

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

539, 145

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ НА ЭВМ**Э. В. Шуряк****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	309
2. Квантовая механика и статистическая физика	310
3. Статистические системы на ЭВМ	312
4. Некоторые примеры	313
5. Заключение	316
Цитированная литература	317

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционная формулировка квантовой механики, к которой привыкли специалисты по физике атомов, молекул, ядер и т. д., основана на понятии волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера. Однако применение такого подхода в случае нескольких степеней свободы, не допускающих разделения переменных, наталкивается на большие трудности. В силу этого на практике приходится прибегать к различным упрощающим предположениям, степень обоснованности которых очень трудно проверить.

В квантовой теории поля, в которой число степеней свободы бесконечно, использование шредингеровской волновой функции очевидно бесперспективно, так что с самого начала были начаты поиски других путей.

Альтернативная формулировка квантовой теории, использующая функциональные интегралы, была предложена Фейнманом¹. Именно с ее помощью он впервые вывел знаменитые правила диаграммной техники, получившие распространение далеко за пределами квантовой электродинамики. Использование такого подхода в квантовой теории поля является в настоящее время стандартным.

К сожалению, только функциональные интегралы гауссова типа допускают аналитическое вычисление, что сильно ограничивает полезность метода.

В последние годы произошел качественный сдвиг в этом вопросе — интегралы по квантовым полям научились вычислять на ЭВМ. Основным направлением развития этого подхода стало изучение современной теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики, в частности вычисление масс пиона, протона и т. п. из первых принципов. Хотя сделано здесь немало, но все же для прямого решения этой задачи имеющиеся вычислительные мощности и, главное, искусство теоретиков оказываются пока недостаточными.

Цель настоящих заметок — не обзор этих работ, а попытка привлечь внимание широкого круга теоретиков к методической стороне вопроса, поскольку мне представляется совершенно несомненным, что мощь и простота такого подхода обеспечит ему большое количество приложений в самых

различных областях квантовой физики. Разумеется, для ее достижения желательно обсудить основы метода, используя самые простые примеры.

Заканчивая введение, хотелось бы отметить определенные психологические и организационные сдвиги, происходящие в связи с активным применением численных методов в теории элементарных частиц. Можно с уверенностью заключить, что сходные явления возникнут и в других областях.

Сегодня не приходится убеждать кого-либо в пользу ЭВМ — почти каждый физик пользуется ими в повседневной работе. Однако в большинстве случаев такие расчеты играют вспомогательный характер (например, численно оценивается какой-либо интеграл и т. п.), и для них не требуется специальных знаний (например, используется простой метод Монте-Карло, основанный на случайном «бросании» аргумента).

Однако для решения достаточно сложных задач оказывается необходимым более глубокое знание *алгоритмов вычислений*, которые могут качественно изменить весь подход к проблеме. Хорошим примером является материал настоящей работы. В математическом плане речь идет об оценке интегралов (точнее — о моделировании подынтегральной функции) с очень большим (10^2 — 10^6) числом переменных, что совершенно нереально при использовании обычных методов интегрирования. Адекватный алгоритм был предложен еще 30 лет назад³, причем физиками. Тем не менее его широкое использование в обсуждаемом контексте только начинается.

Дело не ограничивается тем, что физики-теоретики освоили соответствующие алгоритмы. Они активно включились в процесс развития этих алгоритмов, подобно тому, как теоретическая физика прошлого века развивала методы решения дифференциальных уравнений «математической физики». Дошло до определенных организационных решений — так выделилась отдельная серия журнала «Nuclear Physics» под названием «Теория поля и статистические системы», почти целиком посвященная численным методам.

2. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Названные в заглавии этой главы разделы теоретической физики решают, разумеется, различные задачи. В первом случае вычисляется амплитуда вероятности определенного динамического процесса, развивающегося во времени. Во втором — стандартной задачей является вычисление вероятности осуществления той или иной конфигурации системы в стационарном (равновесном) состоянии. Существует, однако, некая связь между этими задачами, хотя довольно формальная, но весьма плодотворная, на которой мы и собираемся остановиться.

