

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

537.311.3

**СПЕКТРЫ И КИНЕТИКА СИСТЕМ
С МАГНИТОПРИМЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ
ПРИ КОНЕЧНОМ РАДИУСЕ ПОТЕНЦИАЛА****С. П. Андреев****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	213
2. Энергетические спектры магнитопримесных состояний слабосвязанного электрона (изотропная эффективная масса)	216
а) Особенности движения слабосвязанного электрона во внешнем магнитном поле	216
б) Структура энергетического спектра	217
в) Магнитопримесные состояния на атомах водорода	219
3. Спектр слабосвязанного электрона Ландау при резкой анизотропии эффективной массы	219
4. Фотопоглощение на магнитопримесных состояниях электрона с изотропной эффективной массой	221
5. Магнитопримесные осцилляции при резко анизотропном энергетическом спектре носителей	225
6. Поперечная проводимость на дефектах конечного радиуса	228
а) Общая формула поперечной проводимости	228
б) Случай экранированного кулоновского потенциала примеси	229
в) Примесные осцилляционные эффекты	231
7. Эксперименты	232
а) Магнитопримесные осцилляции в эффекте де Гааза — ван Альфена	232
б) Фотоотрыв электрона с магнитопримесных состояний D-примесей	233
Приложение	236
Цитированная литература	238

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость рассмотрения взаимодействия носителей заряда с примесями в сильных магнитных полях возникает при изучении различного рода явлений в астрофизических объектах, плазме, твердом теле. Специфической особенностью такого взаимодействия является возможность появления особых квантовомеханических состояний, структура которых определяется как магнитным полем, так и конкретным видом примесного потенциала. Такие магнитопримесные (МП) состояния при определенных условиях могут обуславливать всю кинетику в веществе, приводя к целому ряду новых физических явлений: нетривиальным осцилляционным зависимостям кинетических коэффициентов от напряженности магнитного поля — как в статических, так и в переменных во времени электромагнитных полях; очень специфическому поведению продольной и поперечной проводимостей и коэффициентов поглощения в низкотемпературной области, где проявляются резонансные эффекты рассеяния носителей на МП состояниях; образованию дополнительных каналов резонансного поглощения и т. д.

На протяжении длительного времени изучение примесных состояний носителей и кинетических явлений в веществах с такими состояниями в квантовых магнитных полях было в основном ограничено задачей кулоновского

примесного потенциала. В то же время характер МП состояний заряженных частиц в примесном потенциале конечного радиуса действия оставался мало исследованным. В значительной мере это объясняется тем, что такие состояния в отличие от кулоновских реализуются в намного более жестких условиях — при низких температурах и малых концентрациях примесей. Поэтому имевшиеся экспериментальные данные долго не создавали достаточного стимула для интенсивных теоретических исследований в указанном направлении.

Впервые на существование МП состояний электрона на нейтральных примесях указал в 1960 г. Бычков¹. Им было предсказано, что в присутствии магнитного поля сколь угодно мелкий примесный потенциал притяжения, даже нулевого радиуса, связывает заряженную частицу. Однако экспериментальное подтверждение возможности образования таких состояний было дано лишь в 1967 г. Брандтом и Любутиной², обнаружившими биения в эффекте де Гааза — ван Альфена в висмуте, обусловленные возникновением МП состояний носителей на нейтральных примесях. Затем появилась серия экспериментов, свидетельствующих об определяющей роли подобных состояний в кинетике низкотемпературных процессов³⁻⁵. Они дали импульс построению последовательной теории этого класса явлений, причем их картина оказалась намного богаче, чем в случае кулоновского примесного потенциала. Это объясняется, во-первых, разнообразием энергетических спектров МП состояний на примесях конечного радиуса, связанным с возможностью различных соотношений между радиусом экранирования примеси, боровским радиусом a_B и магнитной длиной, меняющихся в реальных веществах в широких пределах. Во-вторых, динамика поведения таких МП энергетических уровней намного более чувствительна к изменению напряженности магнитного поля и глубине примесного потенциала, чем в аналогичной ситуации кулоновской задачи. В-третьих, помимо магнитного поля и вида потенциала примеси характер МП состояний определяется конкретной зонной структурой вещества, что наиболее сильно проявляется именно в МП состояниях потенциала конечного радиуса. Так, например, при резко анизотропной эффективной массе носителей заряда само число МП уровней регулируется величиной параметра анизотропии эффективной массы. Картина рассеяния заряженных частиц на нейтральных примесях в квантующем магнитном поле также очень любопытна, поскольку энергетическая зависимость амплитуды рассеяния электрона на изолированной примеси отражает все детали структуры спектра МП состояний.

Указанные особенности энергетических спектров непосредственно проявляются в кинетических коэффициентах, определяемых взаимодействием носителей с нейтральными примесями. Резонансные эффекты рассеяния носителей, обусловленные наличием МП состояний, приводят к возникновению пиков или «провалов» коэффициента поглощения в определенных интервалах частот. В статических полях при энергиях носителей, соответствующих энергиям МП уровней, происходит смена температурно-полевых зависимостей кинетических коэффициентов — продольной и поперечной проводимостей, в соответствии с различным характером электрон-примесного взаимодействия в разных температурных областях. Это же относится и к зависимости коэффициента поглощения в ряде веществ: в отдельных интервалах изменения напряженности магнитного поля H рост поглощения может смениться спадом, что связано с исчезновением или появлением МП уровней при изменении H . В веществах с резко анизотропной эффективной массой носителей в квантующем магнитном поле все кинетические коэффициенты осциллируют с «нестандартной» ($\propto \sqrt{H}$) зависимостью периода осцилляций от напряженности поля. Осцилляции обусловлены переходом МП уровней в непрерывный спектр и прозрачностью эффективного одномерного потенциала примесей в условиях МП уровня нулевой энергии. Наконец, отметим, что температурно-полевые зависимости проводимостей существенно определяются глубиной потенциала

(U) нейтральных примесей, причем в определенных ситуациях имеет место осцилляционная их зависимость от U , возникающая за счет присутствия магнитного поля.

Построение последовательной теории перечисленных явлений потребовало выхода за пределы борновского приближения по взаимодействию носителей с примесями, в основном использовавшегося при расчете кинетических коэффициентов в течение более чем 20 лет. Это в свою очередь привело к пониманию многих деталей электрон-примесного взаимодействия в квантовых магнитных полях.

Настоящий обзор посвящен изложению результатов теоретических и экспериментальных исследований энергетических спектров и кинетических явлений в веществах с МП состояниями на примесях конечного радиуса действия потенциала. Последовательность рассмотрения и круг затрагиваемых вопросов следующие. В гл. 2—3 мы обсудим структуру спектров МП состояний различного типа отрицательных ионов: 1) спектр частицы с изотропной эффективной массой в потенциале нейтрального атома малого радиуса; 2) спектр МП состояний H^- -иона в сильном магнитном поле; 3) спектр электрона с резко анизотропной эффективной массой в потенциале короткодействующего примесного центра. Гл. 4 и 5 посвящены анализу осцилляционных эффектов в системах носителей с индуцированным полем МП состояниями. При этом в гл. 4 мы рассмотрим фотопоглощение на МП состояниях нейтральных примесей малого радиуса, но произвольной глубины. Будут исследованы частотно-полевые зависимости коэффициента поглощения на всех типах переходов носителей между квазисвязанными МП состояниями и состояниями непрерывного спектра, а также его зависимость от глубины потенциала примесей. В гл. 5 изучаются магнитопримесные осцилляции кинетических коэффициентов в веществах с резко анизотропной эффективной массой носителей заряда. Мы покажем, что все кинетические коэффициенты, как в статических, так и переменных полях с изменением H испытывают специфические осцилляции, период которых пропорционален корню квадратному из напряженности магнитного поля.

При поглощении света на МП состояниях в таких системах ход кривой поглощения зависит от четностей начального и конечного МП состояний, определяемых величиной напряженности магнитного поля. В гл. 6 дан обзор современной теории поперечных гальваномагнитных явлений, обусловленных взаимодействием¹ носителей с нейтральными примесями в квантовых магнитных полях.

Будет получена общая формула поперечной проводимости, выраженная через матричные элементы операторов рассеяния электрона на центре в аксиально-симметричной калибровке. Затем мы покажем, что в случае рассеяния электронов на кулоновских центрах с большим радиусом экранирования имеет место существенно различная температурная зависимость поперечной проводимости от характерных энергий носителей, радиуса экранирования примеси, ее борновского радиуса и напряженности магнитного поля. Такая перестройка связана с изменением характера рассеяния частиц на примесях от слабо возмущенного в области достаточно высоких температур до резонансного в далекой низкотемпературной области.

В этой же главе будут изучены осцилляции проводимости, возникающие при изменении глубины примесного потенциала малого радиуса. Наконец, в гл. 7 кратко изложены результаты эксперимента² и экспериментов³⁻⁵, в которых исследовалось фотопоглощение на МП состояниях D^- -примесей в $n\text{-CdS}$ ³, германии⁴ и кремнии⁵ в квантовых магнитных полях. В ходе изложения мы сопоставим имеющиеся на сегодняшний день экспериментальные данные с результатами теории.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ МАГНИТОПРИМЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ СЛАБОСВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОНА (ИЗОТРОПНАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА)

а) Особенности движения слабосвязанного электрона во внешнем магнитном поле

В начале этого раздела мы, следуя¹, покажем, что в магнитном поле сколь угодно мелкий примесный потенциал притяжения связывает заряженную частицу, а затем качественно изучим характер движения электрона Ландау в потенциале центра малого радиуса и произвольной глубины. Пусть электрон зоны Ландау N с малой энергией $E \ll \hbar^2/m^*r_c^2$ ($E = \hbar\omega_H [N + (1/2)] + (\hbar^2k^2/2m^*)$) рассеивается на примеси, описываемой потенциалом $U(r) < 0$ радиуса r_c , малого по сравнению с магнитной длиной электрона $L = \sqrt{\hbar/eH}$. Так как длина волны частицы велика по сравнению с радиусом примеси, то при вычислении амплитуды рассеяния мы сделаем замену

$$U(r) \rightarrow a_0 \frac{2\pi\hbar^2}{m^*} \delta(r), \quad (2.1)$$

a_l — длина рассеяния электрона с орбитальным моментом l на потенциале U при $H = 0$.

Амплитуда F_{mn} перехода электрона между состояниями m и n в магнитном поле сводится для потенциала (2.1) к сумме членов геометрической прогрессии, вычисляя которую, получаем

$$F_{mn} = a_0 \psi_m^*(0) \psi_n(0) \left\{ 1 + \frac{i\alpha}{kL} \left[1 - i\alpha 2^{-1/2} \sum_{M=0}^{M_{\max}} \left(\frac{E}{\hbar\omega_H} - \left(M + \frac{1}{2} \right) \right)^{-1/2} \right] \right\}^{-1}, \quad (2.2)$$

$\alpha \equiv a_0/L$ — безразмерная константа взаимодействия носителя с центром в магнитном поле. M_{\max} определяется из условия неотрицательности наименьшего слагаемого в круглых скобках (2.2).

Правая часть (2.2) имеет полюсы в плоскости комплексного k :

$$k \approx -i\alpha L^{-1} \left[1 - i\alpha \cdot 2^{-1/2} \sum_M (N-M)^{-1/2} \right], \quad (2.3)$$

соответствующие при $\alpha < 0$ и $|\alpha| \ll 1$ квазисвязанному МП уровню в зоне N . Этот уровень лежит ниже дна зоны Ландау N на глубине $\Delta E = -(\alpha^2/2) \hbar\omega_H$ и имеет ширину $\Gamma_N = 2^{-1/2} |\alpha|^3 \sum (N-M)^{-1/2} \hbar\omega_H$. Возникновение системы уровней (2.3) объясняется тем, что магнитное поле, ограничивая поперечное движение электрона, сводит эффективный потенциал центра к симметричному одномерному потенциалу, в котором при указанных значениях параметра α всегда есть мелкое квазисвязанное состояние. Появление мнимой части в энергии при $N \geq 0$ связано с возможностью ухода частицы в непрерывный спектр нижних $M < N$ зон Ландау. «Нестандартная» зависимость ширины от константы взаимодействия $\Gamma_N \propto \alpha^3$ является следствием фактической одномерности задачи. Результат (2.2) независимо был получен Скобовым⁶. Магнитопримесные состояния, полученные в приближениях работ^{1, 6}, соответствуют модели центра нулевого радиуса действия и теории возмущений по длине рассеяния.

