

539.128.53:533.132

СВЕРХТЕКУЧИЕ СВОЙСТВА А-ФАЗЫ He^3

Г. Е. Воловик

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	73
1. Структура параметра порядка и сверхтекучая скорость	74
а) Структура параметра порядка (74). б) Ток и сверхтекучая скорость в модели бозе-газа молекул (76). в) Странный член в токе в модели ферми-газа (77). г) Сверхтекучая скорость и совместное нарушение вращательной и градиентной инвариантности (78). д) Ток и энергия А-фазы при $T \neq 0$ (79). е) О нормальной компоненте при $T = 0$ (81). ж) Орбитальный момент в А-фазе (81).	
2. Сверхтекучесть А-фазы	82
а) Почему сверхтекучая компонента сверхтечет? (82). б) Сверхтекучесть и критерий Ландау (83). в) А-фаза движется даже в основном состоянии (84). г) Вихрь с концом и буджум (85). д) Топологическая устойчивость макроскопического потока (85). е) Топологическая характеристика течений в А-фазе (86). ж) Как непрерывно уменьшить поток в А-фазе? (87). з) Устойчивость потока вблизи стенки и в магнитном поле (88). и) Локальная устойчивость сверхтока в А-фазе (88). к) Геликс — спиральная токовая структура (89).	
3. Уравнения гидродинамики А-фазы	90
а) Принцип построения (90). б) Диссипативная функция и условия равновесия (90). в) Уравнения гидродинамики (92). г) Голдстоуновские моды (93).	
4. Релаксация сверхтекучих потоков в А-фазе	94
а) Эффективное трение между сверхтекучей и нормальной компонентами (94). б) Нестационарный эффект Джозефсона в А-фазе (96). в) Инстантонный процесс проскальзывания фазы (96).	
5. Вращающаяся А-фаза	98
а) Свободная энергия жидкости во вращающемся сосуде (98). б) Топология непрерывных вихревых структур в А-фазе (99). в) Топология вихрей в А-фазе (100). г) Сингулярный вихрь и структурный фазовый переход (101). д) Вращение в магнитном поле (102). е) Эксперименты с вихрями в А- и В-фазе (103). ж) Вихреобразование в магнитном поле (104).	
6. Системы, подобные А-фазе	104
а) А ₁ -фаза He^3 (104). б) А-фаза в нейтронных звездах (105). в) Сверхпроводящая А-фаза и магнитный монополь (106).	
Заключение	107
Цитированная литература	108

ВВЕДЕНИЕ

Открытие А-фазы He^3 вызвало новый интерес к проблеме сверхтекучести. Благодаря специфическим особенностям структуры параметра порядка в этом веществе его сверхтекучие свойства коренным образом отличаются от соответствующих свойств всех других известных сверхтекучих жидкостей: He II, В-фазы He^3 , электронной жидкости в сверхпроводниках. Достаточно сказать, что скорость сверхтекучей компоненты А-фазы не является потенциальной, а критическая скорость Ландау равна нулю. Это противоречит традиционному мнению, что потенциальность течения сверхтекучей компоненты и невозможность испускания возбуждений являются необходимыми условиями для существования сверхтекучести.

Для А-фазы He^3 требуется заново дать ответы на многочисленные вопросы, связанные со сверхтекучестью. Среди них: 1) Есть ли трение при движе-

нии сверхтекучей компоненты? 2) Существуют ли устойчивые сверхпотoki наподобие персистирующего потока $He\ II$ в замкнутом канале или электрического тока в замкнутом сверхпроводнике? 3) Каковы механизмы релаксации сверхтекучего тока? 4) Существует ли аналог нестационарного эффекта Джозефсона, т. е. возникают ли осцилляции потока при стационарных внешних условиях? 5) Какова структура А-фазы во вращающемся сосуде? 6) Есть ли в А-фазе двухскоростная гидродинамика, характерная для $He\ II$, и все вытекающие из нее свойства (второй звук, четвертый звук, механокалорический эффект и т. д.); каково влияние орбитальных переменных и анизотропии на сверхтекучие свойства и многие другие.

Мы увидим, что ответы на большинство вопросов можно получить путем исследования структуры параметра порядка А-фазы, т. е. большинство связанных со сверхтекучестью явлений является следствием симметрии параметра порядка и слабо зависит от конкретного вещества — носителя этой структуры. Причем отличие одного вещества от другого с одной и той же симметрией чаще всего выражается в численных коэффициентах, не меняющих качественной картины. Так, например, все свойства сверхтекучего He^4 — реальной жидкости с сильным взаимодействием — можно получить из исследования модели слабо неидеального бозе-газа. Эта модель сохраняет главное — структуру параметра порядка. Аналогичным образом свойства А-фазы можно получать, исследуя модель слабо неидеального ферми-газа с потенциалом взаимодействия такого вида, который приводит к p -спариванию со структурой А-фазы (так называемое приближение слабой связи). Другая модель, которая также качественно описывает сверхтекучие свойства А-фазы, — это модель слабо неидеального бозе-газа двухатомных молекул, у которых волновая функция относительного движения атомов в молекуле имеет симметрию волновой функции куперовской пары А-фазы.

При изложении мы будем использовать обе модели: в большинстве случаев они дают одинаковые качественные результаты.

1. СТРУКТУРА ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА И СВЕРХТЕКУЧАЯ СКОРОСТЬ

а) Структура параметра порядка

В He^3 , как и в сверхпроводниках, имеет место феномен Купера: квазичастицы со спином $1/2$ образуют на ферми-поверхности связанные состояния — куперовские пары. Куперовские пары, обладая целым спином, являются бозонами, их накопление в бозе-конденсате приводит к явлению сверхтекучести. В отличие от электронных куперовских пар в сверхпроводниках, пары в He^3 обладают отличным от нуля спином $S = 1$ и моментом импульса относительного движения квазичастиц в паре $L = 1$ (так называемый орбитальный момент). Поэтому куперовские пары являются анизотропными как по своей форме, так и по магнитной структуре. В силу макроскопической когерентности куперовские пары ориентированы одинаково, поэтому сверхтекучие фазы He^3 в целом обладают когерентной магнитной структурой, являясь тем самым упорядоченными магнетиками (антиферромагнетиками), и пространственной анизотропией, являясь тем самым жидкими кристаллами. О магнитных и жидкокристаллических свойствах сверхтекучих фаз He^3 см. обзор В. П. Минеева¹.

