюс при $q = 0$.

Исследование вклада различных диаграмм в ряде (2.3.10) приводит к следующим результатам. Все диаграммы с неприводимыми корреляторами выше 2-го порядка (вторая и четвертая в (2.3.10)) малы по параметру J/J^* , характеризующему слабость центров размножения. Более «опасными» являются диаграммы с пересечением штриховых линий (третья в (2.3.10)). Их вклады малы по сравнению со вкладом от первой диаграммы при выполнении условия

$$c(J\tau_0) \frac{J}{J^*} \ll 1, \quad (2.3.13)$$

накладывающего ограничение на концентрацию центров размножения.

С учетом низшей флуктуационной поправки к порогу взрывной неустойчивости, определяемой первой из диаграмм в ряде для Σ_q , выражение для критической концентрации центров размножения имеет вид

$$c_{кр} = c_{кр}^0 \left(1 - v_d \frac{J}{J^*} \right), \quad (2.3.14)$$

где численный коэффициент v_d равен *)

$$v_d = \begin{cases} \frac{\zeta_2}{2\zeta_1} & \text{при } r_0 \gg l, \quad \frac{\zeta_1}{4} & \text{при } r_0 \ll l, \quad d=1, \\ \frac{\zeta_2}{2\zeta_1} & \text{при } r_0 \gg l, \quad \frac{\zeta_1}{4\pi} & \text{при } r_0 \ll l, \quad d=2, \\ \frac{\zeta_2}{2\zeta_1} & \text{при } r_0 \gg l, \quad \frac{\zeta_1}{4\pi^2} & \text{при } r_0 \ll l, \quad d=3, \end{cases} \quad (2.3.15)$$

а $c_{кр}^{(0)}$ определяется формулой (2.3.3), $l = \sqrt{D\tau_0}$.

*) Значения (2.3.15) получены для модели, в которой предполагается, что интенсивность отдельного центра размножения не остается постоянной в течение времени τ_0 , а плавно спадает по закону $\exp(-t/\tau_0)$ с момента зарождения центра.

Учетом одной лишь низшей поправки можно ограничиться, если критическая концентрация $c_{кр}^{(0)}$ удовлетворяет условию (2.3.13). Подстановка (2.3.14) в (2.3.13) дает нам ограничение

$$\alpha \tau_0 \frac{J}{J^*} \ll 1, \quad (2.3.16)$$

накладываемое на скорость распада α .

Когда условие (2.3.13) нарушено, т. е. $\alpha \gtrsim J^*/J\tau_0$, вклады от всех диаграмм с пересечениями штриховых линий имеют ту же, либо даже более высокую величину, что и вклад от первой из диаграмм *). В этой ситуации определение порога взрывной неустойчивости требовало бы суммирования всех диаграмм с пересечениями, что представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Можно, однако, утверждать, что при $\alpha \gtrsim J^*/J\tau_0$ должно наблюдаться существенное понижение порога взрывной неустойчивости по сравнению со значением $c_{кр}^{(0)}$, получаемым из простейшего рассмотрения.

В следующем разделе мы покажем, что резкое понижение порога взрыва при нарушении неравенства (2.3.16) связано с тем, что в этом случае основную роль в формировании взрывной неустойчивости начинают играть кластеры слабых центров размножения, каждый из которых ведет себя аналогично отдельному сильному центру.

2.4. Роль редких кластеров

Условие (2.3.16), обеспечивающее малость флуктуационного понижения порога взрывной неустойчивости, может быть получено независимым образом — с привлечением результатов теории спектра уравнения Шредингера со случайным потенциалом. В ходе такого рассмотрения удастся не только выяснить природу резкого понижения порога неустойчивости, но и проанализировать различия во флуктуационном поведении для сред разной размерности.

Допустим, что в объеме ΔV в интервале времени Δt имеется изолированный кластер слабых центров размножения. Прирост вещества на нем определяется тогда уравнением

$$\dot{n} = f(\mathbf{r}, t) n + D \Delta n, \quad (2.4.1)$$

в котором $f(\mathbf{r}, t)$ — поле скорости размножения для выделенного кластера.

Как уже отмечалось в разделе 2.1, подобное уравнение можно интерпретировать как уравнение Шредингера с мнимым временем и потенциалом $U(\mathbf{r}, t) = -f(\mathbf{r}, t)$ при подстановке $\hbar^2/2m \rightarrow D$. Поскольку для кластеров центров размножения $f(t) \geq 0$, отвечающий таким кластерам потенциал представляет собой потенциальную яму, меняющуюся со временем. В каждый фиксированный момент времени можно рассчитать спектр энергий $E_l(t)$ связанных состояний в этой потенциальной яме, который дает *положительные* собственные значения $\lambda_l(t) = -E_l(t)$ для оператора

$$\hat{L} = D\Delta + f(\mathbf{r}, t). \quad (2.4.2)$$

Так как время в уравнении (2.4.1) — «мнимое» по сравнению с уравнением Шредингера, быстрее всего нарастает тот вклад в плотность $n(\mathbf{r}, t)$, который соответствует самому глубокому уровню в потенциальной яме, т. е. максимальному значению $\lambda(t) = \max \lambda_l(t)$.

Чтобы грубо охарактеризовать кластер, для него можно указать максимальное, усредненное по времени значение λ и время жизни τ . Если $\lambda\tau \ll 1$, такой кластер остается слабым и вклад от него учитывается первыми членами

) Отметим, что сама по себе поправка от первой диаграммы, как видно из (2.3.14), всегда мала при выполнении условия $J/J^ \ll 1$.

теории возмущений, что ведет к формуле (2.3.14). С другой стороны, при $\lambda\tau \gg 1$ прирост вещества на кластере экспоненциально велик.

Заметим, что в последнем случае кластер обязан состоять из большого числа слабых центров размножения, локализованных в малой пространственно-временной области. Условие $\lambda\tau \gg 1$ можно записать также в виде $\tau \gg \lambda^{-1}$, откуда видно, что потенциал $U(\mathbf{r}, t) = -f(\mathbf{r}, t)$ для такого кластера является медленно меняющейся функцией времени по сравнению с обратной «частотой» λ^{-1} . Поэтому справедливо адиабатическое приближение²³ и полный прирост вещества на кластере равен

$$\Delta N = n(0) \exp \int_0^{\Delta t} \lambda(\tau) d\tau. \quad (2.4.3)$$

Если ввести характерный параметр

$$s = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) dt, \quad (2.4.4)$$

описывающий индивидуальный кластер, выражение (2.4.3) можно представить как $\Delta N = n(0) e^s$, где $n(0)$ — среднее значение плотности в среде в момент, непосредственно предшествовавший возникновению данного кластера.

Пусть $p = p(s)$ есть вероятность того, что в единице объема в единицу времени в среде возникает сильный кластер с параметром s . Тогда средний прирост плотности на сильных кластерах за единицу времени составляет

$$\overline{\Delta n} = \int \Delta N(s) p(s) ds. \quad (2.4.5)$$

Средняя скорость прироста Q поэтому есть

$$Q \sim \int e^s p(s) ds. \quad (2.4.6)$$

Порог взрывной неустойчивости, определяемый из условия равенства скорости распада α и полной скорости прироста вещества, в которую вносят вклад $\bar{f}$ и Q , дается выражением (2.3.14), если $Q \ll \bar{f}$.

В выражение (2.4.6) для средней скорости прироста вещества на сильных кластерах входит экспоненциально большой множитель e^s . При тех же условиях величина $\bar{f}$ не может быть экспоненциально большой. Поэтому вклад от сильных кластеров способен быть пренебрежимо малым, лишь если они являются экспоненциально редкими, т. е. если $p(s) = \exp(-\Phi(s))$, где $\Phi(s) \gg 1$, а $s \gg 1$.

Даже это требование еще не гарантирует полностью допустимость пренебрежения вкладом Q . Действительно, в этой ситуации

$$Q \sim \int_1^{\infty} \exp(s - \Phi(s)) ds, \quad (2.4.7)$$

и порядок величины Q определяется конкуренцией двух факторов — экспоненциальной редкостью сильных кластеров и экспоненциальностью прироста вещества на каждом из них. Как мы увидим, наличие такой конкуренции имеет принципиальное значение для трехмерных сред.

Приводимые ниже оценки величины Q относятся к пределу высоких концентраций центров размножения, когда отдельные центры сильно перекрываются ($c \gg 1$). Тогда поле скорости $f(\mathbf{r}, t)$ для среды можно считать гауссовским. Аналогичные рассуждения можно повторить и в более общем случае, когда поле $f(\mathbf{r}, t)$ является пуассоновским.

В гауссовском пределе удобно отсчитывать скорость распада, вычитая из нее среднюю скорость размножения $\bar{f} = \zeta_1 c J$, т. е. определить $\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \bar{f}$. Под величиной $f(\mathbf{r}, t)$ следует тогда понимать флуктуирующую компоненту поля скорости размножения $\delta f = f(\mathbf{r}, t) - \bar{f}$, которая представляет собой гауссовский случайный процесс с парной корреляционной функцией

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta f(0, 0) \rangle = c J^2 \mathcal{P}(\mathbf{r}, t), \quad (2.4.8)$$

где

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = r_0^{-d} \tau_0^{-1} \int \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \int \sigma(t - t') \sigma(t') dt' \quad (2.4.9)$$

есть безразмерный интеграл перекрытия. Интенсивность S этого случайного процесса равна

$$S = c J^2 \mathcal{P}(0, 0) = \zeta_2 c J^2, \quad (2.4.10)$$

$$\zeta_2 = r_0^{-d} \int \chi^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Его радиус корреляции есть r_0 , а время корреляции — τ_0 .