В качестве простейшего квантово-механического процесса выберем распространение частицы из точки x_i в точку x_f за время t_0 . Амплитуда вероятности записывается следующим образом:

$$G(x_i, x_f, t_0) = \left\langle x_f \mid \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_0 \right) \mid x_i \right\rangle = \int Dx(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right\}. \quad (1)$$

Первая запись использует традиционные векторы состояний и оператор Гамильтона \hat{H} , вторая — фейнмановский интеграл по путям и действие $S[x]$.

Если потенциал $V(x)$ не зависит от времени, то возможен переход к мнимому (или, как говорят, евклидову) времени $\tau_0 = -it_0$, так что осциллирующие функции в (1) заменяются на экспоненциально падающие. Тут-то и появляется аналогия с Больцмановским фактором $\exp(-\hat{H}/T)$, где роль температуры играет \hbar/τ_0 .

Развить эту аналогию помогает построение статистической аналоговой системы, для чего евклидово время τ_0 удобно дискретизовать. Разобъем интервал его изменения $(0, \tau_0)$ на $N + 1$ отрезков длины $a = \tau_0/(N + 1)$

и будем характеризовать траекторию набором N точек *) $x_k = x (\tau = ak)$, $k = 1 \dots N$. Согласно определению интеграла по путям, он равен пределу при $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ от N -кратного интеграла по x_k . Однако мы пока не будем устремлять N к бесконечности и попытаемся перейти на язык статистической механики при конечном N .

В нашем примере аналоговой системой является одномерная решетка с шагом a , в узлах которой заданы «спины» x_k , $k = 0, 1, \dots, N + 1$, принимающие любые действительные значения. Заменив производную по времени на конечную разность, мы получаем гамильтониан («евклидово действие») в виде

$$\bar{H} = \sum_{k=0}^N \left[\frac{m}{2a} (x_{k+1} - x_k)^2 + aV(x_k) \right]. \quad (2)$$

Разумеется, аппроксимировать производную можно и точнее — при этом получается иная система, в которой не только соседние «спины» взаимодействуют друг с другом.

В некоторых случаях — например, в теории калибровочных полей — построение аналоговой системы⁴ оказывается не простым делом, так как желательно сохранить точную симметрию задачи и при конечном N . Выбор «решеточного действия», аналога (2), тоже оказывается весьма важным и далеко не тривиальным вопросом.

Чтобы несколько привыкнуть к статистическому языку и понять, как собственно использовать пропагатор (1) при мнимых временах, обсудим несколько простейших вопросов.

Для решетки «спинов» естественным является наличие конечной длины корреляции $\tau_{\text{кор}}$ и стремление при $\tau_0 \gg \tau_{\text{кор}}$ распределения по x (в частности — средней плотности энергии на единицу длины) к некоторому равновесному значению. Что же отвечает этим величинам в квантовой задаче?

Вспомним в этой связи стандартное разложение пропагатора (1) по стационарным собственным функциям

$$G(x_f, x_i, \tau_0) = \sum_n \psi_n^*(x_i) \psi_n(x_f) \exp \left(-\frac{E_n \tau_0}{\hbar} \right). \quad (3)$$

При $\tau_0 \rightarrow \infty$ «выживает», очевидно, основное состояние, так что его характеристики описывает «длинная решетка». В частности, плотность энергии есть не что иное, как E_0 , энергия основного состояния. Длина корреляции характеризует расстояние до возбужденных уровней (так называемая «щель» в спектре). В частности, если для некоего оператора $A(x)$ ($c \langle 0 | A | 0 \rangle = 0$) измерить корреляционную функцию, то в силу

$$\langle A(\tau) A(0) \rangle \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} |\langle 1 | A | 0 \rangle|^2 \exp \left[(E_0 - E_1) \frac{\tau}{\hbar} \right] \quad (4)$$

его спадание с τ позволяет узнать как значение «щели», так и матричные элементы данного оператора. Именно так вычисляют массы и другие характеристики адронов в методе правил сумм⁵ и решеточных расчетах в КХД.