Для потенциала U сколь угодно малого, но конечного радиуса $r_c \neq 0$, помимо уровня (2.3) под дном любой зоны Ландау возникает система мелких ($kr_c \ll 1$) квазисвязанных МП уровней^{7, 8}, классифицируемых по проекции момента электрона $m \neq 0$ на направление поля. При углублении потенциала примеси в спектре таких состояний возникает перестройка⁹⁻¹¹. Качественно картина этого явления такова: пусть в потенциале $U(r)$ есть мелкий уровень

с моментом l , так что в соответствующей волне рассеяние аномально велико. В отсутствие случайного вырождения по l энергетический интервал между уровнями, отвечающими различным значениям момента электрона, связанного на примеси, имеет порядок $\sim \hbar^2/m^*r_c^2 \gg \hbar\omega_H = \hbar^2/m^*L^2$, что означает малость их перемешивания полем. Поэтому орбитальный момент, несмотря на отсутствие сферической симметрии ($H \neq 0$), является почти «хорошим» квантовым числом. Обозначим эффективный радиус локализации слабосвязанного электрона при выключенном магнитном поле через R_l . Довольно очевидно, что для глубин примесного потенциала, при которых $R_l \ll L$, влияние магнитного поля на частицу в области ее локализации несущественно, и спектр определяется потенциалом U . В случае же больших радиусов локализации $R_l \gg L$ движение электрона в плоскости поперечной \mathbf{H} определяется магнитным полем, а вдоль \mathbf{H} — потенциалом центра, усредненным по такому движению. Поэтому при значениях U , для которых $R_l \gg L$, возникает перестройка энергетического спектра — небольшое изменение глубины центра существенно сказывается на энергии связи частицы.

б) Структура энергетического спектра

МП состояния электрона на мелкой ($|U| \ll \hbar^2/m^*r_c^2$) примеси малого ($r_c \ll L$) радиуса исследовались в ^{7, 8, 12, 13}, а на примесном потенциале произвольной глубины, аппроксимированном прямоугольной ямой малого радиуса, в ^{9, 10}. Модельно-независимый метод расчета спектров слабосвязанных

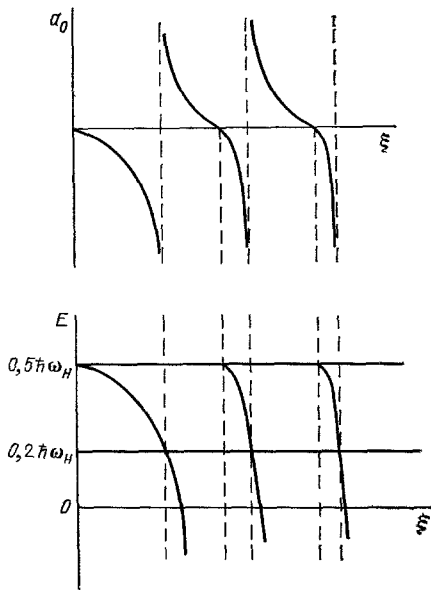


Рис. 1. Зависимость энергии МП уровня $l = m = N = 0$ от глубины примесного потенциала ¹⁰ ($\xi = \sqrt{m^*} |U| / \hbar^2 \cdot r_c$).

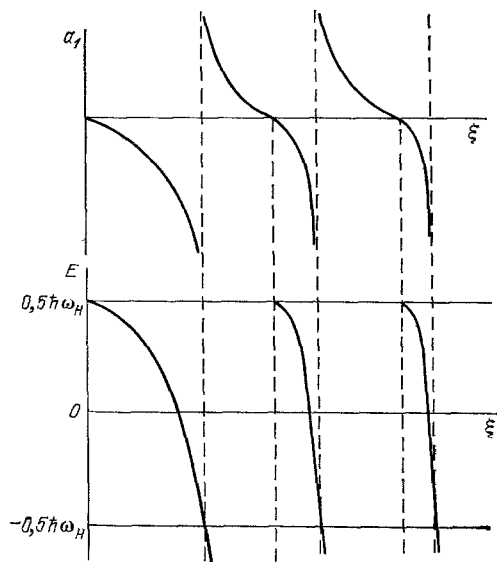


Рис. 2. Зависимость энергии МП уровня $N = 0$, $-m = l = 1$ от глубины примесного потенциала ¹⁰.

состояний частицы с произвольным моментом во внешних полях был развит в ¹¹ (см. Приложение). Опишем, следуя ⁷⁻¹⁴ *), общую картину поведения спектра МП состояний короткодействующего потенциала (см. рис. 1—3).

Спектр задается номером зоны Ландау N , орбитальным моментом l и проекцией момента m , не зависит от конкретного вида потенциала и опре-

*) В приближении потенциала нулевого радиуса состояния нижней зоны Ландау с $l = 0$ впервые детально были исследованы Демковым и Друкаревым ¹⁴.

деляется двумя параметрами центра — длиной рассеяния a_l и эффективным радиусом r_l ¹¹. Глубина залегания уровня с заданным m под дном зоны Ландау $N \ll L^2/r_c^2$ при малой глубине примесного потенциала степенным образом зависит от напряженности магнитного поля, имеет порядок величины ($m \leq 0$):

$$\Delta E_N^{m \leq 0} = -\frac{\alpha^2}{2} \hbar \omega_H \left(\frac{r_c}{L} \right)^{4|m|} \left[\frac{N+|m|}{2^{|m|} N! (|m|)!} \right]^2 \propto H^{2|m|+2} \quad (2.4)$$

и с ростом номера зоны N растет, в основном, пропорционально $N^{2|m|}$. Ширина этих уровней с ростом $|m|$ уменьшается по степенному закону⁸:

$$\Gamma_N^{m \leq 0} = \frac{|\alpha|^3}{\sqrt{2}} \hbar \omega_H \times \left(\frac{r_c}{L} \right)^{6|m|} \frac{(N+|m|)!}{2^{3|m|} N! (|m|)!^6} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N+|m|)! (k+|m|)!}{N! k! (N-k)!^{1/2}} \propto H^{3|m|+(5/2)} \quad (2.5)$$

и с ростом N растет $\propto N^{3|m|+(1/2)}$. Выражения для сдвига уровня и ширины при $m > 0$ получаются из (2.4) и (2.5) заменой $N+|m| \rightarrow N$. Согласно (2.4)

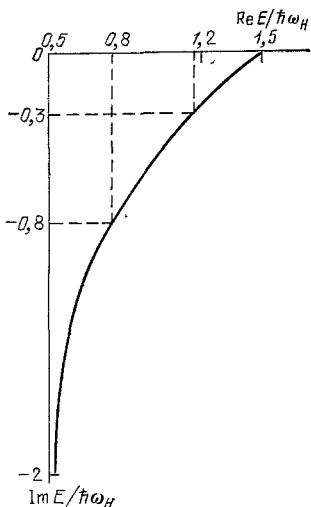


Рис. 3. Зависимость $\text{Re } E$ от $\text{Im } E$ для МП уровней $N=1$, $m=l=0$ ¹⁰.

и (2.5) под дном каждой зоны Ландау имеется лишь одно состояние, отвечающее данной проекции момента. Эта особенность является специфической для спектра МП состояний частицы с изотропной эффективной массой в короткодействующем потенциале.

По мере роста глубины потенциала примеси происходит понижение энергии МП уровней, а ширина их растет. Для состояний, характеризуемых нулевым моментом и $N > 0$, отщепление уровня от дна N -й зоны и его ширина быстро сравниваются (см. рис. 3), в то время как для высших $m \neq 0$ проекций момента ширина уровня вплоть до узкой области вблизи дна $(N-1)$ -й зоны Ландау меньше, чем его углубление¹⁵, — за счет центробежного барьера. При этом в любой зоне Ландау N имеется одно истинно связанное состояние с проекцией момента $m=N$. При стремлении ямы к любому из резонансов с данным l ($a_l \rightarrow \infty$) МП уровень с $|m|=l$ зоны N имеет фиксированную глубину залегания, зависящую от значения орбитального момента. С дальней-

шим ростом $|U|$ МП уровни произвольной зоны N «проваливаются» под дно нулевой зоны Ландау, переходя в собственно примесные состояния, отвечающие $H=0$.

Затем при глубинах потенциала, при которых длина рассеяния a_l обращается в нуль, под дном каждой зоны вновь возникают квазисвязанные МП уровни с проекциями момента $|m|=l$. При $a_l < 0$ и $|a_l| \ll L^{2l+1}$ отщепление их от дна зоны и ширина определяются формулами теории возмущений по длине рассеяния^{11, 27}:

$$\Delta E \propto \hbar \omega_H \left| \frac{a_l}{L^{2l+1}} \right|^2 \propto H^{2l+2}, \quad \Gamma_l \propto \hbar \omega_H \left| \frac{a_l}{L^{2l+1}} \right|^8 \propto H^{3l+5/2}, \quad (2.6)$$

полностью соответствующими результатам (2.4)–(2.5) для случая мелкой примеси. В точном резонансе потенциала ($a_l = \infty$) уровни залегают ниже дна зоны Ландау на фиксированной глубине, определяемой значением квантового числа l . (Положение уровня вблизи резонанса ($a_l = \infty$) определяется значением эффективного радиуса r_l^0 .) В послерезонансной области ($a_l > 0$, $r_c^{2l+1} \ll a_l \ll L^{2l+1}$), когда и в отсутствие H имеется мелкое связанное состоя-

ние, магнитное поле лишь обуславливает его диа- и парамагнитный сдвиг, а МП уровни с $|m| = l$ в высших зонах отсутствуют. Наконец, в случае $a_l \lesssim r_c^{2l+1}$, $a_l > 0$ яме нет мелкого уровня и он не появляется при включении магнитного поля.

в) Магнитопримесные состояния на атомах водорода

При увеличении H , по мере того как ларморов радиус L становится сравнимым с размерами нейтральной примеси, характер движения и самих атомных электронов начинает определяться магнитным полем. Спектр МП состояний электрона на атоме водорода в присутствии очень сильного магнитного поля $v_0^{-1} \equiv (1/2) \ln(a_B/L) \gg 1$ был найден аналитически в ¹⁷. Рассматривалась нижняя зона Ландау и существенно различные значения проекций моментов атомного и дополнительного электронов ($|m| \gg |m_{ат}| \sim 1$), что позволило пренебречь обменными эффектами. Область локализации атомного электрона в условиях такого сильного магнитного поля сильно вытянута вдоль \mathbf{H} — ее поперечник имеет характерные размеры $\rho_{ат} \sim L$, а продольный размер — порядка $z_{ат} \sim v_0 a_B \gg L$. МП уровни имеют различную функциональную зависимость от напряженности поля и проекции момента электрона, определяемую областью его поперечной локализации, $\rho_{эфф} = V/|m|L$. Спектр МП состояний H^- иона имеет, в основном, степенную зависимость от H и m для абсолютных величин значений проекции момента, больших по сравнению с отношением $z_{ат}/\rho_{ат}$:

$$\Delta E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \quad k = \frac{11}{64} \frac{v_0}{a_B} \left(\frac{v_0 a_B}{V|m|L} \right)^3, \quad V|m| \gg z_{ат} |\rho_{ат} \sim a_B v_0| L, \quad (2.7)$$

и, в основном, логарифмическую в области меньших значений модулей проекций момента:

$$\Delta E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \quad k = \frac{2v_0}{a_B} \left(\ln \frac{v_0 a_B}{V|m|L} \right)^2, \\ \ln \frac{v_0 a_B}{V|m|L} \gg 1 \quad \text{и} \quad 1 \ll V|m| \ll z_{ат} |\rho_{ат} \sim a_B v_0| L. \quad (2.8)$$

Численными методами энергии связи электрона на атоме водорода вычислялась в ¹⁸. Было получено, что связанное состояние электрона на нейтрале, существующее в отсутствие магнитного поля, при переходе к большим значениям H исчезает. В ¹⁹ методом самосогласованного поля рассматривались тяжелые атомы, и, согласно ¹⁹, связанное состояние электрона на атоме сохраняется и в пределе сильного магнитного поля. Асимптотическое продление формулы (2.9) в области значений $|m| \sim 1$ дает хорошее совпадение результатов расчетов ¹⁷ и ¹⁹.

3. СПЕКТР СЛАБОСВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОНА ЛАНДАУ ПРИ РЕЗКОЙ АНИЗОТРОПИИ ЭФФЕКТИВНОЙ МАССЫ

В этой главе мы покажем, что при резко анизотропной эффективной массе носителя заряда, находящегося в потенциале притяжения малого радиуса, возникает принципиально новый тип магнитопримесных состояний ²⁰, исчезающих как при выключении магнитного поля, так и при уменьшении параметра анизотропии масс. Для заданной проекции момента под дном каждой зоны Ландау появляется не один, а система МП уровней, которые с уменьшением H переходят в непрерывный спектр с периодом $\propto H^{(|m|+1)/2}$. Специфика таких состояний проявляется и в характере рассеяния носителей в веществе, поскольку одномерная яма при возникновении в ней уровня нулевой энергии становится прозрачной ²¹. Это, в свою очередь, приводит к осцилля-

циям всех кинетических коэффициентов, определяемых рассеянием носителей на этих центрах (см. гл. 5), и в основном периодичных как \sqrt{H} , что отличает их от магнитофононных осцилляций Гуревича и Фирсова²² и осцилляций Шубникова — де Гааза²³, имеющих период $\propto H^{-1}$.