Поскольку в гауссовском пределе центры размножения сильно перекрываются, теперь под «кластерами» центров размножения следует понимать редкие сильные положительные выбросы случайного поля $\delta f(\mathbf{r}, t)$, обусловленные аномально высокой концентрацией центров размножения.

Пусть $\bar{\lambda}$ — характерная глубина низшего уровня в «потенциальной яме», вызванной типичной флуктуацией поля $\delta f(\mathbf{r}, t)$. Чтобы флуктуационное понижение порога оставалось малым, типичные флуктуации заведомо должны быть слабыми, т. е. для них должно выполняться условие $\bar{\lambda} \tau_0 \ll 1$, так как время корреляции τ_0 можно рассматривать в качестве характерного времени жизни типичной флуктуации.

Для сильных флуктуаций $s \gg 1$. Поскольку $s = \lambda \tau$, это условие может выполняться по двум обстоятельствам. Во-первых, какие-то из флуктуаций с типичным значением $\lambda \sim \bar{\lambda}$ могут оказаться исключительно долгоживущими, так что их время жизни τ гораздо больше τ_0 . Во-вторых, возможно появление очень «глубоких» флуктуаций, для которых $\lambda \gg \bar{\lambda}$. Поскольку появление такой флуктуации есть уже очень редкое событие, можно допустить, что ее время жизни будет порядка τ_0 .

Дальнейшие рассуждения основаны на том, что мы по отдельности оцениваем вклад в среднюю скорость прироста вещества от сильных флуктуаций (кластеров) двух предельных типов. Оказывается, что наиболее «опасными» всегда являются кластеры второго типа, которые можно было бы назвать пространственными (в отличие от «временных» кластеров первого типа). Именно пространственными кластерами определяется переход к режиму со значительным понижением порога взрывной неустойчивости.

Вероятность возникновения временных кластеров с длительностью жизни $\tau \gg \tau_0$ оценивалась для гауссовского случайного процесса в работе ²⁰, где было найдено, что

$$p(\tau) \sim \exp(-\varphi(\tau)), \quad \varphi(\tau) \sim \frac{\tau}{\tau_0} \quad \text{при } \tau \gg \tau_0. \quad (2.4.11)$$

Вклад в величину Q от подобных флуктуаций имеет порядок

$$Q \sim \int_{\bar{\lambda}^{-1}}^{\infty} \exp(\bar{\lambda} \tau - \varphi(\tau)) d\tau. \quad (2.4.12)$$

Нетрудно заметить, что при выполнении условия $\bar{\lambda} \tau_0 \ll 1$ этот вклад всегда экспоненциально мал.

При рассмотрении вклада от пространственных кластеров мы можем воспользоваться результатами, полученными в теории спектра одночастичного уравнения Шредингера со стационарным случайным потенциалом. Действительно, на временах порядка времени корреляции τ_0 картина поля размножения $\delta f(\mathbf{r}, t)$ остается почти стационарной. При этом «замороженное» пространственное распределение является гауссовским.

Как известно (см. ^{14,16}), экспоненциально редкие глубокие уровни принадлежат флуктуационной области спектра уравнения Шредингера со случайным потенциалом. Вероятность обнаружения таких уровней есть $p(\lambda) = \exp(-\Phi(\lambda))$, где в гауссовском пределе выражение для $\Phi(\lambda)$ имеет вид

$$\Phi(\lambda) = a \frac{\lambda^{2-(d/2)} D^{d/2}}{S \tau_0^d} \quad \text{при} \quad \frac{\lambda r_0^2}{D} \ll 1, \quad (2.4.13a)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2S} \quad \text{при} \quad \frac{\lambda r_0^2}{D} \gg 1. \quad (2.4.13b)$$

Безразмерный коэффициент a порядка единицы. В области $\lambda r_0^2/D \sim 1$ два выражения для $\Phi(\lambda)$ согласуются по порядку величины. Формулы (2.4.13) получены из приведенных в ¹⁴ с учетом того, что (2.4.1) сводится к уравнению Шредингера при замене $\hbar^2/2m \rightarrow D$, $\Psi \rightarrow n$, $U(\mathbf{r}, t) \rightarrow -f(\mathbf{r}, t)$, $E \rightarrow -\lambda$. Они справедливы лишь для экспоненциально редких уровней, т. е. при выполнении условия $\Phi(\lambda) \gg 1$. Напомним, что согласно (2.4.10) интенсивность S пропорциональна концентрации центров размножения c .

Вклад в среднюю скорость прироста вещества от пространственных кластеров можно оценить как

$$Q \sim \int_{\tau_0^{-1}}^{\infty} \exp(F(\lambda)) d\lambda, \quad (2.4.14)$$

где функция $F(\lambda)$ равна

$$F(\lambda) = \lambda \tau_0 - \Phi(\lambda). \quad (2.4.15)$$

Проанализируем сначала ситуацию, когда центры размножения являются долгоживущими, т. е. $\tau_0 \gg r_0^2/D$. В этом случае при $\lambda \gg \tau_0^{-1}$ имеются две области с зависимостями (2.4.13a и б). На рисунке показан вид функций $F(\lambda)$ для сред различной размерности.

Изменение функции $F(\lambda)$ при переходе к ситуации, когда порог взрыва определяется кластерами центров размножения.

$d = 1, 2, 3$ — размерность среды; $\tau_0 \gg r_0^2/D$.

В одномерном случае величина вклада Q экспоненциально мала, если при $\lambda = \tau_0^{-1}$ функция $F(\lambda)$ отрицательна и $|F(\lambda)| \gg 1$. Фактически это условие сводится к требованию, чтобы уже уровни с глубиной $\lambda = \tau_0^{-1}$ были экспоненциально редкими. Воспользовавшись выражениями (2.4.13) для $d = 1$, мы находим, что такое требование будет выполнено, если

$$S \ll \frac{D^{1/2}}{\tau_0^{3/2} r_0}, \quad (2.4.16)$$

или, с учетом (2.4.10) и (2.4.7), при

$$(cJ) \tau_0 \frac{J}{J^*} \ll 1. \quad (2.4.17)$$

Когда вклады в скорость прироста от редких кластеров малы, порог взрывной неустойчивости определяется равенством $\alpha = \bar{f} = cJ\xi_1$. Подставляя $cJ \sim \alpha$ в (2.4.17), мы приходим к условию (2.3.16), полученному ранее путем оценок диаграмм теории возмущений и определяющему тот интервал значений скорости распада α , в котором порог испытывает лишь незначительное флуктуационное понижение.

С возрастанием скорости распада α величина критической концентрации нарастает и в конце концов условие (2.4.17) нарушается. Сильные пространственные кластеры перестают быть экспоненциально редкими, и именно на них осуществляется основной прирост вещества в среде вблизи порога взрывной неустойчивости.

К аналогичным выводам приводит анализ двумерного случая. Единственное отличие состоит в том, что при подобном рассмотрении не удается «уловить» логарифмический множитель в выражении (2.1.8) для J^* при $d = 2$. Это, однако, вполне естественно, поскольку сами выражения (2.4.14) имеют логарифмическую точность (не учитывают предэкспоненциального множителя в выражении для вероятности $p(\lambda)$).

В трехмерной модели положение является особым. Нарушение условия (2.3.16) вновь связано с экспоненциальным возрастанием вклада от редких сильных кластеров, однако, в отличие от одномерного и двумерного случаев, сильные кластеры с $\lambda \sim \tau_0^{-1}$ остаются при этом неэффективными (см. рисунок). При увеличении скорости распада наиболее «опасны» кластеры, для которых $\lambda \sim D/r_0^2 \gg \tau_0^{-1}$. Именно для этих кластеров функция $F(\lambda)$ впервые достигает нуля с ростом интенсивности S поля скорости размножения. Оценка с помощью формул (2.4.13) показывает, что это происходит при $S \sim D/r_0^2\tau_0$. Интенсивность S связана с концентрацией c как $S = \xi_2 c J^2$, а пороговое значение концентрации $c_{кр}$ зависит от скорости распада α . Вплоть до момента, когда вклад от редких сильных кластеров потеряет экспоненциальную малость, для $c_{кр}$ справедливо выражение $c_{кр} = \alpha/J\xi_1$. Сравнивая приведенные выражения, мы видим, что вклад редких сильных кластеров становится определяющим при $\alpha \gtrsim D/\tau_0 r_0^2 J$. Нетрудно заметить, что с учетом (2.1.9) этому условию можно придать вид $\alpha \gtrsim \alpha^{**}$, где $\alpha^{**} = J^*/(J\tau_0)$. Таким образом, мы вновь получаем критерий (2.3.16).

Как следует из рисунка, для трехмерной среды существует интервал значений скорости распада α , в котором порог определяется только экспоненциально редкими сильными кластерами, чья вероятность возникновения описывается формулами (2.4.13) для плотности уровней во флуктуационной области. В пределах этого интервала, где $(D\tau_0/r_0^2)^{3/2} \gg \ln(\alpha/\alpha^{**}) \gg D\tau_0/r_0^2 \gg 1$, пороговое значение концентрации центров размножения может быть определено из (2.4.14) с помощью метода перевала:

$$c_{кр} = \frac{2 \ln(\alpha/\alpha^{**})}{\xi_2 J^2 \tau_0^2}. \quad (2.4.18)$$

Видно, что линейный закон $c_{кр} \sim \frac{\alpha}{J}$ сменяется в этом интервале на гораздо более медленный логарифмический. При $\ln(\alpha/\alpha^{**}) \gtrsim (D\tau_0/r_0^2)^{3/2}$ теряют экспоненциальную редкость кластеры, для которых $\lambda \sim \tau_0^{-1}$.

Можно показать, что в случае короткоживущих центров размножения ($\tau_0 \ll r_0^2/D$) при любой размерности среды относительное понижение порога взрывной неустойчивости при нарушении условия (2.3.16) всегда связано с тем, что теряют экспоненциальную редкость пространственные кластеры с уровнями $\lambda \sim \tau_0^{-1}$.