Наконец, примем периодические граничные условия $x_i = x_f = x$ и проинтегрируем (3) по x :

$$\int dx G(x, x, \tau_0) = \sum_n \exp \left(-\frac{E_n \tau_0}{\hbar} \right). \quad (5)$$

Мы получили буквально статсумму при температуре $T = \hbar/\tau_0$. Итак, решетка конечной длины дает нам информацию о поведении квантовой системы при конечной температуре! Именно так изучается поведение вещества при высоких температурах $T = 200$ МэВ, при которых происходит переход в состояние кварк-глюонной плазмы и «плавятся» адроны.

*) Отметим, что $x_0 = x_i$, $x_{N+1} = x_f$ фиксированы.

Несколько слов о пределе $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$, который отвечает переходу от решетки к непрерывному случаю. Разумеется, корреляционная длина $\tau_{\text{кор}}$, имеющая буквальный физический смысл, должна стремиться к определенному предельному значению.

В терминах решеточной модели такое поведение означает, что $\tau_{\text{кор}}$ становится сколь угодно больше шага решетки a . В статистических системах появление таких длинноволновых флуктуаций возможно только вблизи точек фазового перехода — вспомним классическое явление критической опалесценции. Более того, именно в точках фазового перехода появляется универсальность динамики — независимость поведения системы от конкретной структуры вещества на атомном масштабе.

В обсуждаемом контексте квантовых интегралов по путям универсальность имеет очень простой смысл — ответ не должен зависеть от конкретного вида аппроксимации траектории и действия на малом размере шага по времени a .

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА ЭВМ

Итак, сформулировав решеточную аналоговую систему, мы приступаем к ее численному анализу. Очевидный вопрос, возникающий на первом же шаге: какого порядка N (число «спиновых» переменных) нам реально понадобится?

Допустим, нас интересует основное состояние. При этом требуется

$$\tau_0 \gg \tau_{\text{кор}}. \quad (6)$$

С другой стороны очевидно, что только при достаточно малом шаге

$$\tau_{\text{кор}} \gg a \quad (7)$$

можно надеяться на аккуратное описание системы. Считая, что каждое неравенство отлично на порядок, получаем минимально приемлемое $N \sim 10^2$. Нетрудно убедиться, что обычный метод Монте-Карло — случайные бросания — имеет практически нулевую эффективность для вычисления интегралов такой кратности. Бросать точки нужно не случайно!

Приступая к описанию более эффективных статистических алгоритмов, мы должны начать с того, что вместо собственно вычисления интеграла

$$\int W(x) dx \quad (8)$$

мы генерируем ансамбль точек $\{x\}$ с весом $W(x)$. С его помощью нетрудно вычислить средние вида

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(x) W(x) dx}{\int W(x) dx}, \quad (9)$$

как простые арифметические средние по ансамблю. Обычно $W(x)$ много сложнее, чем $f(x)$, что и оправдывает такой образ действия.

В случае одной переменной x обычно используется метод Неймана. Выберем на части плоскости x, y (отвечающей области изменения x и $W(x)$) точку с равномерным весом. Если $y < W(x)$ (т. е. точка лежит под кривой), то берем ее в ансамбль $\{x\}$, в противном случае — отвергаем. Повторив эту процедуру много раз, мы получаем набор точек с данным весом.

В многомерном случае эффективность этого метода мала, так как существенная область параметров составляет ничтожную долю всего объема. Решающая модификация метода состоит в замене случайного бросания точки x на случайный сдвиг ее предыдущего значения. В частности, метод Метрополиса³ состоит в последовательном применении описанной выше процедуры к каждой координате x_k по очереди. Величина сдвига определяется из условия того, что изменение $W(x)$ порядка единицы.