Рассмотрим спектр состояний электрона, масса которого резко анизотропна ($m_1 = m_2 \equiv m_\perp \ll m_\parallel = m_3$), в магнитном поле, направленном вдоль большой оси эллипсоида энергий $\mathbf{H} \parallel m_\parallel$ и сферически симметричном потенциале притяжения $U(r) < 0$ радиуса $r_c < L$. Движение электрона в плоскости поперечной \mathbf{H} при достаточно малой поперечной массе всегда определяется магнитным полем, а вдоль \mathbf{H} — потенциалом центра, усредненным по поперечному движению:

$$U_N^m(z) = \int_0^\infty \rho R_{Nm}^2(\rho) U(\rho, z) d\rho \quad (3.1)$$

(R_{Nm} — функции радиального движения в магнитном поле), который для случая центра малого радиуса $r_c < L$ может быть представлен в виде произведения степенной функции от H и функции, зависящей от продольной $z \parallel \mathbf{H}$ координаты,

$$U_N^m(z) = \left(\frac{r_c^2}{L^2} \right)^{|m|+1} V_m(z) \propto H^{|m|+1}. \quad (3.2)$$

Потенциал $U_N^m(z)$ является четной функцией z и спадает на характерных расстояниях порядка радиуса действия потенциала центра r_c . При достаточно тяжелой продольной массе

$$\frac{\hbar^2}{m_\parallel r_c^2} \ll |U_N^m(z)| \ll \frac{\hbar^2}{m_\perp r_c^2} \quad (3.3)$$

в одномерной яме (3.2) содержится много уровней. В этом — ключевое отличие спектра МП состояний носителей с резко анизотропной массой от спектра электрона, эффективная масса которого изотропна. Число квазисвязанных МП уровней в потенциале (3.2) под дном любой зоны Ландау (при фиксированном H) растет с ростом параметра анизотропии масс m_\parallel/m_\perp .

Второй особенностью спектра МП состояний частицы с резко анизотропной эффективной массой является зависимость числа уровней от напряженности магнитного поля. Глубина ямы (3.2) при уменьшении H уменьшается $\propto H^{|m|+1}$, а МП уровни с периодом $T_H \propto (U_N^m)^{1/2} \propto H^{(|m|+1)/2}$ выходят из ямы.

В аналитическом виде спектр удается вычислить лишь для нескольких моделей примесных потенциалов, в частности, для экранированного кулоновского потенциала при $m = 0$ и нижней зоны Ландау. Соответствующий одномерный потенциал (3.2) имеет вид

$$U_0^0(z) = -U_0 \left(\frac{r_c}{L} \right)^2 \exp \left(-\frac{|z|}{r_c} \right), \quad U_0 \equiv \frac{e^2}{\kappa r_c}, \quad (3.4)$$

где κ — диэлектрическая проницаемость. Спектр МП уровней потенциала (3.4) определяется уравнением (J — функция Бесселя):

$$J_{k_\parallel r_c}(\chi(H)) = 0, \quad k_\parallel r_c = \frac{2r_c}{\hbar} \sqrt{2m_\parallel \Delta E},$$

$$\chi(H) = \frac{2r_c}{\hbar} \sqrt{2m_\parallel U_0} r_c L^{-1}, \quad (3.5)$$

из которого в асимптотическом пределе $\chi(H) \gg 1$ следует, что при значениях напряженности магнитного поля

$$H_n = \frac{\pi^2 c \hbar^3}{32 e m_\parallel r_c^4 U_0} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.6)$$

в одномерном потенциале (3.4) возникает уровень нулевой энергии. Периодичность возникновения состояний с энергией нуль пропорциональна

$$\propto \sqrt{\frac{U_0}{\hbar^2/m^*r_c^2}} \frac{r_c}{L} \propto \sqrt{H}.$$

Интервал значений H , при которых два соседних МП уровня пересекают границу непрерывного спектра, равен:

$$\Delta H_n = \frac{dH_n}{dn} \approx \frac{\pi^2 c \hbar^3}{16 e m_{\parallel} r_c^4 U_0} n. \quad (3.7)$$

Подстановка параметров электронов и мелких примесей n-Ge в (3.7) ($m_{\parallel}/m_{\perp} = 19,5$, $U_0 = 10^{-2}$ эВ, $r_c = 4 \cdot 10^{-7}$ см) дает значение интервала $\Delta H_n = 4,6 \cdot 10^4$ Гс·н.

4. ФОТОПОГЛОЩЕНИЕ НА МАГНИТОПРИМЕСНЫХ СОСТОЯНИЯХ ЭЛЕКТРОНА С ИЗОТРОПНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ МАССОЙ

В настоящей главе мы изучим вопрос о поглощении света на МП состояниях электрона с изотропной эффективной массой в потенциале малого радиуса действия. Сначала будет исследована частотная зависимость коэффициента поглощения электромагнитного поля системой невзаимодействующих между собой носителей в присутствии мелкого ($|U| \ll \hbar^2/m^*r_c^2$) примесного потенциала и квантующем магнитном поле. Затем для центров же малого радиуса ($r_c \ll L$) мы проанализируем зависимость поглощения от глубины примесей, не предполагая их мелкими. Как будет показано ниже, в интервалах глубин примесного потенциала, отвечающих наличию в основной и высших зонах Ландау мелких реальных или виртуальных МП уровней, имеет место осцилляционная зависимость поглощения от частоты, т. е. на кривой поглощения возникают пики, расположенные на расстоянии, близком к ω_H . При этом для центров произвольной глубины частотная зависимость коэффициента поглощения такая же, как и в случае мелких примесей, а положения максимумов на кривой поглощения определяются частотами, при которых в начальном или конечном состояниях носители заряда резонансно рассеиваются на МП состояниях. Если же таких МП уровней нет, то пики в поглощении исчезают. Все эти вопросы представляют интерес при изучении свойств D⁻ и A⁺-центров в полупроводниках³⁻⁵, глубоких примесей, оптические свойства которых часто удается описать на основе модели короткодействующего потенциала, H⁻-ионов и ряда других объектов. Перейдем к их рассмотрению, ограничив его для простоты случаем взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей.

В отсутствие примеси поглощение слабого длинноволнового электромагнитного поля носителями по правилам отбора по дипольному моменту может происходить лишь на их переходах между соседними зонами Ландау $N \rightleftharpoons (N \pm 1)$. Центр, перемешивая различные зоны, открывает дополнительные каналы поглощения на любых переходах $N_1 \rightarrow N_2$. Если потенциал примеси мелкий, то под дном любой зоны Ландау имеются МП уровни с произвольным m . Как мы уже говорили, состояния высших зон с проекцией момента $m \neq N$ являются квазисвязанными, причем их ширина в $|\alpha| \ll 1$ раз меньше глубины залегания над дном соответствующей зоны. Основной МП уровень лежит под дном нулевой зоны Ландау и отвечает нулевой проекции момента. В квантующем магнитном поле заселены, в основном, состояния непрерывного спектра и истинно связанные МП состояния нижней зоны. Вклад в поглощение дают четыре типа переходов носителей между состояниями непрерывного спектра (Н) и квазисвязанными (КС) состояниями^{8, 24}

(см. рис. 4):

- а) непрерывный спектр \rightarrow непрерывный спектр ($H \rightarrow H$);
- б) непрерывный спектр \rightarrow квазисвязанные состояния ($H \rightarrow KC$);
- в) связанные состояния \rightarrow непрерывный спектр ($C \rightarrow H$);
- г) связанные состояния \rightarrow квазисвязанные состояния ($C \rightarrow KC$).

Переходы электрона из начального (C) состояния в непрерывный спектр первой зоны, а также (KC) и (H) состояния высших ($N \geq 2$) зон есть его фототрыв, а поглощение на переходах типа ($H \rightarrow H$, KC) между зонами Ландау нуль и $N \geq 2$ — гармоники циклотронного резонанса. Поглощение поля на переходах типа ($H \rightarrow H$) между зонами нуль и единица идет на фоне обыч-

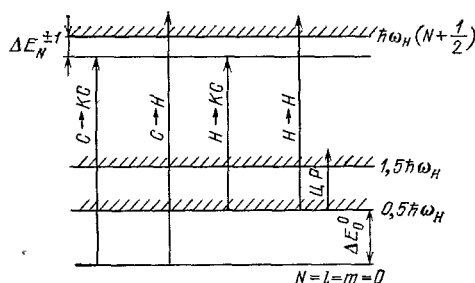


Рис. 4. Схема переходов электрона, ответственных за резонансное поглощение электромагнитного поля ²⁴.

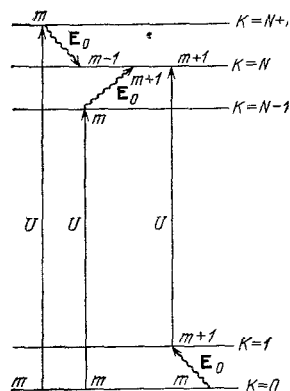


Рис. 5. Схема забросов электрона в зону Ландау N , ответственных за резонансное поглощение на переходах типа $H \rightarrow H$.

ного циклотронного резонанса и особого интереса не представляет. Частотную зависимость коэффициента поглощения легко понять на примере любого из четырех указанных типов переходов. Так, на переходах типа ($H \rightarrow H$) между зонами Ландау нуль и $N \geq 2$ (гармоники ЦР) по правилам отбора по дипольному моменту резонансное поглощение идет лишь по одному из каналов (рис. 5): 1) Центр без изменения m виртуально забрасывает электрон из зоны нуль в зону $N + 1$, а электрическое поле, меняя $m \rightarrow m - 1$, переводит его в резонансную зону N . 2) Центр забрасывает электрон из зоны нуль в зону $N - 1$, поле, меняя $m \rightarrow m + 1$, переводит его в зону N . 3) Электрическое поле переводит электрон из зоны $k = 0$ в зону $k = 1$ ($m \rightarrow m + 1$), центр переводит его в зону N . Для простоты картины будем считать, используя короткодействие потенциала, что центр влияет лишь на движение электронов с наименьшими прицельными параметрами ($m = 0$). При этом резонансная составляющая коэффициента поглощения, связанная с переходом электрона в наивысшую возможную зону, представляет собой сумму трех слагаемых, отвечающих трем возможным каналам резонансного заброса ²⁴:

$$\eta^{H \rightarrow H}(T, \Delta\omega) = A_N \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\exp(-\varepsilon/T)}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \hbar\Delta\omega)}} \theta(\varepsilon + \hbar\Delta\omega) \times$$

$$\times \left\{ [(N+1)^{-1} + N(N-1)^{-2}] \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\hbar\omega_H}{\varepsilon} \right)^{-1} + \right.$$

$$\left. + (N-1)^{-2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\hbar\omega_H}{(\varepsilon + \hbar\Delta\omega)} \right)^{-1} \right\}, \quad (4.1)$$

$$\Delta\omega = \omega - N\omega_H$$

(θ — функция Хэвисайда), и имеет очень простой физический смысл. Интеграл по энергиям возникает из-за усреднения по начальным состояниям электрона *). Под знаком интеграла входит произведение начальной ($\varepsilon^{-1/2}$) и конечной $(\varepsilon + \hbar\Delta\omega)^{-1/2}$ плотностей состояний на коэффициент прохождения электрона

$$D_{\varepsilon} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\hbar\omega_H}{\varepsilon}\right)^{-1}$$

через мелкий одномерный потенциал, в котором есть МП уровень с энергией $|\Delta E| = (\alpha^2/2) \hbar\omega_H$. Для первого и второго каналов заброса в (4.1) входит D_{ε} , относящийся к нижней зоне Ландау, для третьего канала — $D_{\varepsilon + \hbar\Delta\omega}$ финишной зоны N (см. рис. 5).

Теперь проведем анализ контура линии поглощения в различных областях температур и расстройек частоты. В области больших, по сравнению с энергией основного МП уровня, температур и больших расстройек частоты, коэффициент поглощения повторяет ход плотности конечных состояний:

$$\eta^{H \rightarrow H} \propto \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}}, \quad \frac{\alpha^2}{2} \hbar\omega_H \ll T \ll \hbar\Delta\omega. \quad (4.2)$$

При неизменной температуре с уменьшением частоты (коэффициенты прохождения по-прежнему близки к единице) корневая зависимость меняется на логарифмическую:

$$\eta^{H \rightarrow H} \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \ln \frac{T}{\hbar\Delta\omega}, \quad \frac{\alpha^2}{2} \hbar\omega_H \ll \hbar\Delta\omega \ll T, \quad (4.3)$$

и коэффициент поглощения определяется как плотностью начальных, так и конечных состояний. Наконец, в области очень малых расстройек частоты

$$\eta^{H \rightarrow H} \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \ln \frac{T}{(\alpha^2/2) \hbar\omega_H}, \quad 0 \leq \hbar\Delta\omega \ll \frac{\alpha^2}{2} \hbar\omega_H \ll T, \quad (4.4)$$

коэффициент поглощения перестает зависеть от расстройки частоты, а логарифмический пик (4.3) выходит на логарифмическую константу, значение которой определяется энергией МП уровня. Предельные случаи больших расстройек частоты (4.2) и (4.3) отвечают борновскому приближению^{25,26} по взаимодействию носителей с примесями.