В заключение вновь подчеркнем, что редкие, но сильные кластеры центров размножения способны обеспечить значительное понижение порога взрывной неустойчивости; такое понижение происходит при нарушении условия (2.3.16).

2.5. Кинетический переход типа «заселения среды»

Допустим, что в среде имеется некоторый нелинейный механизм, ограничивающий взрывную неустойчивость, так что вместо уравнения (2.9) мы имеем

$$\dot{n} = -\alpha n - \beta n^2 + f(r, t) n + D \Delta n. \quad (2.5.1)$$

Происхождение квадратичного по плотности n слагаемого может быть различным. Прежде всего отметим, что такой член в кинетическом уравнении появляется при учете реакции слияния ($X + X \rightarrow X$), обратной реакции размножения. Естественно ожидать, что реакция слияния, в отличие от реакции размножения, не требует активации, а поэтому происходит всюду в среде. Кроме того, возможны ситуации, когда продукты распада увеличивают скорость распада (например, для некоторых биохимических ферментативных реакций^{29,30}). Если предположить, что ограничение роста плотности устанавливается при достаточно малых значениях n , можно разложить скорость распада в ряд по степеням плотности n и сохранить лишь линейное и квадратичное слагаемые.

При наличии механизма ограничения выше порога взрывной неустойчивости неограниченный рост средней по объему плотности подавлен. В зависимости от величины превышения над порогом $\Delta c = c - c_{кр}$ в среде с течением времени устанавливается некоторое среднее по объему значение $\bar{n}$, убывающее с уменьшением Δc и обращающееся в нуль при $\Delta c \leq 0$.

Возникновение при $c \geq c_{кр}$ отличного от нуля среднего значения плотности $\bar{n}$ при $t \rightarrow \infty$ мы интерпретируем как кинетический переход типа «заселения среды».

В определенном отношении величину асимптотически устанавливающейся средней плотности $\bar{n}$ можно рассматривать как параметр порядка такого кинетического перехода. Действительно, при прохождении через значение $c = c_{кр}$ изучаемая нами среда в асимптотическом пределе больших времен приобретает *дополнительную* количественную характеристику — плотность заселившего ее вещества *).

С формальной точки зрения можно отметить, что кинетический переход типа «заселения среды» сопровождается понижением симметрии асимптотического решения, устанавливающегося в пределе $t \rightarrow \infty$. Ниже точки перехода, когда $\bar{n} = 0$, решение является, очевидно, инвариантным относительно группы масштабных преобразований, заключающейся в умножении на произвольное ненулевое число. Выше точки перехода такая инвариантность теряется.

Подчеркнем, однако, что, в отличие от фазовых переходов II рода в равновесных системах, указанное выше свойство симметрии¹ относительно масштабных преобразований справедливо лишь для (асимптотических) решений исходного уравнения (2.5.1); само по себе уравнение (2.5.1) подобной инвариантностью никогда не обладает. Называя величину $\bar{n}$ параметром порядка рассматриваемого кинетического перехода, мы должны помнить о существовании такого отличия. Мы также должны иметь в виду, что само уравнение (2.5.1) теряет применимость при предельно малых концентрациях $\bar{n} \ll r_0^{-d}$, когда концентрация размножающегося вещества становится столь малой, что в отдельный центр размножения захватывается всего несколько частиц. В непосредственной близости от точки кинетического перехода типа «заселения

*) Нам известен еще один пример перехода с неотрицательным параметром порядка. В качестве параметра порядка можно рассматривать относительную долю элементов, принадлежащих бесконечному кластеру, при прохождении порога перколяции. Ниже порога эта величина равна нулю, а выше порога перколяции она конечна и растет с увеличением вероятности связей.

среды» необходимо было бы учитывать дискретную природу реакций. Мы, однако, ограничимся рассмотрением уравнения (2.5.1), справедливого в гидродинамическом пределе.

Поскольку скорость размножения является случайной, в установившемся асимптотическом режиме со стационарным значением средней по объему плотности $\bar{n}$ сохраняются локальные флуктуации плотности δn . В настоящем разделе будут исследованы среднеквадратичные флуктуации плотности $\langle \delta n^2 \rangle$ в установившемся режиме при приближении к точке кинетического перехода *).

Как известно, при равновесных фазовых переходах 2-го рода при прохождении через точку перехода обращается в нуль среднее значение параметра порядка $\bar{\eta}$, тогда как парная корреляционная функция флуктуаций параметра порядка $\delta \eta$ отлична от нуля в точке перехода. В этом отношении кинетический переход типа «заселения среды» обладает важной спецификой. Поскольку аналогом параметра порядка является в данном случае *неотрицательная* величина (плотность n размножающегося вещества), из обращения в нуль средней по объему плотности $\bar{n}$ немедленно следует равенство нулю всех флуктуаций плотности:

$$\bar{n} = 0 \rightarrow \langle \delta n^2 \rangle = 0. \quad (2.5.2)$$

Таким образом, флуктуационное поведение вблизи точки кинетического перехода типа «заселения среды» должно быть весьма своеобразным.

Ниже мы ограничимся исследованием ситуации, когда центры размножения являются слабыми и выполнено условие (2.3.16), гарантирующее экспоненциально малость прироста вещества на редких сильных кластерах центров размножения.

Согласно (2.5.1) устанавливающееся значение средней плотности $\bar{n}$ определяется стационарным решением уравнения

$$\dot{\bar{n}} = -\alpha \bar{n} + \bar{f} \bar{n} - \beta \bar{n}^2 + \langle \delta f \delta n \rangle - \beta \langle \delta n^2 \rangle. \quad (2.5.3)$$

Если пренебречь в (2.5.3) флуктуациями плотности δn , что равносильно приближению самосогласованного поля в теории равновесных фазовых переходов 2-го рода³¹, устанавливающееся значение средней плотности равно

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & c < c_{\text{кр}}^{(0)}, \\ \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{c}{c_{\text{кр}}^{(0)}} - 1 \right), & c \geq c_{\text{кр}}^{(0)}, \end{cases} \quad (2.5.4)$$

где $c_{\text{кр}}^{(0)}$ находится из условия $\alpha = \bar{f}$.

Учет флуктуаций приводит к двум эффектам. Во-первых, происходит флуктуационное понижение порога взрывной неустойчивости, т. е. точки кинетического перехода, рассчитанной нами в разделе 2.3; при выполнении условия (2.3.16) флуктуационный сдвиг точки перехода является малым (см. (2.3.14)). Во-вторых, выражение (2.5.4) для средней плотности $\bar{n}$ может претерпеть изменение из-за присутствия в (2.5.3) наряду с членом $\beta \bar{n}^2$ слагаемого $\beta \langle \delta n^2 \rangle$. Лишь при выполнении условия

$$\sqrt{\langle \delta n^2 \rangle} \ll \bar{n} \quad (2.5.5)$$

приближение самосогласованного поля, с помощью которого получено выражение (2.5.4), будет справедливым.

*) Заметим, что поскольку в рассматриваемой нами задаче флуктуации плотности δn обусловлены внешним по отношению к системе воздействием, коррелятор $\langle \delta n(r) \delta n(0) \rangle$ не обязан расходиться при совпадающих аргументах.

Хорошо известно, что в теории фазовых переходов 2-го рода приближение самосогласованного поля всегда нарушено в достаточной близости от точки перехода при размерности среды меньше четырех. Ниже мы увидим, что при кинетическом переходе типа «заселения среды» ситуация оказывается иной.

Флуктуации плотности δn удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению

$$\dot{\delta n} = -(\alpha + 2\beta\bar{n} - \bar{f})\delta n + D\Delta\delta n + \delta f(r, t)\bar{n} + (\delta f\delta n - \langle\delta f\delta n\rangle) - \beta(\delta n^2 - \langle\delta n^2\rangle). \quad (2.5.6)$$

Для нахождения с помощью этого уравнения величины $\langle\delta n^2\rangle$ можно вновь воспользоваться диаграммной техникой теории возмущений. Введем в рассмотрение функцию U_q , определяемую соотношением

$$\langle\delta n_q\delta n_{q'}\rangle = U_q\delta(q+q')\bar{n}^2, \quad (2.5.7)$$

так что выполнено равенство

$$\langle\delta n^2\rangle = \bar{n}^2 \int U_q dq. \quad (2.5.8)$$

Производя последовательные итерации в уравнении для δn_q , получающемся при фурье-преобразовании уравнения (2.5.6), в котором на основании условия (2.5.5) отброшены квадратичные по δn слагаемые, можно построить для δn_q формальное решение в виде бесконечного ряда по степеням случайных полей $\delta f_{q''}$. Перемножая почленно два таких бесконечных ряда для δn_q и $\delta n_{q'}$ и производя процедуру статистического усреднения, мы приходим к бесконечному диаграммному ряду для функции U_q . Суммирование в этом ряде слабосвязанных диаграмм приводит нас к интегральному уравнению

$$U_q = |G_q|^2 \left[\tilde{S}(q) + \int S(q-q') U_{q'} dq' \right]. \quad (2.5.9)$$

Входящая в (2.5.9) функция $\tilde{S}(q)$ дается диаграммным рядом

$$\tilde{S}(q) = S(q) + \text{диаграммы} + \dots; \quad (2.5.10)$$

здесь $S(q)$ есть фурье-образ парного коррелятора $\langle\delta f(r, t)\delta f(0, 0)\rangle$.