В А-фазе имеются две оси анизотропии: магнитная ось d и орбитальная, жидкокристаллическая ось l . Смысл этих векторов легко проследить на модели бозе-газа из молекул, имеющих структуру куперовских пар в А-фазе. Единичные векторы d и l определяют оси квантования соответственно спинного и орбитального моментов импульса молекулы. Проекция спина молекулы S на ось d равна нулю ($S_d = 0$), т. е. спины молекулы равновероятно ориентированы в плоскости, перпендикулярной к d , так что средний спин молекулы и тем самым средний ядерный магнитный момент у А-фазы отсут-

ствует: А-фаза — одноосный антиферромагнетик. Проекция момента импульса L на ось l равна 1 ($L_l = 1$), т. е. орбитальные моменты пар направлены по l . Таким образом, А-фаза обладает внутренним орбитальным движением вокруг l . Как проявляется это движение, мы рассмотрим в п. ж) этой главы.

Волновая функция молекулы в состоянии с этими проекциями разбивается на произведение спиновой волновой функции $\chi_{\alpha\beta}$ и орбитальной волновой функции $f(R) Y_{11}(n)$:

$$\psi_{\alpha\beta}(R) = \chi_{\alpha\beta} f(R) Y_{11}(n), \quad (1)$$

где $R = r_1 - r_2$ — координата относительного движения атомов в молекуле, $n = R/R$. Спинор, соответствующий $S = 1$, $S_d = 0$, имеет вид (², § 57):

$$\chi_{\alpha\beta} = i d_i (\sigma_i \sigma_y)_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где σ_i — матрицы Паули. $Y_{11}(n)$ — шаровая функция, описывающая орбитальное движение с $L = 1$, $L_l = 1$, имеет вид (см. ², § 57):

$$Y_{11}(n) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (n_x + i n_y), \quad (3)$$

где θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора n в системе координат с полярной осью вдоль l (см. рис. 1). Единичные векторы Δ' и Δ'' на этом рисунке — направления осей координат в плоскости, перпендикулярной к l , так что

$$n_x + i n_y = (\Delta' + i \Delta'', n) \equiv (\psi n). \quad (4)$$

В силу макроскопической когерентности молекул в бозе-конденсате их волновые функции должны быть одинаковы. Это означает, что все молекулы имеют одинаковый комплексный вектор $\psi = \Delta' + i \Delta''$ и одинаковый действительный вектор d . Эти векторы являются параметрами вырождения А-фазы, поскольку энергия не зависит от их ориентации, если пренебречь слабым спин-орбитальным, так называемым дипольным, взаимодействием, стремящимся ориентировать d и $l = (i/2) [\psi \psi^*]$ параллельно друг другу (см. ¹). Итак, состояния А-фазы имеют пять степеней свободы: три угла Эйлера, задающие ориентацию тройки ортов Δ' , Δ'' , l , и два угла, задающие направление вектора d . В дальнейшем мы будем рассматривать лишь орбитальную часть параметра вырождения ψ , так как именно она в силу ее комплексного характера имеет отношение к сверхтекучим свойствам А-фазы.

Комплексный векторный параметр вырождения ψ в А-фазе аналогичен комплексному скалярному параметру вырождения $e^{i\Phi}$ в He II , где Φ — фаза параметра порядка — одинаковой для всех атомов бозе-конденсата волновой функции $\psi = |\psi| e^{i\Phi}$. Роль параметра порядка в He^3 , аналогичного комплексной функции ψ в He II и обращающегося в нуль выше температуры сверхтекучего перехода T_c , играет комплексная матрица A_{ik} из коэффициентов разложения волновой функции молекулы $\psi_{\alpha\beta}$ с $S = 1$, $L = 1$ по девяти собственным функциям, соответствующим состояниям с различными проекциями S и L :

$$\psi_{\alpha\beta}(R) = i (\sigma_i \sigma_y)_{\alpha\beta} f(R) A_{ik} n_k.$$

В А-фазе в равновесии параметр порядка принимает значения (см. (1)–(4))

$$A_{ik} = C(T) d_i \psi_k,$$

где константа C обращается в нуль при $T = T_c$.

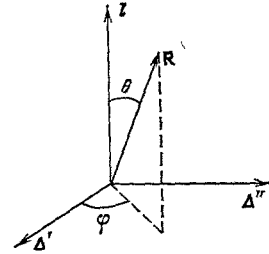


Рис. 1. Локальная система координат с осями Δ' , Δ'' , l , в которой волновая функция пары имеет вид (1).

б) Ток и сверхтекучая скорость в модели бозе-газа молекул

В He II в слабо неоднородном состоянии параметр вырождения Φ зависит от координаты атома \mathbf{r} , что приводит к когерентному сверхтекучему току атомов бозе-конденсата, равному при $T = 0$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im_4} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \rho \frac{\hbar}{m_4} \nabla \Phi = \rho \mathbf{v}^s,$$

где ρ — плотность атомов He⁴. В А-фазе в слабо неоднородном состоянии параметр вырождения ψ является функцией координаты центра тяжести молекулы $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. Это также может сопровождаться когерентным током куперовских пар. В модели бозе-газа из молекул ток при $T = 0$ получается умножением тока одной молекулы

$$\int d^3R \left[f^* Y_{11}^* \left(\frac{\hbar}{2im_3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\hbar^3}{2im_3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) f Y_{11} + \text{к. с.} \right] = \\ = \frac{\hbar}{4im_3} (\psi_l^* \nabla \psi_l - \psi_l \nabla \psi_l^*) = \frac{\hbar}{m_3} \Delta_l' \nabla \Delta_l'$$

на плотность молекул $\rho/2$, где ρ — плотность атомов He³, m_3 — масса He³:

$$\mathbf{j} = \rho \frac{\hbar}{2m_3} \Delta_l' \nabla \Delta_l'. \quad (5)$$

К этому выражению нужно добавить также ток, связанный с тем, что молекула обладает моментом импульса $\hbar \mathbf{l}$, равный (2, § 115)

$$\frac{1}{2} \text{rot} \left(\frac{\rho}{2m_3} \hbar \mathbf{l} \right).$$

Коэффициент пропорциональности между током и плотностью ρ в (5) естественно назвать сверхтекучей скоростью

$$\mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{2m_3} \Delta_l' \nabla \Delta_l', \quad (6)$$

так что полная плотность тока в бозе-жидкости из молекул со структурой А-фазы имеет при $T = 0$ вид

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}^s + \frac{1}{2} \text{rot} \left(\frac{\rho}{2m_3} \hbar \mathbf{l} \right). \quad (7)$$

В следующем разделе мы увидим, что в реальной А-фазе ток содержит еще один член с ротором \mathbf{l} , не меняющий сверхтекучей скорости.