В области температур, при которых начальная энергия продольного движения электрона мала по сравнению с энергией основного МП состояния, для расстройек частоты $\hbar\Delta\omega \gg T$ контур линии поглощения определяется выражением (см. рис. 6)

$$\eta^{H \rightarrow H} = \frac{A_N}{(N-1)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar}} \frac{\sqrt{\Delta\omega}}{\Delta\omega + (\alpha^2/2) \omega_H}, \quad T \ll \frac{\alpha^2}{2} \hbar\omega_H, \quad \hbar\Delta\omega, \quad (4.5)$$

а в обратном предельном случае очень малых расстройек частоты коэффициент поглощения стремится к нулю:

$$\eta^{H \rightarrow H} \propto \sqrt{T} \rightarrow 0, \quad \hbar\Delta\omega \ll T \ll \frac{\alpha^2}{2} \hbar\omega_H. \quad (4.6)$$

Поглощение при низких температурах (4.5) имеет максимум при энергиях электрона в конечной зоне Ландау, равных энергии основного МП уровня. Эта же величина определяет как температурный ход коэффициента поглощения, так и его частотную зависимость (при фиксированном T), согласно проведенному рассмотрению. Составляющие коэффициента поглощения на переходах типа ($H \rightarrow KC$) и ($C \rightarrow H$) (фотоотрыв электрона) также определяются произведением плотностей состояний электронов, коэффициентами прохождения в начальном или конечном состояниях через одномерную яму, содержащую МП уровень, и функцией распределения. Очевидно, что как $\eta^{H \rightarrow KC}$, так и $\eta^{C \rightarrow H}$ имеют максимумы в областях расстройек

*) Здесь и везде ниже статистика носителей полагается бальцмановской.

частоты, отвечающих энергиям МП состояний. На больших расстройках частоты для переходов типа $(C \rightarrow H)$ коэффициент поглощения повторяет ход плотности конечных состояний $\eta^{C \rightarrow H} \propto (\Delta\omega)^{-1/2}$, в то время как $\eta^{H \rightarrow KC}$ имеет экспоненциальный спад, обусловленный хвостом функции распределения электронов (рис. 7). Наконец, на переходах типа $(C \rightarrow KC)$ резонансная составляющая коэффициента поглощения вблизи пика, соответствующего переходу носителей в квазисвязанные МП состояния зоны $N \geq 1$ с $m = \pm 1$,

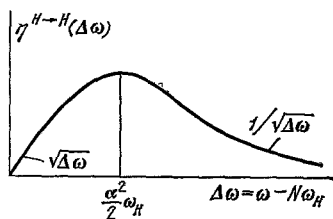


Рис. 6. Контур линии поглощения гармоник ЦР при очень низких температурах на переходах типа $H \rightarrow H$ ²⁴.

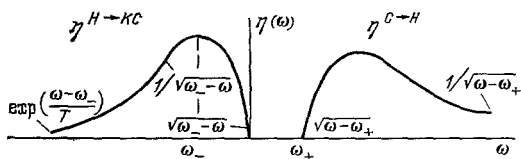


Рис. 7. Зависимость резонансной составляющей коэффициента поглощения от частоты света на переходах типа $C \rightarrow H$ и $H \rightarrow KC$ ²⁸ ($\omega_{\pm} = \omega_H (N \pm \alpha^2/2)$).

имеет брейт-вигнеровский характер, при подходе же к дну зоны Ландау от пика снизу эта зависимость меняется на более сложную²⁷ (см. ниже).

Теперь проследим зависимость коэффициента поглощения от глубины примесного потенциала U ¹⁵. Начнем с переходов типа $(C \rightarrow KC)$ из основного состояния ($l = m = 0$) нижней зоны Ландау в квазисвязанное МП состояние ($l = |m| = 1$) зоны N . Если глубина центра такова, что МП состояние с $|m| = 1$ имеет малую ширину (это будет при $a_1 < 0$ и $|a_1| \ll L^3$), то вне зависимости от того, индуцировано основное состояние магнитным полем ($a_0 < 0$) или является собственным примесным состоянием ($a_0 > 0$), коэффициент поглощения имеет резкий пик на частоте резонансного перехода с одной и той же зависимостью от ω . Меняется лишь множитель, характеризующий «силу» взаимодействия электрона с центром (см. таблицу). Частотная

Т а б л и ц а

№ области	1	2	3
Характер основного уровня	Индукированные полем МП состояния	Резонансные МП состояния	Собственные состояния примеси
Длина рассеяния a_0	$a_0 < 0, a_0 \ll L$	$a_0 \geq 0, a_0 \gg L$	$L \gg a_0 > 0$
$\eta^{C \rightarrow KC}, C \rightarrow H$	$\propto a_0 : L^3$	$\propto (0,43 \pm 0,2 L : a_0)$	$\propto 2^{-3/2} L : a_0$

зависимость резонансной составляющей коэффициента поглощения^{15, 27}

$$\eta^{C \rightarrow KC} \propto \frac{(|\Delta E_0^0| - \hbar \Delta\omega)^{-1}}{\left(1 - \sqrt{\frac{|\operatorname{Re} \Delta E_N^1|}{|\Delta E_0^0| - \hbar \Delta\omega}}\right)^2 + \frac{(\Gamma_N^1)^2}{(\operatorname{Re} \Delta E_N^1)^2}} \quad (4.7)$$

вблизи максимума описывается формулой Брейта — Вигнера с шириной $\Gamma_N^1 \propto \hbar \omega_H N^{7/2} |a_1/L|^3$, сменяясь в крыле линии на гиперболическую. При углублении потенциала ($a_1 < 0, |a_1| \rightarrow \infty$) ширина Γ_N^1 растет и, вблизи резонанса ямы с моментом, равным единице, имеет величину порядка $\Gamma_N^1 \propto \hbar \omega_H (N-1)^{2/3} (r_0/L)^{2/3}$, а резонансное поглощение становится неразрешимым от фона. Отношение максимума резонансной составляющей коэф-

коэффициента поглощения к фоновой определяется отношением сдвига энергии конечного МП состояния к его ширине:

$$\eta^{C \rightarrow KC} : \eta_{\text{фон}} \sim \left| \frac{\text{Re } \Delta E_N^1}{\Gamma_N^1} \right|^2. \quad (4.8)$$

При переходе в область еще больших глубин потенциала U происходит провал МП состояния зоны N с $l = 1$ под дно нулевой зоны Ландау и исчезновение осцилляций поглощения. Наконец, если потенциал примеси таков, что длина рассеяния $a_1 > 0$, но $a_1 \ll L^3$, резонансный пик поглощения ($C \rightarrow KC$) также отсутствует²⁷. (При этом в формуле (4.7) происходит смена знака перед корнем в знаменателе.)

На переходах типа ($C \rightarrow H$) из основного связанного МП состояния в непрерывный спектр зоны $N \geq 1$ для глубин примесного потенциала таких, что длина рассеяния с $l = 1$ достаточно мала ($|Na_1| \ll L^3$, $a_1 \leq 0$), частотная зависимость резонансной составляющей ($\eta^{C \rightarrow H}$) дается формулами мелкого потенциала²⁴, т. е. вблизи порога имеем корневой рост ($\eta^{C \rightarrow H} \propto \sqrt{\Delta\omega}$) коэффициента поглощения, на крыле линии его корневой спад, повторяющий ход плотности конечных состояний, и максимум, лежащий в области ω , отвечающих резонансному рассеянию электрона в конечном состоянии на одномерном мелком потенциале. Корневой рост $\eta^{C \rightarrow H}$ вблизи порога является следствием следующего обстоятельства: резонансная составляющая коэффициента поглощения пропорциональна произведению плотности конечных состояний электрона $(\Delta\omega)^{-1/2}$ на коэффициент его прохождения через мелкий одномерный δ -потенциал ($D_{\Delta\omega}$), что при малых энергиях ($\Delta\omega \rightarrow 0$) и дает указанную частотную зависимость. Зависимость $\eta^{C \rightarrow H}$ от характера основного МП уровня такая же, как и в случае поглощения на переходах ($C \rightarrow KC$) (см. таблицу).

На переходах типа ($H \rightarrow KC$) из нижней зоны Ландау $N = 0$ в резонансную зону N (с изменением проекций момента $m = 0 \rightarrow |m| = 1$ или $m = -1 \rightarrow m = 0$) частотная зависимость резонансной составляющей коэффициента поглощения имеет осцилляционный характер только при глубинах U , отвечающих наличию мелких МП состояний с $l = 0$ и $l = 1$ (т. е. при $a_0 < 0$, $|a_0| \ll L$, $a_1 < 0$, $|a_1| \ll L^3$). В противном случае или провал МП уровня под дно нулевой зоны, или обращение в нуль коэффициента прохождения электрона через соответствующий одномерный барьер приводят к подавлению осцилляций. То же самое относится и к поглощению на переходах типа ($H \rightarrow H$).

5. МАГНИТОПРИМЕСНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ПРИ РЕЗКО АНИЗОТРОПНОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ СПЕКТРЕ НОСИТЕЛЕЙ

Теория МП осцилляций в веществах с резко анизотропной эффективной массой носителей заряда была развита в^{20, 28, 29}. Их физическая причина (см. гл. 3) заключается в том, что при тяжелой продольной массе электрона ($m_{||} \parallel \mathbf{H}$) в одномерном потенциале примеси $U^m(z)$ возникает система МП уровней, регулируемых полем H , число которых растет с увеличением параметра анизотропии масс. При уменьшении напряженности магнитного поля уровни с периодом $\propto H^{(l+m+1)/2}$ переходят в непрерывный спектр. Если на таком потенциале рассеивается электрон (с тем же m), то для него в момент появления уровня энергии нуль яма становится прозрачной. При этом все кинетические коэффициенты, определяемые рассеянием, осциллируют с изменением H . Подчеркнем, что обсуждаемые осцилляции являются следствием двух обстоятельств: резкой анизотропии эффективной массы и конечности радиуса действия примесного потенциала, которая ведет к существованию в одномерной яме ограниченного числа МП состояний. В чисто кулоновской задаче, даже при резкой анизотропии эффективной массы, из-за бесконечного

сгущения связанных МП состояний к континууму осцилляции отсутствуют, хотя имеет место радикальная перестройка спектра в магнитном поле ³⁰.

В случае центров малого радиуса ($r_c \ll L$) кинетические коэффициенты определяются в основном носителями, у которых прицельный параметр минимален ($m = 0$), а осцилляции имеют четко выраженную периодичность $\propto H^{1/2}$. Для примесей произвольного радиуса $r_c \gg L$ из-за конкурирующего вклада состояний с различными m осцилляции сглаживаются. Обсудим сначала поведение продольной и поперечной статических проводимостей. Продольная проводимость определяется потоком отраженных от центра электронов ²⁰:

$$\sigma_{zz} \propto \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{1}{\sum_{m=0}^\infty |T^{-m}(-k_{||})|^2}; \quad (5.1)$$

f — функция распределения электронов по продольной энергии ε , T^{-m} — матричный элемент оператора рассеяния на потенциале $U^m(z)$, $\varepsilon = \hbar^2 k_{||}^2 / 2m_{||}$. Поперечная проводимость также выражается через T -операторы ²⁰, ³¹, ³² (см. гл. 6):

$$\sigma_{yy} \propto \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \sum_{m=0}^\infty (m+1) |T^{-m} - T^{-m-1}|^2. \quad (5.2)$$

При слабом перемешивании уровней Ландау отдельным рассеивателем ($U_{\text{эфф}} \ll \hbar \omega_{\perp} = \hbar e H / m_{\perp} c$) расчет T^{-m} сводится к решению одномерного уравнения Шрёдингера с потенциалом $U^m(z)$. Для потенциала примеси, взятого в форме экранированного Кулона (см. (3.4)–(3.5)), это дает простые аналитические выражения продольной и поперечной проводимостей в асимптотическом пределе очень тяжелой продольной массы, $\chi(H) \equiv (2r_c/L) \sqrt{2m_{||} U_0} r_c / \hbar \gg 1$ и низких температур $T \ll \hbar^2 / m_{||} r_c^2$ ²⁰, ²⁹

$$\sigma_{zz}(H) \propto \int_0^\infty \varepsilon d\varepsilon \frac{v^2 (-\partial f / \partial \varepsilon)}{\frac{\cos^2 2\chi(H)}{\cos^2 2\chi(H) + \pi^2 v^2} + \sum_{m=1}^\infty |g_m(-k_{||})|^2}, \quad v = 2k_{||} r_c, \quad (5.3)$$

$$g_m \propto T^{-m}.$$

$$\sigma_{yy}(H) \propto \int_0^\infty d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{(1 + \sin 2\chi(H))(1 - \sin 2\chi(H) + \pi^2 v^2)}{\cos^2 2\chi(H) + v^2 \pi^2}. \quad (5.4)$$

