

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ НА РЕШЕТКЕ

Ю. М. Макеенко

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	161
1. Калибровочные теории на решетке	165
а) Решетка, ребро, грань и все такое	165
б) Калибровочные поля на решетке	166
в) Решеточное действие. «Наивный» локальный предел	168
г) Квантование калибровочных полей на решетке	169
д) Разложение сильной связи	171
е) Закон площадей	172
ж) Отношение $\chi(I, J)$	174
2. Метод Монте-Карло	175
а) Алгоритм Монте-Карло как марковский процесс	175
б) Метод тепловой бани	177
в) Метод Метрополиса	178
3. Что и как вычисляют методом Монте-Карло	180
а) Удельная энергия: калибровочные группы SU(2) и SU(3)	180
б) Случай фазового перехода: калибровочные группы Z_N	183
в) Фазовая структура абелевых калибровочных теорий. Компактная электро- динамика	186
г) Решеточные артефакты. Калибровочные группы SU(N) и U(N)	187
д) Смешанное действие. Природа пика в теплоемкости	189
е) Природа пика в теплоемкости (продолжение)	191
4. Непертурбативные вычисления в КХД методом Монте-Карло	193
а) Размерная трансмутация	193
б) Коэффициент натяжения струны	195
в) Связь между $\sqrt{\bar{K}}$ и $\Lambda_{\text{КХД}}$	200
г) Массы глюболов	201
д) Температура деконфайнмента	203
е) Универсальность	205
Вместо заключения	206
Цитированная литература	207

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая хромодинамика (КХД), предложенная в ее современном виде немногим более десяти лет назад Гелл-Манном, Фритчем и Вайнбергом¹, является в настоящее время общепризнанной теорией сильного взаимодействия. В КХД взаимодействие между кварками связано с их цветом и осуществляется октетом глюонных полей (см., например, ²). Важнейшее свойство КХД, на которое обратили внимание Гросс, Вильчек и Политцер³, — свойство асимптотической свободы (малости эффективной константы взаимодействия на малых расстояниях) — позволяет рассчитывать в КХД процессы, определяемые малыми расстояниями, пользуясь теорией возмущений.

Однако при увеличении расстояния эффективная константа взаимодействия растет, так что величины, определяемые расстояниями, где взаимодействие действительно становится сильным, по теории возмущений рассчитаны быть не могут. К их числу относится большинство величин, встречающихся в теории сильного взаимодействия, например относящихся к низкоэнергетической адронной физике (массы адронов, ширины их распадов, сечения взаимодействий и т. д.). Для вычисления этих величин нужно, в принципе, учитывать не только (и не столько!) ряд теории возмущений по константе связи (пертурбативная КХД), но и рассматривать имеющиеся непертурбативные вклады, которые в любом порядке теории возмущений отсутствуют.

Тем не менее оказалось, что в КХД имеется область промежуточных расстояний, на которых эти непертурбативные вклады можно простым образом описывать изменением структуры КХД-вакуума — присутствием в вакууме глюонного и кваркового конденсатов. Эти конденсаты последовательно определены в рамках операторного разложения (разложения по степеням произведения расстояния R на характерный масштаб сильного взаимодействия $\Lambda_{\text{КХД}}$), с помощью которого можно вычислять их вклад в физические величины. Учет глюонного и кваркового конденсатов улучшает КХД-описание ряда физических процессов и позволяет, в частности, надежно получить методом правил сумм массы и ширины мезонов из J/ψ -семейства ⁴, а также массы низших мезонов ⁵ и барионов ⁶, составленных из легких кварков.

Вместе с тем в КХД есть большое число явлений, которые обусловлены большими расстояниями $R\Lambda_{\text{КХД}} > 1$, где операторное разложение (не говоря уже о теории возмущений) не применимо. К числу таких явлений относятся невылетание кварков (конфайнмент), возникновение в КХД моделей струны, мешка, траекторий Редже и другие. Эти явления отсутствуют в любом конечном порядке теории возмущений по константе связи и целиком обусловлены непертурбативными эффектами. Еще один пример явлений такого типа — это возникновение кваркового и глюонного конденсатов. Таким образом, хотя и ожидается, что эти явления имеют место в теории сильного взаимодействия, для их получения из лагранжиана КХД необходимо использовать непертурбативные методы.

В настоящем обзоре рассмотрен развитый в последние несколько лет непертурбативный метод, основанный на численном интегрировании методом Монте-Карло КХД, регуляризованной специальным образом с помощью решетки. По сравнению с другими, развивающимися параллельно непертурбативными методами (например, сведение КХД к теории релятивистской струны ⁷), в методе Монте-Карло вычисления доведены до конца в наибольшей степени и их результаты могут сравниваться с экспериментом. Основные шаги, которые приходится делать при вычислениях в КХД методом Монте-Карло, состоят в следующем.

Используется формулировка КХД с помощью функционального интеграла, для которой усреднение по квантовым флуктуациям полей в каждой точке пространства-времени представлено в виде явного интеграла (см., например, монографии ⁸). Далее идея состоит, грубо говоря, в том, чтобы вычислять эти интегралы численно методом Монте-Карло.

Производится переход в евклидово пространство, т. е. время t заменяется на четвертую координату x_4 по закону $x_4 = it$. Такая процедура часто используется даже в теории возмущений для упрощения вычислений. Она является стандартной также для непертурбативной формулировки теории и обеспечивает сходимость функционального интеграла в каждой точке евклидова пространства. Если какая-либо величина, например функция Грина, вычислена в евклидовой теории, то ее значение в теории, определенной в пространстве Минковского, получается с помощью аналитического продолжения $t = -ix_4$ (см., например, в книге ⁹). Разумеется, таким способом можно находить только величины в пространственноподобной области пространства Минковского, а не, например, формфактор во времениподобной области. Этого оказывает-

ся, однако, достаточно для вычисления потенциала взаимодействия между статическими кварками, спектра масс адронов и других величин, рассмотренных ниже.

Непрерывное евклидово пространство заменяется дискретной совокупностью точек — решеткой. Введение решетки делает функциональный интеграл корректно определенной величиной и позволяет воспользоваться для его вычисления методами, применяемыми в статистической физике. Хотя теория, сформулированная на решетке, по построению не обладает инвариантностью относительно группы вращений и группы сдвигов (остаются только дискретные симметрии относительно вращений на угол, кратный $\pi/2$, и сдвигов на величину, кратную шагу решетки), эти симметрии присутствуют в конечных ответах, если характерный масштаб изменения полей много больше шага решетки. Для этого значение константы связи в решеточной теории выбирается вблизи точки фазового перехода второго рода (в точке фазового перехода второго рода корреляционный размер обращается в бесконечность). Именно такая ситуация осуществляется при вычислениях методом Монте-Карло в КХД, что позволяет получать на решетке результаты, относящиеся к непрерывному пределу.

Более конкретно это происходит следующим образом. Введение решетки обеспечивает надлежащую ультрафиолетовую регуляризацию квантовой теории. Если пространственный размер решетки ограничен (что имеет смысл инфракрасной регуляризации), то система вообще имеет конечное число степеней свободы, так что все вычисляемые размерные величины, которые измеряются в единицах шага решетки, являются конечными. Для того чтобы эти величины относились к непрерывному пределу, они должны зависеть от константы связи определенным образом, предписываемым перенормируемостью КХД (см. формулы в п. а) гл. 4). Важно также, чтобы вычисляемые величины не зависели от пространственного размера решетки и от выбора граничных условий, накладываемых на поля на границе. К счастью, оказалось, что характерный масштаб изменения полей, для которого не чувствуется решеточная структура, составляет лишь несколько шагов решетки, и поэтому уже на решетке размера 8^4 можно надежно получать методом Монте-Карло результаты, относящиеся к непрерывному пределу (кратность вычисляемого интеграла при этом $\approx 10^6$). Таким образом, решетку нужно воспринимать только как способ регуляризации, позволяющий получать результаты, относящиеся к непрерывной теории.

Среди полученных таким способом результатов наибольший интерес представляют, как уже отмечалось, такие, которые обусловлены непертурбативными эффектами и не могут быть получены по теории возмущений. Вычисления методом Монте-Карло показали, что кулоновский потенциал взаимодействия между статическими кварками сменяется при увеличении расстояния линейно растущим потенциалом, который приводит к их невылетанию. Вычисленное при этом значение параметра $\Lambda_{\text{КХД}}$ согласуется с феноменологическим значением. Кроме того, методом Монте-Карло вычислялся спектр масс бесцветных глюонных образований — глюоболов — и адронов, составленных из кварков. Также вычислялись возникающие в КХД значения глюонного и кваркового конденсатов и другие величины. Отдельная группа работ посвящена расчетам в КХД при конечной температуре. Здесь методом Монте-Карло была вычислена температура T_c , при которой происходит фазовый переход из фазы адронной материи в фазу кварк-глюонной плазмы, в которой кварки вылетают, температура, при которой разрушается кварковый конденсат, а также различные характеристики кварк-глюонной плазмы.

Для сравнения с экспериментом необходимо знать, какова точность вычислений методом Монте-Карло. Погрешность складывается из статистической ошибки, которая, как всегда при вычислениях методом Монте-Карло, уменьшается при увеличении счетного времени, и разного рода систематических ошибок, связанных со сделанными приближениями, в том числе с тем,

что в большинстве работ не учитывался вклад виртуальных кварков в физические величины. Например, для вычисленных таким способом значений масс адронов полная погрешность оценивается равной примерно ± 150 МэВ. В пределах этой погрешности есть согласие с экспериментом, хотя погрешность довольно велика. Во всяком случае, эти значения получены, исходя прямо из первых принципов КХД без привлечения дополнительных гипотез, и их согласие с экспериментом может рассматриваться как проверка КХД в области низких энергий. Некоторые другие результаты Монте-Карло расчетов, такие, как массы глюоболов, значение T_c , являются предсказаниями на будущее.

В настоящем обзоре подробно рассмотрено, как метод Монте-Карло применяется к изучению калибровочных теорий на решетке, в том числе КХД без кварков. Автор ставил своей целью, во-первых, ввести читателя в круг понятий и методов, используемых в настоящее время при изучении динамики калибровочных теорий, и, во-вторых, дать обзор основных результатов, которые получены в огромном количестве работ, опубликованных по этой теме. В соответствии с названием настоящего обзора, наиболее подробно излагается метод Монте-Карло и результаты, полученные с его помощью. Для облегчения знакомства с оригинальными работами после основных терминов приведен их английский перевод (точнее, эквивалент) и в тексте воспроизведен ряд рисунков из этих работ, на которых изображены результаты вычислений методом Монте-Карло.

В гл. 1 излагаются основные понятия, встречающиеся в калибровочных теориях на решетке. Рассматривается решеточная формулировка калибровочных теорий, квантование решеточных калибровочных теорий методом функционального интеграла, вильсоновский критерий невылетаия кварков, возникновение закона площадей в пределе сильной связи. Обсуждается, какие перенормировочные факторы необходимо выделять из рассматриваемых величин при переходе к непрерывному пределу.

В гл. 2 излагается метод Монте-Карло применительно к решеточным калибровочным теориям. Рассматриваются конкретные алгоритмы, по которым проводятся вычисления: метод тепловой бани и метод Метрополиса.

В гл. 3 на простейшем примере вычисления удельной энергии подробно рассматривается методика, по которой проводится изучение решеточных калибровочных теорий методом Монте-Карло. Рассматривается проблема выбора начального состояния, установления равновесия; величины, вычисляемые для ответа на вопрос — испытывает ли данная решеточная система фазовый переход и если да, то какого рода. Приведены результаты, полученные с помощью этой методики для решеточных теорий с абелевыми калибровочными группами Z_N и $U(1)$, а также неабелевыми калибровочными группами $SU(N)$, $U(N)$ и другими. Обсуждается природа физических явлений, происходящих в точках фазовых переходов.

В гл. 4 дается обзор полученных методом Монте-Карло результатов в непрерывной КХД (без кварков). Рассматривается, как при вычислениях в КХД методом Монте-Карло производится переход к непрерывному пределу. Приведены результаты расчета коэффициента натяжения струны, масс глюоболов, значения температуры T_c . Обсуждается, в какой степени полученные результаты не зависят от выбора вида действия решеточной калибровочной теории.

В настоящий обзор вошел только материал, относящийся к вычислениям методом Монте-Карло в КХД без кварков. Включение результатов, полученных для КХД с кварками, во-первых, привело бы к существенному увеличению объема, и, во-вторых, проведенные работы не обладают пока той степенью завершенности, как для КХД без кварков. Ссылки на эти работы приведены в заключении.

1. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ НА РЕШЕТКЕ

Решеточные калибровочные теории в их современном виде были предложены в 1974 г. Вильсоном ¹⁰ и независимо А. М. Поляковым (опубликовано в работе ¹¹). В этой связи часто цитируется также работа Вегнера ¹², в которой рассматривалась калибровочная модель Изинга. Гамильтонова формулировка развита Когутом и Саскиндом ¹³. Кроме этих работ, большое влияние на последующее развитие решеточных калибровочных теорий оказали также работы Бальяна, Друффэ и Иддиксона ¹⁴ и А. А. Мигдала ¹⁵.

Решеточные калибровочные теории представляют собой непертурбативную регуляризацию калибровочной теории. Решеточная формулировка обладает одновременно рядом дополнительных преимуществ. На решетке просто и красиво решается проблема непертурбативного квантования калибровочных теорий. Решеточная формулировка допускает разложение сильной связи, в каждом порядке которого кварки не вылетают. Наконец, решеточная калибровочная теория может быть исследована при любых значениях констант связи методом Монте-Карло.

а) Решетка, ребро, грань и все такое

Первый шаг на пути построения решеточной калибровочной теории состоит в аппроксимации непрерывного пространства дискретной совокупностью точек — решеткой. В евклидовой формулировке решетка вводится по всем четырем координатам. В гамильтоновом подходе время остается непрерывным. Мы ограничимся рассмотрением евклидовой формулировки, для которой и проводится вычисления методом Монте-Карло.

Решетка (lattice) определяется как множество точек пространства с координатами

$$x_\mu = a n_\mu, \quad (1.1)$$

где компоненты вектора

$$n_\mu = (n_x, n_y, n_z, n_t) \quad (1.2)$$

являются натуральными числами. Точки (1.1) называются узлами (sites) решетки. Размерная константа a , равная расстоянию между соседними узлами, называется шагом решетки (lattice spacing). Размерные величины обычно измеряют в единицах a , полагая тем самым $a = 1$. На рис. 1 изображена двумерная решетка. Четырехмерную решетку, для которой расстояния между узлами одинаковы по всем направлениям (как для рассмотренной решетки), называют гиперкубической.

Следующее понятие — это ребро (link) решетки. Ребром называется линия, связывающая два соседних узла. Ребро обозначается буквой l (или b) и характеризуется координатой x его начала и направлением $\mu = 1, \dots, 4$ ($\mu = 1$ — ось x , ..., $\mu = 4$ — ось t) в пространстве:

$$l = \{x, \mu\}. \quad (1.3)$$

Ребро l связывает узлы с координатами x и $x + a\hat{\mu}$, где $\hat{\mu}$ — единичный вектор в направлении μ , как это изображено на рис. 2. Для гиперкубической решетки длины всех ребер одинаковы и равны a .

Элементарный квадрат, заключенный между четырьмя ребрами, называется гранью (plaquette) решетки. Грань p задается координатой x узла, к которому в направлении μ, ν пристраивается квадратик (рис. 3):

$$p = \{x; \mu, \nu\}. \quad (1.4)$$

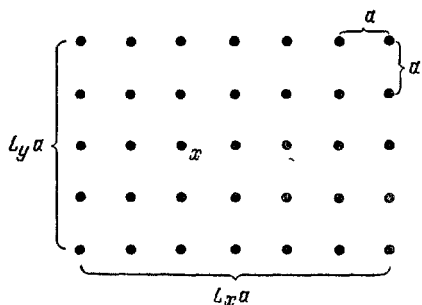


Рис. 1. Двумерная решетка.

Совокупность четырех ребер, образующих границу грани p , обозначается ∂p (реже p).

Если пространственный размер решетки не ограничен, то число динамических степеней свободы бесконечно (но счетно). Вычисления методом Монте-Карло можно проводить реально с большим, но конечным числом степеней свободы. Для их ограничения рассматривается решетка конечного по всем направлениям размера $L_x \times L_y \times L_z \times L_t$ (см. рис. 1). При этом накладываются *периодические граничные условия* (periodic boundary conditions), т. е. узлы, лежащие на параллельных ограничивающих гиперплоскостях, попарно отождествляются (отождествляются узлы с координатами, например, $(0, n_y, n_z, n_t)$ и (L_x, n_y, n_z, n_t)).

Рис. 2. Ребро решетки.

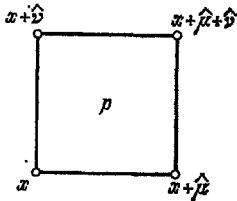


Рис. 3. Грань решетки.

Для симметричной решетки ($L_x = L_y = L_z = L_t = L$) с периодическими граничными условиями число независимых узлов, ребер и граней соответственно равно

$$N_s = L^d, \quad N_l = dL^d, \quad N_p = \frac{d(d-1)}{2} L^d, \quad (1.5)$$

где $d = 4$ — размерность пространства.

б) Калибровочные поля на решетке

В непрерывной теории глюонное поле описывается вектор-потенциалом $A_\mu^a(x)^{1,2}$. Удобно умножить его на генератор t^a фундаментального представления калибровочной группы и работать с эрмитовой матрицей

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) t^a, \quad (1.6)$$

которая является элементом алгебры калибровочной группы. Неабелева напряженность принимает тогда вид

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ig_0 [A_\mu(x), A_\nu(x)], \quad (1.7)$$

где g_0 — заряд глюонного поля.

На решетке глюонное поле описывается матрицами $U_{x,\mu}$, которые приписаны ребрам решетки. Величины $U_{x,\mu}$ являются элементами самой калибровочной группы. Матрицу $U_{x,\mu}$ можно представить в виде экспоненты от μ -й компоненты вектор-потенциала. Для этого заметим, что величина в правой части соотношения

$$U_{x,\mu} = 1 + ig_0 A_\mu(x) a + O(a^2) \quad (1.8)$$

является с точностью $O(a^2)$ элементом калибровочной группы, т. е. при локальном калибровочном преобразовании

$$A_\mu(x) \rightarrow \Omega^{-1}(x) A_\mu(x) \Omega(x) + \frac{i}{g_0} \Omega^{-1}(x) \partial_\mu \Omega(x) \quad (1.9)$$

преобразуется с указанной точностью однородно:

$$U_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x^{-1} U_{x,\mu} \Omega_{x+\hat{\mu}}. \quad (1.10)$$

Для доказательства производную в формуле (1.9) нужно заменить на конечную разность. Матрица Ω_x равна значению матрицы $\Omega(x)$ в узлах решетки.

Теперь ясно, как установить точную связь между матрицами $U_{x,\mu}$ и $A_\mu(x)$. Разобьем звено, соединяющее точки x и $x + a\hat{\mu}$, на бесконечно малые части, для которых формула (1.8) справедлива, и определим $U_{x,\mu}$ как упорядоченное матричное произведение (здесь матрицы упорядочены слева направо).

во, в порядке прохождения ребра от точки x к точке $x + \hat{a}\hat{\mu}$,

$$U_{x, \mu} = \prod_{j=1}^{j=L} \left[1 + ig_0 A_\mu \left(x + \frac{j}{L} \hat{a}\hat{\mu} \right) \frac{a}{L} \right]. \quad (1.11)$$

Поскольку каждый сомножитель преобразуется при калибровочном преобразовании однородно, матрицы Ω во внутренних точках ребра сокращаются, и матрица $U_{x, \mu}$, определенная формулой (1.11), преобразуется при калибровочном преобразовании в точности по формуле (1.11) (теперь уже в любом порядке по a , а не только в порядке $O(a^2)$, как раньше). Величина в правой части формулы (1.11) называется *упорядоченным фазовым фактором* (ordered phase factor). Для него существует специальное обозначение

$$U_{x, \mu} = P \exp \left[ig_0 \int_x^{x+\hat{a}\hat{\mu}} A_\mu(\xi) d\xi_\mu \right]. \quad (1.12)$$

Это и есть окончательная формула, связывающая решеточную матрицу $U_{x, \mu}$ с потенциалом $A_\mu(x)$ в непрерывной теории.

Как видно из формулы (1.12), в решеточной калибровочной теории возникает понятие ориентации данного ребра. Ориентация ребра есть направление, в котором упорядочиваются матрицы в контурном интеграле. Выше мы характеризовали ребро $\{x, \mu\}$ координатой x его начала и (положительным) направлением μ . Будем теперь считать, что ребро имеет отрицательное направление $-\mu$, если его направление противоположно направлению μ -й оси.

Таким образом, как ребро $\{x, \mu\}$, так и ребро $\{x + \hat{\mu}, -\mu\}$ связывают точки x и $x + \hat{\mu}$, однако в первом случае ориентация ребра положительная (совпадает с направлением координатной оси), а во втором — отрицательная. Матрицы U , приписанные ребру с положительной и отрицательной ориентациями, связаны для унитарных матриц соотношением

$$U_{x+\hat{\mu}, -\mu} = U_{x, \mu}^+. \quad (1.13)$$

Определение (1.12) фазового фактора без труда обобщается на произвольный контур. Важнейшую роль в построении решеточной калибровочной теории играет простейший замкнутый контур — граница грани, который изображен на рис. 4. Стрелки показывают последовательность умножения матриц $U_{x, \mu}$. Этому контуру отвечает упорядоченное произведение

$$U_p = U_{x, \mu} U_{x+\hat{\mu}, \nu} U_{x+\hat{\nu}, \mu}^+ U_{x, \nu}^+. \quad (1.14)$$

При его построении использовано свойство (1.13). Из формулы (1.10) следует, что при калибровочном преобразовании U_p преобразуется по закону

$$U_p \rightarrow \Omega_x^{-1} U_p \Omega_x. \quad (1.15)$$

Таким образом, след матрицы U_p калибровочно-инвариантен. Это свойство используется для построения действия решеточной калибровочной теории.

Аналогично формуле (1.14) строится выражение для фазового фактора, отвечающего контуру произвольного вида. Пусть контур C задается своей начальной точкой x и направлениями (часть из которых может быть отрицательными) стыкующихся звеньев:

$$C = \{x, \mu_1, \dots, \mu_n\}. \quad (1.16)$$

U_C строится по изложенным выше правилам следующим образом:

$$U_C = U_{x, \mu_1} U_{x+\hat{\mu}_1, \mu_2} \dots U_{x+\hat{\mu}_1+\dots+\hat{\mu}_{n-1}, \mu_n}. \quad (1.17)$$

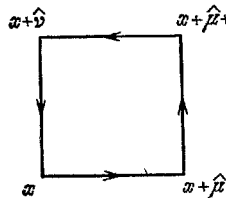


Рис. 4. Контур в виде ориентированной границы грани.

Для звеньев, имеющих отрицательное направление, удобно снова воспользоваться свойством (1.13). Калибровочно-инвариантен след лишь от контурных произведений для замкнутых контуров, когда $\hat{\mu}_1 + \dots + \hat{\mu}_n = 0$. Выражения такого типа используются при вычислении физических величин.