Отметим некоторые свойства сверхтекучей скорости \mathbf{v}^s . Если поле вектора \mathbf{l} зафиксировано в пространстве, у параметра ψ остается лишь одна степень свободы — вращение вокруг оси \mathbf{l} на произвольный угол. Пусть \mathbf{l} однородно, тогда все значения параметра ψ можно получить, задав некоторое фиксированное значение ψ_0 и действуя на него матрицей поворота $\vec{\mathbf{R}}(-\mathbf{l}\Phi)$ на угол $-\Phi$ вокруг оси \mathbf{l} :

$$\psi = \vec{\mathbf{R}}(-\mathbf{l}\Phi) \psi_0 = e^{i\Phi} \psi_0. \quad (8)$$

Мы видим, что в случае однородного поля \mathbf{l} угол Φ играет роль фазы бозе-конденсата, причем, как следует из (6), сверхтекучая скорость

$$\mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{2m_3} \nabla \Phi \quad (9)$$

имеет тот же вид, что и для обычного бозе-конденсата в He II. Однако в общем случае, когда \mathbf{l} зависит от координат, сверхтекучая скорость уже не представима в виде градиента фазы. Действительно, взяв операцию ротора от обеих частей (6), мы получаем, что $\text{rot } \mathbf{v}^s$ не равен нулю, но не связан с гра-

диентами вектора \mathbf{l} соотношением

$$\text{rot } \mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{4m_3} e_{ikh} l_i [\nabla l_h, \nabla l_l], \quad (10)$$

носящим название соотношения Мермина — Хо³. Итак, сверхтекучее течение потенциально только для определенного класса полей вектора \mathbf{l} , для которых правая часть (10) обращается в нуль. В класс этих полей входит, например, плоское распределение \mathbf{l} .

в) Странный член в токе в модели ферми-газа

Вычисление тока в модели слабой связи (см. ⁴) приводит к дополнительному по сравнению с (7) члену в токе. Появление этого нового члена, противоречащего простой модели бозе-конденсата молекул, приводящей к (7), казалось настолько странным, что многие сомневались в его существовании, пока не стало ясно, что он является следствием неустранимой особенности в плотности состояний в двух точках на поверхности Ферми, где щель в спектре возбуждений обращается в нуль. Мы не будем приводить здесь вычислений⁴, но покажем, как получить конечный результат, исходя из простых соображений^{5,6}.

В отличие от бозе-жидкости, молекулы которой получаются спариванием атомов в реальном пространстве, в ферми-жидкости атомы связываются в куперовские пары на поверхности Ферми в импульсном пространстве, причем спариваются атомы с противоположными импульсами \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$, так что суммарный импульс пары в равновесии равен нулю. Угловая часть волновой функции пары с данным \mathbf{k} получается заменой \mathbf{R} на \mathbf{k} в (3):

$$\psi_{\mathbf{k}} = \Delta_0 (\Delta' + i\Delta'', \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}/k. \quad (11)$$

Волновая функция $\psi_{\mathbf{k}}$ нормирована так, чтобы ее модуль

$$|\psi_{\mathbf{k}}| = \Delta_0 |[\mathbf{n}, \mathbf{l}]| \quad (12)$$

совпадал со щелью в спектре возбуждений $E_{\mathbf{k}}$

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m_3} - \varepsilon_F\right)^2 + |\psi_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (13)$$

В отличие от обычного s -спаривания в сверхпроводниках, щель в спектре зависит от \mathbf{k} : она обращается в нуль при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{l}$ и принимает максимальное значение Δ_0 при $\mathbf{k} \perp \mathbf{l}$. Фаза волновой функции пары

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \arctg \frac{\Delta''_{\mathbf{k}}}{\Delta'_{\mathbf{k}}} \quad (14)$$

также зависит от \mathbf{k} и имеет особенность при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{l}$, где она не определена.

Плотность тока определяется формулой $\sum_{\mathbf{k}} k n(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, где $n(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ — функция распределения ферми-частиц. Когерентное изменение функции распределения при $T = 0$ из-за слабой неоднородности можно найти, исходя из того, что фаза волновой функции является в классическом пределе механическим действием $S = (\hbar/2) \Phi$ (см. ², § 17). Поэтому у функции распределения импульсы сдвинуты на величину ∇S и соответственно координаты — на величину $-\frac{\partial S}{\partial \mathbf{k}}$. В результате

$$\delta n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (1/2) \left(\nabla n \frac{\partial \Phi_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{k}} \nabla \Phi_{\mathbf{k}} \right), \quad (15)$$

и плотность тока после интегрирования по частям имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \delta n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \nabla \Phi_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \nabla_i \left(\sum_{\mathbf{k}} k n \frac{\partial \Phi_{\mathbf{k}}}{\partial k_i} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k n_{\mathbf{k}} \left(\nabla \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \nabla \right) \Phi_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя Φ_k из (14), получаем для первого и второго членов в (17) соответственно ρv^s и $(1/2) \operatorname{rot} (\rho \hbar l / 2m_3)$, где $\rho = \sum_k n(k, r)$, а v^s дается формулой (6). Таким образом, отличие тока в ферми-жидкости от тока в бозе-жидкости (7) заключено в 3-м члене (16), который равнялся бы нулю, если бы Φ_k не имело особенности при $k \parallel l$, т. е. там, где щель в спектре возбуждений равна нулю. Благодаря этой особенности смешанные производные от Φ_k не равны, а отличаются на δ -функцию от k_\perp , где $k_\perp = k - l(kl)$:

$$\left(\nabla \frac{\partial}{\partial k} - \frac{\partial}{\partial k} \nabla \right) \Phi_k = 2\pi (l \operatorname{rot} l) (kl) \delta(k_\perp). \quad (17)$$