Из (5.3) следует, что для значений напряженности магнитного поля, удовлетворяющих соотношению $2\chi(H) = \pi [n + (1/2)]$, коэффициент отражения электронов с ($m = 0$) от ямы обращается в нуль, и продольная проводимость возрастает. Это происходит каждый раз, когда в одномерном потенциале $U_0^0(z)$ появляется уровень нулевой энергии (ср. с (3.6)). Амплитуда осцилляции ограничена за счет вклада в рассеяние состояний с высшими значениями проекций момента. Поперечная проводимость (5.4) также осциллирует, причем для значений H , соответствующих нечетным $n = 2k + 1$, σ_{yy} обращается в нуль, для четных же значений $n = 2k$ σ_{yy} достигает максимума. Такое поведение объясняется различной четностью волновых функций связанных состояний одномерной ямы для последовательных n . Период осцилляций проводимостей (5.3) и (5.4) пропорционален корню квадратному из напряженности магнитного поля. Отметим, что для значений H , отвечающих существованию МП уровня нулевой энергии в одномерном потенциале $U_0^0(z)$, продольное магнитосопротивление минимально. Это приводит к возникновению отрицательного продольного магнитосопротивления при значениях напряжен-

ности поля, близких к (3.6):

$$\frac{\rho_{\parallel}(H) - \rho_{\parallel}(0)}{\rho_{\parallel}(0)} < 0, \quad \rho_{\parallel} = \sigma_{zz}^{-1}.$$

Поглощение на МП состояниях носителей с резко анизотропной эффективной массой также обладает рядом особенностей^{28, 29}. Так, при внутризонном поглощении света в параллельных полях на переходах типа (С → Н) из основного МП состояния в непрерывный спектр нижней зоны Ландау коэффициент поглощения или стремится к нулю по корневому закону $\eta \propto \sqrt{\Delta\omega}$, или обращается в бесконечность $\eta \propto (\Delta\omega)^{-1/2}$ (рис. 8) в зависимости от того, четный или нечетный уровень переходит в непрерывный спектр. Такое различие в поведении η объясняется тем, что при нечетном уровне нулевой энергии волновая функция медленного рассеивающегося электрона внутри ямы — почти нечетная, переход из четного основного состояния под действием электрического поля $E_0 \parallel H \parallel z$ разрешен, одномерная яма прозрачна, т. е. коэффициент прохождения равен единице, и из-за плотности конечных состояний η расходится корневым образом. При четном же МП уровне нулевой энергии волновая функция медленного электрона в яме в основном четная, а ее нечетная компонента стремится к нулю с уменьшением энергии электрона. Поэтому за счет нечетности по z оператора взаимодействия электрона с полем E_0 при $\Delta\omega \rightarrow 0$ коэффициент поглощения и обращается в нуль.

Коэффициент межзонного ($N = 0 \rightarrow N = 1$, $m = 0 \rightarrow m = +1$) поглощения на переходах типа (Н → КС) в поперечных полях ведет себя подобным образом. Верхнее МП состояние, характеризующееся ненулевой проекцией момента, в силу условия $r_c \ll L$ — мелкое и, соответственно, четное. Поэтому, если к границе сплошного спектра нижней зоны Ландау подходит нечетный МП уровень, то волновые функции начального и конечного состояний имеют разную четность по z , и $\eta^{H \rightarrow C}$ стремится к нулю по корневому закону. Если же уровень нулевой энергии зоны нуль четный, то волновые функции имеют одну и ту же четность по z , интеграл их перекрытия не мал, и из-за плотности начальных состояний $\eta^{H \rightarrow C}$ расходится корневым образом (см. рис. 8).

Для межзонных переходов ($N = 0 \rightarrow N = 1$, $m = 0 \rightarrow m = +1$) типа (С → Н) в поперечных полях поведение коэффициента поглощения также существенно различно в зависимости от четности начального связанного МП состояния. Если начальное состояние нечетное, то вблизи порога поглощения имеем корневую зависимость $\eta^{C \rightarrow H} \propto \sqrt{\hbar\Delta\omega - |\Delta E_{2n+1}|}$, ($\Delta\omega = \omega - \omega_H$), а на крыле линии поглощения $\eta \propto (\Delta\omega)^{-3/2}$. В обратном случае четного МП состояния должна наблюдаться прежняя зависимость η вблизи порога, однако на хвосте зависимость коэффициента поглощения оказывается иной: $\eta \propto (\Delta\omega)^{-5/2}$.

Возможности наблюдения изучаемых осцилляций наиболее благоприятны в полупроводниках IV группы Ge и Si, в которых эффективная масса носителей резко анизотропна. В случае мелких водородоподобных примесей в Ge в соответствующем одномерном потенциале $U_0(z)$ имеется 4 МП уров-

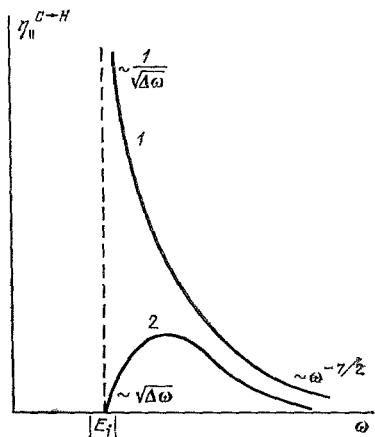


Рис. 8. Зависимость коэффициента внутризонного поглощения в параллельных полях от частоты света при резко анизотропной эффективной массе электрона.

Глубина ямы соответствует наличию МП уровня с энергией, близкой к нулевой. 1 — переход «нечетное — четное» состояния, 2 — переход «четное — четное» состояния.

ня ²⁰ при $H = 4 \cdot 10^5$ Гс. С уменьшением напряженности магнитного поля до $H = 4 \cdot 10^4$ Гс три МП уровня выходят из ямы. Это означает, что при изменении H до указанного значения экспериментально должно наблюдаться три осцилляции. Здесь целесообразно сделать следующее замечание. Поскольку реальные полупроводники представляют собой многодолинные структуры, то вклад в поглощение (или проводимость) «чужих» долин обуславливает фон, так как из-за отсутствия аксиальной симметрии в них перемешаны состояния с различными проекциями орбитального момента m . Для устранения фона целесообразно наблюдать осцилляции на образцах, подвергнутых деформации, что позволяет «перекачать» электроны в основную ($m_{||} \parallel H$) долину.

В заключение этого раздела отметим, что Ивс, Маркиевич и Фурно ³³ при рассеянии свободных носителей электронными каплями в магнитном поле в Ge и Николас, Страдлинг и Ивс ³⁴ при рассеянии носителей непроницаемыми цилиндрическими примесями в InSb наблюдали осцилляции проводимости, периодичные по \sqrt{H} , обусловленные размерным эффектом, т. е. резонансным поведением амплитуды рассеяния на непроницаемой примеси при напряженностях магнитного поля, для которых выполнялось соотношение $\sqrt{2}r_c/L = \pi (n + \gamma)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и $r_c > L$.

6. ПОПЕРЕЧНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ НА ДЕФЕКТАХ КОНЕЧНОГО РАДИУСА

а) Общая формула поперечной проводимости

Хорошо известно, что в свободном пространстве электрон, помещенный в скрещенные $E_0 \perp H$ электрическое и магнитное поля, дрейфует в перпендикулярном их плоскости направлении. Лишь его столкновения с какими-либо дефектами в веществе приводят к возникновению диссипативной — вдоль электрического поля — компоненты тока. Характеризующая эту компоненту поперечная проводимость (или связанный с ней соотношениями Эйнштейна коэффициент диффузии) обычно вычисляется в квантующем магнитном поле по формуле Титейки ³⁵ в представлении чисел Ландау

$$\sigma_{yy} = \frac{2\pi e^2}{h} \sum_{\alpha, \alpha'} \left(-\frac{\partial f(E_\alpha)}{\partial E_\alpha} \right) \delta(E_\alpha - E_{\alpha'}) |\langle \varphi_\alpha^* | U | \psi_\alpha \rangle|^2 (y_\alpha - y_{\alpha'})^2 \quad (6.1)$$

$\{\alpha \equiv \{N, y_0, p_z\}$ — набор квантовых чисел Ландау, φ_α и ψ_α — волновые функции электрона соответственно свободного движения и задачи рассеяния, $U(r)$ — произвольный рассеивающий потенциал), которая представляет собой средний квадрат смещения электрона вдоль поля в результате столкновений.

Калибровка Ландау очень наглядна и, как правило, используется для получения общих формул проводимости, так как в ней точно решается уравнение Шрёдингера для электрона в скрещенных полях. Однако рассмотрение задачи рассеяния в такой калибровке обычно ограничено рамками теории возмущений. Вычисление поперечной проводимости (6.1) с вероятностью рассеяния, найденной в борновском приближении, приводит в квантующем магнитном поле к возникновению логарифмической расходимости на малых энергиях, обусловленной большой плотностью состояний электрона $g(\epsilon) \propto \epsilon^{-1/2}$ при малых $\epsilon \rightarrow 0$ энергиях. Скобов ³⁶ впервые показал*), что в случае рассеивателей нулевого радиуса выход за рамки теории возмущений автоматически приводит к устранению расходимости. Отметим, что согласно ³⁶ обрезание расходимости в σ происходит на энергиях порядка энергии МП состояния электрона в поле изолированного центра. При этом, если в высокотемпературном случае возникает естественный нижний предел в логарифмически расходящемся выражении для проводимости, то в пределе

*) Используя калибровку Ландау.

низких температур меняется сам характер зависимости $\sigma(H, T)$. Очевидно однако, что калибровка Ландау не учитывает естественную аксиальную симметрию задачи во всех случаях рассеяния носителей на сферически-симметричных дефектах.

Выход за рамки борновского приближения и получение температурно-полевых зависимостей поперечной проводимости в широком интервале температур и квантующих магнитных полей для случая рассеивателей конечно-го, но произвольного радиуса оказывается возможным при переходе к аксиально-симметричной калибровке^{31, 32, 38}. Идея этого преобразования такова: диагональная компонента тензора поперечной проводимости имеет вид³⁹ (Кубо)

$$\sigma_{yy} = \frac{e^2}{2\pi VT} \left\langle \text{Sp} \hat{\rho} \hat{v}_y \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{1}{E - \hat{H} - i\delta} \hat{v}_y \frac{1}{E - \hat{H} + i\delta} \right\rangle, \quad \delta = +0, \quad (6.2)$$

$\hat{H} = H_0 + \sum_a U(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_a|)$ — полный гамильтониан системы в отсутствие электрического поля, V — объем, $\hat{\rho}$ — матрица плотности электрона, \hat{v} — оператор его скорости. Знак $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по расположению примесей. В приближении $\hbar\tau^{-1} \ll T$, где τ — время релаксации импульса носителя, ток в системе есть произведение среднего по объему тока от отдельного рассеивателя на число рассеивателей в объеме. При нахождении тока от отдельной примеси гамильтониан \hat{H} надо заменить на гамильтониан одно-центральной задачи \hat{H}_1 . В получившемся при этом из (6.2) выражении возьмем штур по полной системе функций одноцентральной задачи. В результате приходим к формуле поперечной проводимости, выраженной через функции аксиальной калибровки*)^{31, 32}

$$\sigma_{yy} = 2\pi e^2 n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dk dk' \delta(\varepsilon - \varepsilon') \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \sum_{m=0}^{\infty} |T_{kk'}^{-m} - T_{kk'}^{-m-1}|^2 (m+1), \quad (6.3)$$

T^{-m} — матричные элементы оператора рассеяния электрона на отдельной примеси в аксиально-симметричной калибровке, n_0 — концентрация рассеивателей, $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2m^*$ — энергия продольного движения электрона.

б) Случай экранированного кулоновского потенциала примеси

Расчет поперечной проводимости по формуле (6.3) позволяет получить зависимость $\sigma_{yy}(T, H)$ при сколь угодно низких температурах $0 \leq T \ll \hbar\omega_H$ и квантующих магнитных полях, если только нам известно решение одноцентральной задачи рассеяния в аксиально-симметричной калибровке (см. работы^{17, 20, 27, 38, 40, 41}, посвященные рассмотрению рассеяния в различных потенциалах). Наиболее интересна ситуация притягивающих экранированных кулоновских центров, так как здесь максимально ярко проявляется влияние характера рассеяния носителей на проводимость³². (Расчет коэффициента диффузии для ряда других примесных потенциалов проведен в работе³⁸.) Ограничим наше рассмотрение случаем примесей с большим радиусом экранирования $r_c \gg a_B$ и предельно сильным магнитным полем $a_B \gg L$. Последнее условие позволяет пренебречь забросом электронов в высшие зоны Ландау. Пренебрежение таким забросом приводит к одномерности рассеяния электрона на изолированном центре. При этом носитель с прицельным параметром $\rho = \sqrt{2|m|L}$ движется в эффективном потенциале

$$U_0^m(z) = -\frac{e^2}{\kappa} \frac{\exp(-\sqrt{2|m|L^2+z^2})}{\sqrt{2|m|L^2+z^2}}, \quad (6.4)$$

*) Формула (6.3), по существу, идентична формуле (18.19), полученной в обзоре³⁷ и выражающей через фазовые сдвиги рассеянных волн (одномерной задачи) различной четности, но намного удобнее при проведении конкретных расчетов^{20, 32, 38}.