в) Р е ш е т о ч н о е д е й с т в и е.
«Н а и в н ы й» л о к а л ь н ы й п р е д е л

Действие любой решеточной теории можно получить из действия непрерывной теории заменой производных (входящих, например, в напряженность (1.7)) на конечные разности, а интегралы — суммами по узлам решетки. Однако для калибровочной теории такая процедура дискретизации корректна только в свободном случае. Для калибровочной теории со взаимодействием она нарушила бы локальную калибровочную инвариантность. Поэтому при построении действия решеточной калибровочной теории используется рассмотренная в предыдущем пункте формулировка, для которой калибровочные поля приписаны ребрам решетки, а не узлам.

Вильсоновское действие $U(N)$ -калибровочной теории на решетке строится с использованием простейшей калибровочно-инвариантной величины $\text{tr} U_p$:

$$S(U) = \sum_p \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re tr} U_p \right). \quad (1.18)$$

Здесь суммирование выполняется по всем элементарным граням решетки (т. е. по всем x, μ, ν) без учета их ориентаций. Если учесть, что при изменении ориентации грани на противоположную $\text{tr} U_p$ переходит, благодаря свойству (1.13), в комплексно сопряженное выражение

$$\text{tr} U_p \xrightarrow{\text{переориентация}} (\text{tr} U_p)^*, \quad (1.19)$$

то действие (1.18) можно переписать также в эквивалентном виде

$$S(U) = \frac{1}{2} \sum_{\text{ориентированным } p} \left(1 - \frac{1}{N} \text{tr} U_p \right), \quad (1.20)$$

где суммирование выполняется также по двум возможным ориентациям одной и той же грани.

При $a \rightarrow 0$ решеточное действие (1.18) переходит в действие непрерывной $U(N)$ -калибровочной теории. Чтобы убедиться в этом, заметим, что при $a \rightarrow 0$

$$U_p = \exp [ig_0 F_{\mu\nu}(x) a^2 + O(a^3)], \quad (1.21)$$

где $F_{\mu\nu}$ определено формулой (1.7). В абелевой теории разложение (1.21) легко получить по теореме Стокса. Возникающий в неабелевом случае коммутатор $A_\mu(x)$ и $A_\nu(x)$ дополняет абелеву напряженность до неабелевой, что гарантируется калибровочной инвариантностью.

Переход к непрерывному пределу осуществляется с помощью формулы

$$a^4 \sum_p \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{\mu, \nu}. \quad (1.22)$$

Разлагая экспоненту (1.21) в ряд, получим

$$S(U) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{g_0^2}{2N} \int d^4x \sum_{\mu, \nu} \text{tr} F_{\mu\nu}^2(x). \quad (1.23)$$

Тот факт, что действие является скаляром, восстановился после суммирования по μ и ν .

Таким образом, решеточное действие (1.18) переходит при $a \rightarrow 0$ (и фиксированном g_0) в действие непрерывной теории. Такой предел называется в квантовой теории поля «наивным» локальным пределом. Аналогично действию и другие величины, используемые в решеточной калибровочной теории, например U_C , переходят в «наивном» локальном пределе в соответствующие величины для непрерывной теории.

г) К в а н т о в а н и е к а л и б р о в о ч н ы х п о л е й н а р е ш е т к е

В непрерывной теории калибровочное поле можно проквантовать с помощью функциональных интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_x \prod_{\mu} \prod_a dA_{\mu}^a(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2(x) \right]; \quad (1.24)$$

здесь число независимых интегрирований (степеней свободы) равно

$$N_s d d_G, \quad (1.25)$$

где N_s — число точек пространства, d — его размерность, а d_G — размерность калибровочной группы ($d_G = N_c^2 - 1$ для группы $SU(N_c)$). Для сходимости каждого из этих интегралов приходится работать в евклидовом пространстве, где действие входит в показатель экспоненты со знаком минус; для придания математического смысла функциональному интегралу (1.24) нужно также ограничиться счетным множеством точек пространства, например сделать решеточную аппроксимацию (см. работу ¹⁶).

В решеточной калибровочной теории, использующей матрицы $U_{x,\mu}$ в качестве динамических переменных, функциональный интеграл (1.24) заменяется функциональным интегралом вида

$$Z(\beta) = \int \prod_{x,\mu} dU_{x,\mu} e^{-\beta S(U)}. \quad (1.26)$$

В качестве действия можно взять любое калибровочно-инвариантное выражение, переходящее при $a \rightarrow 0$ в действие непрерывной теории. Наиболее простой вид имеет используемое чаще всего вильсоновское действие (1.18). Более тонкий вопрос — изменение меры интегрирования при переходе к решеточной аппроксимации. В выражении (1.26) интегрирование выполняется по инвариантной мере на группе (group measure), называемой также мерой Хаара. Инвариантность групповой меры относительно левого и правого умножения на произвольный элемент группы

$$dU = d(\Omega U) = d(U \Omega) \quad (1.27)$$

гарантирует калибровочную инвариантность функционального интеграла (1.26).

Явное выражение для групповой меры мы рассмотрим на примере калибровочной группы $SU(2)$. Произвольный элемент группы $SU(2)$ можно параметризовать с помощью единичного трехвектора \mathbf{n} ($\mathbf{n}^2 = 1$) и угла φ ($\varphi \in [0, 2\pi)$):

$$U = e^{i\varphi \mathbf{n} \sigma / 2} = \cos \frac{\varphi}{2} + i \mathbf{n} \sigma \sin \frac{\varphi}{2}; \quad (1.28)$$

здесь σ — матрицы Паули. Геометрический смысл такой параметризации крайне прост: элемент (1.28) соответствует вращению на угол φ вокруг оси \mathbf{n} .

Для практических вычислений удобно образовать единичный четырех-вектор

$$a_\mu = \left(n \sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2} \right), \quad a_\mu^2 \equiv \sum_{\mu=1}^4 a_\mu^2 = 1, \quad (1.29)$$

с помощью которого разложение (1.28) матрицы U по базису из четырех матриц $\sigma_\mu = (i\sigma, I)$ принимает простой вид

$$U = a_\mu \sigma_\mu, \quad a_\mu = \frac{1}{2} \text{tr } \sigma_\mu U. \quad (1.30)$$

Интегрирование по мере Хаара для группы $SU(2)$ можно представить как интегрирование по элементу телесного угла в четырехмерном пространстве одним из двух эквивалентных способов:

$$dU = \frac{d^2 n}{4\pi} \frac{d\varphi}{\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (1.31a)$$

$$dU = \frac{d^4 a_\mu}{\pi^2} \delta(a_\mu^2 - 1). \quad (1.31b)$$

Формула (1.31a) получается из формулы (1.31b) после взятия интеграла по $|a|$ от дельта-функции. Возникающее при этом интегрировании условие $a_\mu^2 = 1$ эквивалентно условиям унитарности и унимодулярности матрицы U , поскольку для представления (1.30) $UU^\dagger = a_\mu^2 I$ и $\det U = a_\mu^2$.

Как всегда, величина $Z(\beta)$, определяемая функциональным интегралом (1.26), характеризует в квантовой теории вакуумные эффекты. Для вычисления физических величин нужно усреднять по полю U калибровочно-инвариантные функционалы $Q[U]$:

$$\langle Q[U] \rangle = Z^{-1}(\beta) \int \prod_{x, \mu} dU_{x, \mu} e^{-\beta S(U)} Q[U]. \quad (1.32)$$

Это среднее переходит в «наивном» локальном пределе в соответствующее среднее для непрерывной теории, если константа β связана с зарядом g_0^2 соотношением

$$g_0^2 = \frac{2N_c}{\beta}, \quad (1.33)$$

которое вытекает из формулы (1.23).

На решетке конечного размера интегралы по группе в формуле (1.32) ограничены, поскольку интегрирование выполняется по компактному групповому многообразию, и не возникает бесконечности, связанной с объемом калибровочной группы. Поэтому формула (1.32) представляет собой конструктивный способ вычисления средних от калибровочно-инвариантных величин, хотя калибровка и не фиксирована. Фиксация калибровки может быть проведена стандартным образом по методу Фаддеева — Попова^{17,8}. При этом из числителя и знаменателя в выражении (1.32) выделится одинаковый (конечный) фактор, равный объему калибровочной группы. Функциональный интеграл с фиксированной калибровкой удобен для вычислений в решеточной теории возмущений. Однако вне рамок теории возмущений зафиксировать лоренцеву калибровку нельзя из-за неоднозначностей В. Н. Грибова¹⁸. Напротив, функциональный интеграл (1.32) с нефиксированной калибровкой является корректным непертурбативным способом квантования.

За компактность приходится «расплачиваться» периодичностью по вектор-потенциалу (например, для группы $U(1)$ отождествлением значений вектор-потенциала A_μ и $A_\mu + (2\pi/ag_0)$), которая в обычной калибровочной теории отсутствует, поскольку разрывам вектор-потенциала в непрерывной теории соответствует бесконечное действие. Решеточный аналог таких разрывов — флуктуации вектор-потенциала $A_\mu \sim 1/a$, для которых решеточное

действие (1.18), однако, является конечным, так что по таким конфигурациям также идет интегрирование. Таким образом, решеточные калибровочные теории представляют собой не просто регуляризацию, но и нетривиальное непертурбативное доопределение ряда теории возмущений. Вычисления методом Монте-Карло показывают, что флуктуации $A_\mu \sim 1/a$ на самом деле становятся несущественными при переходе к локальному пределу в интересующем нас случае четырехмерной неабелевой теории. Поэтому истинный локальный предел очень похож на «наивный».

д) Разложение сильной связи

Существуют разные способы приближенного вычисления функционального интеграла (1.32). Уже в первой работе Вильсона¹⁰ рассматривалось разложение по параметру β , связанному с зарядом g_0^2 формулой (1.33). Предел малых β (больших g_0^2) называется пределом *сильной связи* (strong coupling), а вычисление интеграла (1.32) в виде разложения по β — разложением *сильной связи*, или «высокотемпературным» разложением. Последний термин восходит к аналогии между функциональным интегралом (1.26) и статистической суммой некой (четырёхмерной) системы. Тогда константа β имеет аналогом обратную температуру, а разложение по β — высокотемпературное разложение в статистической физике.

Основная величина, с которой приходится иметь дело в решеточных вычислениях, — это среднее от следа фазового фактора (1.17), называемое *контурным средним* (loop average):

$$W(C) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} U_C \right\rangle. \quad (1.34)$$

Здесь усреднение проводится по формуле (1.32).

Для вычисления $W(C)$ в пределе сильной связи экспонента разлагается в ряд по β , после чего задача сводится к вычислению групповых интегралов

$$\int dU U_{j_1^1}^{i_1^1} \dots U_{j_n^1}^{i_n^1} U_{l_1^1}^{+k_1} \dots U_{l_m^1}^{+k_m}, \quad (1.35)$$

где мера нормирована условием $\int dU = 1$. Из общих соображений интеграл (1.35) отличен от нуля только при $n = m \pmod{N}$, т. е. при $n = m + kN$, где k — любое целое число. Для простейшего случая $m = n = 1$ ответ легко получить, используя унитарность матриц U и соотношение ортогональности:

$$\int dU U_i^j U_l^{+k} = \frac{1}{N} \delta_i^j \delta_l^k. \quad (1.36)$$

Этой формулы достаточно для вычисления контурных средних в главном приближении по β .

Рассмотрим простейший случай контура, являющегося границей грани, $C = \partial p$ (см. рис. 4). В порядке β достаточно ограничиться только первыми двумя членами разложения экспоненты:

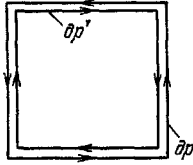
$$W(\partial p) = \frac{\int \prod_{x, \mu} dU_{x, \mu} \frac{1}{N} \text{tr} U_p \left(1 + \beta \sum_{p'} \frac{1}{N} \text{Re tr} U_{p'} \right)}{\int \prod_{x, \mu} dU_{x, \mu} \left(1 + \beta \sum_{p'} \frac{1}{N} \text{Re tr} U_{p'} \right)} + O(\beta^2). \quad (1.37)$$

Далее групповое интегрирование выполняется по формуле

$$\int dU U_l^i U_{l'}^j U_{l''}^{+n} = \frac{1}{N} \delta_{l'l} \delta_m^i \delta_j^n, \quad (1.38)$$

которая следует из приведенных выше правил. Символ $\delta_{l'l'}$ означает, что (ориентированное) ребро l' непременно должно совпасть с ребром l для того, что-

бы результат интегрирования был отличен от нуля. По этому правилу знаменатель в выражении (1.37) равен единице (каждое ребро встречается не более одного раза), а в числителе отличен от нуля только вклад от грани p' , совпадающей с гранью p , но противоположно ориентированной (см. рис. 5 и формулу (1.19)). Перемножение символов Кронекера окончательно дает



$$W(\partial p) = \frac{\beta}{2N^2} \text{ для группы } SU(N) \text{ при } N \geq 3, \quad (1.39a)$$

$$W(\partial p) = \frac{\beta}{4} \text{ для группы } SU(2). \quad (1.39b)$$

Рис. 5. Границы граней p и p' , ориентированных противоположно.

Отсутствие дополнительного фактора $1/2$ для группы $SU(2)$ связано с тем, что в этом случае $\text{tr } U_p$ является вещественным, и ориентации граней можно не принимать во внимание.

Формула (1.38) позволяет также вычислить первый не исчезающий порядок разложения сильной связи для контурного среднего в случае контуров более сложного вида. Согласно формуле (1.38) отличен от нуля интеграл только от такого члена в разложении экспоненты по β , для которого грани целиком заполняют поверхность, натянутую на данный контур C (см. рис. 6).

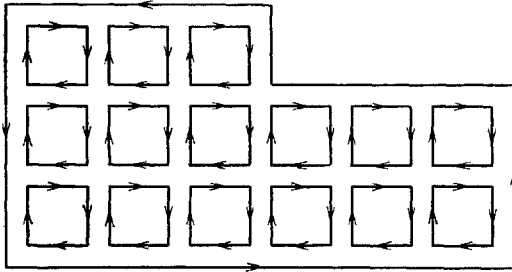


Рис. 6. Заполнение контура элементарными гранями.

В этом случае каждое ребро в групповом интеграле встречается дважды (или ни одного раза), причем один раз в положительном, а другой раз в отрицательном направлении, и все групповые интегралы отличны от нуля. Первый не исчезающий порядок соответствует заполнению минимальной

поверхности (minimal surface), площадь которой принимает минимальное возможное значение. Таким образом, для контурного среднего (от простого контура без самопересечений) получим в главном порядке по β

$$W(C) = [W(\partial p)]^{A_{\min}(C)}, \quad (1.40)$$

где $A_{\min}(C)$ обозначает площадь (в единицах a^2) минимальной поверхности, натянутой на контур C , а $W(\partial p)$ дается формулой (1.39).

е) Закон площадей

Экспоненциальный характер зависимости контурного среднего от площади носит название *закона площадей* (area law). Принято считать, что если в чистой глюодинамике для контуров большой площади имеет место закон площадей, то кварки не вылетают (т. е. не существуют как физические $|in\rangle$ -или $|out\rangle$ -состояния). Это утверждение представляет собой содержание вильсоновского критерия невылетаия кварков (confinement criterion). Аргументация состоит в том, что в этом случае физические амплитуды, например поляризационный оператор, не имеют физической кварковой особенности¹⁰.

Другое, возможно, чересчур упрощенное обоснование вильсоновского критерия основано на связи контурного среднего с потенциальной энергией взаимодействия между статическими кварками. Для нахождения этой связи рассмотрим контур в виде прямоугольника размера $R \times T$, лежащий в пло-

скости x, t (см. рис. 7). Зафиксируем калибровку условием $A_4(x, \dots, t) = 0$. Тогда

$$W(R, T) = \langle \text{tr } \Psi(0) \Psi^+(T) \rangle, \quad (1.41)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= P \exp \int_0^R A_1(x, \dots, 0) dx, \\ \Psi(T) &= P \exp \int_0^R A_1(x, \dots, T) dx. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Подставляя в формулу (1.41) сумму по промежуточным состояниям

$$\langle \text{tr } (\Psi(0) \Psi^+(T)) \rangle = \sum_n \langle \Psi_{ij}(0) | n \rangle \langle n | \Psi_{ji}^+(T) \rangle \quad (1.43)$$

и замечая, что

$$\Psi(T) = e^{-\hat{H}T} \Psi(0) e^{\hat{H}T}, \quad (1.44)$$

где H — оператор дискретного сдвига по «временной» оси («гамильтониан» системы), получим окончательно

$$W(R, T) = \sum_n |\langle \Psi_{ij}(0) | n \rangle|^2 e^{-E_n T}; \quad (1.45)$$

здесь E_n — энергия $|n\rangle$ -го состояния системы.

Рассмотрим теперь предел $T \gg R$. При $T \rightarrow \infty$ в сумме по состояниям остается только основное состояние, энергия которого минимальна, и мы приходим к формуле

$$W(R, T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} e^{-E_0(R)T}. \quad (1.46)$$

Таким образом, $E_0(R)$ представляет собой, по определению, изменение энергии основного состояния решеточной системы при внесении статических кварков, т. е. энергию их взаимодействия (включая самовоздействие). Тот факт, что $E_0(R)$ вычисляется при помощи евклидова функционального интеграла, несуществен при $T \rightarrow \infty$. Формулу (1.45) можно без труда продолжить аналитически в пространство Минковского заменой $T \rightarrow -iT$, откуда немедленно следует, что $E_0(R)$ есть физическая энергия. Преимущество работы в евклидовом пространстве, как всегда, состоит в том, что сумма (1.45) сходится при всех $T > 0$.

По определению $E_0(R)$ включает слагаемое, связанное с перенормировкой массы тяжелого кварка за счет взаимодействия с калибровочным полем и, следовательно, не зависящее от R . При $a \rightarrow 0$ эта величина в старшем порядке по g_0^2 имеет такой же вид как в квантовой электродинамике:

$$\Delta E_{\text{ма}} = \frac{g_0^2}{4\pi a} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}. \quad (1.47)$$

Потенциальная энергия взаимодействия между статическими кварками определяется как разность

$$E(R) = E_0(R) - \Delta E_{\text{мас}}. \quad (1.48)$$

Если бы $\Delta E_{\text{мас}}$ не обращалось в бесконечность при переходе к непрерывному пределу ($a \rightarrow 0$), то слагаемое, связанное с перенормировкой массы, можно было бы не вычитать, поскольку оно только изменяет уровень отсчета потенциальной энергии.

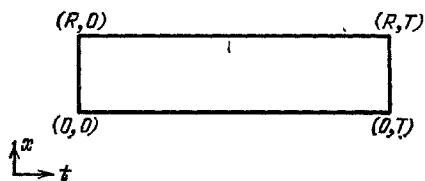


Рис. 7. Прямоугольный контур размера $R \times T$.

Если для контурного среднего справедлив закон площадей

$$W(C) \underset{\text{большие } C}{\propto} \exp[-KA_{\text{min}}(C)], \quad (1.49)$$

как это имеет место в рамках разложения сильной связи, то E зависит от расстояния линейно:

$$E(R) = KR. \quad (1.50)$$

Коэффициент K в этих формулах называется *коэффициентом натяжения струны* (string tension). Название обусловлено тем, что для возникновения линейно растущего потенциала глюонное поле между кварками должно собраться в трубку — струну. Струна вытягивается следом за кварками и не позволяет им разойтись на макроскопические расстояния.

Наоборот, для кулоновского потенциала

$$E(R) = \text{const} - \frac{g_0^2}{4\pi R} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \quad (1.51)$$

поле вокруг кварка распределено сферически симметрично, и контурное среднее ведет себя как

$$W(C) \underset{\text{большие } C}{\longrightarrow} e^{-\text{const периметр}(C)}. \quad (1.52)$$

Такое поведение контурного среднего называется *законом периметров*, (perimeter law). В каждом порядке теории возмущений для контурного среднего справедлив именно закон периметров (1.52), а не закон площадей (1.49). Таким образом, упрощенная интерпретация вильсоновского критерия невылетаия кварков состоит в том, что закону площадей соответствует линейно растущий с расстоянием потенциал, который и приводит к невылетанию кварков, а закону периметров — потенциал, который не способен удерживать кварки.

ж) О т н о ш е н и е $\chi(I, J)$

Извлечение из решеточных контурных средних информации о характере взаимодействия между статическими кварками в непрерывном пределе затруднено необходимостью выделять (бесконечный) фактор, связанный с перенормировкой кварковой массы, который имеет вид экспоненты от периметра. Кройц¹⁹ предложил красивый способ обойти эту трудность.

Рассмотрим величину

$$\chi(I, J) = -\ln \frac{W(I, J) W(I-1, J-1)}{W(I-1, J) W(I, J-1)}, \quad (1.53)$$

где $W(I, J)$ обозначает контурное среднее от прямоугольника размера $I \times J$. Поскольку периметр

$$(I \times J) = 2I + 2J, \quad (1.54)$$

фактор, пропорциональный в $W(I, J)$ экспоненте от периметра, сокращается в отношении (1.53) и не препятствует переходу к непрерывному пределу.

Для выявления физического смысла величины χ рассмотрим снова контур в виде прямоугольника, вытянутого вдоль оси «времени» (см. рис. 7). Подстановка асимптотики (1.46) в определение (1.53) дает

$$\chi(R, T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} a[E_0(R) - E_0(R-a)]. \quad (1.55)$$

Вклад в $E_0(R)$ от перенормировки кварковой массы сокращается в правой части уравнения (1.55) (как мы уже показали выше, для любых R и T), и в непрерывном пределе $a \rightarrow 0$ разность переходит в производную от потенциала:

$$\chi = a^2 \frac{dE(R)}{dR}, \quad (1.56)$$

т. е. пропорциональна силе, с которой кварк и антикварк действуют друг на друга.

Величина $\chi(I, J)$ обладает еще одним полезным свойством. При $a \rightarrow 0$ кроме линейной расходимости, связанной с перенормировкой кварковой массы, $\ln W(I, J)$ имеет также логарифмическую расходимость, связанную с тормозным излучением заряженной частицы при изменении направления ее движения. Для контура прямоугольной формы, имеющего четыре угла, эта расходимость вычисляется по общей формуле, полученной впервые в работах ²⁰, и равна

$$[\Delta \ln W]_{\text{торм}} = \frac{g_0^2 (N_c^2 - 1)}{4\pi^2 N_c} \ln \frac{\text{периметр}}{a}. \quad (1.57)$$

В величине $\chi(I, J)$ расходимость, связанная с тормозным излучением, снова сокращается (поскольку числа углов для контуров в числителе и знаменателе отношения в правой части (1.53) одинаковы) и не препятствует переходу к непрерывному пределу.

Более того, из общих теорем о перенормируемости контурных средних, доказанных в работах ²⁰, следует, что все расходимости в величине χ исчезают после перехода от затравочного заряда g_0^2 к перенормированному заряду g_R^2 .