Опустим в ряде (2.5.10) все диаграммные слагаемые, т. е. приближенно положим $\tilde{S}(q) = S(q)$. Тогда, если ввести новую функцию Z_q , определив ее соотношением $U_q = |G_q|^2 Z_q$, она должна удовлетворять интегральному уравнению

$$Z_q = S(q) + \int S(q-q') |G_{q'}|^2 Z_{q'} dq'. \quad (2.5.11)$$

Благодаря наличию у функции Грина G_q на пороге полюса при $q = 0$ основной вклад в интеграл вблизи порога даст область малых значений q . Вынося $S(q)$ из-под знака интеграла, после простых алгебраических преобразований удастся найти Z_q , а затем $\langle\delta n^2\rangle$:

$$\langle\delta n^2\rangle = \bar{n}^2 \frac{\mu}{1-\mu}, \quad (2.5.12)$$

где

$$\mu = \int S(q) |G_q|^2 dq. \quad (2.5.13)$$

Таким образом, критерий (2.5.5), обеспечивающий применимость приближения самосогласованного поля, выполняется, если $\mu \ll 1$.

Расчеты дают следующие значения величины μ для сред различной размерности:

а) Долгоживущие центры размножения ($\tau_0 \gg r_0^2/D$, или $l \gg r_0$, где $l = \sqrt{D\tau_0}$):

$$\mu \sim \begin{cases} \gamma \left(\frac{r_0}{l} \right), & d=3, \\ \frac{\gamma \ln(r_0/l)}{\ln(l/r_0)}, & d=2, \\ \gamma \left(\frac{r_0}{l} \right), & d=1. \end{cases} \quad (2.5.14)$$

б) Короткоживущие центры размножения ($l \ll r_0$):

$$\mu \sim \begin{cases} \gamma \left(\frac{r_0}{l} \right)^2, & d=3, \\ \gamma \left(\frac{r_0}{l} \right)^2 \ln \frac{r_0}{r_c}, & d=2, \\ \gamma \left(\frac{r_0}{l} \right)^2 \frac{r_0}{r_c}, & d=1. \end{cases} \quad (2.5.15)$$

Знак пропорциональности указывает на то, что нами опущены численные множители порядка единицы. Величина $l = \sqrt{D\tau_0}$ имеет простую интерпретацию: это есть среднее расстояние, диффузионно проходимое частицей за время жизни отдельного центра размножения τ_0 .

В выражениях (2.5.14) и (2.5.15) для μ входит (за исключением трехмерной среды) корреляционный радиус флуктуаций плотности,

$$r_c = \sqrt{\frac{D}{\alpha[(c/c_{кр}) - 1]}}, \quad (2.5.16)$$

который обращается в бесконечность в точке кинетического перехода, где $c = c_{кр}$. Благодаря этому для $d=1$ и $d=2$ величина μ возрастает с приближением к критической точке, тогда как в случае трехмерной среды (при $d=3$) она остается постоянной в пределе $c \rightarrow c_{кр}$.

Параметр γ в (2.5.14) и (2.5.15) имеет вид

$$\gamma = c(J\tau_0) \frac{J}{J^*}. \quad (2.5.17)$$

Согласно (2.3.13) вблизи порога он является малым ($\gamma \ll 1$) при выполнении условия (2.3.16), обеспечивающего слабость флуктуационного сдвига порога взрывной неустойчивости.

Оценивая вклады от различных диаграмм в ряде (2.5.10), можно показать, что вклады от диаграмм с неприводимыми корреляторами высших порядков (3, 4 и 6 в (2.5.10)) малы по параметру J/J^* . При оценке вкладов от диаграмм с пересекающимися штриховыми линиями (1, 2 и 5 в (2.5.10)) следует различать две ситуации — долгоживущих и короткоживущих центров размножения. Когда продолжительность жизни отдельного центра велика ($l \gg r_0$), эти диаграммы малы по параметру γ . Когда же центры являются короткоживущими ($l \ll r_0$), параметр γ заменяется на комбинацию $\gamma(r_0/l)^2$; в этом случае вклад от подобных диаграмм вблизи порога взрывной неустойчивости пренебрежимо мал при выполнении условия

$$\frac{\alpha r_0^2}{D} \frac{J}{J^*} \ll 1, \quad (2.5.18)$$

которое является более жестким по сравнению с условием (2.3.16).

С учетом вышесказанного установившееся значение средней плотности размножающегося вещества $\bar{n}$ определяется формулой (2.5.4), в которой величина $c_{кр}^{(0)}$ должна быть заменена на $c_{кр}$ (т. е. учтено флуктуационное понижение порога). То, что это стационарное решение является устойчивым, проверяется линеаризацией уравнения (2.5.3) по малому отклонению от $\bar{n}_{st}$. С помощью простых рассуждений можно не только убедиться в устойчивости решения (2.5.4), но и обнаружить эффект критического замедления, т. е. обращения в бесконечность характерного времени изменения $\bar{n}(t)$ в точке перехода. Соответствующая формула для этого времени приведена ниже.

Итак, основные особенности рассматриваемого кинетического перехода типа «заселения среды» состоят в следующем:

1) Вблизи точки перехода наблюдается критическое замедление, т. е. рост времени релаксации

$$\tau_c = \left[\alpha \left(\frac{c}{c_{кр}} - 1 \right) \right]^{-1}. \quad (2.5.19)$$

Возникновение критического замедления связано с наличием у функции Грина полюса при $q = 0$ в точке перехода.

2) Как видно из (2.5.16), корреляционный радиус r_c , как и τ_c , обращается в бесконечность в точке перехода.

3) Величина флуктуационного сдвига точки перехода (порога взрывной неустойчивости) не зависит от конкретного механизма нелинейного ограничения; при выполнении условия (2.3.16) флуктуационный сдвиг мал.

4) Согласно терминологии, принятой в теории равновесных фазовых переходов 2-го рода, область вблизи точки перехода, где нарушено приближение самосогласованного поля, называется флуктуационной. Из (2.5.14) следует, что для долгоживущих центров размножения ($l \gg r_0$) при выполнении условия (2.3.16) флуктуационная область полностью отсутствует в случае трехмерной среды. При $d = 2$ она является экспоненциально узкой по малому параметру γ и имеет ширину

$$\frac{c}{c_{кр}} - 1 \sim (\alpha\tau_0)^{-1} \exp \left[-\frac{2 \ln(l/r_0)}{\gamma} \right]. \quad (2.5.20)$$

В одномерном случае ширина флуктуационной области имеет степенную малость:

$$\frac{c}{c_{кр}} - 1 \sim (\alpha\tau_0)^{-1} \gamma^2 = \gamma \frac{J}{J_*}. \quad (2.5.21)$$

Следовательно, флуктуации оказываются значительно более слабыми, чем при фазовом переходе; они становятся существенными при более низкой размерности среды. Фактически флуктуационная область имеется лишь в одномерном случае, а не начиная с размерности $d = 3$, как при фазовых переходах 2-го рода.

5) В случае короткоживущих центров размножения ($l \ll r_0$) условия, обеспечивающего малость флуктуационного сдвига точки перехода, недостаточно для того, чтобы приближение самосогласованного поля было вообще применимо для описания явлений вблизи этой точки. Аналогом числа Гинзбурга служит в этом случае комбинация $\gamma(r_0/l)^2$. Если $(l/r_0)^2 \ll \gamma \ll 1$, сдвиг порога мал, он определяется выражением (2.3.14), но приближение самосогласованного поля неприменимо ни при какой размерности среды. Если же $\gamma \ll (l/r_0)^2 \ll 1$, т. е. при выполнении условия (2.5.18), приближение самосогласованного поля справедливо сколь угодно близко к точке перехода, и, таким образом, флуктуационная область отсутствует для $d = 3$; ширина такой области экспоненциально мала при $d = 2$:

$$\frac{c}{c_{кр}} - 1 \sim \left(\frac{\alpha r_0^2}{D} \right)^{-1} \exp \left[-\frac{2}{\gamma} \left(\frac{l}{r_0} \right)^2 \right], \quad (2.5.22)$$

и степенным образом мала при $d = 1$:

$$\frac{c}{c_{\text{кр}}} - 1 \sim \left(\frac{\alpha r_0^2}{D}\right)^{-1} \gamma^2 \left(\frac{r_0}{l}\right)^4 = \gamma \left(\frac{r_0}{l}\right)^2 \frac{J}{J_*}. \quad (2.5.23)$$

Для описания явлений внутри флуктуационной области для одномерных сред, а также в случае $(l/r_0)^2 \lesssim \gamma \ll 1$, вероятно, могут быть разработаны методы ренормгруппы.

Подчеркнем, что за пределами нашего рассмотрения остались флуктуационные явления при кинетическом переходе типа «заселения среды» для сильных центров размножения и для случая, когда центры размножения хотя и являются слабыми, но нарушено условие (2.3.16), а поэтому порог взрывной неустойчивости определяется редкими сильными кластерами. Исследование флуктуационных явлений в этих ситуациях вызывает серьезные трудности.

2.6. Гауссовские флуктуации в скоростях распада и размножения

В заключение настоящего раздела мы кратко обсудим расчет порога взрывной неустойчивости и исследование кинетического перехода типа «заселения среды» в системах с гауссовскими флуктуациями в скоростях распада и размножения²⁰.

Пусть $K_1(\mathbf{r}, t)$ — скорость распада диффундирующего вещества в момент времени t в точке $\mathbf{r}$ среды, а $K_2(\mathbf{r}, t)$ — скорость размножения в этой точке, так что уравнение диффузии имеет вид

$$\dot{n} = -(K_1 - K_2)n + D \Delta n. \quad (2.6.1)$$

Вообще говоря, величины K_1 и K_2 зависят от локальной концентрации диффундирующего вещества $n(\mathbf{r}, t)$. Ограничиваясь рассмотрением малых концентраций, эту зависимость можно считать линейной,

$$K_1 - K_2 = k_1 - k_2 + \beta n. \quad (2.6.2)$$

Мы рассмотрим ситуацию, когда коэффициент β положителен, т. е. увеличение концентрации подавляет размножение или увеличивает скорость распада.