и нахождение матричных элементов операторов рассеяния T сводится к решению одномерного уравнения Шрёдингера с потенциалом (6.4). Сравнивая (6.4) с энергией $\varepsilon_c = \hbar^2/m^*r_c^2$, легко видеть, что для частиц с прицельными параметрами $\rho \ll \rho_c = r_c \ln(r_c/a_B)$ одномерные ямы $U^m(z)$ являются глубокими, а с $\rho > \rho_c$ — мелкими. Также очевидно, что с ростом прицельного параметра мощность потенциала (6.4) уменьшается, что приводит к переходу связанных состояний в непрерывный спектр *). При этом в низкоэнергетической области $\varepsilon \ll \varepsilon_c$ рассеяние электронов с прицельными параметрами, отвечающими наличию в $U^m(z)$ мелкого уровня, носит резонансный характер ³².

Мы не будем приводить детали расчета поперечной проводимости, а дадим общее описание ее поведения ^{32, 38 **}). Исключая случай очень низких температур, можно выделить следующие области энергий электронов, в которых существенно различны зависимости $\sigma(T, H)$:

I. Область резонансного рассеяния носителей:

$$\left(\frac{L}{r_c}\right)^4 \left(\frac{r_c}{a_B}\right) \varepsilon_c \ll T \ll \varepsilon_c, \quad \sigma_{yy} \propto H^{-2} T^{-2}. \quad (6.5)$$

При таких температурах поперечная проводимость определяется носителями, резонансно рассеивающимися на глубоких ямах.

II. Область квазиклассического рассеяния:

$$a) \quad \varepsilon_c \ll T \ll \varepsilon_B \frac{a_B}{r_c}, \quad \sigma_{yy} \propto r_c H^{-2} T^{-1/2}, \quad (6.6)$$

$$б) \quad \varepsilon_B \frac{a_B}{r_c} \ll T \ll \varepsilon_B, \quad \sigma_{yy} \propto H^{-2} T^{-3/2} \ln^2 \left(\frac{T}{2\varepsilon_B} \frac{r_c}{a_B} \right); \quad (6.7)$$

здесь ε_B — боровская энергия электрона. Поперечная проводимость определяется носителями с прицельными параметрами $\rho \gg a_B$, для которых рассеяние во всем интервале температур $\varepsilon_c \ll T \ll \varepsilon_B$ квазиклассично, и основной вклад в σ дается процессами рассеяния вперед. При этом в области энергий а) при вычислении квазиклассической фазы рассеяния можно пренебречь энергией электрона, а в области б) ее учет необходим

III. Область теории возмущений:

$$\varepsilon_B \ll T \ll \hbar \omega_H, \quad \sigma_{yy} \propto H^{-2} T^{-3/2} \left(\ln \frac{r_c}{L} \ln \frac{T}{\varepsilon_B} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{r_c}{a_B} \right). \quad (6.8)$$

Первое слагаемое в поперечной проводимости обусловлено вкладом в σ электронов с энергией, существенно превышающей боровскую энергию, второе же — носителями с энергией $\varepsilon \lesssim \varepsilon_B$. Температурно-полевая зависимость поперечной проводимости (6.8) определяется игрой целого ряда параметров. Если радиус экранирования примеси достаточно велик, так что $\ln^2(r_c/a_B) \gg \ln(r_c/L) \ln(T/\varepsilon_B)$, то имеет место зависимость

$$\sigma_{yy} \propto H^{-2} T^{-3/2} \ln^2 \frac{r_c}{a_B} \propto H^{-2} T^{-3/2}. \quad (6.9)$$

Если же температура достаточно высокая или магнитное поле сильное, т. е. $\ln(r_c/L) \ln(T/\varepsilon_B) \gg \ln^2(r_c/a_B)$, то зависимость поперечной проводимости от H и T пропорциональна

$$\sigma_{yy} \propto H^{-2} T^{-3/2} \ln T \ln H. \quad (6.10)$$

Формула поперечной проводимости, впервые полученная Адамсом и Голдстейном ⁴² в борновском приближении по взаимодействию носителей с кулоновскими центрами, имела вид

$$\sigma_{yy} \propto H^{-2} T^{-3/2} \ln \frac{T}{\varepsilon_{\min}} \ln \frac{r_c}{L}, \quad (6.11)$$

*) Ситуация здесь аналогична рассмотренной в гл. 3 для МП состоянии частиц с резко анизотропной эффективной массой.

**) В работе ³⁸ было сделано уточнение областей применимости результатов ³² и указано на возникновение логарифмической зависимости $\propto \ln T \ln H$ (6.10) в области высоких температур.

где ε_{\min} — некоторая (неизвестная) энергия. Из проведенного рассмотрения следует, что основная температурно-полевая зависимость проводимости $\sigma \propto H^{-2} T^{-3/2}$, найденная в ⁴², справедлива, начиная с существенно меньших температур $\varepsilon_{\text{ВВ}}/r_c \ll T \ll \varepsilon_{\text{В}}$, а меняется лишь функциональная зависимость логарифмических множителей. При этом с ростом радиуса экранирования примеси выход σ на логарифмический режим (6.10) все более затягивается.

в) Примесные осцилляционные эффекты

В случае примесей малого радиуса ($r_c \ll L$) матричные элементы оператора рассеяния могут быть найдены при произвольной глубине потенциала ^{10, 11}. Основной вклад в поперечную проводимость на таких центрах дают S-электроны, летящие с минимальными прицельными параметрами. Пренебрежение вкладом носителей с высшими проекциями момента приводит (6.3) к выражению

$$\sigma_{yy} = \sqrt{2\pi} \frac{n_e n_0 e^2 \hbar^2 L^2}{(m^* T)^{3/2}} \alpha^2 \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\exp(-\varepsilon/T)}{1 + (\alpha^2/2) \hbar \omega_H / \varepsilon}, \quad \alpha \equiv \frac{a_0}{L}, \quad (6.12)$$

полученному впервые Скобовым ³⁶. Физический смысл последней формулы очень простой. Под знаком интеграла в (6.12) входит произведение плотностей начальных ($\varepsilon^{-1/2}$) и конечных ($\varepsilon^{-1/2}$) состояний электрона на коэффициент прохождения его через эффективный одномерный δ -потенциал. При $a_0 < 0$ и $|\alpha| \ll 1$, т. е. при наличии на примеси мелкого МП уровня, поперечная проводимость несет непосредственную информацию о его энергии. Действительно, в области высоких температур имеем логарифмическую зависимость σ от напряженности магнитного поля и в основном степенную от температуры

$$\sigma_{yy} \propto T^{-3/2} \ln \frac{T}{H^2}, \quad T \gg \frac{\alpha^2}{2} \hbar \omega_H, \quad (6.13)$$

в то время как при низких температурах

$$\sigma_{yy} \propto T^{-1/2} H^{-2}, \quad T \ll \frac{\alpha^2}{2} \hbar \omega_H \quad (6.14)$$

зависимость проводимости от T и H — чисто степенная. Поскольку энергия $\Delta E = -(\alpha^2/2) \hbar \omega_H$, при $|\alpha| \ll 1$ есть энергия связанного МП состояния в поле короткодействующего центра, то отсюда следует, что температурно-полевая зависимость $\sigma(T, H)$ отражает структуру спектра МП состояний.

В ¹⁰ исследовалось поведение поперечной и продольной проводимостей как функции глубины отдельного рассеивателя малого радиуса $r_c \ll L$. Были обнаружены осцилляции $\sigma(U)$ вблизи резонансных глубин центра $|a_0| \gg L\sqrt{T/\hbar\omega_H} \gg r_c$, усиливающиеся с ростом температуры — амплитуда пиков увеличивается, а ширина уменьшается (см. рис. 9). Обсудим сначала осцилляции поперечной проводимости. Согласно (6.12) в случае центров

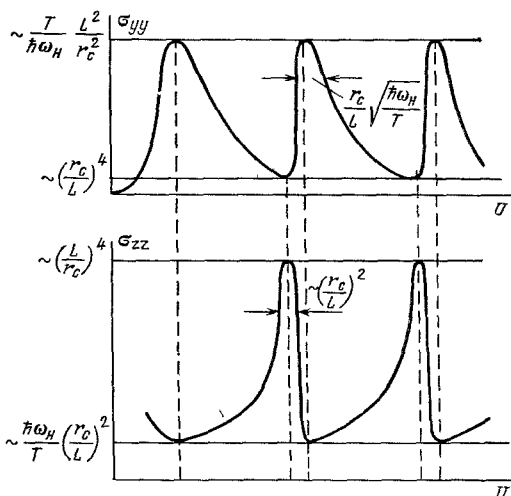


Рис. 9. Зависимости продольной и поперечной проводимостей от глубины примесного потенциала малого радиуса $r_c \ll L$ при высоких температурах ¹⁰.

малого радиуса проводимость

$$\sigma_{yy} \propto \frac{|a_0|^2}{L^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|a_0|^2}{L^2} \frac{\hbar\omega_H}{T} \right)^{-1} \quad (6.15)$$

представляет собой произведение двух множителей, первый из которых, растущий $\propto |a_0|^2$, есть квадрат константы взаимодействия электрона с примесью, а второй, убывающий с ростом $|a_0|^2$, — коэффициент прохождения электрона с характерной кинетической энергией $\sim T$ через эффективный одномерный δ -потенциал, возникающий за счет совместного действия центра и магнитного поля. При увеличении $|a_0|^2$ от нуля до бесконечности (6.15) растет, стремясь к константе

$$\propto \frac{T}{\hbar\omega_H} \propto \frac{T}{\hbar\omega_H} \left(\frac{L}{r_c} \right)^2, \quad (6.16)$$

что соответствует относительной амплитуде осцилляции, показанной на рис. 9. Ширина пика осцилляции легко получается из (6.15). Действительно, вблизи резонанса $a_0 \propto r_c/\Delta U$, отсюда, оценивая эффективные значения ΔU из условия равенства первого и второго слагаемых в знаменателе (6.15), получим, что ширина пика пропорциональна $(r_c/L)\sqrt{\hbar\omega_H/T} \ll 1$. Максимум продольной проводимости имеет место при значениях U , где $a_0 = 0$. При этом электроны с $m = 0$ не «чувствуют» центра ($T^0 = 0$), и вклад в проводимость дает состояние с $m = -1$. Матричный элемент T^{-1} при этом имеет порядок $\propto r_c^2/L^2$, что дает относительную амплитуду осцилляции $\propto |T^{-1}|^{-2} \propto L^4/r_c^4$.

7. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

а) Магнитопримесные осцилляции в эффекте де Гааза — ван Альфена

Брандтом и Любутиной исследовались осцилляции де Гааза — ван Альфена в образцах Вi, легированных малыми концентрациями примесей донорного типа — селена и теллура. Измерения проводились в однородном магнитном поле, менявшемся в интервале 1,5—13 кГс и температурах 1,6—4,2 К и 14—20,4 К, на подвешенных образцах с тригональной осью, перпендикулярной оси подвеса. Снималась зависимость момента сил M от напряженности магнитного поля при различных его направлениях ψ относительно тригональной оси. В ряде случаев на кривых зависимостей анизотропии магнитной восприимчивости $\Delta\chi$ от $1/H$ наблюдалось ярко выраженное периодическое изменение амплитуды осцилляций, напоминающее картину биений (рис. 10). Наиболее отчетливо биения проявлялись у сплавов Вi — Те в области низких концентраций примесей (рис. 10, 1, 2). Как правило, частота биений была пропорциональна частоте наблюдаемых осцилляций и составляла 15—20% от основной частоты. В результате этого при переходе к малым сечениям электронной поверхности период биений возрастает *) и при ориентациях магнитного поля, близких к биссекторной оси, охватывает практически всю область полей от 1,5 до 13 кГс.

Объяснение биений было предложено в ⁴³ (Ермолаев, Каганов), а их теория для модели мелких примесей развита в работах ^{12, 13}. Согласно ⁴³ биения ² есть результат суперпозиции двух осциллирующих зависимостей. Одна обусловлена системой уровней Ландау, другая — системой квазисвязанных МП уровней, индуцированных магнитным полем на нейтральных до-

*) Частота осцилляций в эффекте де Гааза — ван Альфена связана с экстремальным сечением S поверхности Ферми, перпендикулярным направлению магнитного поля, соотношением $\Omega = (c/eH) S$.