Кроме перечисленных выше еще одно свойство величины χ делает ее удобной для вычисления коэффициента натяжения струны в непрерывном пределе. При больших I, J постановка закона площадей (1.49) в определение (1.53) приводит к выражению

$$\chi(I, J) \xrightarrow{\text{большие } I, J} a^2 K, \quad (1.58)$$

не зависящему от размеров контура. Практически, именно отсутствие такой зависимости сигнализирует при вычислениях методом Монте-Карло о том, что уже наступил закон площадей. Конкретные результаты вычисления величины χ методом Монте-Карло рассмотрены в гл. 4.

2. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло является наиболее развитым из существующих в настоящее время численных методов, используемых в решеточных теориях. Этот метод широко применяется в различных задачах статистической физики. Идея применить метод Монте-Карло к изучению решеточных калибровочных теорий принадлежит Вильсону ²¹. Методика вычислений по методу Монте-Карло в решеточных калибровочных теориях была разработана Джэкобсом, Кройцем и Ребби ^{22, 23}.

а) Алгоритм Монте-Карло как марковский процесс

Метод Монте-Карло используется для вычисления функциональных интегралов, рассмотренных в п. г) гл. 1, при любых значениях константы связи. При этом оказывается невыгодным интегрировать последовательно по матрицам U_l на каждом ребре l , а удобнее заменить многократный интеграл суммой по состояниям системы и вычислять сразу эту сумму методом Монте-Карло.

Пусть все ребра, принадлежащие решетке конечного размера, пронумерованы. Тогда некоторое состояние системы, обозначаемое буквой C , характеризуется значением матрицы U_1 на первом ребре, значением U_2 на втором и т. д.:

$$C = \{U_1, U_2, \dots, U_{N_l}\}. \quad (2.1)$$

Будем также для простоты считать, что матрицы U принимают дискретный набор значений. Ясно, что последовательное суммирование (интегрирование)

по U можно представить как сумму по всем состояниям системы

$$\sum_{U_1} \sum_{U_2} \dots \sum_{U_{N_I}} = \sum_{\{U_1, U_2, \dots, U_{N_I}\}}, \quad (2.2)$$

поскольку для сходящегося интеграла конечной кратности повторный интеграл равен многомерному.

Таким образом, среднее (1.32) можно вычислять по формуле

$$\langle Q \rangle = \frac{\sum_C Q(C) e^{-\beta S(C)}}{\sum_C e^{-\beta S(C)}}, \quad (2.3)$$

где $Q(C)$ и $S(C)$ обозначают, соответственно, значения усредняемой величины Q и действия S в данном состоянии C .

Если полное число состояний системы велико (как в интересующем нас случае), то перебрать их все не представляется возможным и для вычисления суммы (2.3) применяется стандартный метод Монте-Карло.

Для этого случайным образом генерируется последовательность состояний системы

$$A = (C_0, C_1, \dots, C_N). \quad (2.4)$$

Если состояние C_n встречается в последовательности (2.4) с вероятностью $P(C_n)$, то сумма (2.3) аппроксимируется выражением

$$\langle Q \rangle \approx \frac{\sum_{n=1}^N Q(C_n) P^{-1}(C_n) e^{-\beta S(C_n)}}{\sum_{n=1}^N P^{-1}(C_n) e^{-\beta S(C_n)}}. \quad (2.5)$$

Ясно, что для β , не стремящегося к нулю, при вычислении по формуле (2.5) невыгодно, чтобы все состояния в последовательности (2.4) были равновероятными, поскольку в этом случае большая часть конфигураций будет экспоненциально подавлена больцмановским фактором. Выгодно генерировать состояния C_n с больцмановской вероятностью

$$P(C_n) \propto e^{-\beta S(C_n)}, \quad (2.6)$$

чтобы сократить этот фактор. Тогда выражение (2.5) принимает вид среднего арифметического

$$\langle Q \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(C_n). \quad (2.7)$$

Последовательность состояний, которые генерируются с вероятностью (2.6), называется равновесной последовательностью состояний. Аналогия со статистической физикой очевидна.

На самом деле, построить алгоритм, генерирующий равновесный ансамбль состояний, не так-то просто, поскольку значение больцмановской вероятности заранее неизвестно. С этой целью устанавливается марковский процесс, с помощью которого каждое новое состояние в последовательности (2.4) строится из предыдущего состояния. Напомним, что марковским процессом называется такой случайный процесс, который полностью определяется вероятностью перехода $W(C \rightarrow C')$ из состояния C в состояние C' , причем эта вероятность не зависит от истории системы. Вероятность перехода $W(C \rightarrow C')$ выбирается таким образом, чтобы в пределе возникло больцмановское распределение (2.6). Для этого достаточно, чтобы вероятность перехода $W(C \rightarrow C')$ удовлетворяла условию детального баланса

$$e^{-\beta S(C)} W(C \rightarrow C') = e^{-\beta S(C')} W(C' \rightarrow C). \quad (2.8)$$

Выполнение условия (2.8) достаточно для того, чтобы, во-первых, равновесная последовательность состояний переводилась снова в равновесную и, во-вторых, неравновесная последовательность приближалась при движении по марковской цепочке к равновесной.

Конкретные алгоритмы, по которым проводятся вычисления методом Монте-Карло, различаются выбором вероятности перехода $W(C \rightarrow C')$, однако свойство (2.8) непременно выполняется. Для разных алгоритмов скорость сходимости к равновесию оказывается разной. Конкретные алгоритмы рассмотрены в двух следующих пунктах.

б) М е т о д т е п л о в о й б а н и

Вычисляемый методом Монте-Карло функциональный интеграл (1.26) выглядит как статистическая сумма некоторой (четырёхмерной) системы при температуре $1/\beta$. На этой аналогии основан рассмотренный в настоящем разделе интуитивно наглядный монте-карловский алгоритм, по которому новое состояние C_{n+1} в последовательности (2.4) строится из предыдущего состояния C_n .

Каждое состояние C характеризуется значениями матриц на всех ребрах решетки (см. (2.1)), причем текущие значения этих матриц хранятся в машинной памяти. Начальное состояние

$$C_0 = \{U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, \dots, U_{N_l}^{(0)}\} \quad (2.9)$$

задается «руками». Например, для определенности можно считать, что в начальном состоянии система полностью упорядочена, т. е. на всех ребрах матрицы $U^{(0)}$ равны единичной. Если значение температуры $1/\beta$ не слишком мало, то такое упорядоченное состояние системы очень далеко от состояний, типичных для данной температуры. Из аналогии со статистической суммой ясно, что систему можно привести в состояние равновесия, прикладывая последовательно к каждому ребру решетки термостат, нагретый до температуры $1/\beta$. Монте-карловский алгоритм, имитирующий этот физический процесс, называется *методом тепловой бани* (heat bath method)²⁴.

Рассмотрим подробнее, как ЭВМ «прикладывает термостат» к ребрам решетки. Пусть задано некоторое начальное состояние (2.9). Строим новое состояние следующим образом. Заменим на первом ребре старую матрицу $U_1^{(0)}$ новой матрицей $U_1^{(1)}$, которая выбирается случайно из всей калибровочной группы с вероятностью, пропорциональной больцмановскому фактору

$$W_1(U_1^{(0)} \rightarrow U_1^{(1)}) \propto e^{-\beta S(U_1^{(1)})}. \quad (2.10)$$

Здесь действие вычисляется для новой конфигурации

$$\{U_1^{(1)}, U_2^{(0)}, \dots, U_{N_l}^{(0)}\}, \quad (2.11)$$

в которой первому ребру соответствует новое значение $U_1^{(1)}$, а остальным ребрам — старые значения. После того как новое значение матрицы U_1 выбрано, оно записывается в ту самую ячейку машинной памяти, где раньше хранилось старое значение $U_1^{(0)}$, которое при этом «забывается». Таким образом, мы «приложили термостат» к первому ребру решетки, в результате чего система перешла из состояния (2.9) в состояние (2.11).

Далее та же самая процедура применяется последовательно ко второму, третьему и всем остальным ребрам решетки, причем на каждом шаге вероятность, с которой выбирается новый элемент, пропорциональна больцмановскому фактору:

$$W_M(U_M^{(0)} \rightarrow U_M^{(1)}) = \text{const} \cdot e^{-\beta S(U_M^{(1)})}, \quad (2.12)$$

где действие вычисляется для конфигурации, в которой значения матриц U на всех ребрах, кроме рассматриваемого, фиксированы равными своим теку-

щим значениям, а изменяется только U_M . Одной монте-карловской *итерацией* (sweep) называется применение этой процедуры ко всем ребрам решетки. Таким образом, вероятность перехода $W(C \rightarrow C')$ определяется формулой

$$W(C \rightarrow C') = \prod_{M=1}^{N_l} W_M(U_M \rightarrow U'_M), \quad (2.13)$$

где произведение берется по всем ребрам решетки.

Заметим, что старое значение матрицы U на данном ребре не участвует непосредственно в процедуре генерирования нового элемента. Тем не менее, поскольку старый элемент был, вообще говоря, скоррелирован со значениями матрицы U на соседних ребрах, он оказывает косвенное влияние на процесс выбора нового элемента. Вероятность (2.12) непосредственно определяется значениями матриц U на тех соседних ребрах, которые вместе с данным ребром образуют границу какой-либо грани решетки. Число таких соседних ребер для действия (1.18) равно восемнадцати, и они образуют вместе с данным ребром $2(d-1) = 6$ граней, опирающихся на данное ребро. Таким образом, в методе тепловой бани на каждом монте-карловском шаге нужно рассматривать фактически лишь эти шесть граней.

Из-за обсуждавшейся скоррелированности одной итерации будет, вообще говоря, недостаточно для того, чтобы система пришла в состояние равновесия. Понадобится много проходов сквозь всю решетку, чтобы система «забыла» начальное состояние. Аналогия метода тепловой бани с физическим процессом позволяет утверждать, что тепловое равновесие в конце концов установится, причем это произойдет за наименьшее (по сравнению с другими методами) число итераций. Однако метод тепловой бани, предложенный для изучения решеточных калибровочных теорий в работах ^{22,23}, оказался эффективным только для простейших калибровочных групп ($U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ и дискретных подгрупп). Для более сложных групп генерирование новых элементов по методу тепловой бани занимает слишком много машинного времени, и используется другой метод, рассмотренный в следующем пункте.

в) Метод Метрополиса

Кроме метода тепловой бани при интегрировании по калибровочным полям применяется также стандартный для статистической физики метод Метрополиса ²⁵. Хотя при использовании этого метода требуется больше итераций, чтобы привести систему в состояние равновесия, вычисления на каждом шаге проще и выполняются быстрее. Поэтому для калибровочных групп, более сложных, чем группа $SU(2)$, при использовании метода Метрополиса часто достигается экономия машинного времени.

Как и в методе тепловой бани, в методе Метрополиса на каждом монте-карловском шаге изменяется значение матрицы только на одном ребре, так что вероятность перехода из одной конфигурации в другую определяется произведением (2.13) вероятностей перехода на отдельных ребрах. Однако в отличие от метода тепловой бани для метода Метрополиса вероятность перехода $W_M(U_M \rightarrow U'_M)$ зависит явным образом как от нового значения U'_M , так и от старого значения U_M . В простейшем варианте новое значение U'_M выбирается случайно из всех групповых элементов с одинаковой вероятностью (для дискретных групп всегда выбирается $U'_M \neq U_M$). Далее вычисляется изменение действия при замене U_M на U'_M :

$$\Delta S = S(U'_M) - S(U_M). \quad (2.14)$$

Если при замене U_M на U'_M действие уменьшается, т. е. $\Delta S < 0$, то в качестве матрицы U на данном ребре M запоминается это новое значение U'_M , и можно переходить к следующему шагу.

Условие детального баланса (2.8) определяет оставшуюся часть алгоритма. Если при замене U_M на U'_M действие не уменьшилось (т. е. вычисленное по формуле (2.14) значение $\Delta S \geq 0$), то с помощью датчика случайных чисел генерируется случайное число r , распределенное равномерно между 0 и 1. Далее r сравнивается с $\exp(-\beta\Delta S)$. Если

$$\exp(-\beta\Delta S) > r, \quad (2.15)$$

то вместо U_M принимается новое значение U'_M . Если окажется, что условие (2.15) не выполнено, то матрица U на данном ребре остается равной своему старому значению U_M , после чего происходит переход к следующему шагу.

Заметим, что, поскольку для $\Delta S < 0$ имеем $\exp(-\beta\Delta S) > 1$, условие (2.15) для $\Delta S < 0$ всегда выполнено. Поэтому обе части алгоритма удобно объединить в одно условие: если неравенство (2.15) выполнено, то принимается новое значение U'_M , если не выполнено, то остается старое значение U_M .

Отметим также, что при вычислениях методом Метрополиса на каждом шаге нужно вычислять лишь изменение действия при замене U_M на U'_M на одном ребре. Как обсуждалось в предыдущем пункте, эта величина определяется только значениями матриц U на ребрах, которые образуют границы шести граней, опирающихся на данное ребро.

Следующий монте-карловский шаг может состоять в применении метода Метрополиса как к другому, так и к тому же самому ребру. Часто оказывается выгодным повторить алгоритм Метрополиса несколько раз (для группы SU (2) 10 ÷ 20 раз) на одном и том же ребре, прежде чем переходить к следующему ребру, поскольку на такое повторение идет очень мало машинного времени по сравнению с поиском соседнего ребра и выполнением на нем операций. Ясно, что если на одном ребре сделать очень много повторений, прежде чем переходить к соседнему, то это ребро придет в состояние термодинамического равновесия с соседними. Таким образом, при очень большом числе повторений метод Метрополиса имитирует метод тепловой бани. Практически, оптимальное число повторений определяется для каждой калибровочной группы опытным путем из условия экономии машинного времени.

Существенная экономия машинного времени происходит также, если в методе Метрополиса предлагаемый новый элемент U'_M не выбирать на каждом шаге случайно из всей группы, а строить по следующему правилу. Построим вначале случайным образом таблицу из нескольких групповых элементов Q_1, \dots, Q_k , которая для каждого элемента содержит также и обратный элемент. Предлагаемый новый элемент U'_M строим теперь на каждом шаге как произведение старого элемента U_M на элемент Q_i , произвольным образом выбранный из таблицы:

$$U'_M = Q_i U_M. \quad (2.16)$$

При работе с таблицей успех сильно зависит от того, насколько удачно она построена. При построении таблицы выгодно генерировать элементы Q распределенными не равномерно по всей группе, а вблизи единичного элемента. Для улучшения сходимости вес берется зависящим от β .

Метод Метрополиса с таблицей особенно удобен для дискретных калибровочных групп. Существенная экономия машинного времени достигается в этом случае при использовании таблицы умножения элементов группы, которая задается до начала вычислений вместе с таблицей значений характеристик. Операции умножения групповых элементов и вычисления следов превращаются тогда в чисто логические операции.

Этим приемом можно воспользоваться и для непрерывной группы, аппроксимировав ее дискретной подгруппой. Оказалось, что группа SU (2) прекрасно аппроксимируется в интересующей области изменения β своей 120-элементной икосаэдральной подгруппой \tilde{Y}^{26-28} . Для удовлетворительной дискретной аппроксимации группы SU (3) нужно, к сожалению, рассмат-

ривать подгруппы с очень большим числом элементов, для которых таблица умножения уже не помещается в машинной памяти. Поэтому для группы $SU(3)$ такая методика неприменима^{29, 30}, и приходится работать только с самой непрерывной группой (см., однако, работу³¹).

При использовании метода Метрополиса, для которого вероятность перехода $W_M(U_M \rightarrow U'_M)$ явно зависит от старого значения U_M , последовательные состояния ансамбля (2.4) являются, вообще говоря, скоррелированными. Поскольку при усреднении по формуле (2.7) вычисление величины $Q(C_n)$ для данной конфигурации C_n занимает, как правило, гораздо больше машинного времени, чем одна итерация, выгодно отбирать для усреднения независимые конфигурации. Для этого достаточно между вычислениями $Q(C_n)$ делать необходимое число «холостых» проходов сквозь решетку. Длину скоррелированности можно уменьшить, заменив регулярный порядок обхода решетки, предписанный заранее, на случайный, для которого ребро M на каждом шаге выбирается случайно. Случайный обход решетки используется для уменьшения статистической ошибки и при вычислениях по методу тепловой бани, например при вычислении масс глюболов, рассмотренном в гл. 4.

В заключение этой главы приведем ссылки на работы³²⁻³⁶, содержащие детальные описания программ, по которым проводятся вычисления в решеточных калибровочных теориях методом Монте-Карло.

3. ЧТО И КАК ВЫЧИСЛЯЮТ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Прежде чем метод Монте-Карло был применен для непертурбативного вычисления физических величин в КХД, методика развивалась на более простых вычислениях. Хотя вычисляемые величины и полученные при этом числа непосредственного отношения к непрерывному пределу не имеют (их часто называют поэтому решеточными артефактами), результаты важны в двух отношениях. Во-первых, они сравнивались с результатами, полученными с помощью других методов (когда последние существуют), что подтвердило надежность метода Монте-Карло. Во-вторых, решеточные артефакты имеют качественные следствия для непрерывного предела.

Вначале с помощью метода Монте-Карло Джэкобс, Кройц и Ребби^{22, 23} исследовали абелевы решеточные калибровочные теории. Монте-карловские вычисления для случая неабелевых калибровочных групп $SU(2)$ и $SU(3)$ были впервые проведены Кройцем^{37, 38, 19} и Вильсоном³⁹. Изучение фазовой структуры решеточных калибровочных теорий с другими неабелевыми группами проведено в работах⁴⁰⁻⁴⁷.

а) Удельная энергия: калибровочные группы $SU(2)$ и $SU(3)$

Простейшая величина, которая вычисляется методом Монте-Карло, — это удельная энергия, определяемая формулой

$$E = \left\langle 1 - \frac{1}{N_c} \text{tr } U_p \right\rangle, \quad (3.1)$$

где среднее понимается в смысле функционального интеграла (1.32). Термин «удельная энергия» восходит к обсуждавшейся выше аналогии со статистической системой. Поскольку в отсутствие внешнего поля величина (3.1) одинакова для всех граней, E совпадает со средним значением действия, приходящимся на одну грань:

$$E = \frac{1}{N_p} \langle S \rangle, \quad (3.2)$$

где число граней определено формулой (1.5). Соотношение (3.2) можно также переписать как хорошо известную связь

$$E(\beta) = -\frac{1}{N_p} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) \quad (3.3)$$

между удельной энергией и статистической суммой (1.26).

Для вычисления удельной энергии методом Монте-Карло используется формула (3.2). С помощью одного из рассмотренных в гл. 2 алгоритмов генерируется равновесный ансамбль состояний (2.4). Для каждого состояния вычисляется

$$E_n = \frac{1}{N_p} S(C_n), \quad (3.4)$$

имеющее смысл плотности энергии в данном состоянии. После чего среднее значение вычисляется по общей формуле (2.7).

Первая проблема, которую приходится решать, — это выбор начального состояния. Начальное состояние выгодно выбирать близким к какому-нибудь типичному состоянию для данной температуры. Ясно, что для $\beta \rightarrow \infty$ (температура $\beta^{-1} \rightarrow 0$) матрицы $U_{x,\mu}$ «замораживаются» вблизи некоторого значения, так что

$$E(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0. \quad (3.5)$$

Поэтому при больших β выбирается упорядоченное (ordered) начальное состояние ($U_{x,\mu} = 1$ на всех ребрах решетки). Наоборот, при $\beta \rightarrow 0$ (температура $\beta^{-1} \rightarrow \infty$) матрицы $U_{x,\mu}$ флуктуируют по всей группе, так что

$$E(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 1 \quad (3.6)$$

(ср. с явной формулой (1.39) для $W(\partial p) = 1 - E$). Поэтому при малых β выбирается разупорядоченное (random) начальное состояние ($U_{x,\mu}$ на каждом ребре выбираются случайно, равномерно распределенными по группе).

Полностью упорядоченное и разупорядоченное состояния можно использовать в качестве начальных состояний для промежуточных значений β . При этом, однако, необходимо сделать несколько итераций, чтобы привести систему в состояние термодинамического равновесия. На рис. 8, взятом из оригинальной работы Кройца³⁸, приведены результаты вычисления E_n для калибровочной группы SU(2) в зависимости от n — порядкового номера итерации. Вычисления проводились для решеток разного размера при $\beta = 2,3$ методом тепловой бани. Верхние значения отвечают разупорядоченному начальному состоянию, а нижние — упорядоченному. Как видно из рис. 8, и перегретая система (разупорядоченный старт), и переохлажденная (упорядоченный старт) уже за $20 \div 30$ итераций приходят в состояние термодинамического равновесия, так что величины E_n стабилизируются вблизи некоторого значения, вокруг которого затем происходят термические флуктуации.

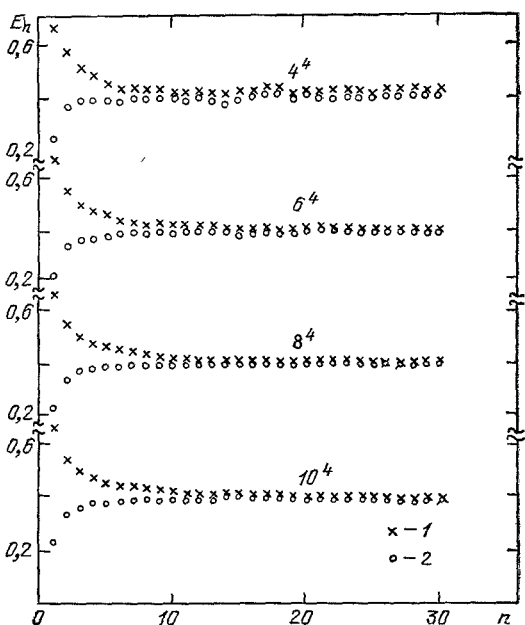


Рис. 8. Зависимость E_n , вычисляемого по формуле (3.4), от числа итераций для решеточной теории с калибровочной группой SU(2) при $\beta=2,3$ на решетках разного размера. 1 и 2 отвечают, соответственно, разупорядоченному и упорядоченному начальным состояниям (см. п. а) гл. 3. (Рисунок взят из работы Кройца³⁸.)

Эти флуктуации заметны для решетки размера 4^4 и практически неразличимы для решетки размера 10^4 . Причина состоит в том, что при вычислении по формуле (3.4) для каждой конфигурации происходит усреднение по пространству, благодаря которому флуктуации сильно уменьшаются.

Более точно значение удельной энергии можно вычислить, усреднив E_n по нескольким конфигурациям. Ясно, что невыгодно включать в усреднение те конфигурации, для которых равновесие еще не установилось. Поэтому несколько первых конфигураций, скажем 20 на рис. 8, отбрасываются, а по

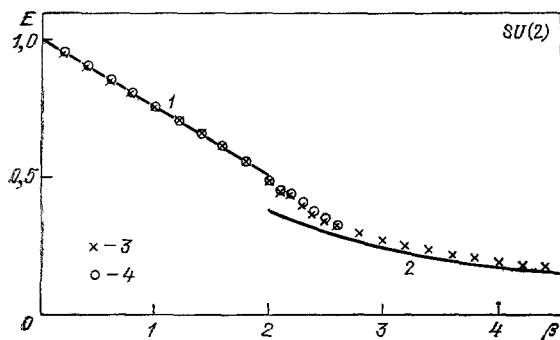


Рис. 9. Зависимость удельной энергии E , определяемой формулой (3.1), от константы связи β в $SU(2)$ -теории.