В последнее время стал активно обсуждаться вариант с малым шагом, так что процесс блуждания (в некотором «машинном» времени) точки описывается уравнением Ланжевена:

$$\dot{x}_k = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta x_k} + \eta_k(t), \quad \langle \eta_k(t) \eta_{k'}(t') \rangle = 2\delta_{kk'}\delta(t-t'), \quad (10)$$

где $\eta_k(t)$ — гауссова случайная сила с дельта-функциональным коррелятором. Хотя малый шаг приводит к увеличению времени счета, корреляционные функции получаются лучше; см. по этому поводу работу⁶.

Наконец, иногда используется метод «тепловой ванны», в которой значение x_k ищут при фиксированных остальных переменных x_i , $i \neq k$, прямо «обратив» вес $\bar{W}(x)$.

Добавим, что последовательный перебор всех переменных называется итерацией (или «встряхиванием») системы, при ее последовательном многократном повторении происходит релаксация начальной конфигурации к некоторому равновесному ансамблю, о чем сигнализирует выход средних на их предельные значения.

Ошибки могут пропасть от недостаточной релаксации, недостаточной статистики набранных в ансамбль конфигураций и, наконец, от специфических эффектов дискретизации системы. Ясно, что оптимально организованный расчет удерживает все виды ошибок на одном и том же заранее заданном уровне.

Как видно из сказанного выше, методы просты по своим идеям. Их реализация в виде программ доступна каждому. Тот факт, что они стали использоваться в квантовой механике только сейчас, — явное следствие инерции мышления и недостатка образования.

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Как уже говорилось, основные приложения метода связаны с четырехмерными решеточными моделями калибровочных теорий, первые из них выполнены М. Крайцем⁷. В настоящее время «атака на КХД» с использованием самых мощных ЭВМ мира привела к изучению статистических систем с числом степеней свободы, достигающим 10^5 — 10^6 (т. е. квантовых систем с $\sim 10^4$ степенями свободы!). Конечно, это, само по себе, большой успех теории. Однако после извлечения корня четвертой степени мы получаем решетки из 0 (10) шагов по каждой оси, чего, как уже отмечалось, недостаточно. Для дальнейшего прогресса в этом вопросе нужны новые машины или новые идеи.

К счастью, в физике есть множество гораздо более простых задач, ожидающих своего решения. К ним относятся, например, задачи квантовой механики с несколькими степенями свободы, о которых мы и собираемся поговорить. Как мы увидим, они не требуют ни суперЭВМ, ни сложных программ.

Вычисления такого рода в задачах квантовой механики еще только начинаются. Первой была работа М. Крайца и Б. Фридмана⁸ из Брукхейвенской лаборатории (США), посвященная линейному и нелинейному одномерным осцилляторам. Ряд примеров возрастающей сложности обсуждается в работе О. В. Жирова и моей⁹, которой я и буду в основном пользоваться.

Следует также упомянуть первые работы, имеющие уже не иллюстративный, а прикладной характер. Б. Бунк и У. Вольф¹¹ исследовали одномерный ротор во внешнем (гравитационном) поле, с подробным изучением туннельного «поворота». В моей работе¹⁰ вычислялись функции Грина нерелятивистского кварка и антикварка, распространяющихся в сложных вакуумных полях. По очевидным причинам мы не останавливаемся на этих работах.

Начнем с одной из простейших и чрезвычайно поучительных задач квантовой механики — нелинейного осциллятора с двумя ямами. После перехода к мнимому времени действие имеет вид

$$S = \int d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + (x^2 - f^2)^2 \right]. \quad (11)$$

В гл. 3 говорилось, что энергию основного состояния системы можно вычислить, используя достаточно длинный «спиновый кристалл». Однако

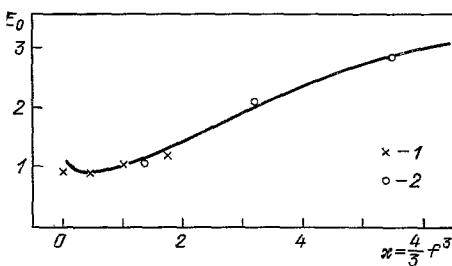


Рис. 1. Зависимость энергии основного состояния осциллятора с двумя ямами от параметра f (11).
1 — по работе ⁸, 2 — по работе ⁹.