норных примесях. Биения возникают при пересечении поверхности Ферми электронов системой МП уровней. Наличие этих МП уровней приводит к изменению плотности электронных состояний, за счет чего, в свою очередь, возникают осциллирующие добавки к термодинамическим величинам^{12, 13}. В линейном по концентрации примесей (нулевого радиуса) приближении и температурах, малых по сравнению с энергией Ферми $T \ll \varepsilon_F$, такая добавка к свободной энергии имеет вид¹²

$$\Delta F = 2n_0 T \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \exp\left(-\frac{2\pi p}{\omega_H \tau_F}\right) \times \\ \times \frac{\cos[2\pi p(\varepsilon_F + |\Delta E_N^0|/\hbar\omega_H)]}{\text{sh}(2\pi^2 p T/\hbar\omega_H)}. \quad (7.1)$$

($\tau_F = \hbar^2 \omega_H / 4 |\Delta E_N^0|^{3/2} \varepsilon_F^{1/2}$ — время жизни электрона). Как следует из (7.1), частота осцилляций, обусловленных квазисвязанными МП уровнями на $\delta\Omega = \Omega[|\Delta E_N^0|/\varepsilon_F]$, больше частоты основных осцилляций. В¹³ был проведен анализ угловых зависимостей биений и учтено влияние анизотропии эффективной массы носителей в модели мелкого потенциала примеси малого, но конечного радиуса. Теория^{12, 13} хорошо описывает качественные особенности явлений, наблюдавшихся в², и подтверждается также двумя экспериментальными фактами: исчезновением биений при смене примесей донорного типа на акцепторный — причем исчезают и квазисвязанные МП уровни — и устойчивостью биений по отношению к технологии изготовления образцов*). Для получения же количественного согласия теории с экспериментом, по-видимому, необходимо проведение расчетов вне рамок борновского примесного потенциала^{12, 13} и использование для нахождения энергий МП уровней общего подхода¹¹.

б) Фотоотрыв электрона с магнитопримесных состояний D⁻примесей

Помимо висмута МП состояния отрицательных ионов наблюдались в образцах n-CdS³ и полупроводниках IV группы Ge⁴ и Si⁵ при измерении фотопоглощения на D⁻центрах в квантующем магнитном поле. Как мы уже говорили, в³⁻⁵ на зависимости кривой сечения фотораспада D⁻ионов $\sigma^H(\omega) \propto \eta(\omega)$ был обнаружен ряд пиков, расположенных на расстоянии, близком к ω_H , и связанных с включением в поглощение последовательных зон Ландау. (В⁴⁵ аналогичные осцилляции были обнаружены для отрицательных ионов серы S⁻.) По полученной зависимости $\sigma^H(\omega)$ во всех перечисленных

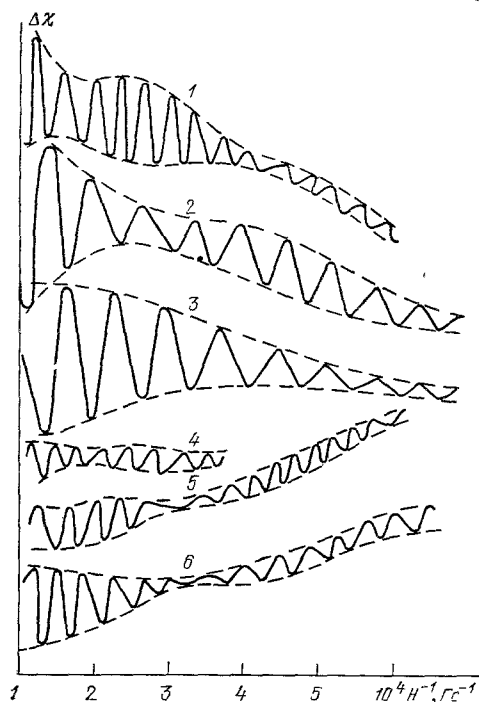


Рис. 10. Зависимость $\Delta\chi(1/H)$ для сплавов Bi — Te и Bi — Se согласно².

ψ — угол между направлениями поля \mathbf{H} и тригональной оси образца. Расчетные концентрации примесей в ат. % и углы: 1 — $8 \cdot 10^{-4}$ Te, $\psi = 165^\circ$; 2 — $8 \cdot 10^{-4}$ Te, $\psi = 140^\circ$; 3 — $8 \cdot 10^{-4}$ Te, $\psi = 78^\circ$; 4 — $5.3 \cdot 10^{-3}$ Se, $\psi = 160^\circ$; 5 — $2.4 \cdot 10^{-3}$ Te, $\psi = 160^\circ$; 6 — $1.6 \cdot 10^{-4}$ Te, $\psi = 155^\circ$.

*) Появление аналогичных² осцилляционных зависимостей, обусловленных возникновением квазисвязанных МП уровней, должно иметь место и в термогальваномагнитных коэффициентах в металах⁴⁴.

экспериментах делались попытки определения $E_i(H)$ энергии связи D^- -ионов. В экспериментах Кона с сотрудниками на n -CdS, легированном мелкими донорными примесями, носители имели температуру 1,4 К, а магнитное поле менялось в интервале 30–126 кГс. Сечение фотоотрыва³ слабо зависело от направления H относительно кристаллографических осей образца и представляло собой сумму двух составляющих, одна из которых описывала линию поглощения циклотронного резонанса с эффективной массой электронов $m^* = (0,194 \pm 0,005) m_e$, а вторая соответствовала некоторой переменной эффективной массе, менявшейся от $(0,130 \pm 0,005) m_e$ при $H = 30$ кГс до $(0,170 \pm 0,005) m_e$ при значении $H = 126$ кГс. Ларсеном¹⁶ было высказано предположение, что вторая составляющая обусловлена поглощением при фотоотрыве электрона с основного МП уровня нейтральной примеси. Для расчета зависимости энергии этого уровня от напряженности магнитного поля в¹⁶ была использована пробная волновая функция с тремя подгоночными параметрами. При $H \neq 0$ расчет¹⁶ дает хорошее согласие теории и эксперимента, однако при нулевом магнитном поле расчетное и наблюдаемое значения энергии отличаются несколько больше.

Поскольку эффективная масса электрона в n -CdS — скаляр, то для описания основного МП уровня D^- -примеси в³ непосредственно применима теория^{14, 10, 11}. Зависимость энергии ε_i этого уровня, отсчитываемой от дна первой зоны Ландау (и измеренной в ридбергах R), от напряженности магнитного поля $\gamma = \hbar\omega_H/2R$, в соответствии с^{11, 14}, дается уравнением (см. приложение)

$$\frac{a_B}{a_0} = \varepsilon_i^{1/2} - \frac{\gamma}{(\varepsilon_i - 2\gamma)^{1/2}} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\varepsilon_i}} - \frac{\gamma^2}{12\varepsilon_i^{3/2}} + \frac{r_0}{2a_B}(3\gamma - \varepsilon_i), \quad (7.2)$$

a_B — боровский радиус нейтральной примеси. Отношения a_B/a_0 и r_0/a_B могут быть определены из независимых экспериментов. Их же можно найти

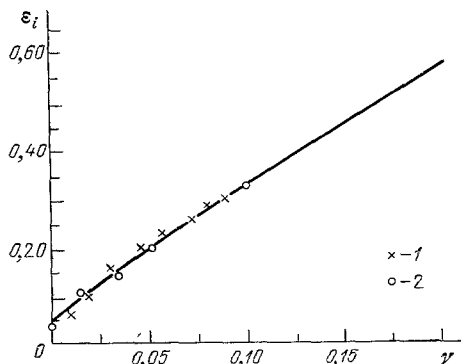


Рис. 11. Зависимость энергии связи D^- -иона от H в n -CdS.

Сплошная кривая — эксперимент³; 1 — расчет по Ларсену¹⁶, 2 — расчет согласно^{10, 14}.

по двум любым точкам³. При этом с точностью до процентов слагаемым $\propto r_0$ оказывается возможным пренебречь. Получаемое по одной экспериментальной точке³ ($\gamma = 0,1$, $\varepsilon_i = 0,32$) отношение a_B/a_0 равно 0,193. Подставляя найденное отношение в левую часть (7.2), получаем уравнение для определения зависимости $\varepsilon_i(\gamma)$. На рис. 11 проведено сопоставление результатов расчета по формуле (7.2) с данными эксперимента³ и результатами Ларсена¹⁶. В отсутствие магнитного поля ($\gamma = 0$) экспериментальное значение энергии связи $\varepsilon_i^{\text{экс}} = 0,0555$, расчет по формуле (7.2) дает величину $\varepsilon_i^{\text{теор}} = 0,372$, в то время как в мо-

дели Ларсена $\varepsilon_i^{\text{лар}} = 0,051$. Применение аналогичного подхода к обработке данных по определению зависимости энергии связи D^- -ионов от H в Ge^4 и Si^5 также дает достаточно хорошее согласие теории и эксперимента. При этом необходим аккуратный учет анизотропии эффективной массы носителей в этих полупроводниках и вклада всех долин.

По поводу измерения зависимости $E_i(H)$ необходимо сделать следующее замечание*). Прямым способом ее определения является, в принципе, определение пороговой частоты поглощения ω_H на зависимости $\sigma^H(\omega)$ ³⁻⁵.

*) Последующие рассуждения принадлежат Ю. А. Гурвичу и А. С. Зильбермину²⁷

В работе ³ предполагалось, что ω_n лежит ниже первого максимума, а в ^{4, 5} — что совпадает с ним. Однако, если глубина примеси такова, что $a_1 < 0$, то под дном любой зоны Ландау имеется квазисвязанное МП состояние с $|m| = l = 1$. При этом кривая поглощения вблизи дна любой зоны имеет 2 пика — один на частоте, отвечающей переходу электрона в это состояние и меньшей ω_n , другой на частоте, большей ω_n и отвечающей резонансному рассеянию на этом МП уровне (см. гл. 4). Если же $a_1 > 0$, то имеется лишь один пик на большей, чем ω_n частоте. То есть ω_n может лежать как выше, так и ниже первого максимума, а ее определение требует более детальных экспериментов. Отметим еще, что для анализа осцилляций желательно проведение измерений при круговой поляризации, поскольку в линейной поляризации ³⁻⁵ происходит наложение пиков с $m = \pm 1$.

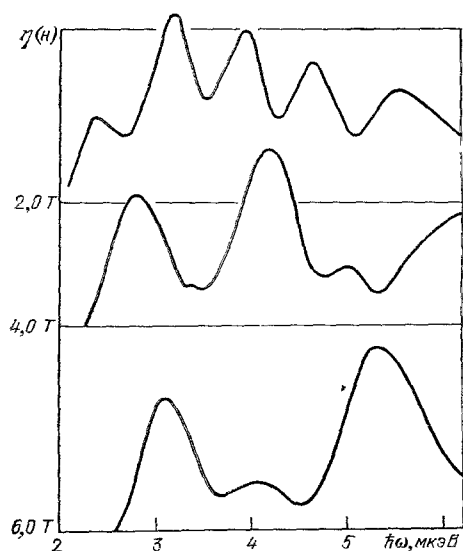


Рис. 12. Зависимость коэффициента фотототрыва электрона с основного состояния As в Si от напряженности магнитного поля ⁵.

Концентрация нейтральных примесей As $6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T = 1,46 \text{ K}$.

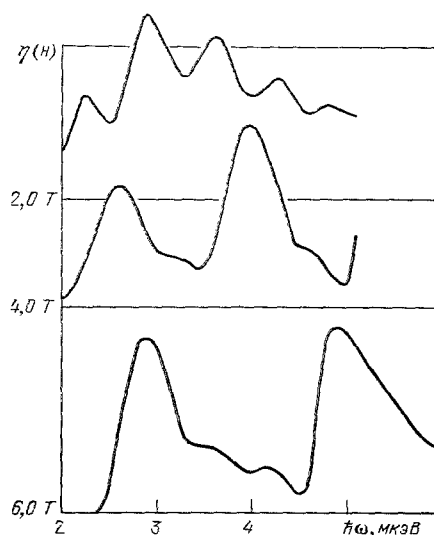


Рис. 13. Зависимость коэффициента фотототрыва электрона с основного состояния Li в Si от напряженности магнитного поля ⁶.

Концентрация нейтральных примесей Li $6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T = 1,46 \text{ K}$.

В работе ²⁷ было вычислено расстояние $\Delta\omega_n$ между соседними пиками кривой поглощения ⁵ (рис. 12, 13). Согласно ²⁷ почти все $\Delta\omega_n$ не совпадают с циклотронной частотой ω_H и, как правило, $\Delta\omega_n < \omega_H$. Это отвечает ситуации, когда длина рассеяния a_1 отрицательна, т. е. отсутствию чисто примесного связанного состояния с моментом $l = 1$ при выключенном магнитном поле (и наличии МП уровней с $|m| = l = 1$ при $H \neq 0$). При этом отклонение $\Delta\omega_n$ от ω_H достигает десятка процентов, т. е. явно превосходит ошибки измерений. Поэтому ²⁷ максимумы поглощения в ⁵ обусловлены нижними пиками, а пороговая частота должна лежать выше первого максимума. Качественно соотношение максимумов пиков фотопроводимости совпадает с результатами расчета ²⁷. Так, как для примесей As (см. рис. 12), так и для Li (см. рис. 13) в поле $H = 2T$ пик, отвечающий переходу электрона D-примеси в зону Ландау $N = 1$ должен быть самым высоким, а с ростом H максимумы пиков с $N = 0$ и $N = 1$ должны выравниваться, что и имеет место на эксперименте ⁵.