В результате имеем следующее выражение для тока в модели слабой связи при $T = 0$:

$$j = \rho v^s + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \left(\frac{\rho}{2m_3} \hbar l \right) - \frac{\hbar}{2m_3} C_0 l (l \operatorname{rot} l), \quad (18)$$

где

$$C_0 = \frac{m_3}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_\parallel k_\parallel^2 n(0, 0, k_\parallel), \quad k_\parallel = (kl). \quad (19)$$

В случае ступенчатой функции распределения $n = 2\theta[\epsilon_F - (k^2/2m_3)]$, как это имеет место в ферми-газе,

$$C_0 = m_3 k_F^3 / 3\pi^2,$$

что совпадает с плотностью ферми-газа ρ . Это совпадение, разумеется, приближенное, поскольку спаривание меняет систему, и C_0 отличается от ρ на величину порядка $\rho (\Delta_0/\epsilon_F)^2$. В реальной жидкости He^3 -А C_0 может существенно отличаться от ρ .

Отметим здесь, не останавливаясь подробно, что особенность в волновой функции пары, приводящая к необычному члену в токе с C_0 , является устойчивой по отношению к малым изменениям параметра порядка ψ , хотя система может при этом выйти из состояния А-фазы. Это связано с тем, что А-фаза относится к семейству состояний, волновая функция которых обладает вихревой особенностью в импульсном пространстве: фаза Φ_k при обходе оси l в импульсном пространстве меняется на 2π . Устойчивый к малым шевелениям вихрь приводит к особенности в плотности состояний в точках пересечения вихря с ферми-поверхностью $k = \pm k_F l$, которая и дает странный член в токе. В этих точках щель в спектре возбуждений обращается в нуль.

Итак, модель неидеального ферми-газа изменяет член, связанный с $\operatorname{rot} l$, т. е. ту часть тока, которая происходит от момента импульса пары, но не меняет определение сверхтекучей скорости v^s . Одинаковость выражения для v^s в обеих моделях наводит на мысль, что определение v^s и, как следствие, ее непотенциальность является общим свойством структуры параметра порядка, т. е. связана с характерным для данной структуры нарушением симметрии. Рассмотрим это подробнее.

г) Сверхтекучая скорость и совместное нарушение вращательной и градиентной инвариантности

В А-фазе, как и в He^4 , нарушена инвариантность состояния относительно градиентного преобразования, а именно при этом преобразовании состояние с параметром порядка ψ переходит в другое состояние с параметром порядка $e^{i\alpha}\psi \neq \psi$, где α — параметр преобразования. Одновременно нарушена инвариантность состояния относительно трехмерного вращения в координатном пространстве, а именно любой трехмерный поворот, задаваемый ортогональной матрицей \vec{R} , переводит состояние с ψ в состояние с другим параметром

порядка $\overleftrightarrow{R} \psi \neq \psi$. В этом отношении А-фаза аналогична жидкому кристаллу, состояния которого также меняются при пространственных поворотах. Однако своеобразие А-фазы заключается в том, что сохраняется комбинированная инвариантность. А именно, состояние не меняется при одновременном выполнении градиентного преобразования $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ и поворота на угол α вокруг оси I . Действительно, согласно (8), при этом комбинированном преобразовании ψ не меняется:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \overleftrightarrow{R}(I\alpha) \psi = \psi. \quad (20)$$

Именно благодаря этому обстоятельству сверхтекучая скорость v^s должна быть связана с вращательными степенями свободы. Действительно, запишем параметр порядка ψ в следующем виде:

$$\psi = (\Delta' + i\Delta'') e^{i\Phi}. \quad (21)$$

Мы ввели вместо трех переменных (три угла, задающих ориентацию тройки ортов Δ' , Δ'' , I) четыре, искусственно выделяя фазовую переменную Φ . При этом будем считать, что Φ меняется только при градиентном преобразовании, а орты Δ' , Δ'' , I меняются лишь при поворотах. Поскольку при комбинированном преобразовании

$$\Phi \rightarrow \Phi + \alpha, \quad \Delta' + i\Delta'' \rightarrow \overleftrightarrow{R}(I\alpha) (\Delta' + i\Delta'') \quad (22)$$

состояние системы не меняется, все физические величины должны зависеть только от определенных комбинаций переменных Δ' , Δ'' , Φ , а именно таких, которые не меняются при преобразовании (22). Это $I = [\Delta', \Delta'']$ и

$$v^s = \frac{\hbar}{2m_3} (\nabla\Phi + \Delta'_i \nabla\Delta''_i). \quad (23)$$

Последняя представляет собой инвариантное относительно (22) определение сверхтекучей скорости, отличающееся от случая He II, где $v^s = (\hbar/m_4) \nabla\Phi$, тем, что в ней обязательно имеется вклад от орбитальных переменных. Определение (13) не отличается от определения (6), поскольку в (6) фазовая переменная Φ включена в Δ' и Δ'' . Нужно только помнить, что Δ' и Δ'' , входящие в (6) и (23), отличаются своими трансформационными свойствами. А именно, в формуле (23) они инвариантны относительно градиентного преобразования, являясь чисто жидкокристаллическими переменными; в формуле (6) они преобразуются при градиентном преобразовании по закону $\Delta' + i\Delta'' \rightarrow e^{i\alpha} (\Delta' + i\Delta'')$.

Своеобразное нарушение симметрии в А-фазе, при котором сохраняется комбинированная градиентно-вращательная симметрия, приводит к уникальной связи между сверхтекучими и жидкокристаллическими свойствами А-фазы. Следствием этого является непотенциальность сверхтекучего течения и другие явления, рассмотренные в обзоре.