В замкнутой системе размножение не может продолжаться неограниченно долго и должно заканчиваться при исчерпании требуемого для этого субстрата. Мы, однако, будем считать, что система является открытой и скорость размножения поддерживается благодаря притоку субстрата извне в систему.

В отличие от разделов 2.1—2.5, где размножение рассматривалось как локализованное на отдельных центрах, а скорость распада была постоянной для всей среды, мы проанализируем теперь ситуацию, когда размножение и распад осуществляются во всем пространстве, но их скорости содержат случайные флуктуации.

Предположим, что скорости реакций k_1 и k_2 флуктуируют заданным образом в пространстве и во времени (флуктуации в коэффициенте β можно не учитывать, поскольку концентрация n мала). Тогда мы можем выделить в них регулярную и флуктуирующую составляющие:

$$k_{1,2} = \bar{k}_{1,2} + \delta k_{1,2}(\mathbf{r}, t), \quad \bar{k}_{1,2} = \langle k_{1,2} \rangle, \quad (2.6.3)$$

и переписать (2.6.1) в форме

$$\dot{n} = -\Gamma n - \beta n^2 + D \Delta n + g(\mathbf{r}, t)n, \quad (2.6.4)$$

где

$$\Gamma = \bar{k}_1 - \bar{k}_2, \quad g(\mathbf{r}, t) = \delta k_2(\mathbf{r}, t) - \delta k_1(\mathbf{r}, t). \quad (2.6.5)$$

В дальнейшем мы полагаем коэффициент Γ положительным, что соответствует превышению средней скорости распада над средней скоростью размножения. Случайное поле $g(\mathbf{r}, t)$ является внешним по отношению к уравнению (2.6.4), поскольку оно не зависит от распределения концентрации $n(\mathbf{r}, t)$. Среднее значение этого поля по определению равно нулю, а его парную корреляционную функцию мы будем считать экспоненциально спадающей в пространстве со временем:

$$\langle g(\mathbf{r}, t) g(\mathbf{r}', t') \rangle = S \exp(-r_0^{-1}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \tau_0^{-1}|t - t'|). \quad (2.6.6)$$

Предполагается, что случайное поле $g(\mathbf{r}, t)$ гауссово.

В отсутствие флуктуаций в скоростях распада и размножения (т. е. при $S = 0$) порог взрывной неустойчивости в рассматриваемой системе наблюдается при равенстве этих скоростей (когда $\Gamma = 0$). Флуктуации понижают порог взрывной неустойчивости. Интересна поэтому следующая задача. Какова критическая интенсивность флуктуаций $S_{\text{кр}}$, при которой система достигает порога взрывной неустойчивости, несмотря на то, что средняя скорость распада превосходит среднюю скорость размножения, т. е. $\Gamma > 0$? Каково поведение системы при $S > S_{\text{кр}}$ с учетом нелинейного подавления взрывной неустойчивости?

Исследование этих вопросов было проведено в ²⁰. Мы не будем касаться деталей соответствующего рассмотрения, которое во многом аналогично проведенному в пп. 2.3—2.5, а приведем окончательные результаты *).

Исходя из параметров Γ , D , r_0 и τ_0 , имеющих в задаче, можно построить три характерные комбинации с размерностью длины:

1) Диффузионная длина $r_{\text{diff}} = \sqrt{D/\Gamma}$ дает среднюю глубину проникновения с границы среды в отсутствие флуктуаций.

2) Длина стационарности $l = \sqrt{D\tau_0}$ представляет собой среднее расстояние, диффузионно проходимое частицей за характерное время жизни τ_0 отдельной флуктуации.

3) Корреляционная длина r_0 определяет характерный пространственный размер отдельной флуктуации в скоростях распада и размножения.

Критическая интенсивность флуктуаций $S_{\text{кр}}$, при которой в среде достигается порог взрывной неустойчивости, зависит от соотношения между длинами r_{diff} , l и r_0 . Если $r_{\text{diff}} \gg r_0 \gg l$, то для среды любой размерности $d = 1, 2, 3$ величина $S_{\text{кр}}$ определяется выражением

$$S_{\text{кр}}^{1/2} = \Gamma \left(\frac{r_{\text{diff}}}{l} \right). \quad (2.6.7)$$

В отличие от этого при $r_{\text{diff}} \gg l \gg r_0$ выражение для $S_{\text{кр}}$ оказывается различным для сред разной размерности:

$$S_{\text{кр}}^{1/2} = \Gamma \left(\frac{r_{\text{diff}}}{r_0^{1/2} l^{1/2}} \right), \quad d = 1, \quad (2.6.8)$$

$$S_{\text{кр}}^{1/2} = \Gamma \left(\frac{r_{\text{diff}}}{l} \right) \left(\ln \frac{2l}{r_0} \right)^{-1/2}, \quad d = 2, \quad (2.6.9)$$

$$S_{\text{кр}}^{1/2} = \Gamma \left(\frac{r_{\text{diff}}}{l} \right), \quad d = 3. \quad (2.6.10)$$

Если $l \gg r_{\text{diff}} \gg r_0$, то основную роль в определении порога взрывной неустойчивости играют редкие сильные положительные выбросы случайного поля $g(\mathbf{r}, t)$ (ср. обсуждение в разделе 2.4); при таком соотношении между

*) Обратим внимание, что, как отмечалось в п. 2.4, уравнение (2.5.1) сводится к (2.6.4) в пределе высокой концентрации ($c \gg 1$) слабых центров размножения. Правила соответствия даны в формулах (2.4.8)—(2.4.10).

характерными длинами простой оценки для $S_{кр}$ получить не удастся. Наконец, при $r_0 \gg r_{diff}$ диффузия не существенна, и задача сводится к рассмотренной во вступлении к гл. 2.

При наличии механизма нелинейного ограничения, описываемого слагаемым βn^2 в (2.6.4), выше порога взрывной неустойчивости осуществляется заселение среды. Устанавливающееся среднее значение концентрации $\bar{n}$ определяется в приближении среднего поля выражением

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & S < S_{кр}, \\ (\Gamma/\beta) \left(\frac{S}{S_{кр}} - 1 \right), & S \geq S_{кр}. \end{cases} \quad (2.6.11)$$

В том же приближении корреляционный радиус r_c , задаваемый парной корреляционной функцией $\langle n(r, t) n(r', t') \rangle$, равен

$$r_c = r_{diff} \left| 1 - \frac{S}{S_{кр}} \right|^{-1/2}. \quad (2.6.12)$$

Он обращается в бесконечность в точке кинетического перехода.

Исследование применимости приближения среднего поля показывает, что для одномерных сред оно справедливо вне флуктуационной области, определяемой неравенствами

$$\frac{S}{S_{кр}} - 1 \leq \left(\frac{l}{r_{diff}} \right)^2, \quad r_{diff} \gg l \gg r_0, \quad (2.6.13)$$

$$\frac{S}{S_{кр}} - 1 \leq \left(\frac{r_0}{r_{diff}} \right)^2, \quad r_{diff} \gg r_0 \gg l. \quad (2.6.14)$$

Для двумерных систем флуктуационная область экспоненциально узка (ср. (2.5.20)), и ею можно пренебречь. В трехмерных средах при выполнении соотношений $r_{diff} \gg l$, r_0 флуктуационная область отсутствует, и приближение среднего поля остается применимым вплоть до самой точки кинетического перехода.

3. ПРОЦЕССЫ КОНКУРЕНЦИИ ВО ФЛУКТУИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В настоящем разделе обсуждается еще один пример^{17,32,33} кинетического перехода типа «заселения среды», связанный с явлением конкуренции.

Процессы конкуренции и отбора широко распространены в поведении сильно неравновесных открытых систем. Достаточно упомянуть о конкуренции между модами в лазере⁵, о химических моделях эволюции³⁴, а также о моделях конкурентного отбора в экологии³⁵. Фактически самый процесс самоорганизации, т. е. спонтанного образования упорядоченных структур⁵, можно рассматривать как результат конкуренции между большим числом неустойчивых нарастающих мод, приводящей к установлению макроскопической амплитуды одной из таких мод и к подавлению остальных.

Если на систему оказывается внешнее шумовое воздействие, его результатом может явиться качественная перестройка процесса конкуренции, меняющая исход эволюции. Не проводя общего рассмотрения, мы ограничимся изучением этого явления на простом примере, имеющем важное биологическое значение.

В качестве конкретной модели мы воспользуемся уравнениями типа Лотки — Вольтерры, описывающими конкуренцию в экологических сообществах и эффекты предбиологической химической эволюции. Для определенности мы будем оперировать экологической терминологией; переформулировка задачи применительно к рассмотрению системы химических реакций произведена в работе³³. Как будет видно из последующего изложения (см. уравнения (3.6)), «экологическая» модель служит прообразом целого класса моделей открытых систем, допускающих кинетический переход типа «заселения среды».

Рассмотрим систему, состоящую из двух биологических видов, которые соревнуются за один тип пищи. Будем предполагать, что особи более слабого вида подвижны (способны к диффузии), а скорость прироста пищи флуктуирует в пространстве и во времени. Такая система описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{N} &= (BM - A) N, \\ \dot{n} &= (bM - a) n + D \Delta n, \\ \dot{M} &= Q - GM - CN - cn + f(r, t); \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

здесь N и n — плотности численностей сильного и слабого видов, а M — плотность пищи. Все коэффициенты в (3.1) положительны; предполагается, что выполнено условие $A/B < a/b$.