1 и 2, соответственно, низшие порядки разложений сильной и слабой связи, даваемые формулами $E = 1 - (\beta/4)$ и $E = 3/4\beta$ (см. (1.396) и (3.13)); 3 — соответствуют нагреванию, 4 — охлаждению (см. п. а) гл. 3). (Рисунок взят из работы Кройца³⁷.)

остальным 10 проводится усреднение. На самом деле возможности улучшать это среднее значение поистине безграничны, поскольку ЭВМ CDC-7600 делает, скажем, 20 000 итераций за весьма непродолжительное время.

Число итераций часто отождествляют с временем для аналоговой статистической системы, так что усреднение по конфигурациям есть не что иное,

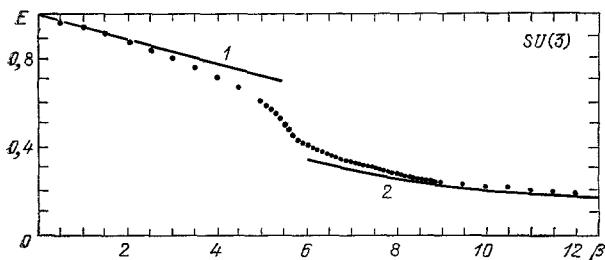


Рис. 10. То же, что на рис. 9, но для калибровочной группы $SU(3)$.

(Рисунок взят из работы Кройца и Мориарти⁴⁸.)

как усреднение по времени в статистической физике. Таким образом, для нашего случая число 20 есть в условных единицах то время, которое перегретой или переохлажденной системе нужно провзаимодействовать с термостатом, чтобы установилось равновесие при данной температуре. Поскольку число итераций пропорционально реальному машинному времени, при вычислениях по Монте-Карло статистические ошибки спадают как $\sqrt{\text{машинное время}}$.

При изучении решеточных калибровочных теорий методом Монте-Карло первый шаг состоит в вычислении удельной энергии как функции β . Вычисление $E(\beta)$ проводится для конечного числа значений β . При этом оказывается невыгодным стартовать каждый раз с упорядоченной или разупорядоченной конфигурации. Выгодно нагревать (или охлаждать) систему малыми шагами по β , используя на каждом шаге в качестве начального состояния конфигурацию из равновесного ансамбля на предыдущем шаге. Поскольку изменение температуры мало, равновесие устанавливается быстро.

На рис. 9 приведены результаты такого вычисления $E(\beta)$ (называемые также термическим циклом), которые получены в первой работе Кройца³⁷ на решетке 5^4 . Крестики отвечают нагреванию системы, а кружки — охлаждению. В каждой точке делалось несколько «холостых» итераций, после чего

усреднение проводилось по равновесному ансамблю из шести конфигураций. Полное число итераций в каждой точке равнялось примерно 20 при нагревании и столько же при охлаждении. Процесс нагревания был начат с упорядоченной конфигурации, а охлаждения — с разупорядоченной.

Как видно из рис. 9, $E(\beta)$ является гладкой функцией, так что при увеличении β в $SU(2)$ -решеточной калибровочной теории фазового перехода не происходит. Аналогичный вид имеет $E(\beta)$ для калибровочной группы $SU(3)$, изображенное на рис. 10⁴⁸.

б) Случай фазового перехода: калибровочные группы Z_N

Рассмотренные в предыдущем пункте калибровочные группы $SU(2)$ и $SU(3)$ оказались выделенными в том отношении, что для них $E(\beta)$ является гладкой функцией, и при изменении β фазовый переход не происходит. Метод Монте-Карло оказался также полезным при изучении систем, имеющих фазовый переход, в частности, решеточных калибровочных теорий с абелевыми группами. Простейшей абелевой группой является группа Z_N , элементы которой суть корни N -й степени из -1 ($U_{x,\mu} = \exp(i2\pi n/N)$; $n = 0, \dots, N-1$), а групповое умножение определено как обычное умножение комплексных чисел. Поскольку элементы группы Z_N суть числа, а не матрицы, можно во всех формулах опустить знак следа и положить $N_c = 1$ (N_c всегда равно следу единичного элемента), так что, например, определение (3.1) принимает вид

$$E = \langle (1 - U_p) \rangle. \quad (3.7)$$

Интегрирование по инвариантной мере для группы Z_N сводится к суммированию по N групповым элементам:

$$\int_{Z_N} dU_{x,\mu} = \frac{1}{N} \sum_{U_{x,\mu} = e^{2\pi i n/N}}. \quad (3.8)$$

Метод Монте-Карло применяется для нахождения точки фазового перехода и для определения его рода (первого или второго). Это может показаться странным, поскольку для системы с конечным числом степеней свободы (как Z_N -теории на решетке конечного размера) фазовый переход не может произойти. Однако для рассматриваемых решеток число степеней свободы хотя и конечно, но настолько велико, что поведение системы неотличимо от фазового перехода (особенно для фазового перехода первого рода, в точке которого удельная энергия имеет скачок).

Для нахождения точки фазового перехода прежде всего строится термический цикл, как описано в п. а). Поскольку в точке фазового перехода первого рода система должна получить от термостата много тепла, время взаимодействия с термостатом должно быть большим для установления равновесия. Другими словами, если в окрестности точки фазового перехода сделано меньше итераций, чем нужно для установления равновесия, то система останется при нагревании переохлажденной (при охлаждении перегретой), и термический цикл имеет характерное гистерезисное поведение. На рис. 11, взятом из работы²³, приведен термический цикл для калибровочной группы Z_2 . Гистерезис наблюдается вблизи точки $\beta = 0,45$. Если увеличить число итераций, то гистерезис исчезает и остается только резкое изменение (тем более резкое, чем больше размер решетки) в поведении $E(\beta)$ вблизи точки фазового перехода. Результат такого вычисления⁴⁹ для калибровочной группы Z_2 изображен на рис. 12.

Сам по себе гистерезис еще не означает, что в этом месте происходит фазовый переход первого рода. Гистерезис наблюдается всякий раз, когда при некотором β период установления равновесия возрастает, а число итераций

меньше этого периода. Поэтому гистерезис (хотя и не такой сильный) может наблюдаться вблизи точки фазового перехода второго рода, где период установления равновесия также возрастает. Более того, даже для калибровочной группы $SU(2)$, где фазовый переход вообще отсутствует, вблизи точки $\beta = 2,2$ период установления равновесия слегка возрастает, и будет наблюдаться гистерезис, если сделано слишком

мало итераций (скажем $5 \div 10$).

Установить род фазового перехода, происходящего (если вообще происходящего) в точке гистерезиса, можно следующим образом. Зафиксируем β равной положению центра гистерезисной петли и построим для этого значения β график, ана-

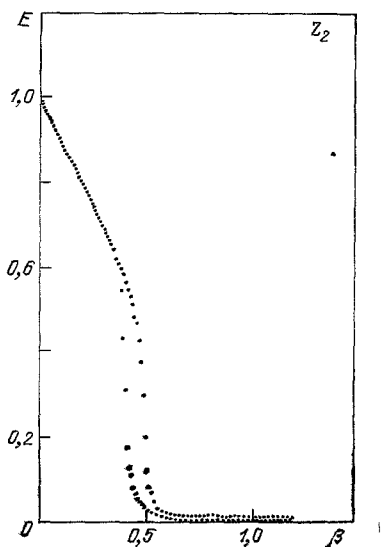


Рис. 11. То же, что на рис. 9, но для калибровочной группы Z_2 .

В районе гистерезиса нижние точки соответствуют нагреванию, верхние — охлаждению (см. п.6) гл. 3). (Рисунок взят из работы Джэкобса, Кройца и Реббис²².)

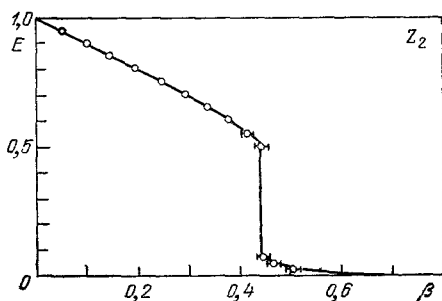


Рис. 12. То же, что на рис. 11, но с бóльшим числом итераций⁴⁹.

логичный графику на рис. 8, делая гораздо больше итераций, чем нужно для установления равновесия. Если при данном β происходит фазовый переход первого рода, то в зависимости от начального состояния мы попадем в одну из двух фаз, отличающихся значениями удельной энергии. Наоборот, для фазового перехода второго рода удельные энергии обеих фаз одинаковы.

На рис. 13, а, б приведены такие графики²³ соответственно для калибровочных групп Z_2 (фазовый переход первого рода) и Z_6 (фазовый переход второго рода). Значения E_n вычислялись через каждые 10 итераций. На рис. 13, а видно, что система быстро приходит в одну из двух фаз, которые затем остаются устойчивыми на протяжении многих итераций. На самом деле, одна из этих фаз является при данном β метастабильной (поскольку нельзя абсолютно точно попасть в точку фазового перехода), и система в конце концов перейдет из нее в стабильную фазу. Переход происходит за крайне небольшое число итераций (по сравнению с «временем жизни» метастабильной фазы) и служит обычно еще одним свидетельством в пользу фазового перехода первого рода. Наоборот, на рис. 13, б имеет место сходимость (довольно медленная) к одному и тому же значению удельной энергии.

По положению центра гистерезисной петли можно лишь приближенно судить о значении β (обозначаемом β_c), при котором происходит фазовый переход. Более точно значение β_c можно получить с помощью следующего приема²³. В качестве начального состояния используем смешанное (mixed) состояние, для которого $U_{x,\mu}$ на половине ребер решетки выбраны равными единичному элементу, а на другой половине — случайно. Для нескольких значений β , взятых с малым шагом в районе центра гистерезисной петли,

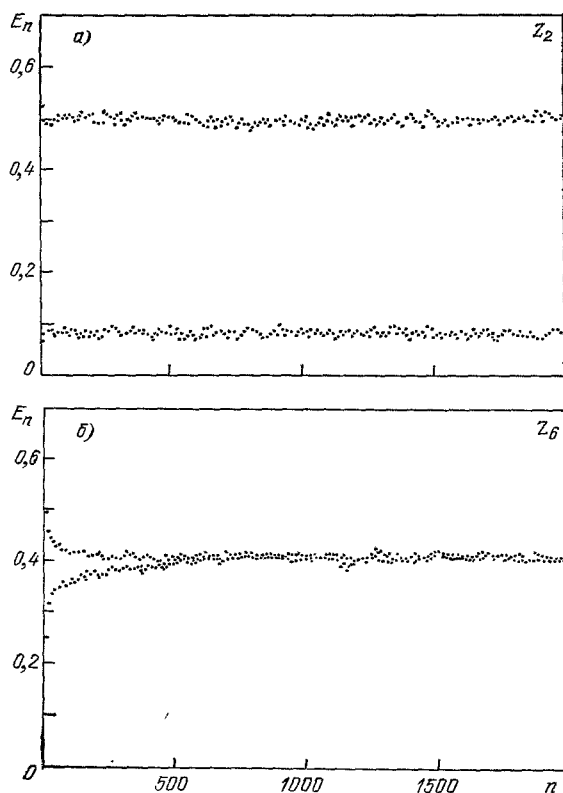


Рис. 13. Зависимость E_n , вычисляемого по формуле (3.4), от числа итераций для значения константы связи вблизи центра гистерезисной петли.

а) Калибровочная группа Z_2 (фазовый переход первого рода); б) калибровочная группа Z_6 (фазовый переход второго рода). Верхние (нижние) точки соответствуют разупорядоченному (упорядоченному) начальному состоянию (см. п. а) гл. 3). (Рисунок взят из работы Джэкобса, Кройца и Ребби²³.)

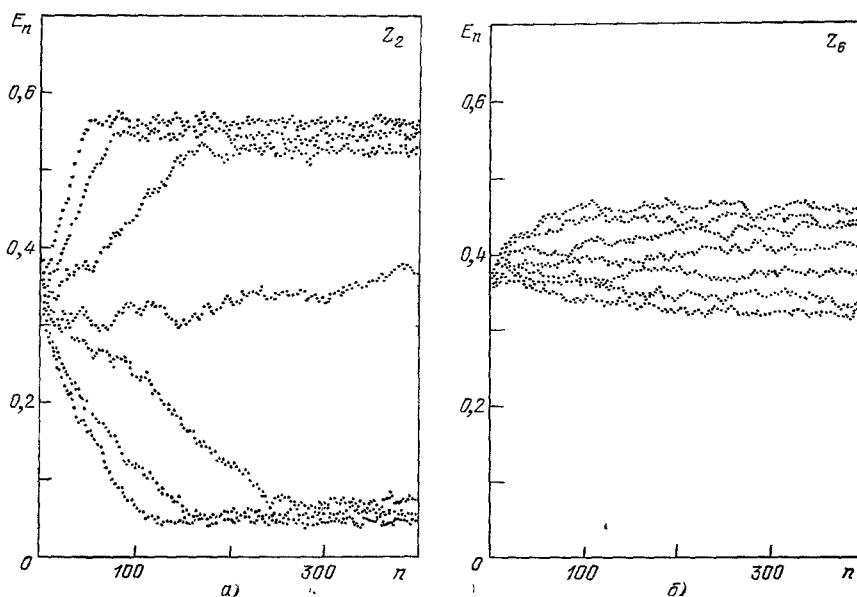


Рис. 14. То же, что на рис. 13, но для смешанного начального состояния при разных значениях константы связи, выбранных вблизи центра гистерезисной петли²³ (см. п. б) гл. 3).

изучаем эволюцию этого состояния с течением времени (числом итераций). Соответствующие графики ²³ для калибровочных групп Z_2 и Z_3 приведены на рис. 14, а, б. Рис. 14, а типичен для фазового перехода первого рода, когда система быстро переходит в состояние, для которого стабильная фаза занимает всю решетку. Однако если β очень близко к β_c , то период релаксации сильно возрастает, и обе фазы сосуществуют на протяжении большого числа итераций, так что E_n остаются близкими к начальному значению. Это свойство используется для точного вычисления β_c . Наоборот, для фазового перехода второго рода период релаксации слабо зависит от β (см. рис. 14, б).

в) Фазовая структура абелевых
калибровочных теорий.
Компактная электродинамика

С помощью изложенной выше методики Джэкобсом, Кройцем и Ребби ²³ были изучены методом Монте-Карло абелевы решеточные калибровочные теории с группами Z_N и $U(1)$ (называемая компактной электродинамикой), которая является пределом групп Z_N при $N \rightarrow \infty$. Полученные значения констант связи, при которых происходят фазовые переходы, приведены на рис. 15, взятом из работы ²³.

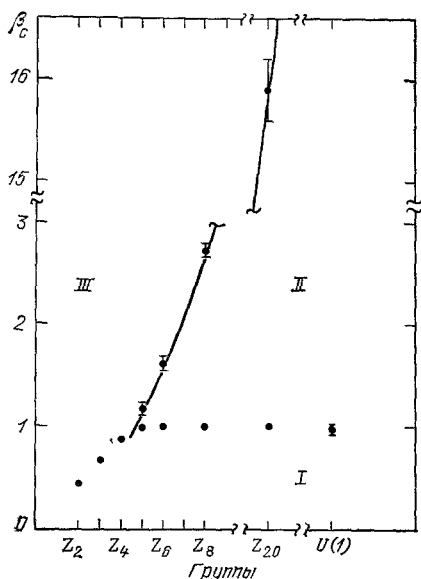


Рис. 15. Положение точек фазовых переходов для решеточных теорий с абелевыми калибровочными группами.

Фазы: I — конфайнмента, II — промежуточная (кулоновская), III — хиггсова (см. п. в) гл. 3). Сплошная линия проведена по формулам (3.9), (3.10). (Рисунок взят из работы Джэкобса, Кройца и Ребби ²³.)

хиггсовой фазы для дискретных калибровочных групп Z_N объясняется тем, что спектр возбуждений отделен от основного состояния «энергетической щелью»

$$\Delta S = 1 - \cos^2 \frac{2\pi}{N}. \quad (3.9)$$

Вычисления методом Монте-Карло показали ²³, что для фазового перехода между кулоновской и хиггсовой фазами

$$\beta'_c = \frac{0,78}{\Delta S}, \quad (3.10)$$

т. е. критическое значение «температуры» пропорционально величине «энергетической щели».

Согласно формулам (3.9), (3.10) при $N \rightarrow \infty$ $\beta'_c \sim N^2$, так что в $U(1)$ -пределе остаются лишь две фазы: конфайнмента и промежуточная. Изучение разделяющего их фазового перехода с помощью изложенной выше методики не позволяет утверждать, что происходит фазовый переход именно второго (а не более высокого) рода. Установить это можно, изучая *теплоемкость* (specific heat)

$$C(\beta) = -\beta^2 \frac{dE(\beta)}{d\beta}, \quad (3.11)$$

равную производной удельной энергии по температуре $1/\beta$. В точке фазового перехода второго рода теплоемкость обращается в бесконечность.

Вычисление теплоемкости для $U(1)$ -решеточной калибровочной теории, свидетельствующее в пользу фазового перехода второго рода, проведено Лаутрупом и Науенбергом⁵⁰ (см. также работы⁵¹⁻⁵²). Поскольку на решетке конечного размера не может произойти фазовый переход и, следовательно, теплоемкость не может обратиться в бесконечность, вычисления проводились на решетках размера 4^4 , 5^4 , 6^4 , и затем результаты экстраполировались к бесконечной решетке. В результате экстраполяции для β_c получено значение⁵⁰

$$\beta_c = 1,005. \quad (3.12)$$

Существование фазового перехода второго рода в компактной решеточной электродинамике (точнее фотодинамике, поскольку эффекты поляризации вакуума электронами не учитываются) важно для перехода к непрерывному пределу. Если константа β выбрана вблизи β_c , то корреляционный размер велик (в точке фазового перехода второго рода корреляционный размер бесконечен), и наступает непрерывный предел. При $\beta < \beta_c$ мы приходим к теории с невывлетающими электронами, в то время как для $\beta > \beta_c$ конфайнмент электронов отсутствует. К счастью, в нашем мире заряд электрона мал, так что реализуется ситуация $\beta > \beta_c$ с вылетающими электронами.

В $U(1)$ -решеточной калибровочной теории конфайнмент при малых β происходит по той же причине, что и в неабелевом случае: благодаря свойству компактности калибровочной группы, приводящему к соотношению ортогональности (1.36). Как обсуждалось в п. г) гл. 1, при $a \rightarrow 0$ компактность связана с тем, что разрывы вектор-потенциала на величину $\approx 2\pi/a$ не сопровождаются изменением действия. В $U(1)$ -решеточной калибровочной теории это свойство справедливо лишь при $\beta < \beta_c$. Для $\beta > \beta_c$ компактность нарушается, и мы приходим к привычной некомпактной электродинамике.

В заключение этого пункта отметим, что фазовая структура абелевых решеточных калибровочных теорий была предсказана в работах^{14, 53, 54} для калибровочных групп Z_N и в работах⁵⁵ для калибровочной группы $U(1)$ до того, как они были изучены методом Монте-Карло. Однако с помощью метода Монте-Карло было установлено, что три фазы появляются, начиная с $N = 5$, и, что самое главное, какого рода эти фазовые переходы.

г) Решеточные артефакты.

К а л и б р о в о ч н ы е г р у п п ы $SU(N)$ и $U(N)$

Как отмечалось в пункте а), для калибровочной группы $SU(2)$ $E(\beta)$ является гладкой функцией (см. рис. 9). При $\beta < 2$ монте-карловские данные описываются разложением сильной связи (прямая линия на рис. 9 проведена по формуле (1.39б) для $1-E$). При больших β $E(\beta)$ можно получить в виде ряда по $1/\beta$ (называемого разложением *слабой связи* (weak coupling)), вычисляя функциональные интегралы методом перевала. Для $E(\beta)$ первый порядок имеет вид

$$E(\beta) = \frac{n}{d\beta} + O(\beta^{-2}), \quad (3.13)$$

где n — число генераторов калибровочной группы ($n = N^2 - 1$ для группы $SU(N)$, $n = N^2$ для группы $U(N)$), а $d = 4$ — размерность пространства. Линия, определяемая формулой (3.13), также приведена на рис. 9. Она описывает монте-карловские данные при $\beta > 3$.

Учет нескольких следующих членов разложений сильной и слабой связи позволяет описать монте-карловские данные для $E(\beta)$ всюду, кроме окрестности точки $\beta = 2,2$, где на рис. 9 наблюдается наиболее резкое изменение в поведении функции $E(\beta)$. Эта окрестность является *переходной областью* (crossover region) между режимами сильной и слабой связи. По поводу возможности описания функции $E(\beta)$ в переходной области см. работы ⁵⁶.

Чтобы выяснить, не происходит ли в точке $\beta = 2,2$ фазовый переход второго рода, Лаутруп и Науенберг ⁵⁷ вычислили методом Монте-Карло теплоемкость (3.11) для решеток размера 4^4 , 5^4 , 6^4 . Вычисления показали, что теплоемкость имеет ярко выраженный пик в окрестности точки $\beta = 2,2$, высота которого (в отличие от $U(1)$ -решеточной калибровочной теории) не увеличивается существенно при увеличении размера решетки. Экстраполяция к бесконечной решетке, проведенная в работе ⁵⁸ по формулам скейлинга на решетке конечного размера, показала, что теплоемкость остается конечной в пределе бесконечной решетки. Таким образом, в $SU(2)$ -решеточной калибровочной теории фазовый переход второго рода при $\beta \approx 2,2$ отсутствует, а есть только пик в теплоемкости.

Аналогично этому для калибровочной группы $SU(3)$ также есть переходная область между режимами сильной и слабой связи, и пик в теплоемкости имеет место при $\beta \approx 5,5$ ⁴⁸.

Однако для калибровочных групп $SU(N)$ при $N \geq 4$ области, где применимы разложения сильной или слабой связи, разделены фазовым переходом первого рода. Этот факт был установлен в работах ^{40,41} для $N = 4, 5, 6$ с помощью метода Монте-Карло. Подобный фазовый переход был получен ⁴² и для калибровочных групп $U(N)$ при $N = 2-6$. Значения константы β_c , при которых происходят эти фазовые переходы, приведены в таблице вместе

Т а б л и ц а

Положение точек фазовых переходов (пиков в теплоемкости) для решеточных теорий с калибровочными группами $SU(N)$ ^{37, 40, 41, 48, 57} и $U(N)$ ⁴²

	N	2	3	4	5	6
$SU(N)$	β_c/N^2	0,56	0,61	0,64	0,66	$0,67 \pm 0,03$
$U(N)$	β_c/N^2	$0,83 \pm 0,01$	$0,784 \pm 0,001$	$0,76 \pm 0,04$	$0,75 \pm 0,04$	$0,76 \pm 0,07$

со значениями β_c , отвечающими пику в теплоемкости для калибровочных групп $SU(2)$ и $SU(3)$. Как видно из таблицы, величина β_c/N^2 слабо зависит от N , так что предел больших N (одинаковый для калибровочных групп $SU(N)$ и $U(N)$) устанавливается довольно рано. При $N \rightarrow \infty$ для вычисления β_c/N^2 методом Монте-Карло была использована эквивалентность калибровочной теории на бесконечной решетке и модели Эгучи—Каваи ⁵⁹ на решетке 1^4 . Полученное таким образом значение ^{60,61}

$$\frac{\beta_c}{N^2} = 0,66 \pm 0,02 \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

согласуется с данными, приведенными в таблице.