д) Ток и энергия А-фазы при $T \neq 0$

В модели ферми-жидкости нормальное движение связано с ферми-возбуждениями системы, возникающими на фоне основного сверхтекучего состояния. Эти возбуждения дают при $T \neq 0$ вклад в ток, дополнительный к фоновому когерентному току (18):

$$P = \sum_k k v_k, \quad (24)$$

где v_k — функция распределения возбуждений. В локальном равновесии v_k характеризуется локальной температурой и локальной скоростью v^n нормального движения:

$$v_k = \left(\exp \frac{E_k - k v^n}{T} - 1 \right)^{-1}, \quad (25)$$

где E_k — локальная энергия возбуждений. В слабо неоднородной жидкости E_k отличается от (13) тем, что зависит также и от фазы Φ_k волновой функции пары. Эту зависимость легко найти обобщением известной формулы для энергии возбуждения при наличии сверхтекучего потока: $E_k \rightarrow E_k + k v^s$ в He II (см. ⁸), где $v^s = (\hbar/m_k) \nabla \Phi$, или в ферми-жидкости с s -спариванием⁹, где $v^s = \frac{\hbar}{2m} \nabla \Phi$. Нужно только учесть, что фаза волновой функции куперовской пары зависит от k ; в результате имеем ⁵:

$$E_k = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m_s} - \varepsilon_F\right)^2 + |\psi_k|^2} + \frac{1}{2m_s} k \nabla \Phi_k. \quad (26)$$

Выражая $\nabla \Phi_k$ в (26) через v^s и $\text{rot } l$ посредством (14) и подставляя (26) и (25) в (24), получаем следующую формулу для тока в линейном по v^s и $\text{rot } l$ приближении (пренебрегая членами $\sim \nabla \rho$):

$$j = \rho^s v^s + \rho^n v^n + \frac{\hbar}{2m_s} C \text{rot } l \quad (27)$$

с тензорными коэффициентами

$$\rho_{ij}^s = \rho^s \delta_{ij} - \rho_0 l_i l_j, \quad \rho_{ij}^n = (\rho - \rho^s) \delta_{ij} + \rho_0 l_i l_j, \quad C_{ij} = C \delta_{ij} - C_0 l_i l_j. \quad (28)$$

При этом коэффициенты ρ^s , ρ_0 , C , C_0 имеют следующую температурную зависимость:

$$C = \frac{1}{2} (\rho^s - \rho_0) = \frac{1}{2} C_0, \quad \rho_{ij}^s = 3\rho \int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j (1 - Y(n, T)), \quad (29)$$

где $Y(n, T)$ — так называемая функция Йосиды

$$Y(n, T) = \frac{1}{2m_s T} \int_0^\infty dk k \text{sech}^2 \frac{E_k}{2T}, \quad (30)$$

равная нулю при $T = 0$ и 1 при $T = T_c$.

В реальной ферми-жидкости зависимость коэффициентов ρ^s , ρ_0 , C , C_0 от температуры имеет более сложный вид ^{4,10}, но структура выражения (27) не меняется.

Выпишем здесь общий вид энергии слабо неоднородного состояния. Как и ток, она зависит лишь от комбинаций, инвариантных относительно преобразования (22), т. е. от l и v^s :

$$F = \int dV \left\{ \frac{1}{2} \rho^s (v^s - v^n)^2 - \frac{1}{2} \rho_0 (l, v^s - v^n)^2 + \frac{\hbar}{2m_s} C (v^s - v^n, \text{rot } l) - \right. \\ \left. - \frac{\hbar}{2m_s} C_0 (l \text{rot } l) (v^s - v^n, l) + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m_s} \right)^2 K_1 (\nabla l)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m_s} \right)^2 K_2 (l \text{rot } l)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m_s} \right)^2 K_3 [l, \text{rot } l]^2 + j v^n - \frac{1}{2} \rho (v^n)^2 - L_0 l \frac{1}{2} \text{rot } v^n \right\}. \quad (31)$$

Зависимость от v^n получена галилеевским преобразованием из системы координат, где $v^n = 0$. Член $\text{rot } v^n$ происходит от внутреннего момента импульса куперовских пар $L_0 l$. Вид выражения (31) для энергии характерен для данного нарушения симметрии и не зависит от вещества — носителя структуры. От вещества зависят лишь соотношения между коэффициентами ρ^s , ρ_0 , C , C_0 , K_2 , K_r , K_3 , L_0 . Так, например, в случае модели бозе-газа $\rho_0 = C_0 = 0$,

$$L_0 = \frac{\hbar}{2} \rho.$$

е) О нормальной компоненте при $T = 0$

Отметим здесь одно любопытное следствие обращения в нуль щели в спектре возбуждений. Оказывается, учет нелинейных по v^s и $\text{rot } l$ членов в токе показывает, что плотность нормальной компоненты $\rho_{12}^n \neq 0$ даже при $T = 0$ ¹¹. Покажем это. При $T = 0$ функция распределения квазичастиц (27) вырождается в ступенчатую функцию

$$v_k = \theta(-E_k + kv^n). \quad (32)$$

При обычном s -спаривании (в сверхпроводниках) щель в спектре возбуждений при $T = 0$ нигде не обращается в нуль. Поэтому, если $v^s - v^n$ достаточно мало, состояния с отрицательной эффективной энергией $E - kv^n < 0$ отсутствуют и возбуждений при $T = 0$ нет. В А-фазе щель в спектре возбуждений обращается в нуль при $k_{\perp} = 0$, поэтому при отличных от нуля $v^s - v^n$ и $\text{rot } l$ имеются состояния с отрицательной эффективной энергией $E_k - kv^n < 0$. Хотя плотность этих состояний мала в меру малости $v^s - v^n$ и $\text{rot } l$, они дают существенный нелинейный вклад в ток возбуждений (24) при $T = 0$. Действительно, подставляя в (24) формулы (32) и (26), получаем:

$$\rho_{12}^n(T=0) \sim \rho \frac{k_F}{m_3 \Delta_0} l_i l_j [l, \text{rot } l] + \rho \frac{k_F^2}{\Delta_0^2} l_i l_j (v^s - v^n, l)^2; \quad (33)$$

здесь k_F — импульс на ферми-поверхности. Обратим внимание на неаналитическую зависимость ρ^n от $\text{rot } l$. Коэффициенты в выражении (33) в более строгой теории вычислены в работах^{12, 13}.

ж) Орбитальный момент в А-фазе

Как следует из п. а), каждая куперовская пара обладает внутренним орбитальным моментом импульса, равным $\hbar l$. Поэтому естественно ожидать, что и вся жидкость в однородном состоянии обладает орбитальным моментом. Величина этого момента, однако, существенно зависит от модели. В бозе-газе из изолированных молекул вращательное движение молекул легко отделяется от поступательного движения. Поэтому в этой модели можно ввести понятие плотности внутреннего орбитального момента, равной при $T = 0$ произведению плотности молекул $\rho/2$ на их внутренний момент $\hbar l$: $L_0 = (\hbar/2) \rho l$.