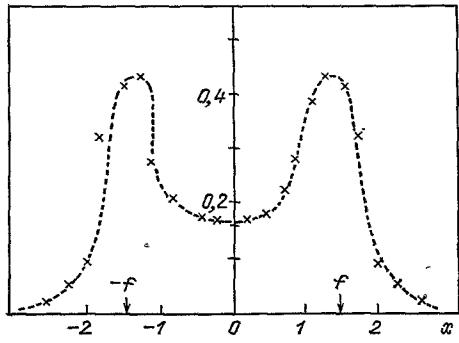


Рис. 2. Распределение по величине x в осцилляторе (11) с $f = 1,4^8$.
Кривая — точное значение $|\psi_0(x)|^2$.

при попытке прямого усреднения гамильтониана мы сталкиваемся с расходностью при $a \rightarrow 0$ средней кинетической энергии, оцененной наивным способом

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{\langle (x_{k+1} - x_k)^2 \rangle}{a^2} \sim \frac{\hbar}{am}. \quad (12)$$

В ⁸ предложена другая (конечная) формула, но гораздо проще пользоваться вириальной теоремой

$$E_0 = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{\mu=1}^D \frac{1}{2} x_\mu \frac{\partial V}{\partial x_\mu} + V(x) \right\rangle. \quad (13)$$

На рис. 1 и 2 показаны вычисленные по ансамблю траекторий $\{x_k\}$ энергия основного состояния и вероятность застать частицу в точке x ; последняя сравнивается с $|\psi_0(x)|^2$. Для получения таких результатов нужно $N \sim 100$ и несколько сот итераций — на весьма средней ЭВМ ЕС-1040 это занимает около минуты.

Один из важнейших методических вопросов — систематическая ошибка, связанная с введением конечного шага по времени a и конкретным видом решеточного действия. Как показано в ⁹, при достаточно большом a и «наивном» действии такая ошибка вызвана в основном специфическим «перескоком» через потенциальный барьер за один шаг. Заменив в действии $\sum_k V(x_k)$

на $\int V dt$ по ломаной, мы устранием это явление и резко повышаем точность вычислений. Сходные «решеточные инстантоны» известны и в более сложных задачах, в которых выбор оптимального действия принципиально важен.

Разумеется, эти вычисления важны только в методическом плане: в одномерном случае прямо решить уравнение Шредингера. Однако при наличии D переменных разностные методы требуют сетки с k^D узлами, где $k \approx 10-100$. Ясно, что возможности такого подхода резко ограничены.

Статистические методы интегрирования по путям в случае D степеней свободы просто увеличивают число «встряхиваемых» переменных, так что (не учитывая, правда, усложнения действия) объем вычислений растет с D всего лишь линейно.

На рис. 3 показаны оценки энергий основных состояний простейших атомов с одним и двумя электронами, полученные в работе ⁹. Упрощение задачи — выделение угловых переменных — не производилось, так что рассчитывались траектории, соответственно, в трех- и шестимерных пространствах. Разумеется, как и во всех численных методах, желательно «сгладить» сингулярность кулоновского потенциала на малых расстояниях. Другая возникшая проблема — «ионизация» атома при достаточно долгом наборе статистики. Дело в том, что, как говорилось в гл. 3, конечное τ_0 означает ненулевую температуру $T = \hbar/\tau_0$. Особенность кулоновского потенциала — сгущение уровней к нулю — облегчает ионизацию. Простейший способ борьбы с ним — запретить электронам уходить на расстояния больше некоторого R , т. е. явно обрезать «хвосты» волновых функций.