Существование при больших N фазового перехода первого рода в решеточных калибровочных теориях с группами $U(N)$ (и, следовательно, $SU(N)$) предсказывалось Гринном и Самуэлем ⁶². Значение (3.14) согласуется со зна-

чением, полученным этими авторами с помощью аналитических вычислений. Отметим также, что значения β_c в $SU(N)$ - и $U(N)$ -решеточных калибровочных теориях прекрасно согласуются с результатами вычислений по методу среднего поля^{63,64}.

д) Смешанное действие.
Природа пика в теплоемкости

Действие (1.18) является простейшим действием решеточной калибровочной теории, совместимым с требованием локальной калибровочной инвариантности и имеющим правильный «наивный» локальный предел. С математической точки зрения величина $\text{tr } U_p$ представляет собой характер в фундаментальном представлении калибровочной группы. Следующей по сложности величиной является характер в присоединенном представлении, который связан с $\text{tr } U_p$ формулой

$$\chi_A(U_p) = |\text{tr } U_p|^2 - 1. \quad (3.15)$$

Простейшая модификация вильсоновского действия (1.18) содержит сумму двух слагаемых^{40,65}:

$$S^{\text{смеш}} = \sum_p \left[\beta \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re tr } U_p \right) + \beta_A \left(1 - \frac{1}{N^2} |\text{tr } U_p|^2 \right) \right]. \quad (3.16)$$

Это действие обладает калибровочной инвариантностью второго рода и тоже имеет правильный «наивный» локальный предел, причем заряд g_0 связан с β и β_A формулой

$$g_0^2 = \frac{2N}{\beta + 2\beta_A} \quad (3.17)$$

(ср. с формулой (1.33) для вильсоновского действия).

Действие (3.16) получило название *смешанного действия* (mixed action). Изучение решеточной калибровочной теории с действием (3.16) позволило получить ряд весьма полезной информации о типах флуктуаций динамической переменной $U_{x,\mu}$, существенных при данном значении β , и выявить природу пика в теплоемкости $SU(2)$ - и $SU(3)$ -решеточных калибровочных теорий с действием Вильсона. Кроме того, физические результаты не должны зависеть от выбора решеточного действия, так что использование действия (3.16) позволяет понять, какие из полученных результатов не связаны с решеточной регуляризацией и относятся к непрерывной теории.

При $\beta_A \rightarrow 0$ действие (3.16) переходит в действие (1.18). При $\beta_A \rightarrow \infty$ выживают только дискретные флуктуации матрицы $U_{x,\mu}$ вида

$$U_{x,\mu} = e^{2\pi i n_{x,\mu}/N} I, \quad n_{x,\mu} = 0, \dots, N-1, \quad (3.18)$$

которые являются элементами группы Z_N — центра калибровочной группы $SU(N)$ (gauge group center). Такие флуктуации оставляют инвариантным второй член в действии (3.16) и, следовательно, при $\beta_A \rightarrow \infty$ являются экстремалами. Таким образом, при $\beta_A \rightarrow \infty$ мы получаем Z_N -решеточную калибровочную теорию (с константой β). Наоборот, при $\beta \rightarrow 0$ мы приходим к решеточной калибровочной теории с группой $SU(N)/Z_N$, поскольку при $\beta = 0$ действие (3.16) не чувствительно к преобразованиям матрицы $U_{x,\mu}$ на элемент центра группы.

Фазовая структура решеточных калибровочных теорий с группами $SU(N)$ и Z_N рассмотрена выше. Аналогичное изучение фазовой структуры $SU(N)/Z_N$ -решеточной калибровочной теории методом Монте-Карло проведено в работах^{43,44} для $N = 2$ и в работе⁴⁵ для $N = 3-6$ (см. также работы^{46,30,47}), где было показано, что в этих теориях происходит один фазовый переход первого рода.

Остановимся подробнее на простейшем случае $N = 2$. Как хорошо известно, группа $SU(2)/Z_2$ совпадает с группой вращений $SO(3)$. Решеточные

калибровочные теории с группами $SU(2)$ и $SO(3)$ имеют одинаковые разложения слабой связи и, следовательно, должны совпадать при малых g_0^2 . Однако разложения сильной связи, чувствительные к глобальным свойствам калибровочной группы, совершенно не похожи. Вычисления методом Монте-Карло показали^{43, 44}, что при увеличении β_A в $SO(3)$ -решеточной калибровочной теории происходит фазовый переход, после которого она практически совпадает с решеточной калибровочной теорией с группой $SU(2)$. Тип флуктуаций калибровочного поля, который «замораживается» в точке фазового перехода, описан ниже.

Фазовая диаграмма смешанной $SU(2) - SO(3)$ -решеточной калибровочной теории, определяемой действием (3.16), получена впервые Бхано и Кройцем⁴⁶. Эта диаграмма приведена на рис. 16. Фазовый переход при $\beta_A \rightarrow \infty$ соответствует Z_2 -теории, а при $\beta \rightarrow 0$ — $SO(3)$ -теории. Линии этих

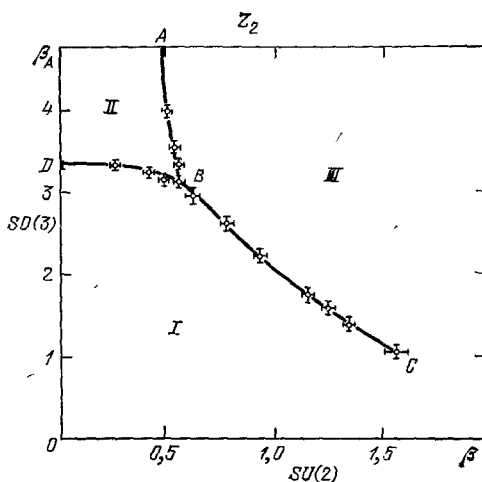


Рис. 16. Фазовая диаграмма решеточной калибровочной теории со смешанным $SU(2) - SO(3)$ -действием (3.16).

Цифрами обозначены области, для которых плотности Z_2 -вихрей (\bar{E}) и Z_2 -монопольей (\bar{M}), вычисленные по формулам (3.22), (3.23), принимают значения: I — $\bar{E} \approx \bar{M} \approx 0,5$; II — $\bar{E} \approx 0,5$, $\bar{M} \approx 0$; III — $\bar{E} \approx \bar{M} \approx 0$. (Фазовая диаграмма получена Бхано и Кройцем⁴⁶.)

бровочной теории происходит фазовый переход. При этом для любого конечного N точка C расположена при конечном значении β_A ⁴⁷, так что на β, β_A -плоскости есть пути, соединяющие две фазы $SU(N)$ -решеточной калибровочной теории, не пересекая по дороге линий фазовых переходов. Таким образом, наблюдающийся в вильсоновской $SU(N)$ -решеточной калибровочной теории при $N \geq 4$ фазовый переход не связан с деконфайнментом, а есть просто артефакт вильсоновского действия. Существование области аналитичности на фазовой плоскости смешанной решеточной калибровочной теории означает также, что свободная энергия является аналитической функцией β и β_A , которая, однако, многозначна в окрестности линии фазового перехода.

Существование фазового перехода первого рода в $SU(N)/Z_N$ -решеточной калибровочной теории и наличие нетривиальной фазовой структуры смешанной $SU(N) - SU(N)/Z_N$ -решеточной калибровочной теории предсказывалось впервые при больших N в работе⁶⁵ на основе метода $1/N$ -разложения, который позволил также утверждать⁶⁶, что при $N \geq 4$ линия фазовых переходов заканчивается в точке C , расположенной при отрицательном, но конечном β_A , и получить фазовые диаграммы^{66, 67}. Связь фазовых переходов с на-

фазовых переходов продолжаются в β, β_A -плоскости, встречаются в точке B и затем сливаются, образуя линию BC . Эта линия заканчивается в точке C , так что при меньших значениях β_A нет фазового перехода. Если линию BC продолжить мысленно вниз, то она пересечет ось $\beta_A = 0$ в окрестности точки $\beta = 2,2$, где $SU(2)$ -теория имеет переходную область. Таким образом, пик в теплоемкости $SU(2)$ -решеточной калибровочной теории принято объяснять близостью критической точки на фазовой плоскости смешанной $SU(2) - SO(3)$ -решеточной калибровочной теории.

Для $N = 3$ фазовая диаграмма³⁰ совершенно аналогична диаграмме на рис. 16. Все фазовые переходы — первого рода, точка C расположена выше оси $\beta_A = 0$, и продолжение линии BC пересекает ось $\beta_A = 0$ в переходной области. Однако для $N \geq 4$ точка C лежит ниже оси $\beta_A = 0$, так что линия BC пересекает ось $\beta_A = 0$ в том месте, где в $SU(N)$ -решеточной кали-

личием локальных минимумов действия (3.16) обсуждалась в работе ⁶⁸. Наконец, отметим, что полученные методом Монте-Карло фазовые диаграммы хорошо согласуются с результатами расчета по методу среднего поля ⁶⁴ и более общему вариационному методу ⁶⁹.

е) Природа пика в теплоемкости (продолжение)

Значения констант связи, при которых происходят рассмотренные выше фазовые переходы (или есть пик в теплоемкости) зависят от вида решеточного действия. Однако физическое явление, происходящее в точке фазового перехода, универсально и имеет важные следствия для непрерывной теории. Для перехода к непрерывному пределу нужно, как подробно обсуждается в следующей главе, устремить $\beta \rightarrow \infty$. Оказывается, что в точке фазового пере-

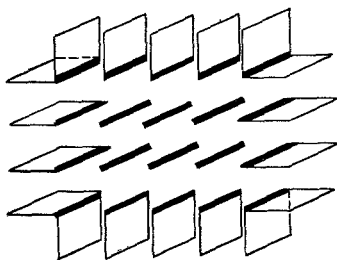


Рис. 17. Замкнутый Z_2 -вихрь на трехмерной решетке. Обозначены ребра с $U_{x,\mu} \approx -1$ и грани с $\text{sign tr } U_p = -1$.

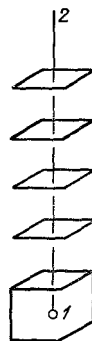


Рис. 18. Z_2 -монополь на трехмерной решетке.

1 — монополярный источник, 2 — дираковская струна, получающиеся при $a \rightarrow 0$.

хода (пика в теплоемкости) «замораживаются» определенные типы флуктуаций калибровочного поля, которые были существенны при малых β .

Для их описания рассмотрим простейший случай $N = 2$. Пусть на одном из ребер решетки $U_{x,\mu} \approx -1$, а на остальных — $U_{x,\mu} \approx 1$. Тогда

$$\text{sign tr } U_p = -1 \quad (3.19)$$

для граней, опирающихся на ребро с $U_{x,\mu} \approx -1$. Если для данной грани выполнено соотношение (3.19), то говорят, что ее пронизывает Z_2 -вихрь (Z_2 -vortex). Вихри удобно рассматривать на трехмерной решетке, которая получается из четырехмерной сечением плоскостью $t = \text{const}$. Менее тривиальный пример замкнутого Z_2 -вихря (последовательности граней с отрицательным значением $\text{sign tr } U_p$) изображен на рис. 17. Жирными линиями обозначены ребра, на которых $U_{x,\mu} \approx -1$, и изображены грани, образующие замкнутый Z_2 -вихрь. Z_2 -вихри могут быть не только замкнутыми, но заканчиваться на конфигурациях, для которых

$$\prod_{p \in \partial c} \text{sign tr } U_p = -1, \quad (3.20)$$

где произведение выполняется по шести граням, образующим границу трехмерного куба c . Такая конфигурация, называемая Z_2 -монопolem (Z_2 -monopole), изображена на рис. 18.

Поясним терминологию, переходя к «наивному» локальному пределу $a \rightarrow 0$. Пусть на одном из ребер, ограничивающих грань p , $U_{x,\mu} = -1$, а на трех остальных $U_{x,\mu} = +1$. Тогда

$$U_p \rightarrow \exp \left(i g_0 \oint_{\partial p} A_\mu dx_\mu \right) = \exp \left(i g_0 \int_p \mathbf{H} d\mathbf{S} \right) = -1, \quad (3.21)$$

т. е. через эту грань проходит магнитный поток, равный π/g . Поэтому рассмотренные Z_2 -вихри являются решеточным аналогом дираковской струны. Аналогично этому можно сказать, что в области пространства со свойством (3.20), из которой исходит магнитный поток, расположен монополи.

В этом месте нужно проявить осторожность, поскольку, как хорошо известно, для калибровочной группы $SU(2)$ в непрерывном пределе нет топологически стабильных монопольных конфигураций, поскольку $\pi_1(SU(2)) = 0$. Однако элемент группы $SU(2)$ представляется в виде произведения элементов группы $SO(3)$ и Z_2 . Поскольку элементы группы Z_2 сокращаются в левой части определения (3.20) (каждый элемент входит два раза — по одному разу для двух стыкующихся граней, из которых обра-

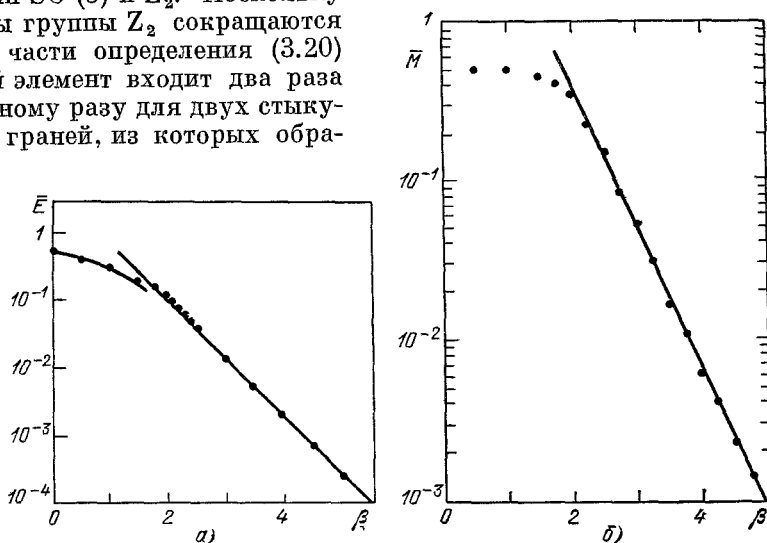


Рис. 19. Экспоненциальное убывание плотности Z_2 -вихрей⁷⁵ (а) и Z_2 -монополей⁷² (б) в $SU(2)$ -решеточной калибровочной теории.

зован куб c), остается только произведение элементов группы $SO(3)$, для которой $\pi_1(SO(3)) = Z_2$, так что в непрерывной теории существуют топологически стабильные монополи. Их магнитный заряд сохраняется по модулю два — Z_2 -монополи.

На решетке различие между калибровочными группами $SU(2)$ и $SO(3)$ проявляется в том, что в $SU(2)$ -теории Z_2 -вихрь несет энергию, поскольку $SU(2)$ -действие чувствительно к знаку $\text{tr } U_p$. Наоборот, в $SO(3)$ -теории Z_2 -вихри не несут энергии, и говорят, что ее вакуум заполнен конденсатом Z_2 -вихрей. Плотность Z_2 -вихрей можно характеризовать величиной

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \langle (1 - \text{sign tr } U_p) \rangle. \quad (3.22)$$

Усредненное выражение равно нулю для безвихревой конфигурации и равно единице, если вихрь пронизывает данную грань. Аналогично плотность Z_2 -монополей определяется выражением

$$\bar{M} = \frac{1}{2} \left\langle \left(1 - \prod_{p \in \partial c} \text{sign tr } U_p \right) \right\rangle. \quad (3.23)$$

Величины \bar{E} и \bar{M} вычислялись методом Монте-Карло в работах⁷⁰⁻⁷⁴. Было установлено, что в области I на рис. 16 $\bar{E} \approx \bar{M} \approx 0,5$ (при $\beta, \beta_A \rightarrow 0$ это видно из определений (3.22), (3.23), поскольку знак $\text{tr } U_p$ с одинаковой вероятностью принимает значения ± 1), т. е. в вакууме есть конденсат как вихрей, так и монополей. Вдоль линии DC конденсат монополей разрушается, а вдоль линии AC разрушается конденсат вихрей. Таким образом, в области III $\bar{E} \approx \bar{M} \approx 0$, и вакуум свободен от обоих конденсатов. В области II $\bar{E} \approx 0,5$,

$\bar{M} \approx 0$, так что в $SO(3)$ -теории, как уже отмечалось, вихри сконденсированы при любых значениях β_A , а наблюдающийся фазовый переход связан с разрушением конденсата монополей.

В $SU(2)$ -теории разрушение конденсатов не носит характер фазового перехода. На рис. 19 приведены монте-карловские данные для \bar{E} ⁷⁵ и \bar{M} ⁷² в зависимости от β для $SU(2)$ -решеточной калибровочной теории. Видно, что убывание при $\beta > 2,2$ носит экспоненциальный характер, причем скорость убывания максимальна в переходной области. Кроме того, при $\beta > 2,2$ $\bar{M} \approx 4\bar{E}$, так что монополи связаны вихрями наименьшей длины, энергия которых минимальна. Таким образом, пик в теплоемкости $SU(2)$ -решеточной калибровочной теории связан с «замораживанием» Z_2 -монополей при увеличении β .

Если в вакууме есть конденсат монополей, то имеет место эффект, дуальный эффекту Мейсснера в сверхпроводнике, — электрическое поле стягивается в трубку. По этому сценарию^{76, 77} происходит конфайнмент в области сильной связи. Механизм, обеспечивающий конфайнмент в области слабой связи (и в непрерывном пределе), изучался с помощью метода Монте-Карло в работах^{74, 78–81}.

4. НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В КХД МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло позволяет получать в КХД величины, которые не зависят от деталей решеточных вычислений и относятся к непрерывной теории. При этом речь идет о (размерных) величинах, таких, как коэффициент натяжения струны или массы глюоболов, которые обращаются в нуль в любом порядке ряда теории возмущений по константе связи и целиком обусловлены непертурбативными флуктуациями.

Первым непертурбативным вычислением такого рода было вычисление Кройцем^{38, 19} коэффициента натяжения струны в КХД без кварков (глюодинамика). Число «физических» величин, вычисляемых в глюодинамике, не так уж велико. Кроме коэффициента натяжения струны методом Монте-Карло вычислялись спектр масс бесцветных глюонных связанных состояний — глюоболов^{82, 28, 83–98} и значение температуры^{99–106}, при которой в $SU(2)$ - и $SU(3)$ -калибровочных теориях происходит фазовый переход из фазы конфайнмента (имеющего место при нулевой температуре) в фазу кварк-глюонной плазмы.

а) Р а з м е р н а я т р а н с м у т а ц и я

В предыдущих разделах мы неоднократно обращали внимание на сходство вычислений методом Монте-Карло в решеточных калибровочных теориях и статистической физике. Однако важнейшее отличие от статистической физики состоит в том, что для калибровочных теорий решетка является не более чем вспомогательным приемом, использованным для ультрафиолетового обрезания. На самом деле нас интересуют результаты, относящиеся к непрерывному пределу. Рассмотрим, как при вычислениях в КХД методом Монте-Карло производится переход к непрерывному пределу.

Общий рецепт получения непрерывного предела решеточных теорий состоит в том, что шаг решетки $a \rightarrow 0$. В классическом случае при этом константа связи g_0^2 фиксирована (см. п. в) гл. 1). Однако в квантовой теории, как хорошо известно, свойство перенормируемости приводит к тому, что наблюдаемые величины не зависят от радиуса обрезания a только, если g_0^2 выбирается зависящим от a специальным образом. Для КХД эта зависимость предписывается формулой асимптотической свободы

$$g_0^2(a) = - \frac{8\pi^2}{b \ln a \Lambda_{\text{КХД}} + (b_1/b) \ln \ln (1/a^2 \Lambda_{\text{КХД}}^2)} \quad (4.1)$$

Входящие сюда константы b и b_1 были получены с помощью вычислений по теории возмущений соответственно в работах ^{3, 107}:

$$b = \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f, \quad b_1 = \frac{17}{3} N_c^2 - \frac{5}{3} N_c N_f - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} N_f; \quad (4.2)$$

здесь $N_c = 3$ — число цветов для цветовой группы $SU(N_c)$, а N_f — число сортов кварков. Экспериментальное значение константы $\Lambda_{\text{КХД}} \sim 200\text{--}400 \text{ МэВ}^{108}$.

Как следует из формулы (4.1), для перехода к непрерывному пределу нужно одновременно устремить к нулю g_0^2 и a так, чтобы их комбинация

$$\Lambda_{\text{КХД}} = \frac{1}{a} \left(\frac{16\pi^2}{bg_0^2} \right)^{b_1/b^2} e^{-8\pi^2/bg_0^2} [1 + O(g_0^2)] \quad (4.3)$$

оставалась постоянной.

На соотношение (4.3) можно взглянуть несколько по-другому. Мы стартовали с лагранжиана КХД, в котором единственными параметрами являются константа взаимодействия g_0 и массы кварков ^{1, 2}:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_{f=u, d, \dots} \bar{\Psi}_f (i\hat{\nabla} - m_f) \Psi_f; \quad (4.4)$$

здесь $F_{\mu\nu}$ определено формулой (1.7), а ковариантная производная

$$\hat{\nabla} = \gamma_\mu (\partial_\mu - ig_0 A_\mu) \quad (4.5)$$

действует на Ψ_f — поле кварка f -го сорта с массой m_f .

Как мы ожидаем, лагранжиан (4.4) описывает не только процессы, определяемые малыми расстояниями, но, например, и невылетание кварков. При этом сразу же возникает следующая нетривиальная проблема. Выключим на время из рассмотрения «тяжелые» кварки $f = s, c, b, \dots$, которые не оказывают влияния на невылетание легких кварков $f = u, d$. Массы легких кварков имеют порядок нескольких МэВ ($m_u \approx 4,2 \text{ МэВ}$, $m_d \approx 7,5 \text{ МэВ}$), константа g_0 безразмерна, в то время как наблюдающийся радиус невылетания кварков имеет порядок сотен обратных МэВ.