В ферми-жидкости эти молекулы сильно перекрываются, так как размер куперовской пары (порядка длины когерентности $\xi \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ см, см. обзор¹) существенно превышает межатомное расстояние a . В этой ситуации трудно отделить поступательное движение куперовских пар от их вращательного движения. Поэтому определение плотности внутреннего момента импульса становится затруднительным, хотя бы потому, что такой локальной характеристики жидкости может и не существовать. Действительно, выделяя часть объема, в котором мы хотим вычислить внутренний момент, мы неизбежно должны учитывать и те куперовские пары, которые пересекают границу объема, а их вклад, как вклад поверхностных токов в орбитальный момент, сравним с суммарным орбитальным моментом внутренних пар. Таким образом, орбитальный момент в А-фазе не имеет локального характера. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим изменение момента импульса при локальном изменении плотности ρ и вектора l на фоне однородного состояния, воспользовавшись интегральной связью между моментом импульса и током $\int dV L = \int dV [rj]$. Выражая вариацию тока через $\delta \rho$ и δl с помощью (18), находим вариацию орбитального момента:

$$\delta L = \frac{\hbar}{2} l \delta \rho + \frac{\hbar}{2} (\rho - C_0) \delta l. \quad (34)$$

Уравнение (34) показывает, что плотность орбитального момента не является полным дифференциалом в ферми-жидкости, где $C_0 \neq 0$, что свидетельствует о нелокальном характере момента. Тем не менее величина $L_0 = (\hbar/2)(\rho - C_0)$, получающаяся при вариации по $\delta \mathbf{l}$, имеет определенный физический смысл. Это та часть орбитального момента, которая связана с вращательным, а не поступательным движением куперовских пар. Для бозе-газа это очевидно, так как в нем $L_0 = (\hbar/2)\rho$. В А-фазе на это указывают следующие обстоятельства. Во-первых, именно эта величина входит в энергию (31), образуя вместе с локальной угловой скоростью вращения жидкости $\omega = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}^n$ характерный для жидкости с внутренним моментом член $-L_0 \mathbf{l} \omega$. Во-вторых, L_0 входит в динамическое уравнение для вектора \mathbf{l} , которое при низких температурах аналогично уравнению для магнитного момента в магнетиках с величиной момента, равной L_0 (см. ¹¹).

Величина L_0 очень мала, $L_0 \sim \hbar \rho (\Delta_0/\epsilon_F)^2 \ln(\epsilon_F/\Delta_0)$, именно в результате сильного перекрытия куперовских пар, так как $\Delta_0/\epsilon_F \sim a/\xi \ll 1$. Итак, мы можем утверждать, что из-за сильного перекрытия куперовских пар их орбитальное движение в основном трансформируется в поступательное движение на поверхности сосуда и лишь малая часть момента $\sim \hbar \rho (a/\xi)^2$ соответствует локальному вращательному движению пар. Легко понять происхождение и первого члена в (34). Даже при сильном перекрытии пар их избыток δN в данном элементе объема приводит к появлению орбитального момента $\hbar \mathbf{l} \delta N$ в этом объеме. Этот момент связан с токами, текущими по поверхности объема. По этой же причине полный момент импульса А-фазы с однородным распределением \mathbf{l} в сосуде, содержащем N атомов He^3 , равен $(\hbar/2) N \mathbf{l}$. Подробнее об орбитальном моменте см. ¹¹ и указанные там ссылки.

2. СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ А-ФАЗЫ

а) Почему сверхтекучая компонента сверхтечет?

Ток А-фазы, как видно из (27), состоит из трех частей. Первая часть, характеризующая скоростью \mathbf{v}^n , описывает нормальное движение. Плотность

нормальной компоненты ρ^n является тензором, в отличие от HeII и $\text{He}^3\text{-В}$, где она скаляр. Таким образом, в А-фазе четко проявляется условность разделения жидкости на две компоненты. А именно, нельзя представить жидкость состоящей из двух сортов атомов — сверхтекучих и несверхтекучих, в этом случае обе плотности были бы скалярами. Поэтому лучше говорить, что в жидкости имеется несколько типов движений, одно из них происходит с нормальной скоростью \mathbf{v}^n . В это движение при малых T вовлечены фермиевские возбуждения системы, а выше T_c — вся жидкость. Ясно, что это движение испытывает трение, как внутреннее, так и со стороны стенок. Испытывают ли подобное трение остальные типы движений с \mathbf{v}^s и $\text{rot } \mathbf{l}$? Непотенциальность скорости \mathbf{v}^s , а также обращение в нуль критической скорости Ландау $v_L = \min \frac{E_k}{\hbar k}$, при которой начинают рождаться воз-

буждения, ставят под сомнение сверхтекучесть этих движений. Чтобы ответить на вопрос, сверхтекуча ли сверхтекучая компонента в А-фазе, обратимся сначала к HeII и проанализируем причину сверхтекучести его сверхтекучей компоненты. Рассмотрим для этого течение HeII по замкнутому каналу. Скорость нормальной компоненты HeII непрерывно уменьшается до нуля за счет трения со стороны стенок и вязкости, благодаря которой торможение проникает в глубь жидкости. Сверхтекучая же скорость жидкости не может непрерывно уменьшаться до нуля, для торможения сверхтекучего потока требуются определенного рода нарушения когерентного сверхтекучего состояния. Действительно, если волновая функция бозе-конденсата $\psi = \sqrt{\rho_s} e^{i\Phi}$ всюду непрерывна, а ее фаза Φ всюду определена, т. е. ρ_s нигде не обращается