В работе ⁹ предприняты также попытки первых вычислений свойств легких ядер, до He^4 включительно. Как показали эти расчеты (включающие до 12 степеней свободы), существенной для них особенностью ядерных систем является их «рыхлость» — энергии связи на частицу и расстояния между уровнями порядка нескольких МэВ, что много меньше характерных параметров потенциала. Это означает, что требования на $T = \hbar/\tau_0$ особенно сильны, иначе наблюдается «испарение» нуклонов в процессе вычисления. Величина N нужна порядка нескольких сотен, а полное число «спиновых» переменных на решетке достигает 10^4 (что всего на один-два порядка меньше, чем в вычислениях в КХД!) и требует времени счета порядка часов на ЕС-1040. Однако наблюдается уверенная релаксация ансамбля при самых различных потенциалах, с твердым «кором» или без него.

Наконец, в некоторых случаях бывает нужна амплитуда распространения в абсолютной нормировке. Простейший способ — усреднить фактор, связанный с потенциалом, нормируясь на известный пропагатор свободной частицы

$$G(x_f, x_i, \tau_0) = G_0(x_f, x_i, \tau_0) \left\langle \exp \left[- \int_0^{\tau_0} V d\tau \right] \right\rangle. \quad (14)$$

Этот способ можно применять и в случаях, когда частица имеет внутренние степени свободы — спин или цвет, так что потенциал V является матрицей *). Недавно с его помощью удалось продвинуться ¹⁰ в весьма трудной задаче правил сумм для тяжелых кварк-антикварков, в которых $\bar{q}q$ -пара распространяется в сложных цветных вакуумных полях, при этом кулоновские взаимодействия между собой.

*.) Напомним, что статистические методы генерации ансамбля не могут быть применены для неположительной весовой функции.

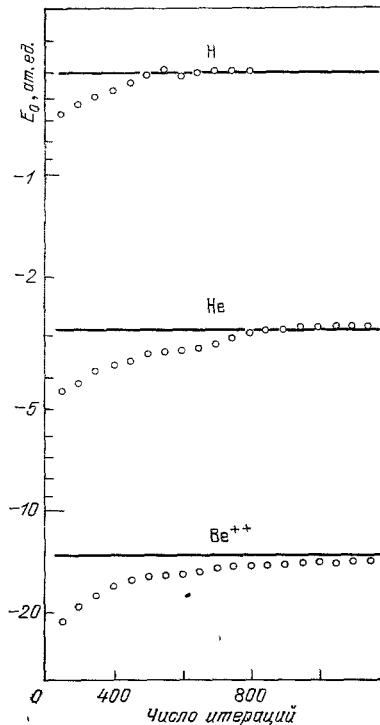


Рис. 3. Энергия основных состояний атомов с одним и двумя электронами в зависимости от числа итераций ⁹.

Ясно, однако, что усреднение фактора, сильно отличающегося от единицы, — дело трудное, требующее большого набора статистики для подавления статистических шумов. Эту трудность можно обойти при помощи адабатического включения взаимодействия, предложенного в⁶. Введем в действие параметр ξ , меняющийся от 0 до 1:

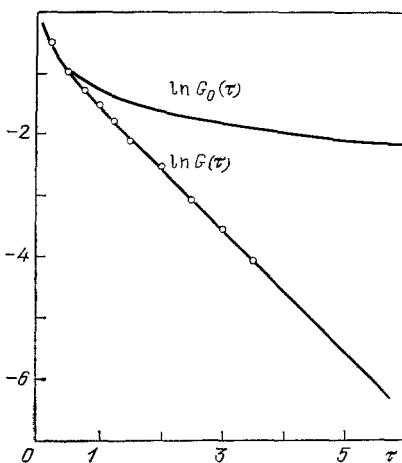


Рис. 4. Функция Грина линейного осциллятора, полученная по формуле (16) (значки), сравнивается с точным значением (нижняя кривая). Для сравнения показано поведение G_0 (верхняя кривая).

многомерных квантовых задач, заведомо недоступных для прямого решения уравнения Шредингера. Говорить о его потенциальных приложениях весьма трудно, но некоторые общие соображения все же можно привести.