Формула (4.3) показывает, как эта проблема может быть решена. Поскольку в квантовой теории с самого начала есть размерный параметр — радиус обрезания, из него и константы связи можно составить (размерную) величину (4.3), которая остается постоянной в непрерывном пределе и обеспечивает масштаб измерения возникающих в теории размерных величин. Другими словами, наблюдаемые размерные величины пропорциональны соответствующей степени $\Lambda_{\text{КХД}}$, например радиус невылетания кварков

$$R_c = \text{const} \cdot \Lambda_{\text{КХД}}^{-1}, \quad (4.6)$$

или массы мезонов

$$M_1 = C_1 \Lambda_{\text{КХД}}, \quad (4.7)$$

где (безразмерные) константы C_1 являются универсальными (не зависящими от g_0^2) числами, которые определяются только квантовыми числами мезона, а также N_c и N_f . Это явление получило название *размерной трансмутации* (dimensional transmutation).

Сказанное выше является общим свойством КХД, справедливым для любой регуляризации, в том числе и решеточной. При решеточных вычислениях роль радиуса обрезания играет постоянная решетки a , причем инвариантность относительно группы вращений, вообще говоря, отсутствует. Вращательная симметрия восстанавливается, как мы ожидаем, в том случае, когда характерный масштаб изменения калибровочных полей на решетке, называемый *корреляционным размером* (correlational length), значительно превышает постоянную решетки.

Удобно ввести безразмерное отношение

$$\xi_c = \frac{\text{корреляционный размер}}{a}, \quad (4.8)$$

т. е. измерять корреляционный размер в решеточных единицах. Согласно размерной трансмутации корреляционный размер пропорционален $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{-1}$, так что ξ_c при малых g_0^2 должно зависеть от g_0^2 по общей формуле

$$\xi_c = \text{const} \cdot \left(\frac{16\pi^2}{bg_0^2} \right)^{-b_1/b^2} e^{8\pi^2/bg_0^2}. \quad (4.9)$$

Как видно отсюда, $\xi_c \rightarrow \infty$ при $g_0^2 \rightarrow 0$, и поэтому решеточная структура не проявляется. Таким образом, при малых g_0^2 должна восстановиться инвариантность относительно группы вращений и наступить непрерывный предел.

Именно это свойство используется для перехода к непрерывному пределу при вычислениях в решеточных калибровочных теориях методом Монте-Карло. Практически, при вычислениях размерных величин (измеряемых в решеточных единицах) стараются проследить их экспоненциальную зависимость от g_0^2 . Если, начиная с некоторого значения g_0^2 , вычисленная величина зависит от g_0^2 по формуле типа (4.9), есть уверенность, что она имеет отношение к непрерывному пределу.

б) Коэффициент натяжения струны

1) Первой размерной величиной, для которой было проведено непертурбативное вычисление методом Монте-Карло, является коэффициент натяжения струны K , определенный в п. е) гл. 1. В оригинальной работе Кройца³⁸ величина K вычислялась в $SU(2)$ -калибровочной теории без кварков. Реально методом Монте-Карло вычислялось контурное среднее (1.34) для квадрата со стороной $1a$. Результаты вычислений при данном значении g_0^2 описывались формулой

$$W(I, I) = \exp(A - BIa - KI^2a^2), \quad (4.10)$$

откуда извлекалась величина K .

Полученные результаты изображены на рис. 20 в виде графика зависимости безразмерной величины a^2K от $1/g_0^2$. По вертикальной оси масштаб логарифмический. Кружки представляют собой результат Монте-Карло расчета величины a^2K при данном g^2 . Как видно из рис. 20, при малых $1/g_0^2$ (больших g_0^2) монте-карловские данные ложатся на кривую (линия 1), которая соответствует десяти порядкам разложения сильной связи¹⁰⁹ (для группы $SU(3)$ аналогичные вычисления проведены в работах¹¹⁰).

Коэффициент натяжения струны K обращается в нуль во всех порядках ряда теории возмущений по g_0^2 . Таким образом, ненулевое значение K при малых g_0^2 целиком обусловлено непертурбативными эффектами и вследствие размерной трансмутации должно зависеть от g_0^2 по формуле

$$a^2K = \text{const} \cdot \left(\frac{24\pi^2}{11g_0^2} \right)^{102/121} e^{-24\pi^2/11g_0^2}. \quad (4.11)$$

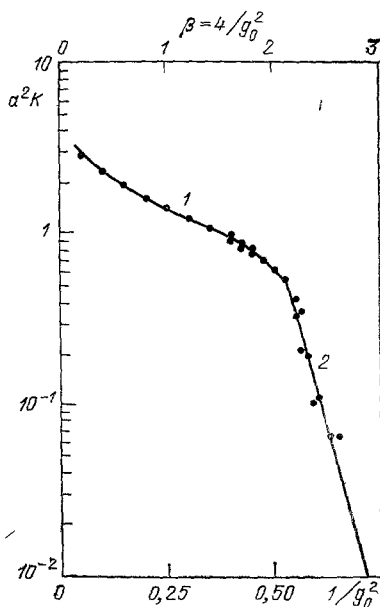


Рис. 20. Результаты расчета коэффициента натяжения струны в $SU(2)$ -теории методом Монте-Карло.

Линия 1 соответствует десяти порядкам разложения сильной связи¹⁰⁹; 2 — проведена по формуле (4.12). (Рисунок взят из работы Кройца³⁸.)

(Здесь учтено, что для SU (2)-калибровочной теории без кварков ($N_c = 2$, $N_f = 0$) $b = 22/3$.) Такой зависимости $a^2 K$ от $1/g_0^2$ на рис. 20 соответствует семейство наклонных линий. Они являются практически прямыми, поскольку в рассматриваемом диапазоне изменения g_0^2 зависимость предэкспоненциального множителя от g_0^2 не проявляется. Единственным свободным параметром является входящая в выражение (4.11) константа, изменению которой отвечает параллельный перенос прямой. Значение константы подбирается так, чтобы наилучшим образом описать монте-карловские данные при малых g_0^2 .

Кройц³⁸ получил наилучшее описание монте-карловских данных для $a^2 K$ в области $g_0^2 < 1,9$ ($\beta = 4/g_0^2 < 2,1$), зафиксировав константу следующим образом:

$$a^2 K = \exp \left\{ -\frac{24\pi^2}{11} \left[\frac{1}{g_0^2} - (0,50 \pm 0,01) \right] \right\}. \quad (4.12)$$

Этой формуле на рис. 20 отвечает проведенная наклонная прямая (линия 2).

Таким образом, в решеточной калибровочной теории натяжение струны оказалось отличным от нуля во всем рассматриваемом интервале изменения g_0^2 .

При больших g_0^2 этот факт был известен ранее из разложения сильной связи (см. п. д) гл. 1). Однако для $g_0^2 < 1,9$, где разложение сильной связи уже не применимо, мы знаем, что натяжение струны по-прежнему отлично от нуля, только на основании монте-карловских вычислений. Более того, поскольку при $g_0^2 < 1,9$ наступает неаналитическая зависимость коэффициента K от g_0^2 , предписываемая асимптотической свободой, есть основания полагать, что в этой области уже наступил непрерывный предел.

В этом можно убедиться непосредственно, проверив, что при $g_0^2 < 1,9$ восстанавливается вращательная симметрия. В работе Лэнга и Ребби¹¹¹ методом Монте-Карло строились эквипотенциальные поверхности для взаимодействия между двумя статическими кварками при данном g_0^2 . Эта величина

удобна для проверки того, восстанавливается ли вращательная симметрия по следующей причине¹¹².

В области сильной связи ($g_0^2 \gg 1$) сила между кварками линейно растет с расстоянием (см. п. д) гл. 1). Это расстояние есть, по определению, длина пути, соединяющего два узла решетки, который составлен из ребер решетки. Поэтому для энергии взаимодействия справедлива формула

$$E(x, y, z) = K(|x| + |y| + |z|), \quad (4.13)$$

и линии одинакового потенциала имеют вид, изображенный на рис. 21. Таким образом, при $g_0^2 \gg 1$ есть только кубическая симметрия (вращения на угол, кратный $\pi/2$ вокруг каждой из осей), а не симметрия относительно полной группы вращений (в этом случае эквипотенциальные линии имели бы вид окружностей).

Монте-карловские данные Лэнга и Ребби¹¹¹ для линий одинакового потенциала изображены на рис. 22. На рис. 22, а приведены эквипотенциальные линии при $g_0^2 = 2$ ($\beta = 2$), а на рис. 22, б — при $g_0^2 = 1,78$ ($\beta = 2,25$). Как видно из рис. 22, вращательная симметрия действительно восстанавливается*) при переходе от $g_0^2 = 2$ к $g_0^2 = 1,78$, т. е. при прохождении через точку $g_0^2 = 1,9$, начиная с которой зависимость коэффициента натяжения струны

*) Механизм, приводящий к восстановлению вращательной симметрии в рамках разложения сильной связи, обсуждался в работах^{112, 113}.

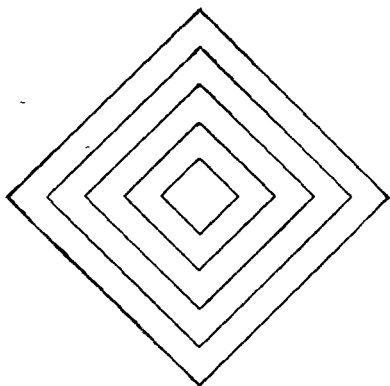


Рис. 21. Эквипотенциальные линии в пределе сильной связи (см. п. б) гл. 4).

от g_0^2 описывается формулой (4.12). Это является еще одним аргументом в пользу того, что величины, получаемые методом Монте-Карло при $g_0^2 < 1,9$, имеют отношение к непрерывному пределу.

Замечательно, что непрерывный предел наступает, когда корреляционный размер лишь незначительно превышает постоянную решетки ($\xi_c = 1,5-2,0$ при $g_0^2 = 1,9$). Именно поэтому на решетке конечного (и не слишком большого) размера оказалось возможным вычислять методом Монте-Карло величины

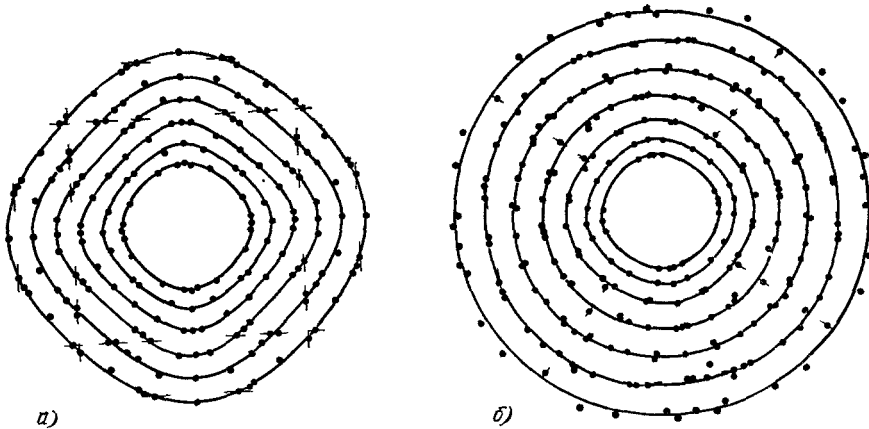


Рис. 22. Результат вычисления эквипотенциальных линий в $SU(2)$ -теории методом Монте-Карло.

а) Значение константы связи $\beta = 2$; б) $\beta = 2,25$. (Рисунок взят из работы Лэнга и Ребби ¹¹¹.)

относящиеся к непрерывному пределу. Хотя число ребер решетки внутри объема ξ_c^4 при этом не так уж велико, при подсчете числа степеней свободы не нужно забывать про групповые переменные. Более того, было показано ⁵⁹, что для калибровочной группы $SU(N_c)$ при большом N_c пространственные и групповые степени свободы так перепутываются, что величины, относящиеся к непрерывному пределу, можно получать на решетке размера 1^4 .

В качестве примера одной из величин, характеризующих непрерывную $SU(2)$ -калибровочную теорию, на рис. 23 приведен результат монте-карловского вычисления ¹¹⁴ зависимости потенциала взаимодействия между статическими кварками от расстояния. Вычисление потенциала проводилось по формулам (1.46), (1.48), связывающим потенциал с контурным средним $W(R, T)$, для разных значений g_0^2 в интервале $1,3 < g_0^2 < 1,8$ ($3,1 > \beta > 2,2$), где непрерывный предел уже наступил. Как потенциал, так и расстояние измерялись в физических единицах, т. е. в единицах $V\bar{K}$, определенной формулой (4.12). Разным точкам на рис. 23 соответствуют разные значения g_0^2 . Тот факт, что результаты вычислений при разных значениях g_0^2 согласуются, показывает, что формула (4.9) применима. Сплошная линия на рис. 23 представляет собой описание монте-карловских данных в виде: *кулоновский потенциал + линейно растущий потенциал*.

Результаты вычислений коэффициента натяжения струны методом Монте-Карло свидетельствуют, что в непрерывной $SU(2)$ -калибровочной теории наряду со свойством асимптотической свободы имеет место также невыелание кварков. Этот вывод сделан впервые в работах Кройца ^{37, 38} и Вильсона ³⁹, а затем подтвержден разными авторами ^{19, 27, 28, 115, 116}. Еще одно численное доказательство этого свойства основано на монте-карло-вычислении ¹¹⁷ зависимости эффективной константы взаимодействия от расстояния (для группы $SU(3)$ см. работу ¹¹⁸). До вычислений методом Монте-Карло основным аргументом в пользу конфайнмента были результаты, полученные А. А. Мигдалом ¹⁵ и Л. Кадановым ¹¹⁹ с помощью рекурсионных уравнений.

Сравнение с монте-карло-данными позволило определить точность приближенного рекурсионного метода ¹²⁰.

2) Для нахождения зависимости коэффициента натяжения струны K от g_0^2 , изображенной на рис. 20, Кройц использовал формулу (4.10). Результаты такой обработки зависят от того, включается ли в нее значение $W(0, 0) = 1$, поэтому некоторым значениям g_0^2 на рис. 20 соответствуют два различных значения K . Впоследствии Кройц предложил ¹⁹ красивый способ нахождения величины K , при котором на графике откладывается прямо та самая величина, которая вычисляется методом Монте-Карло, и дополнительная обработка не требуется. Этой величиной является сила $\chi(I)$ (см. п. ж) гл. 1),

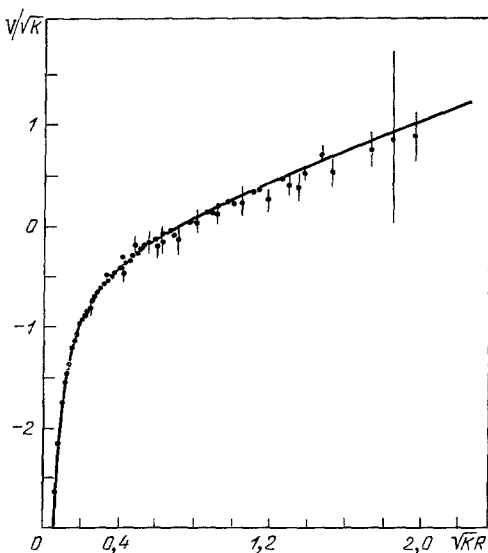


Рис. 23. Зависимость потенциала взаимодействия между статическими кварками от расстояния в непрерывной $_{\text{SU}}(2)$ -теории.

Сплошная линия проведена по формуле «кулоновский потенциал + линейно растущий потенциал». (Рисунок взят из работы Стака ¹¹⁴.)

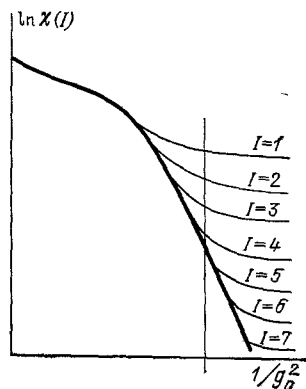


Рис. 24. Ожидаемая зависимость величины $\chi(I)$, определенной формулой (1.53), от g_0^2 при разных I (см. п. б) гл. 4).

с которой пробные статические кварки, находящиеся на расстоянии $I \cdot a$, действуют друг на друга.

Прежде чем рассматривать реальные графики, на которых изображены результаты монте-карловских вычислений величины $\chi(I)$, обсудим на примере идеализированного рис. 24, что нужно увидеть на этих графиках. На рис. 24 изображены графики зависимости $\ln \chi(I)$ от $1/g_0^2$ при разных значениях I , передающие качественно правильно эту зависимость. Рассмотрим, как величина $\chi(I)$ зависит от I при некотором фиксированном значении $1/g_0^2$. В области сильной связи ($1/g_0^2 \ll 1$) сила $\chi(I)$ от расстояния I не зависит (согласно п. 1 ж)), и, следовательно, для всех I величина $\chi(I)$ принимает одно и то же значение. Поэтому на рис. 24 при малом $1/g_0^2$ все графики зависимости $\chi(I)$ от $1/g_0^2$ сливаются в одну линию.

Пусть теперь $1/g_0^2$ зафиксировано в области слабой связи (т. е. $g_0^2 < 1,9$ для группы $\text{SU}(2)$), где радиус конфайнмента R_c по крайней мере в несколько раз больше, чем постоянная решетки a . Зафиксированному значению $1/g_0^2$ на рис. 24 соответствует вертикальная линия. Точки ее пересечения с графиками зависимости $\chi(I)$ от $1/g_0^2$ при разных I определяют значения $\chi(I)$ для данного $1/g_0^2$. Наибольшее при данном g_0^2 значение χ соответствует $I = 1$. При увеличении I (но таком, что $Ia \ll R_c$) значения $\chi(I)$ уменьшаются по

закону Кулона, и точки пересечения движутся вниз по вертикальной линии. Однако при дальнейшем увеличении I , когда Ia становится больше, чем R_c , величина $\chi(I)$, согласно формуле (1.58), перестает зависеть от расстояния, и точки пересечения начинают сгущаться. Это предельное значение и есть искомая величина a^2K .

Таким образом, описанная зависимость силы χ от расстояния при фиксированном g_0^2 имеет простую физическую интерпретацию. Пока расстояние между кварками меньше, чем радиус невылетания, сила, с которой они взаимодействуют, описывается законом Кулона. С ростом расстояния на смену

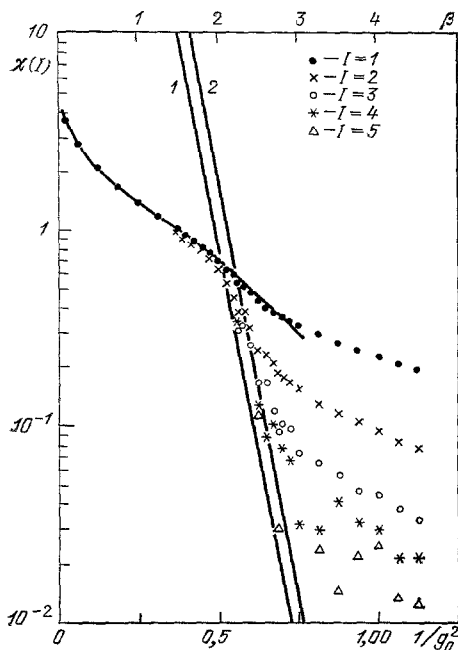


Рис. 25. Результаты расчета величины $\chi(I)$ в SU(2)-теории методом Монте-Карло. Линия 1 соответствует $\Delta_L = 0,013 \sqrt{K}$, 2 — $\Delta_L = 0,009 \sqrt{K}$; Δ_L определено формулой (4.15), K — коэффициент натяжения струны. (Рисунок взят из работы Бхано и Ребби²⁸.)

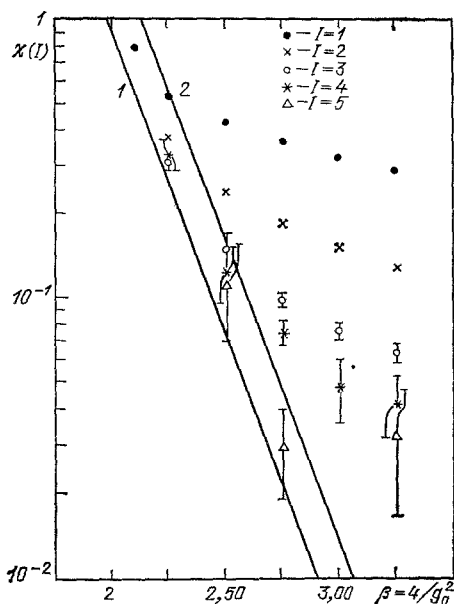


Рис. 26. То же, что на рис. 25, но в укрупненном масштабе²⁸.

кулоновскому приходит линейно растущий потенциал, для которого сила от расстояния не зависит. Предельное значение силы и есть, по определению, коэффициент натяжения струны K .

Такое предельное значение величины $\chi(I)$, вычисленное при разных g_0^2 , определяет зависимость a^2K от g_0^2 . Поэтому график функции $a^2K(g_0^2)$ является огибающей к семейству кривых $\chi(I; g_0^2)$. Этот график изображен на рис. 24 жирной линией. Все сказанное раньше по поводу того, как величина a^2K должна зависеть от g_0^2 , остается справедливым и при способе ее определения, изложенном в настоящем пункте. Таким образом, при малых g_0^2 огибающая к семейству кривых $\ln \chi(I, g_0^2)$ должна быть прямой с заданным наклоном.

Графики, на которых отложены реальные результаты монте-карловских вычислений величины $\chi(I)$ при разных значениях g_0^2 , для решеточных калибровочных теорий с группами SU(2) и SU(3) качественно совпадают с графиком на рис. 24. Эти графики были впервые получены Кройцем¹⁹, а впоследствии воспроизведены для группы SU(2) в работах^{28, 115} и для группы SU(3) в работах^{121, 48, 122, 118}. Для иллюстрации на рис. 25 приведен такой график

из работы Бхано и Ребби ²⁸, авторы которой аппроксимировали группу SU (2) ее икосаэдральной подгруппой \tilde{Y} (см. п. в) гл. 2), что позволило им работать на решетке 16^4 (при этом кратность вычисляемого методом Монте-Карло интеграла по формуле (1.25) равна $\approx 8 \cdot 10^5$). Наиболее интересная часть этого графика изображена на рис. 26 в укрупненном масштабе вместе со статистическими ошибками результатов вычислений. Наклонные прямые на рис. 25 и 26 проведены по формуле

$$\Lambda_L = (0,011 \pm 0,002) \sqrt{K}, \text{ SU (2)}, \quad (4.14)$$

где

$$\Lambda_L = \frac{1}{a} \left(\frac{24\pi^2}{11g_0^2} \right)^{54/121} e^{-12\pi^2/11g_0^2}, \text{ SU (2)}, \quad (4.15)$$

обозначает значение параметра $\Lambda_{\text{КХД}}$, соответствующее решеточной регуляризации, и являются огибающими к семейству кривых в области слабой связи.

Аналогичные вычисления для калибровочной группы SU (3) (здесь максимальный размер решетки был 10^4 у Пиетаринена ¹²¹) согласуются со значением ^{48, 118 *})

$$\Lambda_L = (6 \pm 1) \cdot 10^{-3} \sqrt{K}, \text{ SU (3)}, \quad (4.16)$$

где

$$\Lambda_L = \frac{1}{a} \left(\frac{16\pi^2}{11g_0^2} \right)^{54/121} e^{-8\pi^2/11g_0^2}, \text{ SU (3)}; \quad (4.17)$$

здесь ошибка включает в себя как статистическую погрешность монте-карловских данных, так и субъективную погрешность в проведении огибающей к семейству кривых $\chi(I; g_0^2)$.