в нуль, то циркуляция сверхтекучей скорости $\mathbf{v}^s = (\hbar/m_4) \nabla \Phi$ по любому контуру, обтекающему канал, принимает квантованное значение

$$\oint \mathbf{v}^s d\mathbf{r} = \frac{2\pi\hbar}{m_4} N; \quad (35)$$

здесь N — целое число, показывающее, что Φ меняется на $2\pi N$, а ψ при этом возвращается к своему исходному значению. Дискретность N препятствует непрерывному уменьшению \mathbf{v}^s . Создание разрывов в сверхтекучей жидкости обычно требует больших энергетических затрат; если этими процессами пренебречь, то течение с минимальной энергией в классе течений с данным $N \neq 0$ является устойчивым. Это течение бездиссипативно, так как не требует внешнего источника энергии. Отсутствие диссипации в целом означает отсутствие диссипации и локально в каждом элементе объема жидкости. Т. е., несмотря на то, что в каждом элементе объема имеется разность скоростей $\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^n$, это не приводит к диссипативному уменьшению этой разности. А это означает, что сверхтекучая компонента может двигаться без сопротивления в сосуде любой геометрии, в том числе и в незамкнутом канале. Это и есть основное свойство сверхтекучести. Это свойство, разумеется, не означает, что механизм релаксации сверхтекучей скорости отсутствует вообще. Сверхтекучее движение может оказаться неустойчивым по отношению к образованию различных неоднородных в пространстве и времени структур с разрывами фазы параметра порядка, приводя к нестационарному эффекту Джозефсона, что мы в дальнейшем и будем обсуждать. Свойство сверхтекучести означает отсутствие однородной релаксации сверхтекучей скорости \mathbf{v}^s к \mathbf{v}^n .

б) Сверхтекучесть и критерий Ландау

Посмотрим, как влияет на эти рассуждения возможность рождения возбуждений (фононы, ротонны или фермиевские квазичастицы). Рождение возбуждений происходит при скоростях сверхтекучего движения (точнее, $\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^n$), превышающих критическую скорость Ландау $v_L = \min \left(\frac{E_k}{k} \right)$. Образующиеся квазичастицы не меняют непрерывности фазы волновой функции конденсата $\psi = \sqrt{\rho_s} e^{i\Phi}$, поэтому скорость \mathbf{v}^s в замкнутом канале не меняется. Диссипация сверхтекучего потока $\rho^s \mathbf{v}^s$ может происходить лишь путем уменьшения ρ^s , что и происходит, поскольку нормальная плотность $\rho^n = \rho - \rho^s$ увеличивается из-за рождения дополнительных квазичастиц. Уменьшается ли при этом сверхтекучий поток до нуля или нет, зависит от конкретных условий. В бозе-жидкости возможны оба варианта, например, рождение возбуждений в большом количестве может перестроить спектр возбуждений, в результате чего дальнейший рост плотности нормальной компоненты прекратится и система приобретет равновесное значение ρ^s , зависящее от $v^s - v_L$. В ферми-жидкости, как только ферми-возбуждения заполняют состояния с отрицательной эффективной энергией $\bar{E}_k^{qi} + (k, \mathbf{v}^s - \mathbf{v}^n) < 0$, дальнейший рост числа возбуждений прекращается и жидкость также выходит к равновесному состоянию с потоком. Именно так обстоит дело с А-фазой, где $v_L = 0$ благодаря отсутствию щели в спектре возбуждений. Возбуждения образуются при сколь угодно малой скорости \mathbf{v}^s , однако число состояний с отрицательной энергией пропорционально $(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^n)^2$. Поэтому ферми-возбуждения быстро заполняют отрицательные уровни энергии, диссипация прекращается и сверхтекучий ток циркулирует со слегка измененной плотностью ρ^s . Так, при $T = 0$ (см. (33))

$$\rho - \rho^s \sim \frac{k_F^3}{\Delta_0^2} (v^s - v^n)^2. \quad (36)$$

Итак, превышение скорости Ландау не является, вообще говоря, критическим для существования бездиссипативного потока сверхтекучей компоненты.

в) А-фаза движется даже в основном состоянии

Перейдем теперь к условию потенциальности и покажем, что оно также не является необходимым для сверхтекучести. В случае He II для установления свойства сверхтекучести мы воспользовались тем обстоятельством, что в жидкости в принципе возможны токовые бездиссипативные состояния. Такие состояния существуют и в А-фазе, хотя ее сверхтекучая скорость и непотенциальна. Покажем это.

Рассмотрим основное состояние жидкости в сферическом сосуде. Из-за граничных условий (\mathbf{l} направлен по нормали к границе сосуда) состояние

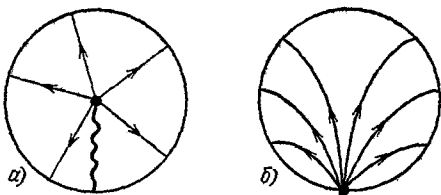


Рис. 2. Два состояния поля \mathbf{l} в сферическом сосуде:

На рис. а) точечная особенность в поле \mathbf{l} находится в центре сосуда, из нее исходит особенность в поле \mathbf{v}^s — вихрь (волистая линия). На рис. б) точечная особенность на поверхности сосуда — буждун.

жидкости не может быть однородным. Два из возможных распределений поля \mathbf{l} показаны на рис. 2. В первом случае особая точка в поле \mathbf{l} находится в центре, а во втором — на поверхности сосуда. Вообще легко видеть, что без особенностей невозможно построить конфигурацию, удовлетворяющую граничным условиям. Заметим, что в обеих конфигурациях скорость \mathbf{v}^s отлична от нуля. Это видно из соотношения Мермина — Хо (10). Если нас интересуют аксиально-симметричные распределения полей \mathbf{l} и \mathbf{v}^s , то из (10) можно непосредственно выразить \mathbf{v}^s через \mathbf{l} ³:

$$\mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{2m_s} \hat{\Phi} \frac{1 - (\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{z}})}{\rho}, \quad (37)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\Phi}$ — орты цилиндрической системы координат. Итак, в сферическом сосуде с He^3 -А всегда, даже в основном состоянии, есть отличное от нуля течение со скоростью \mathbf{v}^s ¹⁴. Следовательно, однородная релаксация $\mathbf{v}^s \rightarrow \mathbf{v}^n$ отсутствует. Сверхтекучая компонента А-фазы, таким образом, является сверхтекучей не только по названию. Аналогичным образом можно показать, что течение с $\text{rot } \mathbf{l}$ также не испытывает сопротивления.