Пиковая картина сечения фотоионизации изолированных D-примесей в квантующем магнитном поле наблюдалась также в Ge, легированном Sb и As. Образцы брались при температуре 0,35 K, концентрациях нейтраль-

ных примесей $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (Sb) и $6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (As) и магнитном поле, менявшемся в интервале 0—20 кГс. На кривых поглощения ⁴ отчетливо видны осцилляции (максимальное число которых достигает четырех), возникающие при полях порядка 5 кГс. Однако сравнение экспериментов ⁴ с теорией затруднено в силу ряда обстоятельств ^{16, 27}.

Мы изложили современные представления о спектрах МП состояний примесных потенциалов конечного радиуса действия и кинетических явлениях в системах с такими состояниями. Нам представляется, что с точки зрения качественного описания физических процессов, обусловленных возникновением таких состояний, теория является в общих чертах завершенной. Однако ее количественное согласование с экспериментом находит лишь в начальной стадии и потребует рассмотрения влияния различных коллективных механизмов уширения во взаимодействии носителей с изолированными примесями. Некоторые усилия по изучению эффектов многократного рассеяния носителей на примесях и фононах предпринимались ⁴⁶⁻⁴⁸, однако детального исследования этих вопросов не проводилось.

Нам представляется, что возможность реализации регулируемых магнитным полем МП состояний заряженных частиц на нейтральных примесях открывает большие перспективы в трех важных направлениях. Во-первых, в связи с изучением глубоких примесей в полупроводниках, а особенно в диэлектриках — где механизмы образования примесного потенциала вообще неясны — наличие таких состояний позволяет проводить прямые эксперименты по их выяснению. Во-вторых, в связи с исключительным интересом, проявляемым в последнее время к созданию активных систем, где использование веществ с индуцированными полем МП состояниями позволяет относительно просто создавать инверсную заселенность уровней. И третий круг вопросов связан с исследованиями в области теории фазовых переходов типа металл — диэлектрик в неупорядоченных системах такими МП состояниями.

Автор пользуется возможностью поблагодарить Л. П. Питаевского за стимулирование в написании данного обзора и ряд полезных замечаний, В. Ф. Елесина, Ю. М. Кагана, И. Б. Левинсона, В. Н. Собакина и И. С. Шапиро за обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ ¹¹

Рассмотрим задачу определения энергетического спектра слабосвязанных состояний — мелких реальных или квазидискретных уровней — частицы, характеризуемой гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta + U(r) + V_f(r) \equiv \hat{H}_f + U(r), \quad (\text{П.1})$$

где $U(r)$ — короткодействующий центральный потенциал радиуса r_c , а V_f может описывать как действие внешнего поля, так и взаимодействие с другими центрами, которые сами могут связать частицу. Под слабосвязанными понимаются состояния с энергией $E = \hbar^2 k^2 / 2m^* \ll \hbar^2 / m^* r_c^2$. Взаимодействие V_f в области $r \ll r_c$ предполагается слабым ($V_f \ll \hbar^2 / m^* r_c^2$), существенно меняющимся лишь на расстояниях $L_f \gg r_c$ и допускающим

точное решение уравнения Шредингера (у. III) с гамильтонианом \hat{H}_f .

В рассматриваемой задаче у. III. допускает точное решение как на больших ($r \gg r_c$) расстояниях, где $U = 0$, так и на малых ($r \ll L_f$), где можно пренебречь V_f , так что задача становится сферически симметричной и можно использовать идеи приближения эффективного радиуса ²¹. Энергетический спектр определяется из условия сшивания решений в области перекрытия

$$r_c \ll r \ll \min \{L_f, k^{-1}\}. \quad (\text{П.2})$$

Для решения проблемы сшивания, учитывающего специфику задачи — наличие в поле U мелкого уровня, введем сначала полную систему $G_{lm}^f(r, E)$ решений у. III. с гамильтонианом \hat{H}_f следующим образом. Потребуем, чтобы наряду с выполнением граничного условия при $r \rightarrow \infty$ (затухающая или расходящаяся волна) эти решения при $r \rightarrow 0$ содержали сингулярные слагаемые вида $r^{-l'-1} Y_{l'm'}(n)$ только с $l' = l$, $m' = m$; при этом

в области (П.2)

$$G_{lm}^f = (r^{-l-1} Y_{lm}(\mathbf{n}) + \dots) + \sum_{l'm'} A_{lm'}^{l'm'}(E, f) (r^{l'} Y_{l'm'}(\mathbf{n}) + \dots). \quad (\text{П.3})$$

Указанные граничные условия, вообще говоря, однозначно определяют как G_{lm}^f , так и $A_{lm'}^{l'm'}$.

При $r \gg r_0$ волновая функция искомого состояния представляется в виде $\Psi = \sum C_{l'm'} G_{lm'}^f$, причем в области (П.2) можно воспользоваться асимптотикой (П.3). В то же время в этой области, если идти со стороны малых r , имеем ²¹

$$\Psi = \sum \tilde{C}_{l'm'} Y_{l'm'} [(r^{-l'-1} + \dots) + B_{l'}(E) (r^{l'} + \dots)], \quad (\text{П.4})$$

$$[(2l-1)!!] [(2l+1)!!] B_l = k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l \approx -\frac{1}{a_l} + r_l \frac{m^* E}{\hbar^2},$$

где δ_l , a_l , r_l — фазовый сдвиг, длина рассеяния и эффективный радиус для потенциала U . Если в $U(r)$ есть мелкий уровень с моментом l , то в этой частичной волне рассеяние аномально велико, фазы же $\delta_{l' \neq l}$ малы и в (П.4) можно опустить сингулярные слагаемые $\propto r^{-l'-1}$ с $l' \neq l$. Сшивая волновую функцию в области (П.2), находим, что $C_{l'm'} \neq 0$ лишь для $l' = l$, при этом $C_{lm} = \tilde{C}_{lm}$ и

$$B_l C_{lm} - \sum_{m'} A_{lm'}^{lm'} C_{lm'} = 0, \quad (\text{П.5})$$

$$B_{l'} \tilde{C}_{l'm} = \sum_{m'} C_{lm'} A_{lm'}^{l'm'}, \quad l' \neq l.$$

Условие существования нетривиального решения этой системы

$$\det \left\{ \left[-\frac{1}{a_l} + r_l \frac{m^*}{\hbar^2} E \right] \delta_{lm}, -\tilde{A}_{lm'}^{lm'}(E, f) \right\} = 0 \quad (\text{П.6})$$

и представляет соотношение, определяющее энергетический спектр ^{11 *} (здесь $\tilde{A}_{lm'}^{lm'} = (2l-1)!!(2l+1)!! A_{lm'}^{lm'}$).

Для однородного магнитного поля ввиду сохранения l_z (П.6) распадается на $(2l+1)$ независимых соотношений. При $m = \pm l$ имеем

$$G_{l, m=\pm l}^f(r, E) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + L^{-2}x \right) \mp i \left(\frac{\partial}{\partial y} + L^{-2}y \right) \right]^l G_0(r, r'=0, \tilde{E}); \quad (\text{П.7})$$

$\tilde{E} = E - \hbar\omega_H$ ($|m| + m$), G_0 — функция Грина частицы в однородном магнитном поле. Из сравнения (П.3) и (П.7) находим $A_{lm'}^{lm'}$, после чего (П.6) дает уравнение для определения энергией МП состояний с $m = \pm l$:

$$-\frac{1}{a_l} + r_l \frac{m^*}{\hbar^2} (E - m\hbar\omega_H) =$$

$$= \frac{2^{2l+3/2}}{\sqrt{\pi} L^{2l+1}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} \left\{ \left(\frac{t}{1-e^{-2t}} \right)^{l+1} \exp \left[-\left(1 + |m| + m - \frac{E}{\hbar\omega_H} \right) t \right] \right\}. \quad (\text{П.8})$$

Полагая в (П.8) $l = 0$, приходим к уравнению, определяющему поведение МП уровня $N = l = m = 0$:

$$-\frac{1}{a_0} + r_0 \frac{m^*}{\hbar^2} E = \frac{1}{\sqrt{2}L} \zeta \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar\omega_H} \right) \right]; \quad (\text{П.9})$$

ζ — дзета-функция Римана, и отличающемуся от уравнения ¹⁴ наличием слагаемого, учитывающего конечность радиуса центра. Используя приближенное выражение ζ -функции ¹⁴

$$\zeta \left(\frac{1}{2}, \xi \right) = -2 (\xi + 1)^{1/2} + \xi^{-1/2} + 2^{-1} (\xi + 1)^{-1/2} + \frac{1}{24} (\xi + 1)^{-3/2}. \quad (\text{П.10})$$

и вводя переменные $\gamma = \hbar\omega_H/2R$ и $\varepsilon_l = [(3/2) \hbar\omega_H - E]/R$, получим из (П.9) уравнение (7.2).

Московский инженерно-физический институт

*) Подробное изложение метода приведено в работе ⁴⁹.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бычков Ю. А.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 689.
2. Брандт Н. Б., Любутина Л. Г.— ЖЭТФ, 1967, т. 52, с. 686.
3. Cohn D., Lax N., Button K., Dreybrodt W.— Solid State Com. 1971, v. 9, p. 441.
4. Taniguchi M., Narita S.— J. Phys. Soc. Japan, 1979, v. 47, p. 1503.
5. Narita S., Shinbashi T., Kobayashi M. J.— Phys. Soc. Japan., 1982, v. 51, p. 2186.
6. Скобов В. Г.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1467.
7. Кукушкин Л. С.— ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1213.
8. Андреев С. П.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 1056.
9. Андреев С. П., Кошелкин А. В.— Письма ЖЭТФ, 1982, т. 35, с. 187.
10. Андреев С. П., Ткаченко С. В.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1816.
11. Андреев С. П., Карнаков Б. М., Мур В. Д.— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 155.
12. Ермолаев А. М.— ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1259.
13. Каганов М. И., Кляма С.— ФТТ, 1978, т. 20, с. 2360.
14. Демков Ю. Н., Друкaрев Г. Ф.— ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 257.
15. Андреев С. П., Кошелкин А. В.— ДАН СССР, 1983, т. 272, с. 594.
16. Larsen D.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 472.
17. Перель В. И., Поляков Д. Г.— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 1232.
18. Henry R. J. W., O'Connell R. F., Smith E. R., Channugam G., Rajagopal A. K.— Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 9, p. 329.
19. Кадомцев Б. Б., Кудрявцев В. С.— Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 61.
20. Андреев С. П.— ЖЭТФ 1979, т. 77, с. 1046.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Наука, 1974.
22. Гуревич В. Л., Фирсов Ю. А.— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 199.
23. Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел.— М.: Наука, 1967.— С. 254.
24. Андреев С. П.— ФТТ, 1979, т. 21, с. 2979.
25. Гурвич Ю. А.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 1120.
26. Павлов Н. Г., Панов А. Н.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 572.
27. Гурвич Ю. А., Зильберминц А. С.— ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 1299.
28. Андреев С. П., Ткаченко С. В.— ФТТ, 1980, т. 22, с. 3473.
29. Андреев С. П., Ткаченко С. В.— В кн. X Всесоюзное совещание по теории полупроводников: Тезисы докладов.— Новосибирск, 1980.— Ч. I, с. 18.
30. Бенеславский С. Д., Энтральго Э.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 2271.
31. Андреев С. П.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 665.
32. Андреев С. П., Ткаченко С. В.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 915.
33. Eaves L., Markiewicz R. S., Furneaux J. E.— In: Proc. of 3rd Intern. Conference on Physics of Semiconductors.— Rome, 1978.— P. 910.
34. Nicholas R. J., Stradling R. A., Eaves L.— Ibid., p. 117.
35. Titeica S.— Ann. d. Phys, 1935, Bd. 5, S. 129.
36. Скобов В. Г.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 1304.
37. Kubo R., Miyake S., Hashitsume N.— Sol. State Phys., 1965, v. 17, p. 269.
38. Поляков Д. Г.— ЖЭТФ, 1983, т. 84, с. 749.
39. Kubo R.— J. Phys. Soc. Japan, 1957, v. 12, p. 570.
40. Катилюс Р.— ФТТ, 1964, т. 6, с. 2837.
41. Поляков Д. Г.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 61.
42. Адамс Э., Гольдстейн Т.— В кн. Вопросы квантовой теории необратимых процессов.— М.: ИЛ, 1961.
43. Ермолаев А. М., Каганов М. И.— Письма ЖЭТФ, 1967, т. 6, с. 984.
44. Ермолаев А. М.— ФТТ, 1981, т. 23, с. 343.
45. Blumberg W. A., Jorson R. M., Larson O. J.— Phys Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 1320.
Blumberg W. A., Itano W. M., Larson O. J.— Phys. Rev., 1979, v. 19, p. 139.
46. Андреев С. П.— ДАН СССР, 1973, т. 210, с. 1047; Helv. Phys. Acta, 1976, v. 49, p. 815.
47. Kawabata A.— J. Phys. Soc. of Japan, 1967, т. 23, с. 999.
48. Гурвич Ю. А.— ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 667.
49. Андреев С. П., Карнаков Б. М., Мур В. Д., Полунин В. А.— ЖЭТФ, 1984, т. 86, с. 1065.