в) С в я з ь м е ж д у \sqrt{K} и $\Lambda_{\text{КХД}}$

Как уже обсуждалось в п. а), отношения размерных физических величин (одинаковой размерности), возникающих в КХД в результате размерной трансмутации, являются универсальными константами, которые можно вычислять методом Монте-Карло. Например, можно вычислить отношение квантово-хромодинамической константы $\Lambda_{\text{КХД}}$ и корня квадратного из коэффициента натяжения струны \sqrt{K} . Если мы интересуемся абсолютными значениями размерных величин, то нужно задать одну из них равной своему экспериментальному значению, после чего выразить через нее остальные.

При монте-карловских вычислениях в решеточных калибровочных теориях принято задавать из опыта коэффициент натяжения струны. Делается это следующим образом. В струнной модели коэффициент натяжения струны K связан с наклоном реджевской траектории α' формулой

$$\sqrt{K} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha'}}. \quad (4.18)$$

*) После написания настоящего обзора появились работы ¹⁵⁴, в которых вычисление коэффициента натяжения струны для калибровочной группы SU(3) проводилось на большей решетке, что позволило извлечь отношение Λ_L/\sqrt{K} из рассмотрения области больших значений β . Полученное значение $\Lambda_L = (10 \pm 2) \cdot 10^{-3} \sqrt{K}$ заметно превышает значение (4.16) и соответствует $\Lambda_{\text{МОН}} = (330 \pm 70) \text{ МэВ}$ (ср. со значением (4.23)). Как показано в работе ¹⁵⁵, заниженное значение отношения Λ_L/\sqrt{K} в SU(3)-теории с вильсоновским действием (1.18) получалось вблизи переходной области по той самой причине, по которой в SU(2) — SO(3)-теории со смешанным действием (3.16) формула (4.43) перестает быть применимой вблизи конечной точки фазовой диаграммы (см. п. е) гл. 4). Зависимость отношения Λ_L/\sqrt{K} от β не оказывает, однако, заметного влияния на полученные методом Монте-Карло значения других размерных величин (например, масс глюоболов или температуры деконфайнмента) ¹⁵⁵.

Такая связь получается уже для классической струны (см. обзор ¹²³). Подставив сюда $\alpha' = 1 \text{ ГэВ}^{-2}$ из наклона $\rho - A_2 - g$ -траектории, получим

$$\sqrt{K} = 400 \text{ МэВ.} \quad (4.19)$$

Близкое значение ¹²⁴

$$\sqrt{K} = 430 \text{ МэВ} \quad (4.20)$$

получается из описания мезонов, составленных из тяжелых кварков, с помощью нерелятивистской потенциальной модели.

Подстановка этих значений \sqrt{K} в полученную методом Монте-Карло формулу (4.16) дает

$$\Lambda_L = 2-3 \text{ МэВ.} \quad (4.21)$$

На первый взгляд кажется, что это значение Λ_L слишком мало и грубо противоречит имеющимся экспериментальным данным, например, по глубоко неупругому рассеянию, поскольку для $\Lambda_{\text{КХД}} \approx 2-3 \text{ МэВ}$ бёркенровский скейлинг продолжался бы вплоть до импульсов порядка нескольких МэВ. На самом деле противоречие отсутствует по следующей причине.

Значение квантово-хромодинамической константы $\Lambda_{\text{КХД}}$ зависит, вообще говоря, от способа регуляризации и калибровки. Одна из традиционных процедур регуляризации непрерывной теории содержит вычитание в симметричной точке импульсного пространства. Такая регуляризация называется *моментной* (momentum), а соответствующее ей значение параметра $\Lambda_{\text{КХД}}$ обозначается $\Lambda_{\text{МОМ}}$. Входящая же в формулу (4.16) величина Λ_L есть значение параметра $\Lambda_{\text{КХД}}$, отвечающее решеточной регуляризации. Связь между $\Lambda_{\text{МОМ}}$ и Λ_L установили А. и П. Хазенфратц ¹²⁵:

$$\Lambda_{\text{МОМ}}^{\alpha=1} = 83,4 \Lambda_L; \quad (4.22)$$

здесь $\Lambda_{\text{МОМ}}^{\alpha=1}$ соответствует калибровке Фейнмана, и значение константы приведено для группы SU (3). В другой калибровке или для другой группы вместо 83,4 стоит другое число. Причина, по которой возникает зависимость параметра $\Lambda_{\text{КХД}}$ от способа регуляризации, обсуждается ниже в п. е) гл. 4.

Подстановка в формулу (4.22) значения (4.21) дает

$$\Lambda_{\text{МОМ}}^{\alpha=1} = 210 \pm 40 \text{ МэВ,} \quad (4.23)$$

что согласуется с общепринятым в настоящее время феноменологическим значением $\Lambda_{\text{МОМ}}^{\text{эксп}} = 200-350 \text{ МэВ}$. Вычисление $\Lambda_{\text{МОМ}}$ было впервые проведено Кройцем ¹⁹ и явилось первым вычислением физической величины методом Монте-Карло.

Следует, однако, иметь в виду, что при этом вычислении пренебрегали вкладом виртуальных кварковых петель. Феноменологически это приближение справедливо с точностью, с которой ширины адронных резонансов относятся к их массам, т. е. $\sim 10-20\%$. Его можно оправдать теоретически приближением большого числа цветов N_c , когда виртуальные кварковые петли становятся несутественны ¹²⁶.

г) М а с с ы г л ю б о л о в

Метод Монте-Карло применяется для вычисления в КХД масс связанных состояний — адронов. Мы поясним методику вычислений на примере глюоболов — связанных состояний глюонов, которые существуют уже в чистой глюодинамике, т. е. в КХД без кварков.

Для нахождения масс глюоболов вычисляется сумма по узлам решетки, лежащим в одном «временном» слое $t \equiv x_4$, от связанного коррелятора двух операторов $O(\mathbf{x}, t)$ с квантовыми числами данного глюоболо:

$$\Delta(t) = \sum_{\mathbf{x}} \{ \langle O(\mathbf{x}, t) O(0, 0) \rangle - \langle O(0, 0) \rangle^2 \}. \quad (4.24)$$

В простейшем варианте $O(x, t)$ выбирается в виде

$$O(x, t) = \text{tr } U_p, \quad (4.25)$$

где грань p пристроена в точке x, t . Подставляя в определение (4.24) сумму по промежуточным состояниям (аналогично п. 1, е)), получим

$$\Delta(t) = \sum_{n \neq 0} | \langle O(0, 0) | n \rangle |^2 e^{-Mnt}. \quad (4.26)$$

В этой формуле суммирование идет по всем глобальным возбуждениям, массы которых равны M_n . Вакуумное состояние ($n = 0$) сократилось, так как в определение (4.24) входит связанный коррелятор.

Поскольку при больших t в сумме (4.26) доминирует низшее состояние, его массу можно определить по показателю в экспоненциальном законе убывания величины $\Delta(t)$ с ростом t . Вычисление массы легчайшего глобола по методу такого типа проводилось лишь в первых работах^{82, 88}, где это значение было грубо определено для калибровочной группы SU(2). Причина состоит в том, что коррелятор $\Delta(t)$ мал по абсолютной величине в той области, где низшее состояние доминирует, и для выделения сигнала над статистическим шумом требуется много машинного времени. Впоследствии для вычисления масс глоболов были разработаны более тонкие методы.

Наиболее популярен сейчас предложенный Вильсоном (см. также работу¹²⁷) вариационный метод, который позволил не только получить надежные значения для массы легчайшего глобола в случае калибровочной группы SU(3) (с квантовыми числами 0^{++}), но и вычислять массы глоболов с другими квантовыми числами. Методика вычислений с помощью вариационного метода была вначале разработана⁸⁶⁻⁸⁸ для калибровочной группы SU(2) и затем применена в работах^{89-91, 93-95} для вычислений с группой SU(3).

Основная идея вариационного метода вычисления масс глоболов состоит в том, чтобы в качестве $O(x, t)$ взять линейную комбинацию

$$O(x, t) = \sum_i A_i \text{tr } U_{C_i}, \quad (4.27)$$

где контуры C_i проходят через точку x, t а A_i — некоторые константы. Для данного значения констант вычисляется величина

$$m(t) = \ln \frac{\Delta(t-a)}{\Delta(t)}, \quad (4.28)$$

а затем по A_i проводится минимизация, т. е. A_i подбираются так, чтобы сделать $m(t)$ минимально возможным при данном выборе операторов в правой части формулы (4.27).

Как видно из разложения (4.26), все глобальные состояния вносят положительный вклад в $\Delta(t)$. Поэтому скорость убывания величины $\Delta(t)$ с ростом t (величина $m(t)$) будет минимальной для такого оператора $O(x, t)$, который рождает из вакуума легчайший глобол в точке x, t . Вариационный метод представляет собой алгоритм для построения этого оператора.

Для оператора, рождающего из вакуума легчайший глобол, в правой части разложения (4.26) остается лишь один член, так что величина $m(t)$ одинакова при всех t и равна массе. Поэтому для вычисления массы достаточно взять $t = 1$. Величина $\Delta(0)$ связана с квадратом волновой функции и также представляет интерес.

На самом деле на решетке конечного размера не удастся точно построить оператор рождения легчайшего глобола, поскольку число операторов, учитываемых в разложении (4.27), конечно. Таким образом, всегда остается некоторая примесь от высших состояний. Для ее оценки минимизируются $m(1)$, $m(2)$, $m(3)$ и т. д. по отдельности и сравниваются результаты. Как показывают вычисления, для решеток рассматриваемого размера $m(3)$ лишь ненамного меньше, чем $m(4)$. Во всяком случае, $m(4)$ является ограничением на массу легчайшего глобола сверху.

Перейдем к результатам по вычислению масс глюболов. Для калибровочной группы SU (2) экспоненциальная зависимость массы легчайшего глюбола от $1/g_0^2$ была надежно установлена в работах ^{86, 92, 95}, где вычисления проводились с помощью вариационного метода, и в работе ⁹⁶, где она определялась по изменению контурных средних при замене граничных условий. Полученные результаты согласуются со значением

$$m(0^+) = (200 \pm 25) \Lambda_L = (2,2 \pm 0,3) \sqrt{K}, \text{ SU (2),} \quad (4.29)$$

где использовано соотношение (4.14).

Для калибровочной группы SU (3) экспоненциальная зависимость $m(0^{++})$ от $\beta = 6/g_0^2$ была прослежена в работах ^{89, 94, 98, 95}. Результаты согласуются со значением ⁹⁴.

$$m(0^{++}) = (280 \pm 30) \Lambda_L, \text{ SU (3).} \quad (4.30)$$

Воспользовавшись для Λ_L значением (4.21), имеем в физических единицах

$$m(0^{++}) = 700\text{--}750 \text{ МэВ.} \quad (4.31)$$

Вариационный метод позволяет вычислять спектр масс глюболов с разными квантовыми числами. Для этого вариационный принцип применяется к операторам, которые ортогональны оператору, построенному ранее для состояния с квантовыми числами 0^{++} . Операторы классифицируются по представлениям кубической группы, которая в непрерывном пределе переходит в группу вращений.

Экспоненциальная зависимость $m(2^{++})$ от β прослежена в работах ^{92, 95}, и получено значение

$$m(2^{++}) = (1620 \pm 100) \text{ МэВ.} \quad (4.32)$$

Спектр масс глюболов с другими квантовыми числами вычислялся в работах ^{90, 91, 93-95}. В работе ⁹⁵ получено

$$\begin{aligned} m(0^{-+}) &= (1420 \pm \frac{240}{170}) \text{ МэВ}, & m(0^{--}) &= (2880 \pm 300) \text{ МэВ}, \\ m(1^{-+}) &= (1730 \pm 220) \text{ МэВ}, & m(1^{+-}) &= (2980 \pm 300) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Эти результаты не так надежны, как значения (4.31) и (4.32) для $m(0^{++})$ и $m(2^{++})$, поскольку экспоненциальная зависимость от β не прослежена. Во всяком случае можно считать установленным тот факт, что $m(0^{++})$ в чистой глюодинамике аномально мала, — по крайней мере в 2 раза меньше остальных масс (о расчетах методом разложения сильной связи см. ¹²⁸).

Хотя полученные результаты, несомненно, относятся к непрерывной теории, неизвестно, как они изменятся при включении кварков, поскольку глюболы (например, с квантовыми числами 0^{++}) могут сильно смешиваться с кварковыми состояниями. С этой точки зрения особый интерес представляет вычисление в чистой глюодинамике масс так называемых «нечетных» глюболов, например с квантовыми числами 1^{-+} , 0^{--} , которые с двухкварковыми состояниями не смешиваются, и поэтому можно ожидать, что их массы сильно не изменятся при включении кварков. Результаты расчета масс низко лежащих «нечетных» глюболов ^{93, 95} свидетельствуют, что глюбол с квантовыми числами 1^{-+} оказывается относительно легким (см. уравнение (4.33)).

д) Температура деконфайнмента

Хотя в SU (2)- и SU (3)-калибровочных теориях между статическими кварками возникает при увеличении расстояния линейно растущий потенциал, это свойство не может быть справедливым для сколь угодно больших температур. Как обсуждалось Поляковым и Саскиндом ¹²⁹, при некоторой температуре T_c (температуре деконфайнмента) должен произойти фазовый переход из фазы адронной материи в фазу кварк-глюонной плазмы. Величина T_c

была вычислена методом Монте-Карло в работах ^{99-101, 83, 104-106} для калибровочной группы SU (2) и в работах ¹⁰²⁻¹⁰⁴ для группы SU (3).

Как хорошо известно, для описания системы при конечной температуре T_c нужно рассмотреть решетку бесконечной протяженности по трем пространственным направлениям и с конечным числом шагов n_t по временной оси t , по которой накладываются периодические граничные условия. Температура связана с n_t формулой

$$T = (an_t)^{-1}, \quad (4.34)$$

где a — постоянная решетки.

При конечной температуре кроме рассмотренных выше есть еще один тип калибровочно-инвариантных величин — след от произведения матриц $U_{x,\mu}$ вдоль линии, проходящей сквозь решетку параллельно оси t . Калибровочная инвариантность обеспечивается периодическими граничными условиями. Для таких величин используется обозначение L_x , поскольку пространственные координаты всех ребер решетки, образующих данную линию, одинаковы и равны x . Повторяя рассуждение п. 1, е), убеждаемся в том, что величина

$$F_0 = -\frac{1}{an_t} \ln \langle L_x \rangle, \quad (4.35)$$

где среднее $\langle L_x \rangle$ определено с помощью общей формулы (1.32), имеет смысл изменения свободной энергии решеточной системы при помещении статического кварка в точке x . Для вычисления температуры деконфайнмента методом Монте-Карло используется тот факт, что в фазе конфайнмента F_0 бесконечно, и, следовательно, $\langle L_x \rangle = 0$, в то время как в фазе с вылетающими кварками F_0 и $\langle L_x \rangle$ конечны. Реально для данного n_t вычисляется величина $\langle L_x \rangle$ при разных значениях заряда g_0^2 и определяется значение g_c^2 , начиная с которого $\langle L_x \rangle$ становится отличным от нуля (при $g_0^2 < g_c^2$). Затем вычисления повторяются с другим n_t . Таким способом определяется зависимость g_c^2 от n_t или, что одно и то же, зависимость $T_c \cdot a$ от g_c^2 .

Поскольку T_c размерно, согласно размерной трансмутации оно должно быть пропорционально Λ_L и при малых g_c^2 зависеть от $1/g_c^2$ экспоненциально для того, чтобы полученное значение T_c имело отношение к непрерывному пределу. Для калибровочной группы SU (2) это свойство было установлено в работах ⁹⁸⁻¹⁰¹, где получена следующая связь между T_c и Λ_L :

$$T_c = (38-43) \Lambda_L = (0,43-0,47) \sqrt{K}, \quad \text{SU (2)} \quad (4.36)$$

(использовано соотношение (4.14)). Аналогично этому экспоненциальная зависимость T_c от $1/g_c^2$ была прослежена и для калибровочной группы SU (3) и получено следующее значение ¹⁰²⁻¹⁰⁴

$$T_c = (75-83) \Lambda_L \approx 200 \text{ МэВ}, \quad \text{SU (3)}, \quad (4.37)$$

где подставлено значение (4.16) для Λ_L .

С помощью вычислений методом Монте-Карло было также показано ^{83, 103}, что в окрестности T_c зависимость плотности энергии системы от температуры $\varepsilon(T)$ испытывает резкое изменение от значения для адронной материи до значения для глюонной плазмы. При $T > 2T_c$ $\varepsilon(T)$ хорошо описывается законом Стефана — Больцмана

$$\varepsilon(T) = \frac{\pi^2}{15} T^4 (N_c^2 - 1) \quad (4.38)$$

с коэффициентом, вычисляемым для идеального газа свободных безмассовых глюонов. Это изменение в поведении $\varepsilon(T)$ использовалось ^{83, 103} для вычисления T_c .

Проверить, насколько хорошо значение (4.37) согласуется с опытом, можно будет по космологическим следствиям, а также в экспериментах на ускорителях тяжелых ионов (см. обзор Е. Л. Фейнберга ¹³⁰).

е) У н и в е р с а л ь н о с т ь

Как отмечалось в пункте д) гл. 3, величины, относящиеся к непрерывному пределу, не должны зависеть от вида решеточного действия, использованного при вычислениях методом Монте-Карло, и должны быть одинаковыми, например, для действий (1.18), (3.16). Это свойство называют *универсальностью* (universality) и говорят, что такие действия принадлежат к одному и тому же классу универсальности.

Однако при вычислениях с различными видами действия константы, связывающие, например, Λ_L и \sqrt{K} (см. (4.16)), оказываются разными. Для проверки универсальности необходимо связать параметры Λ_L , отвечающие различным действиям, и показать, что \sqrt{K} при этом не изменяется. Это различие в значениях параметров Λ_L имеет ту же причину, что и различие в значениях Λ_L для действия Вильсона и $\Lambda_{\text{МOM}}$, даваемое соотношением (4.22). Поясним сначала, как возникает это соотношение.

Для нахождения связи между $\Lambda_{\text{МOM}}$ и Λ_L А. и П. Хазенфратц¹²⁵, пользуясь решеточной теорией возмущений, вычислили в однопетлевом приближении глюонный пропагатор и трехглюонную вершину в симметричной точке импульсного пространства $p_1^2 = p_2^2 = (p_1 - p_2)^2 = M^2$. Перенормированный заряд $g(M)$ выражается через g_0 и перенормировочные константы Z_3 (пропагатора) и Z_1 (вершины) стандартным образом:

$$g^2(M) = g_0^2 Z_3^2 Z_1^{-2}. \quad (4.39)$$

Подставив сюда Z_1 и Z_3 , вычисленные в однопетлевом приближении, А. и П. Хазенфратц для группы SU(3) получили в фейнмановской калибровке

$$g^2(M) = g_0^2 \left[1 + g_0^2 \left(\frac{11}{8\pi^2} \ln \frac{\pi}{aM} + 0,457 \right) \right]. \quad (4.40)$$

В правой части этого выражения приведены только члены, которые остаются конечными при $a \rightarrow 0$. Все нековариантные слагаемые в этом пределе сократились.

Следует отметить, что коэффициент перед логарифмом в выражении (4.40) совпадает с коэффициентом b асимптотической свободы. Это показывает, что при $a \rightarrow 0$ не только классическое действие (1.18) переходит в действие непрерывной теории, но есть также соответствие между результатами вычислений по теории возмущений. При этом константные члены, зависящие от способа регуляризации, различаются, что приводит к различию в значениях Λ -параметров. Соотношение (4.22) получается в результате подстановки выражения (4.40) в определение

$$\Lambda_{\text{МOM}} \equiv M \left(\frac{16\pi^2}{11g^2(M)} \right)^{51/121} e^{-8\pi^2/11g^2(M)} [1 + O(g^2(M))] = \pi e^{8\pi^2/11 \cdot 0,475} \Lambda_L, \quad (4.41)$$

где Λ_L дается формулой (4.17).

Вычисления, приводящие к формуле (4.40), довольно громоздки. Наряду с обычными имеются также диаграммы с дополнительными вершинами, которые связаны со следующими членами разложения U_p в ряд. Например, получающийся при $a \rightarrow 0$ лагранжиан имеет в порядке g_0^2 вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 - \frac{C_4}{4!} g_0^2 a^4 \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^4, \quad (4.42)$$

где $C_4 = 1$ для действия (1.18). Хотя второй член $\propto a^4$, он приводит к диаграммам типа «головастика», которые расходятся как a^{-4} , так что их вклад конечен. Именно эти диаграммы дают численно наибольший вклад в отношение $\Lambda_{\text{МOM}}/\Lambda_L$.

Различие в значениях параметров Λ_L для разных видов решеточного действия целиком обусловлено различием коэффициентов C_4 (например, $C_4 = 1 + 6\beta_A/(\beta + 2\beta_A)$ для смешанного действия (3.16) с группой $SU(2)$). Отношение параметров Λ_L проще всего вычислять с помощью решеточного варианта метода фонового поля¹³¹. При этом, по существу, нужно лишь определить коэффициент перед одной диаграммой типа «головастика». Ответ имеет вид^{132, 133} (для группы $SU(2)$)

$$\frac{\Lambda'_L}{\Lambda_{\text{Wilson}}} = \exp \left[\frac{5\pi^2}{44} (1 - C_4) \right]. \quad (4.43)$$

К этой формуле имеются поправки порядка $O(g_0^2)$, которые могут быть велики, если g_0^2 недостаточно мало. Некоторые из них (доминирующие) вычислялись в работе¹³⁴.

Вычисления методом Монте-Карло с другими видами действия проводились для коэффициента натяжения струны^{46, 116, 133}, масс глюоболов^{87, 97}, температуры деконфайнмента^{105, 106}. Оказалось, что для вариантов решеточного действия, предложенных Мантоном¹³⁵ и Виллэйном (см. ¹³⁶), универсальность имеет место уже при учете простейшего соотношения (4.43). Однако для смешанного действия (3.16) использование соотношения (4.43) вблизи конечной точки фазовой диаграммы (см. рис. 16) привело¹³³ к отличию физических величин в четыре раза от результатов вычисления с вильсоновским действием. В работах^{106, 137-140} было показано, что в действительности соотношение (4.43) не применимо вблизи конечной точки фазовой диаграммы. Непертурбативное вычисление отношения параметров Λ_L показало¹⁴⁰, что универсальность имеет место и для смешанного действия. Таким образом, относящиеся к непрерывному пределу величины действительно не зависят от вида решеточного действия, использованного для их вычисления методом Монте-Карло. Однако использование вильсоновского действия предпочтительнее, чем, например, смешанного действия при $\beta_A > 0$, поскольку для вильсоновского действия зависимость параметра Λ_L от g_0^2 хорошо описывается простой формулой (4.15) в области, где проводятся вычисления методом Монте-Карло.