Очевидной областью приложений является физика систем нескольких частиц — малонуклонных систем ядерной физики, молекул и т. п. В этой связи особенно хочется подчеркнуть возможность исследования молекул при конечной температуре — в традиционном подходе это требует неоправданно длинных вычислений энергетических спектров и явного вычисления статистической суммы. Наблюдавшиеся в описанных выше вычислениях тепловая «ионизация» атомов и развал ядер также, очевидно, представляют интерес для приложений.

По-видимому, можно говорить не только о таких «мономолекулярных» реакциях, но и о вероятностях бинарных соударений молекул с определенной химической реакцией, — следует начать с какой-либо траектории атомов, ведущих из заданного начального состояния в заданное конечное, а ЭВМ выберет оптимальную траекторию. Иначе говоря, речь идет о вероятности проникновения сквозь сложный многомерный барьер (в пространстве координат всех атомов).

Поговорим теперь о том, чего данный метод делать не может. Фундаментальной особенностью статистических методов генерации ансамбля является вероятностная интерпретация весовой функции, которая не может быть знакопеременной. Именно поэтому нельзя пользоваться ими в обычном (не евклидовом) времени и изучать нестационарные задачи с явной зависимостью от времени. По этой же причине мы получаем информацию главным образом об основном и низколежащих возбужденных состояниях, а не о всех уровнях энергии. Далее, наличие тождественных частиц требует симметризации или антисимметризации путей. Последний (фермионный) случай дает неположительный вес, так что работать с ним также нельзя. Именно

$$S_\xi = \int d\tau \left[\frac{mx^2}{2} + \xi V(x) \right]. \quad (15)$$

Среднее значение проинтегрированного потенциала — производная статсуммы по ξ ; интегрируя это соотношение, имеем

$$G = G_0 \exp \left[- \int_0^1 d\xi \left\langle \int d\tau V(x) \right\rangle_\xi \right], \quad (16)$$

где индекс ξ у скобок означает усреднение с действием (15). Замена усреднения экспоненты на усреднение ее показателя позволяет пользоваться этим методом, даже когда отличие G от G_0 значительно; см., например, рис. 4.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные примеры убедительно показывают большую потенциальную силу и универсальность метода для решения

необходимость учета принципа Паули ограничивала наши расчеты атомов и ядер.

Наконец, последнее замечание, которое практически немаловажно. В данной статье речь идет не об экзотическом способе вычислений, требующем суперЭВМ и демонстрирующем достижения современной техники. Как подчеркивалось в тексте, используемые в разобранных случаях вычислительные средства практически доступны большинству физиков. Не требуется и специальных систем программ — сказанного выше вполне достаточно для самостоятельного написания работающей программы моделирования, а знание деталей приходит с опытом. Короче, речь идет об одном из методов вычислений, необходимых в повседневной работе физика-теоретика.

Автор благодарен О. В. Жирову, в сотрудничестве с которым выполнены обсуждавшиеся выше расчеты.

Институт ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. — N.Y.; McGraw-Hill, 1965; перевод: Квантовая механика и интегралы по путям. — М.: Мир, 1968.
2. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S. — Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 85.
3. Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A., Teller E. — J. Chem. Phys., 1953, v. 21, p. 1087.
4. Wilson K. — Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 10, p. 1974.
5. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. — Nucl. Phys., 1979, v. 147, p. 385.
6. Parisi G. — Ibid. Ser. B, 1981, v. 180 (FS2), p. 337.
7. Creutz M. — Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2308.
8. Creutz M., Freedman B. — Ann. Phys. (N.Y.), 1981, v. 132, p. 427.
9. Shuryak E. V., Zhurov O. V. Preprint of Nuclear Physics Institute (INP) 83-47. — Novosibirsk, 1983.
10. Shuryak E. V. Preprint INP 83-413. — Novosibirsk, 1983.
11. Bunk B., Wolff U. — Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 215 (FS7), p. 496.