Первые два уравнения в (3.1) традиционны: скорости прироста численностей линейно зависят от количества имеющейся пищи и отрицательны, когда пища отсутствует. Во второе из уравнений (3.1) добавлен диффузионный член $D \Delta n$, учитывающий подвижность особей слабого вида. Третье уравнение в (3.1) описывает динамику изменения плотности пищи. Каждая особь двух видов поглощает в единицу времени количества пищи C и c соответственно. Сама по себе пища «растет» с постоянной скоростью Q , и даже в отсутствие обоих видов ее максимальная плотность ограничена некоторым механизмом распада, ведущим к появлению слагаемого $-GM$ в этом уравнении. Вводя гауссовскую случайную силу $f(r, t)$, мы учитываем пространственные и временные флуктуации в скорости прироста пищи. Мы предполагаем, что корреляционная функция этого шума имеет вид

$$\langle f(r, t) f(r', t') \rangle = 2G\Theta \exp(-k_f |r - r'|) \delta(t - t'). \quad (3.2)$$

Параметр $r_f = k_f^{-1}$ определяет типичный пространственный размер отдельной флуктуации, а величина Θ характеризует интенсивность флуктуаций. Исходя из уравнения (3.1), можно показать, что в отсутствие особей обоих видов (при $N = n = 0$) среднеквадратичная флуктуация плотности пищи имеет вид

$$\langle \delta M^2 \rangle_0 = \Theta. \quad (3.3)$$

Заметим, что по времени случайный процесс $f(r, t)$ предполагается дельта-коррелированным. Фактически это означает, что его время корреляции гораздо меньше всех характерных времен задач.

Когда флуктуации отсутствуют ($\Theta = 0$), единственным устойчивым стационарным решением уравнений (3.1) является *)

$$n = 0, \quad M = M_1 = \frac{A}{B}, \quad N = N_1 = (Q - GM_1) A^{-1}. \quad (3.4)$$

Это классический результат³⁵: конкуренция ведет к вымиранию более слабого вида. Его часто формулируют в качестве «теоремы Гаузе» — невозможно стационарное сосуществование двух биологических видов, полностью полагающихся на один и тот же ресурс.

Ситуация оказывается радикально отличной, если скорость прироста пищи флуктуирует в пространстве и во времени. Основным результатом состоит в том, что, начиная с некоторой критической интенсивности шума Θ_c , становится возможным стационарное статистическое сосуществование двух соревнующихся видов, т. е. устанавливается новое состояние, в котором $\langle n \rangle \neq 0$ и $\langle N \rangle \neq 0$. Переход к этому состоянию, сопровождающийся появлением отличной от нуля асимптотической по времени и средней по объему плотности $\langle n \rangle$, служит примером кинетического перехода типа «заселения среды».

*) Мы считаем, что выполнено условие $Q > GA/B$.

Проводя ряд математических оценок, удается (см. ³³) показать, что в отсутствие диффузии (при $D = 0$) флуктуации скорости прироста пищи не предотвращают асимптотического вымирания слабого вида, а поэтому, в отличие от п. 2.5, рассматриваемый здесь кинетический переход принципиально связан с наличием диффузии.

Получаемый вывод имеет важное значение с точки зрения математической экологии. В условиях флуктуирующего окружения простая подвижность оказывается существенным фактором, обеспечивающим эволюционное преимущество и делающим сосуществование с более сильным видом возможным. В действительности подвижные особи слабого вида выживают, поскольку они способны «выедать» флуктуации!

Удобно ввести новые переменные

$$p = M - M_1, \quad q = \ln \frac{N}{N_1}, \quad (3.5)$$

которые описывают отклонения плотностей M и N от их стационарных значений (3.4) в отсутствие флуктуаций. Мы будем предполагать эти отклонения малыми *), так что выполнены условия $\langle p^2 \rangle \ll 1$ и $\langle q^2 \rangle \ll 1$. После линеаризации по p и q модель (3.1) сводится в новых переменных к трем уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= Bp, \\ \dot{p} &= -G'p - vq - cn + f(r, t), \\ \dot{n} &= b(p - p_1)n + D\Delta n, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

где

$$p_1 = \frac{a}{b} - \frac{A}{B}, \quad v = CN_1M_1. \quad (3.7)$$

Параметр p_1 характеризует нехватку пищи в стационарном состоянии (3.4) для размножения особей слабого вида. Мы считаем эту величину малой: среднеквадратичные флуктуации плотности пищи M (а следовательно, и величины $p = M - M_1$) могут превосходить значение p_1 . Поэтому в третьем уравнении системы (3.6) наряду с членом $-bp_1n$ сохранен и нелинейный член bpn .

Уравнения (3.6) описывают набор идентичных затухающих осцилляторов с частотой $\omega_0^2 = vB$, расположенных в каждой точке пространства и взаимодействующих через поле $n(r, t)$. Если все осцилляторы находятся в невозбужденном состоянии, это поле затухает экспоненциально к значению $n = 0$. Возбуждение осцилляторов случайной силой $f(r, t)$ создает, однако, возможность для «размножения» такого поля. Пространственная структура областей размножения (где $p > p_1$) варьируется случайно в пространстве и во времени; кинетический переход может произойти в том случае, если прирост n в областях размножения начнет компенсировать спадание поля n вне таких областей.

Необходимо отметить, что уравнения (3.6) имеют гораздо более широкую применимость, чем исходная модель (3.1), из которой они получены. Фактически они дают пример своеобразной возбудимой среды, которая под действием внешнего шума способна переходить к качественно новому «организованному» состоянию, где поле n , связывающее между собой осцилляторы, отлично от нуля и не убывает со временем. Подобная ситуация может возникать в различных задачах.

Последующий анализ проводится в тесной аналогии с теорией равновесных фазовых переходов 2-го рода. Поле $f(r, t)$ рассматривается в каче-

*) Это предположение накладывает определенные ограничения на интенсивность шума $f(r, t)$, которые выясняются ниже.

стве параметра порядка, и производится адиабатическое исключение подчиненных ему быстро осциллирующих переменных, что дает в результате уравнение типа Гинзбурга — Ландау для медленной составляющей параметра порядка.

Легко заметить, что пространственные фурье-моды поля n с большими значениями волнового вектора $\mathbf{k}$ затухают быстрее, чем соответствующие моды с малыми $\mathbf{k}$. Это происходит благодаря диффузии. Имеется также быстрое движение осцилляторов (q, p) . С учетом этого естественно произвести выделение быстрых и медленных переменных. Характерные «микроскопические» масштабы уравнений (3.6) с размерностью обратного времени есть bp_1 , G , ω_0 и Dk_f^2 . Медленные переменные можно определить как временные средние от n , p и q по интервалу времени T , выбранному таким образом, что $(1/T) \ll bp_1, G, \omega_0, Dk_f^2$. Именно, мы полагаем

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{T} \int_0^T n(\mathbf{r}, t + \tau) d\tau \equiv \langle n(\mathbf{r}, t) \rangle_T \quad (3.8)$$

и аналогично $\tilde{q} = \langle q \rangle_T$, $\tilde{p} = \langle p \rangle_T$. Быстрые переменные тогда определяются как $\delta n = n - \eta$, $\delta p = p - \tilde{p}$, $\delta q = q - \tilde{q}$.

Наша цель состоит в получении замкнутого уравнения для медленной составляющей η параметра порядка n . Мы начнем его вывод с проведения временного усреднения (3.8) в третьем уравнении системы (3.6), что дает

$$\dot{\eta} = -bp_1\eta + b\tilde{p}\eta + D\Delta\eta + b\langle\delta p\delta n\rangle_T. \quad (3.9)$$

Медленную компоненту $\tilde{p}$ можно выразить через η , если мы произведем временное усреднение в первых двух уравнениях (3.6) и заметим, что интервал усреднения T гораздо больше всех «микроскопических» временных масштабов. С учетом этого находим

$$\tilde{p} = -\frac{c}{\omega_0^2} \dot{\eta} + \frac{1}{\omega_0^2} \dot{\tilde{f}}, \quad (3.10)$$

где медленная компонента $\tilde{f}$ случайной силы определена как $\tilde{f} = \langle f \rangle_T$.

Уравнения для быстрых составляющих имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta q &= B\delta p, \\ \dot{\delta p} &= -G\delta p - \omega_0 q - \omega_0 n + \omega_1(1, 1), \\ \dot{\delta n} &= -b(p_1 - \tilde{p})\delta n + b\eta\delta p + D\Delta\delta n + b(\delta n\delta p - \langle\delta n\delta p\rangle_T). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Медленные переменные η и $\tilde{p}$ должны рассматриваться здесь как заданные внешние параметры, так что квазистационарное распределение быстрых переменных адиабатически подстраивается к медленной эволюции со временем переменных η и $\tilde{p}$. Поэтому временное среднее можно заменить на статистическое среднее $\langle\delta n\delta p\rangle_\eta$, вычисляемое со стационарным распределением вероятности быстрых переменных, устанавливающимся при заданных значениях η и $\tilde{p}$.

Для расчета $\langle\delta n^2\rangle_\eta$ и $\langle\delta n\delta p\rangle_\eta$ можно воспользоваться приближением, аналогичным теории самосогласованного поля для фазовых переходов 2-го рода. Если выполнено условие

$$\sqrt{\langle\delta n^2\rangle_\eta} \ll \eta, \quad (3.12)$$

справедливость которого проверяется ниже, единственный нелинейный член $b(\delta n\delta p - \langle\delta n\delta p\rangle)$ в (3.11) в среднем мал по сравнению с членом $b\eta\delta p$

в том же уравнении, и им можно пренебречь *). В результате (3.11) сводится к системе линейных стохастических дифференциальных уравнений, для которых удастся вычислить как стационарное распределение вероятности, так и все корреляционные функции при таком стационарном распределении.