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

В настоящем обзоре рассмотрено, как метод Монте-Карло применяется к изучению калибровочных теорий на решетке, и в том числе КХД без кварков. Полученные результаты являются достаточно надежными, хотя осталось проверить, не произойдут ли изменения при уменьшении шага решетки или при увеличении ее пространственного размера. Вычисленные таким способом в КХД без кварков размерные величины (коэффициент натяжения струны, массы глюоболов, температура деконфайнмента) обладают правильным ренорм-групповым поведением и относятся к непрерывной теории.

Кроме величин, более или менее подробно рассмотренных в гл. 4, в КХД без кварков методом Монте-Карло вычислялись также величина глюонного конденсата^{141, 142} и значение коррелятора плотностей топологического заряда^{143, 144}. При вычислении этих величин имеется некоторая неопределенность, связанная со спецификой их определения на решетке.

В настоящем обзоре мы не касались монте-карло-вычислений в КХД с кварками. Методы, позволяющие учитывать кварки в монте-карло-вычислениях, были развиты в работах¹⁴⁵. Наибольший интерес вызывают работы^{85, 146-149} по вычислению этими методами спектра масс адронов, составленных из кварков. Первые вычисления проводились в пионерских работах^{85, 146} (см. также последующие работы^{148, 149}) в приближении, в котором учитывались только валентные кварки и пренебрегалось вкладом виртуальных («морских») кварков, или виртуальные кварки учитывались с помощью приближенного метода¹⁴⁷. Вычисления проводились на решетках размера от $5^3 \times 10^3$

до $10^3 \times 20$, причем полученные значения масс несколько изменяются при увеличении размера решетки. Были вычислены массы низколежащих обычных и странных мезонов и барионов, а также некоторые другие величины. Полученные таким способом значения масс в пределах ошибки согласуются с экспериментом (на решетке большего размера согласие несколько лучше), хотя ошибка довольно велика и составляет примерно ± 150 МэВ. Эта ошибка будет значительно уменьшена, возможно, уже в ближайшем будущем в результате усовершенствования методики вычислений, набора статистики и учета вклада виртуальных кварков (см. первые работы, в которых вклад виртуальных кварков при монте-карло, расчетах учитывался точно^{150, 151} или приближенно¹⁵²).

Вместе с тем высказывались¹⁵³ сомнения, можно ли вообще на решетках столь малых размеров, которые были использованы в работах^{85, 148}, получать надежные результаты для КХД с кварками. Для существенного увеличения размеров решетки потребовалось бы значительное увеличение памяти и быстродействия ЭВМ. Однако проводимые при расчетах масс адронов вычисления и так подходят к пределу современных вычислительных возможностей. К примеру, вычисления, проведенные в работе Липпса и др.¹⁴⁸, потребовали около 30 часов на ЭВМ «Cray-1S» (стоимость такого количества машинного времени оценивается примерно в 100 тыс. долларов). Тем не менее работа по увеличению размера решетки продолжается и уже в ближайшее время планируется иметь результаты на решетках еще большего размера.

Автор благодарен М. И. Поликарпову за полезные замечания и помощь при написании гл. 3.

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Fritzsche H., Gell-Mann M.— In: Proc. of XVI Intern. Conference on High Energy Physics.— Batavia, 1972.— V. 2, p. 135. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H.— Phys. Lett. Ser. B, 1973, v. 47, p. 365.
Weinberg S.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 494.
2. Politzer H. D.— Phys. Rept. Ser. C, 1974, v. 14, p. 129.
Marciano W., Pagels H.— Ibid., 1978, v. 36, p. 139.
Волошин М. Б., Тер-Мартirosян К. А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц.— М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Gross D., Wilczek F.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 1343.
Politzer H. D.— Ibid., p. 1346.
4. Вайнштейн А. И., Волошин М. Б., Захаров В. И., Новиков В. А., Окунь Л. Б., Шифман М. А.— УФН, 1977, т. 123, с. 217.
Novikov V. A., Okun L. B., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Voloshin M. B., Zakharov V. I.— Phys. Rept. Ser. C, 1978, v. 41, p. 3.
5. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.— Nucl. Phys., Ser. B, 1979, v. 147, p. 385, 448.
Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.— В кн.: Элементарные частицы. Восьмая школа физики ИТЭФ.— М.: Энергоиздат, 1981.— Вып. 1, с. 5.
6. Ioffe B. L.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 188, p. 317.
Иоффе Б. Л.— В кн. Элементарные частицы. Десятая школа физики ИТЭФ.— М.: Энергоатомиздат, 1983, — Вып. 3, с. 64.
7. Makeenko Yu. M., Migdal A. A.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 188, p. 269.
Migdal A. A.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 189, p. 253.
Makeenko Yu. M.— In: Gauge Theories of the Eighties/Ed. R. Raitio, J. Lindfors.— Berlin: Springer-Verlag, 1983.— P. 67.
8. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.
Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.— М.: Атомиздат, 1976.
9. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 2.— М.: Наука, 1978.
10. Wilson K. G.— Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 10, p. 2445.

11. Polyakov A. M.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 79.
12. Wegner F. J.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 2259.
13. Kogut J., Susskind L.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 11, p. 395.
14. Balian R., Drouffe J. M., Itzykson C.— Ibid., v. 10, p. 3376; v. 11, p. 2098, 2104.
15. Мигдал А. А.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 810.
16. Osterwalder K., Seiler E.— Ann. Phys. (N. Y.), 1978, v. 110, p. 440.
17. Faddeev L. D., Poroв V. N.— Phys. Lett. Ser. B, 1967, v. 25, p. 29.
18. Грибов В. Н.— В кн.: Физика элементарных частиц. Материалы XII зимней школы ЛИЯФ.— Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1977.— Вып. 1, с. 147; Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 139, p. 1.
19. Creutz M.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 313.
20. Polyakov A. M.— Nucl. Phys. Ser. B, 1980, v. 164, p. 171.
Gervais J.— L., Neveu A.— Nucl. Phys. Ser. B, 1980, v. 163, p. 189.
Dotsenko V. S., Vergeles S. N.— Ibid., v. 169, p. 527.
Арефьева И. Я.— Письма ЖЭТФ, 1980, т. 31, с. 421.
21. Brandt R. A., Neri F., Sato M.— Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 879.
22. Wilson K. G.— In: New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics/Ed. M. Levy, P. Mitter.— N. Y.: Plenum Press, 1977.
23. Creutz M., Jacobs L., Rebbi C.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 1390.
24. Creutz M., Jacobs L., Rebbi C.— Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 20, p. 1915.
25. Yang C.-P.— In: Proc. of Symposia in Applied Mathematics.— Providence; Amer. Math. Soc., 1963.— V. XV, p. 351.
26. Методы Монте-Карло в статистической физике /Под ред. К. Биндера.— М.: Мир, 1982.
27. Rebbi C.— Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 3350.
28. Petcher D., Weingarten D.— Ibid., v. 22, p. 2465.
29. Bhanot G., Rebbi C.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 180 [FS2], p. 469.
30. Bhanot G., Rebbi C.— Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 3319.
31. Bhanot G.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 108, p. 337.
32. Lisboa P., Michael C.— Ibid., v. 113, p. 303.
33. Jacobs L., Rebbi C.— J. Comp. Phys., 1981, v. 41, p. 203.
34. Bhanot G., Lang C., Rebbi C.— Comp. Phys. Comm., 1982, v. 25, p. 275.
35. Ardill R. W. B., Moriarty K. J. M.— Ibid., 1981, v. 24, p. 127.
36. Barkai D., Moriarty K. J. M.— Ibid., 1982, v. 25, p. 57.
37. Ardill R. W. B., Creutz M., Moriarty K. J. M.— Ibid., 1983, v. 29.
38. Creutz M.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 553.
39. Creutz M.— Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2308.
40. Wilson K. G.— In: Recent Progress in Gauge Theories/Ed. G.'t Hooft et al.— N. Y.: Plenum Press, 1980.— P. 243.
41. Creutz M.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 1441.
42. Bohr M., Moriarty K. J. M.— Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 104, p. 217.
Moriarty K. J. M.— Ibid., v. 106, p. 130.
Creutz M., Moriarty K. J. M.— Phys. Rev. Ser. D, 1982, v. 25, p. 1724.
43. Creutz M., Moriarty K. J. M.— Ibid., p. 610; Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 210 [FS6], p. 59, 377.
44. Halliday I. G., Schwimmer A.— Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 101, p. 327.
45. Greensite J., Lautrup B.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 9.
46. Creutz M., Moriarty K. J. M.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 210 [FS6], p. 50.
47. Bhanot G., Creutz M.— Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 3212.
48. Ardill R. W. B., Creutz M., Moriarty K. J. M.— Brookhaven preprint BNL 32568.—1982.
49. Creutz M., Moriarty K. J. M.— Phys. Rev. Ser. D, 1982, v. 27, p. 2166.
50. Creutz M.— Ibid., 1980, v. 21 p. 1006.
51. Lautrup B., Nauenberg M.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 95, p. 63.
52. Bhanot G.— Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 461.
53. Hamber H.— Ibid., p. 941.
54. Korthals-Altes C. P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 142, p. 315.
55. Yoneya T.— Ibid., v. 144, p. 195.
Замолодчиков Ал. Б.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 341.
56. Elitzur S., Pearson R., Shigemitsu J.— Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 19, p. 3698.
57. Horn D., Weinstein M., Yankielowicz S.— Ibid., p. 3715.
58. Ukwawa A., Windey P., Guth A. H.— Ibid., 1980, v. 21, p. 1013.
59. Savit R.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 55.
60. Banks T., Myerson R., Kogut J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 129, p. 493.
61. Guth A.— Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2291.
62. Fröhlich J., Spencer T.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 83, p. 411.

56. Falcioni M., Marinari E., Paciello M. L., Parrisi G., Taglienti B.—Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 102, p. 270; Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 190 [FS3], p. 782.
57. Lautrup B., Nauenberg M.—Phys. Rev. Lett., 1981, v. 45, p. 1755.
58. Nauenberg M., Schalk T., Brower R.—Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 548.
59. Eguchi T., Kawai H.—Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, p. 1063.
Bhanot G., Heller U., Neuberger H.—Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 113, p. 47.
Parisi G.—Ibid., v. 112, p. 463.
Gross D., Kitazawa Y.—Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 206, p. 440.
60. Bhanot G., Heller U., Neuberger H.—Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 115, p. 237.
Okawa M.—Phys. Rev. Lett., 1982, v. 49, p. 75.
Bhanot G., Moriarty K. J. M.—Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 122, p. 271.
61. Gonzalez-Arroyo A., Okawa M.—Ibid., v. 120, p. 174; Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 2397.
62. Green F., Samuel S.—Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 103, p. 48; Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 194, p. 107.
63. Greensite J., Lautrup B.—Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 104, p. 41.
Cvitanović P., Greensite J., Lautrup B.—Ibid., v. 105, p. 197.
Flyvbjerg H., Lautrup B., Zuber J. B.—Ibid., 1982, v. 110, p. 279.
Lautrup B.—Preprint NBI-HE-82-8.—Copenhagen.—1982.
Müller V. F., Rühl W.—Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 210 [FS6] p. 289.
Müller V. F., Raddatz T., Rühl W.—Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 122, p. 148.
64. Drouffe J. M.—Ibid., 1981, v. 105, p. 46.
Pritchard D. J.—Ibid., v. 106, p. 193.
Chen T.-L., Tan C.-I., Zheng X.-T.—Ibid., 1982, v. 109, p. 383.
Ogilvie M. C., Horowitz A.—Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 215 [FS7], p. 249.
65. Makeenko Ю. М., Хохлачев С. Б.—ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 448.
Khokhlachev S. B., Makeenko Yu. M.—Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 101, p. 403.
66. Makeenko Yu. M., Polikarpov M. I.—Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 205 [FS5], p. 386.
67. Samuel S.—Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 112, p. 237; 1983, v. 122, p. 287.
68. Bachas C. P., Dashen R. F.—Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 210 [FS6], p. 583.
69. Zheng X.-T., Tan C.-I., Chen T.-L.—Phys. Rev. Ser. D, 1982, v. 26, p. 2843.
70. Halliday I. G., Schwimmer A.—Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 102, p. 337.
71. Brower R. C., Kessler D. A., Levine H.—Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 621.
72. Brower R. C., Kessler D. A., Levine H.—Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 205 [FS5], p. 77.
73. Caneschi L., Halliday I. G., Schwimmer A.—Ibid., v. 200 [FS4], p. 409.
74. Mack G., Pietarinen E.—Ibid., v. 205 [FS5], p. 141.
75. Makeenko Yu. M., Polikarpov M. I., Veselov A. I.—Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 118, p. 133.
76. 't Hooft G.—Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 138, p. 1; 1979, v. 153, p. 141; Цит. в сб. ³⁹.
Mandelstam S.—Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 19, p. 2391.
77. Mack G., Petkova V. B.—Ann. Phys. (N. Y.), 1979, v. 123, p. 447; 1980, v. 125, p. 117; Zs. Phys. Ser. C, 1982, Bd. 12, S. 177.
Mack G.—Цит. в сб. ³⁹.
78. DeGrand T., Toussaint D.—Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 22, p. 2478; 1981, v. 24, p. 466.
79. Groenvelt J., Jurkiewicz J., Korthals-Altes C. P.—Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 92, p. 312; Physica Scripta, 1981, v. 23, p. 1022.
80. Mack G.—Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 1378.
Mack G., Pietarinen E.—Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 94, p. 397.
81. Belova T. I., Makeenko Yu. M., Polikarpov M. I., Veselov A. I.—Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 230 [FS10], p. 473.
82. Berg B.—Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 97, p. 401.
Engels J., Karsch F., Sptz M., Montvay I.—Ibid., 1981, v. 102, p. 332.
83. Engels J., Karsch F., Satz H., Montvay I.—Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 205 [FS5], p. 545.
84. Brower R. C., Creutz M., Nauenberg M.—Ibid., v. 210 [FS6], p. 133.
85. Hamber H., Parisi G.—Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 1792.
86. Berg B., Billoire A., Rebbi C.—Ann. Phys. (N. Y.), 1982, v. 142, p. 185.

87. Falcioni M., Marinari E., Paciello M. L., Parisi G., Rapuano R., Taglienti B., Zhang Y.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 110, p. 295; Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 215 [FS7], p. 265.
88. Ishikawa K., Teper M., Schierholz G.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 110, p. 399.
89. Berg B., Billoire A.— Ibid., v. 113, p. 65.
90. Berg B., Billoire A.— Ibid., v. 114, p. 324.
91. Ishikawa K., Teper M., Schierholz G.— Ibid., v. 116, p. 429.
92. Ishikawa K., Teper M., Schierholz G.— Zs. Phys. Ser. C, 1982, Bd. 16, S. 69.
93. Ishikawa K., Sato A., Schierholz G., Teper M.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 120, p. 387.
94. Berg B., Billoire A.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 221, p. 109; v. 226, p. 405.
95. Ishikawa K., Schierholz G., Teper M.— Zs. Phys. Ser. C, 1983, Bd. 19, S. 327.
Ishikawa K., Sato A., Schierholz G., Teper M.— Ibid., Bd. 21, S. 167.
96. Mütter K. H., Schilling K.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 117, p. 75.
97. Mütter K. H., Schilling K.— Ibid., 1983, v. 121, p. 267.
98. Michael C., Teasdale I.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 215 [FS7], p. 433.
99. McLerran L., Svetitsky B.— Phys. Lett. Ser. B, 1981 v. 98, p. 195; Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24 p. 450.
100. Kuti J., Polónyi J., Szlachány K.— Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 98, p. 199.
101. Engels J., Karsch F., Satz H., Montvay I.— Ibid., v. 101, p. 89.
102. Kajantie K., Montonen C., Pietarinen E.— Zs. Phys. Ser. C, 1981, Bd. 9, S. 253.
103. Montvay I., Pietarinen E.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 110, p. 148; v. 115, p. 151.
104. Kogut J., Stone M., Wyld H. W., Gibbs W. R., Shigemitsu J., Shenker S. H., Sinclair D. K.— Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, p. 393.
105. Gavai R. V.— Nucl. Phys. Ser. B, 1983, v. 215 [FS7], p. 458.
106. Gavai R., Karsch F., Satz H.— Ibid., v. 220 [FS8], p. 223.
107. Caswell W. E.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 244.
Jones D. R. T.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 75, p. 531.
108. Buras A. J.— In: Proc. of 1981 Intern. Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies.— Bohn, 1981.— P. 636.
109. Münster G.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 95, p. 59; Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 180 [FS2], p. 23.
Kowall J. P., Neuberger H.— Ibid., v. 189, p. 535.
110. Kogut J. B., Pearson R. B., Shigemitsu J.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 484.
Münster G., Weisz P.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 96, p. 119.
111. Lang C. B., Rebbi C.— Ibid., 1982, v. 115, p. 137.
112. Kogut J. B., Sinclair D. K., Pearson R. B., Richardson J. L., Shigemitsu J.— Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 23, p. 2945.
113. Hasenfratz A., Hasenfratz E., Hasenfratz P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 180 [FS2], p. 353.
Itzykson C., Peskin M., Zuber J. B.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 95, 259.
Lüscher M., Münster G., Weisz P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 180 [FS2], p. 1.
114. Stack J. D.— Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 412.
115. Berg B., Stehr J.— Zs. Phys. Ser. C, 1981, Bd. 9, S. 333.
116. Lang C. B., Rebbi C., Solomonson P., Skagerstam R.-S.— Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 101, p. 173.
117. Creutz M.— Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 23, p. 1815.
118. Ardill R. W. B., Creutz M., Moriarty K. J. M.— Ibid., 1983, v. 27, p. 1956.
119. Kadanoﬀ L. P.— Ann. Phys. (N. Y.), 1976, v. 100, p. 359.
120. Garacciolo S., Menotti P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 180 [FS2], p. 428.
Nauenberg M., Toussaint D.— Ibid., v. 190 [FS3], p. 217.
121. Pietarinen E.— Ibid., p. 349.
122. Ilgenfritz E.-M., Mueller-Preussker M.— Zs. Phys. Ser. C, 1983, Bd. 16, S. 339.
123. Маринов М. С.— УФН, 1977, т. 121, с. 377.
124. Eichten E., Gottfried K., Kinoshita T., Lane K. D., Yan T. M.— Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 203.

125. Hasenfratz A., Hasenfratz P.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 93, p. 165.
126. 't Hooft G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 72, p. 461.
127. Patkos A.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 110, p. 391.
128. Kogut J., Sinclair D. K., Susskind L.— Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 114, p. 199.
Münster G.— Ibid., 1981, v. 190 [FS3], p. 439; 1982, v. 200 [FS4], p. 536 (E); v. 205 [FS5], p. 545 (E).
Smit J.— Ibid., 1982, v. 206, p. 309.
Münster G.— Preprint BUTP-21/1982.— Bern, 1982.
129. Polyakov A. M.— Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 72, p. 477.
Susskind L.— Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 20, p. 2610.
130. Фейнберг Е. Л.— УФН, 1983, т. 139, с. 3.
131. Dashen R., Gross D. J.— Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 23, p. 2340.
132. Lang C. B., Rebbi C., Solomonson P., Skagerstam B.-S.— Ibid., 1982, v. 26, p. 2028.
Gonzales-Arroyo A., Korthals-Altes C. P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982 v. 205 [FS5], p. 46.
Di Giacomo A., Paffuti G.— Ibid., p. 313.
133. Bhanot G., Dashen R.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 113, p. 299.
134. Sharatchandra H. S., Weisz P. H.— DESY preprint 81-083.— 1981.
135. Manton N. S.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 96, p. 328.
136. Drouffe J. M.— Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 18, p. 1174.
Menotti P., Onofri E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 190 [FS3], p. 288.
137. Gonzales-Arroyo A., Korthals-Altes C. P., Peiro J., Perrottet M.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 116, p. 414.
138. Gliozzi F., Ravanini F., Scinto S.— Ibid., v. 118, p. 402.
139. Grossman B., Samuel S.— Ibid., v. 120, p. 383.
140. Makeenko Yu. M., Polikarpov M. I., Zhelonkin A. V.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 126, p. 82.
141. Di Giacomo A., Rossi G. C.— Ibid., 1981, v. 100, p. 481.
Kripfganz J.— Ibid., v. 101, p. 169.
Di Giacomo A., Paffuti G.— Ibid., v. 108, p. 327.
Kirschner R., Kripfganz J., Ranft J., Schiller A.— Nucl. Phys. Ser. B, 1982, v. 210 [FS6], p. 567.
Ishikawa K., Schierholz G., Schneider H., Teper M.— Ibid., 1983, v. 227, p. 221.
142. Banks T., Horsley R., Rubinstein H. R., Wolff V.— Ibid., 1981, v. 19 [FS3], p. 692.
Ilgenfritz E. M., Müller-Preussker M.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 119, p. 395.
143. Di Vecchia P., Fabricius K., Rossi G. C., Veneziano G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 192, p. 392; Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 108, p. 323.
144. Махалдiani Н. В., Мюллер-Пройскер М.— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 440.
Fabricius K., Rossi G. C.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 127, p. 229.
145. Fucito F., Marinari E., Parisi G., Rebbi C.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 180 [FS2], p. 369.
Weingarten D., Petcher D.— Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 99, p. 333.
Scalapino D. L., Sugar R. L.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 519.
Marinari E., Parisi G., Rebbi C.— Nucl. Phys. Ser. B, 1981, v. 190 [FS3], p. 734.
Duncan A., Furman M.— Ibid., p. 767.
Hamber H.— Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 951.
146. Marinari E., Parisi G., Rebbi C.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 1795.
Weingarten D. H.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 109, p. 57.
Hamber H., Marinari E., Parisi G., Rebbi C.— Ibid., v. 108, p. 314.
147. Hasenfratz A., Kunszt Z., Hasenfratz P., Lang C. B.— Ibid., v. 110, p. 289; v. 117, p. 81.
148. Fucito F., Martinelli G., Omero C., Parisi G., Petronzio R., Rapuano F.— Nucl. Phys., Ser. B, 1982, v. 210 [FS6], p. 407.
Weingarten D.— Ibid., 1983, v. 215 [FS7], p. 1.
Hamber H., Parisi G.— Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 208.
Bernard C., Draper T., Olynyk K.— Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 227.
Lipps H., Martinelli G., Petronzio R., Rapuano F.— Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 126, p. 250.
Hamber H. W.— Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 2239.
149. Fukugita M., Kaneko T., Ukawa A.— Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 230 [FS10], p. 62, 1982.
150. Duncan A., Roskies R., Vaidya H.— Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 114, p. 439.

151. Hamber H. W., Marinari E., Parisi G., Rebbi C.—Ibid., 1983, v. 124, p. 99.
152. Duffy W., Guralnik G., Weingarten D.—Ibid., v. 125, p. 311.
153. Hasenfratz P., Montvay I.—Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, p. 309.
154. Fukugita M., Kaneko M., Ukawa A.—Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 2696.
Gutbord F., Hasenfratz P., Kunszt Z., Montvay I.—Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 128, p. 415.
Parisi G., Petronzio R., Rapuano F.—Ibid., p. 418.
Patel A., Gupta R.—Caltech preprint 68-973—v. 135, p. 133, 1983.
Stack J. D.—Santa Barbara preprint NSF—ITP-83-136.—1983.
155. Макеев Ю. М., Поликарпов М. И.—Письма ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 403, Phys. Lett. Ser. B, 1984.