Вычисляя подобным образом коррелятор $\langle \delta n \delta p \rangle_\eta$, мы находим его в виде некоторой функции от величины η . Учитывая, что вблизи точки перехода значение η мало, можно разложить $\langle \delta n \delta p \rangle_\eta$ по степеням η , сохраняя лишь члены до второго порядка. Подстановка такого разложения в (3.9) дает уравнение Гинзбурга — Ландау для рассматриваемого перехода типа «заселения среды»:

$$\dot{\eta} = -b(p_1 - \mu\Theta)\eta - R\Theta\eta^2 + D\Delta\eta + \Phi(\mathbf{r}, t)\eta. \quad (3.13)$$

В предположении, что

$$Dk_f^2 \gg \omega_0 \gg G \gg bp_1 \quad (3.14)$$

и среда трехмерна, коэффициенты μ и R имеют вид

$$\mu = \frac{b}{Dk_f^2}, \quad (3.15)$$

$$R = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{b^3 c}{G\omega_0^{1/2} (Dk_f^2)^{3/2}}; \quad (3.16)$$

отметим, что они не зависят от p_1 .

Гауссовская случайная сила Φ в (3.13) определена как

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(\mathbf{r}, t) \quad (3.17)$$

и обладает спектром

$$\langle \Phi(\omega, \mathbf{k}) \Phi(\omega', \mathbf{k}') \rangle = S(\omega, \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'), \quad (3.18)$$

$$S(\omega, \mathbf{k}) = \begin{cases} 0 & |\omega| > \frac{2\pi}{T}, \\ 2G\Theta \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 h_3(\mathbf{k}), & |\omega| < 2\pi/T, \end{cases} \quad (3.19)$$

где

$$h_3(\mathbf{k}) = \frac{8\pi k_f}{(k^2 + k_f^2)^2}$$

— фурье-образ функции $\exp(-k_f r)$.

Как видно из (3.14), при критической интенсивности шума

$$\Theta_c = \frac{p_1}{b} Dk_f^2 \quad (3.20)$$

в среде происходит кинетический переход. Вблизи точки перехода устанавливающееся среднее по объему значение плотности $\langle n \rangle$ слабого вида есть

$$\langle n \rangle = \begin{cases} 0, & \Theta < \Theta_c, \\ \frac{bp_1}{R} \left(\frac{1}{\Theta_c} - \frac{1}{\Theta} \right), & \Theta \geq \Theta_c. \end{cases} \quad (3.21)$$

Обратим внимание, что критическая интенсивность шума Θ_c пропорциональна коэффициенту диффузии D и растет с увеличением подвижности **). Это имеет простое объяснение. Если подвижность слишком велика,

*) Последующий расчет показывает, что вблизи точки перехода, когда флуктуации δp велики по сравнению с p_1 , можно фактически пренебречь членом $b(p_1 - \tilde{p})\delta n$ в этом уравнении.

**) Величина D ограничена снизу условием (3.14), при котором выведено выражение (3.20) для Θ_c .

особи слабого вида проходят очень быстро через области размножения, где $p > p_1$, и не могут эффективно воспользоваться избытком пищи внутри области размножения. С учетом (3.3) выражение (3.20) можно также представить в виде

$$(\langle \delta M^2 \rangle_{0, \text{кр}})^{1/2} = p_1 \frac{l}{r_t}, \quad (3.22)$$

где $l = (D/bp_1)^{1/2}$ — среднее диффузионное смещение за время вымирания $(bp_1)^{-1}$ слабого вида в стационарном состоянии (3.4). Таким образом, на пороге перехода среднеквадратичная флуктуация плотности пищи $(\langle \delta M^2 \rangle)^{1/2}$ не просто равна нехватке пищи p_1 для слабого вида, а превышает эту величину в такое число раз, насколько диффузионная длина l больше среднего радиуса r_t отдельной области размножения.

В точке перехода корреляционный радиус r_c , определяемый по реакции системы на введение внешнего источника плотности n , расходится:

$$r_c = l \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_c} \right)^{-1/2}. \quad (3.23)$$

Имеет место также эффект критического замедления. Отметим, что само уравнение (3.13) применимо лишь вблизи точки перехода, когда характерное время релаксации

$$\tau_c = (bp_1)^{-1} \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_c} \right)^{-1} \quad (3.24)$$

значительно превышает «микроскопические» временные масштабы задачи.

Проведенное рассмотрение основывалось на допущении об относительной малости флуктуаций плотности n . Проверим теперь оправданность такого допущения. Исходя из линеаризованных уравнений (3.11), нетрудно рассчитать средний квадрат флуктуаций $\langle \delta n^2 \rangle_\eta$. Вблизи точки перехода, когда величина η достаточно мала, он определяется выражением *)

$$\langle \delta n^2 \rangle_\eta = \Theta b^2 \sqrt{\frac{2}{\omega_0 (Dk_t^2)^3}} \eta^2. \quad (3.25)$$

Подставляя сюда в качестве Θ критическую интенсивность шума Θ_c , находим

$$\frac{(\langle \delta n^2 \rangle_\eta)^{1/2}}{\eta} = 2^{1/4} \left(\frac{bp_1}{\omega_0} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega_0}{Dk_t^2} \right)^{1/4}. \quad (3.26)$$

Следовательно, при выполнении неравенств (3.14) условие слабости флуктуаций (критерий Гинзбурга — Леванюка) справедливо вплоть до самой точки перехода. К аналогичному выводу мы пришли в п. 2.5 при обсуждении иного примера кинетического перехода типа «заселения среды» в трехмерном случае.

Частично линеаризованные уравнения (3.6) получены в предположении $\langle q^2 \rangle \ll 1$ и $\langle p^2 \rangle \ll 1$. Нетрудно проверить, что оно выполнено, если $\Theta_c \ll \ll \min(v/B, A/B)$. Последнее условие накладывает определенные ограничения на коэффициенты исходной модели.

4. ДИФУЗИЯ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЛОВУШКАМИ

В предыдущих разделах мы рассматривали критические явления в средах, в которых либо скорости размножения имели случайно флуктуирующие добавки либо размножение происходило в случайно возникающих центрах

*) Вновь напомним, что рассматриваемые нами флуктуации имеют внешнее происхождение, а поэтому коррелятор флуктуаций плотности не расходится при совпадающих аргументах.

размножения. Мы убедились в том, что даже если в среднем распад преважает над размножением, в среде может быть достигнута взрывная неустойчивость. Однако часто встречаются ситуации, когда по среде случайно распределены ловушки, в которых происходит захват частиц диффундирующего вещества. Такие задачи возникают при рассмотрении захвата экситонов примесями в кристаллах³⁶, в теории диффузионно-контролируемых реакций³⁷ и в ряде других приложений. Ниже мы рассмотрим такого рода задачу, причем основное внимание будет уделено проявлениям случайности распределения ловушек по среде.

Допустим, что в среде происходит диффузия частиц, которые могут захватываться случайно распределенными по объему среды ловушками и выбывать из дальнейшего процесса диффузионного блуждания. В континуальном пределе диффундирующее вещество описывается полем локальной концентрации частиц $n(\mathbf{r}, t)$, изменение которого со временем подчиняется уравнению

$$\dot{n} = -\alpha(\mathbf{r}) n + D \Delta n. \quad (4.1)$$

Коэффициент α пропорционален локальной концентрации ловушек, он характеризует скорость исчезновения частиц. Ловушки расположены в случайных независимых точках среды $\{\mathbf{r}_j\}$, так что

$$\alpha(\mathbf{r}) = \sum_j g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (4.2)$$

Среднее число ловушек в единице объема равно m .

Отметим, что модель (4.1) — (4.2) описывает также среду со случайно распределенными центрами распада.

Поскольку размножение отсутствует, средняя по объему плотность вещества $\langle n \rangle$ стремится с течением времени к нулю. Задача состоит в том, чтобы выяснить, по какому закону происходит уменьшение $\langle n \rangle$ со временем, если в начальный момент распределение частиц было однородным, т. е. $n(\mathbf{r}, 0) = n_0$.

Может показаться, что спадание будет экспоненциальным и характеризоваться средней по объему скоростью исчезновения $\langle \alpha \rangle$:

$$\langle n(t) \rangle = n_0 \exp(-\langle \alpha \rangle t). \quad (4.3)$$

Этот результат, однако, неверен. Его ошибочность видна из следующих рассуждений.

При случайном распределении ловушек всегда найдутся области, почти свободные от них. Исчезновение частиц, оказавшихся внутри больших пустых областей, происходит лишь благодаря тому, что при диффузионном блуждании частица может выйти за пределы такой области. Поэтому число частиц, исходно оказавшихся внутри достаточно больших пустых областей, будет уменьшаться чрезвычайно медленно. С течением времени именно эти частицы станут определять временную эволюцию средней плотности $\langle n(t) \rangle$.

Важная роль редких «пустых» областей, свободных от ловушек, отмечалась впервые в работе Балагурова и Вакса³⁸, в которой также был предложен метод расчета закона убывания средней плотности $\langle n \rangle$, основанный на аналогии с задачей о квантовом движении частицы в случайном потенциале. Недавно этот вопрос обсуждался в работе³⁹, где фактически повторены выводы³⁸.

Записывая уравнение (4.1) в форме

$$-\dot{n} = \mathcal{H}n \quad (4.4)$$

с линейным оператором

$$\mathcal{H} = -D\Delta + \alpha(\mathbf{r}), \quad (4.5)$$

мы вновь, как и в гл. 2, сводим задачу к изучению свойств уравнения Шредингера с мнимым временем и случайным потенциалом. Однако в отличие от ситуации, с которой мы встречались при расчете порога взрывной неустойчивости в среде с центрами размножения, потенциал $\alpha(\mathbf{r})$ в (4.5) неотрицателен (см. (4.2)). Из этого следует, что все собственные значения E_l , определяемые равенством

$$\mathcal{H}\psi_l = E_l\psi_l, \quad (4.6)$$

также неотрицательны, т. е. спектр оператора $\mathcal{H}$ имеет нижнюю границу $E = 0$. Это свойство спектра сохраняется при любой случайной реализации поля $\alpha(\mathbf{r})$. Согласно терминологии, принятой в теории уравнения Шредингера со случайным потенциалом (см. ¹⁴), значение $E = 0$ дает конечную флуктуационную границу спектра.

Вблизи границы $E = 0$ спектр оператора $\mathcal{H}$ дискретен. Значения E_l , близкие к границе, определяются флуктуациями потенциала, для которых α близко к нулю в больших пространственных областях, т. е. «пустыми» областями, свободными от ловушек. Как показано в ¹⁴, для пуассоновского случайного поля вида (4.2) вероятность обнаружения флуктуации с наименьшим уровнем E , близким к нулю, экспоненциально мала и с точностью до предэкспоненциальных множителей может быть оценена для среды с размерностью d как

$$p(E) = \exp(-\mu_d m E^{-d/2}), \quad (4.7)$$

где

$$\mu_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \varepsilon_d^{d/2}, \quad (4.8)$$

а ε_d есть энергия основного состояния в d -мерной потенциальной яме единичного радиуса с бесконечно высокими стенками.

Общее решение уравнения (4.1) может быть представлено в виде разложения *) по собственным функциям оператора

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_l C_l \psi_l(\mathbf{r}) \exp(-E_l t) + \int C_l \psi_l(\mathbf{r}) e^{-E_l t} dl \quad (4.9)$$

с коэффициентами C_l , определяемыми начальным условием $n(\mathbf{r}, 0) = n_0$:

$$C_l = n_0 \int \psi_l^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.10)$$

Медленнее всего убывают те слагаемые в (4.9), которые соответствуют дискретному спектру со значениями E_l , близкими к нулю. Собственные функции, отвечающие таким значениям E_l , локализованы на отдельных флуктуациях поля $\alpha(\mathbf{r})$, которые представляют собой большие области, свободные от ловушек. Подобные флуктуации, ввиду их редкости, следует рассматривать независимо. С точностью до предэкспоненциального множителя среднюю по объему плотность $\langle n \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ можно оценить как

$$\langle n(t) \rangle = n_0 \int_0^\infty p(E) e^{-Et} dE, \quad (4.11)$$

где вероятность $p(E)$ определена формулой (4.7).

Вычисление интеграла методом перевала дает

$$\langle n(t) \rangle = n_0 \exp[-\nu_d (Dtm^{2/d})^{d/(d+2)}], \quad (4.12)$$

где ν_d — численный коэффициент, зависящий от размерности среды.

*) В формуле (4.9) суммирование ведется по дискретному, а интегрирование — по сплошному спектру оператора $\mathcal{H}$.

Таким образом, учет вклада от пустых областей приводит к замене простого экспоненциального закона (4.3) на зависимость (4.12), которая характеризуется более медленным убыванием со временем. Детальный анализ показывает, что выражение (4.12) справедливо на достаточно больших временах, при $t \gg m^{-2/d} D^{-1}$.

В работе ³⁹ оценивалось среднеквадратичное смещение частиц за время t в пределе больших времен, и было получено выражение

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \left(\frac{Dt}{m} \right)^{2/(d+2)}. \quad (4.13)$$

При расчете предполагалось, что если частица захвачена ловушкой, ее координаты остаются постоянными. Среднеквадратичное смещение растет со временем за счет того, что некоторые частицы не успевают за время t попасть в ловушки. Длинные смещения отвечают частицам, оказавшимся внутри больших областей, свободных от ловушек.

В работе ³⁹ проводилось также численное моделирование рассматриваемой системы. Авторы исследовали блуждание на квадратной решетке с ловушками, занимающими одну восьмую долю от общего числа узлов в решетке. Частицы в последовательные моменты времени могли перескакивать в один из четырех соседних узлов. Попадая в узел с ловушкой, частица поглощалась ею. Моделирование процесса на ЭВМ показало, что на больших временах $\langle r^2(t) \rangle$ и логарифм среднего числа свободных частиц пропорциональны квадратному корню времени. Это поведение согласуется с предсказаниями (4.12) и (4.13). В то же время наблюдалось небольшое отличие в численных коэффициентах по сравнению с теоретическим результатом.

Как и во всякой диффузионной задаче, в рассматриваемом нами случае важную роль играет размерность среды d . Из формулы (4.12) видно, что $|\ln \langle n(t) \rangle| \sim t^{d/(d+2)}$. Поэтому в формальном пределе *) $d \rightarrow \infty$ восстанавливается результат $|\ln \langle n(t) \rangle| \sim t$, получаемый в рамках приближения среднего поля. Причина этого заключается в том, что с повышением размерности среды диффузия становится все более эффективной и вероятность того, что в течение достаточно длительного времени частица сможет оставаться внутри области, свободной от ловушек, уменьшается. В том же пределе среднеквадратичное смещение (4.13) на больших временах перестает зависеть от времени.

В последнее время отмечалось ⁴⁰, что статистические конфигурационные эффекты, подобные рассмотренному в настоящей главе, играют важную роль также и в определении долговременной асимптотики кинетики парных реакций $A + B \rightarrow C$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В математическом отношении задачи, возникающие при исследовании критических явлений в средах со случайным размножением, не менее интересны и глубоки, чем классические проблемы теории стационарных неупорядоченных сред. В настоящем обзоре мы попытались с помощью ряда простых моделей показать, в чем состоит специфика этих задач, и провели классификацию качественно различных типов критического поведения в таких системах. Многие вопросы остались еще не выясненными: фактически известны ответы на самые простые из них. Следует ожидать интересных результатов от приложения к этим задачам методов ренормгруппы и ϵ -разложения. Чрезвычайно интересным было бы построение и исследование дискретных схем перколяционного типа, более близко аппроксимирующих явления, наблюдающиеся в континуальных моделях со случайным размножением. Наконец, специфика многих конкретных приложений требует частичной модификации обсуждавшихся моделей.

*) Задачи о диффузии в многомерных средах возникают, например, в математических моделях биологической эволюции (см. ^{41, 42}).

Авторы хотят отметить, сколь многим они обязаны общению с И. М. Лифшицем, чей живой интерес и стимулирующие обсуждения оказали неоценимую поддержку. Мы благодарны И. Е. Дзялошинскому, М. И. Каганову, С. С. Моисееву и Я. Г. Синаю за полезные обсуждения и замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Собрание трудов.— М.: Наука, 1969.— Т. 1, с. 447; ДАН СССР, 1944, т. 44, с. 339.
2. Монин А. С.— УФН, 1978, т. 125, с. 97.
3. Чернов А. А.— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 2090.
4. Чернов А. А.— УФН, 1970, т. 100, с. 277.
5. Хакен Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.
6. Гапонов Г. Р., Грехов А. В., Рабинович М. И.— УФН, 1979, т. 128, с. 579.
7. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости.— М.: Мир, 1981.
8. Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах.— М.: Наука, 1983.
9. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания.— М.: Наука, 1974.
10. Странные аттракторы: Сб. статей.— М.: Мир, 1981.
11. Зельдович Я. Б., Харитон Ю. Б.— УФН, 1983, т. 139, с. 501.
12. Химическая кинетика и цепные реакции: Сб. статей.— М.: Наука, 1966.
13. Алексеев В. В.— УФН, 1976, т. 120, с. 647.
14. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем.— М.: Наука, 1982.
15. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников.— М.: Наука, 1979.
16. Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П. и др. Электронная теория неупорядоченных полупроводников.— М.: Наука, 1981.
17. Mikhailov A. S.— Phys. Lett. Ser. A, 1979, v. 73, p. 143.
18. Obukhov S. P.— Physica Ser. A, 1980, v. 101, p. 145.
19. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
20. Михайлов А. С., Упоров И. В.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1958.
21. Михайлов А. С., Упоров И. В.— ЖФХ, 1982, т. 56, с. 606.
22. Михайлов А. С., Упоров И. В.— ЖЭТФ, 1983, т. 84, с. 1481.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика: Нерелятивистская теория.— 3-е изд.— М.: Наука, 1974.
24. Wylie H. W.— Ann. Phys., 1961, v. 14, p. 193.
25. Татарский В. И.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 131.
26. Найфэ А. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
27. Львов В. С.— Известия вузов. Сер. «Радиофизика», 1975, т. 18, с. 1470.
28. Клячкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М.: Наука, 1980.
29. Волькенштейн М. В. Биофизика.— М.: Наука, 1981.
30. Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки.— М.: Наука, 1975.
31. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1.— М.: Наука, 1976.
32. Михайлов А. С.— ДАН СССР, 1978, т. 243, с. 786.
33. Mikhailov A. S.— Zs. Phys. Ser. B, 1981, v. 41, p. 277.
34. Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул.— М.: Мир, 1973.
35. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.— М.: Наука, 1976.
36. Агранович В. М., Галапин М. Д. Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах.— М.: Наука, 1978.
37. Эйринг Г., Лин С. М., Лин С. Г. Основы химической кинетики.— М.: Мир, 1983.
38. Балагуров Б. Я., Вакс В. Г.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 1939.
39. Grassberger P., Procaccia I.— J. Chem. Phys., 1982, v. 77, p. 6281.
40. Zeldovich Ya. B., Ovchinnikov A. A.— Chem. Phys., 1978, v. 28, p. 215.
41. Эйген М., Шустер П. Гиперцикл.— М.: Мир, 1982.
42. Ebeling W., Feistel R. Physik der Selbst-Organisation und Evolution.— Berlin: Akademie-Verlag, 1982.