Итак, потенциальность течения не является необходимым условием сверхтекучести. Не является это условие и достаточным. Действительно, рассмотрим двухкомпонентную жидкость, например, раствор двух нормальных жидкостей. Несмотря на то, что течение одной из компонент относительно другой может быть потенциальным, например, постоянным в пространстве, локальное трение между ними существует и разность скоростей однородно релаксирует. Для сверхтекучести нужно существование параметра порядка, через пространственные производные которого выражается сверхтекучая скорость, т. е. требуется нарушение градиентной инвариантности. А-фаза сверхтекуча благодаря нарушению градиентной инвариантности. Тот факт, что это нарушение нетривиально зацепляется с нарушением вращательной симметрии, приводит не к устранению сверхтекучести, а к необычным сверхтекучим свойствам.

г) Вихрь с концом и буджум

Выясним, какое же из состояний на рис. 2 является основным. Из формулы (37) видно, что у конфигурации, изображенной на рис. 2, а, сверхтекучая скорость имеет особенность на радиусе, исходящем вниз из особой точки. Вблизи этого радиуса скорость v^s имеет вид

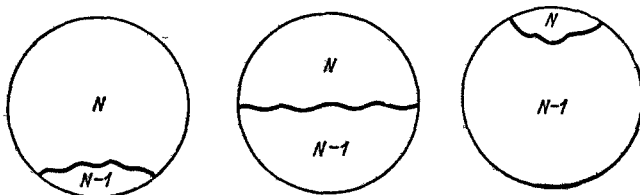
$$v^s = \frac{\hbar}{m_3 \rho} \hat{\varphi}, \quad (38)$$

совпадающий с полем скоростей вблизи квантованного вихря в HeII. Больше нигде особенностей в жидкости нет. Следовательно, мы наблюдаем удивительный феномен: квантованный вихрь может оканчиваться в объеме жидкости^{15, 16} — вещь абсолютно невозможная ни в HeII, ни в He³-В, ни в сверхпроводнике. Этот факт — простое следствие топологических свойств параметра порядка в А-фазе: особая точка векторного поля $\hat{\mathbf{l}}$, имеющая отличный от нуля топологический заряд, является источником вихревой линии¹⁵. Из-за энергии вихря состояния системы с особой точкой внутри объема невыгодны, и основное состояние осуществляется только в том случае, когда особая точка уходит на поверхность (см. рис. 2, б). Вихрь при этом стягивается в точку, так что особая точка на поверхности сосуда имеет конфигурацию точечного вихря. Циркуляция v^s вдоль контура, проходящего по поверхности и окружающего особую точку, равна $2\pi\hbar/m_3$. Этот точечный вихрь был впервые рассмотрен Мермином¹⁷ и назван им «буджум» («boojum») — таинственный объект из популярной книги Л. Кэрролла «Охота на Снарка». О том, как этот термин вошел в физическую литературу, с непередаваемым юмором рассказано в¹⁸. Топологическую классификацию поверхностных дефектов в упорядоченных средах, подобных буджуму в А-фазе, см. в¹⁹. Буджумы играют важную, хотя и не определяющую, роль в процессе релаксации сверхтекучего потока (см. п. 3)).

д) Топологическая устойчивость макроскопического потока

В разделе 1 мы выяснили, что однородная релаксация сверхтекучей скорости v^s невозможна, сверхтекучее течение может релаксировать лишь за счет неоднородных в пространстве и времени процессов. В HeII распад

Рис. 3. Прохождение вихря (волнистая линия) через поперечное сечение канала в последовательные моменты времени в процессе уменьшения сверхтекучего потока в He II на 1 квант циркуляции ($N \rightarrow N - 1$).



сверхтекучего тока, как известно, осуществляется путем рождения или движения уже имеющихся в канале дефектов структуры — квантованных вихревых линий, на оси которых нарушается состояние сверхтекучести. Фаза Φ , изменяющаяся при обходе вокруг оси вихря на $2\pi N$, не определена на самой оси. Из непрерывности параметра порядка $\psi = \sqrt{\rho_s} e^{i\Phi}$ следует, что на оси вихря обращается в нуль величина ρ^s , характеризующая сверхтекучее состояние.

Процесс уменьшения циркуляции сверхтекучей скорости в HeII в замкнутом канале на один квант путем рождения и движения вихря с одним квантом циркуляции показан на рис. 3. Обычно этот процесс требует большой

затраты энергии, необходимой для увеличения размера вихря при заметании им сечения канала. Поэтому состояние с $N \neq 0$ чрезвычайно устойчиво, это следствие топологии системы. Ток при этом может быть макроскопически велик, если топологический заряд состояния N велик.

е) Топологическая характеристика течений в А-фазе

Выясним, есть ли в А-фазе целочисленный инвариант движения, обеспечивающий стабильность макроскопических потоков. На первый взгляд кажется, что для этого есть те же основания, что в HeII. Так же, как в HeII, можно ввести фазу конденсата Φ , которая при обходе канала должна меняться на $2\pi N$, что, казалось бы, и приводит к устойчивости. Ошибочность аргументов такого рода видна уже из формулы (21). Не меняя параметра вырождения ψ , можно комбинированным преобразованием (22) переписать зависимость $\Phi(r)$ в зависимости от r ортов Δ' и Δ'' , т. е. набег фазы Φ на $2\pi N$

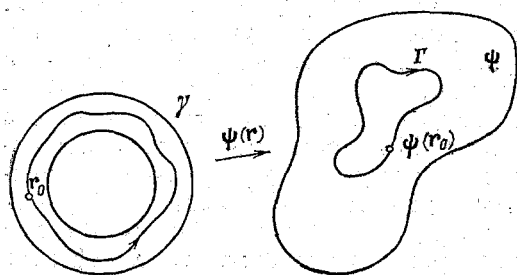


Рис. 4. Контур γ , обходящий канал, отображается полем параметра вырождения $\psi(r)$ в замкнутый контур Γ в пространстве R .

можно, не меняя состояния, перевести в набег на $2\pi N$ угла поворота векторов Δ' и Δ'' вокруг I . Здесь мы уже сталкиваемся с трехмерными поворотами, и нет уверенности, что набег угла поворота вокруг I не может быть каким-либо образом раскручен путем вращения ортов вокруг других направлений. Итак, задача сводится к тому, чтобы выяснить, есть ли различные непереводимые друг в друга непрерывно конфигурации поля ортов и как они связаны с величиной сверхтекучего потока. Такие вопросы решаются с помощью топологических методов (см. ²⁰ и обзоры ²¹⁻²³).

Рецепт решения очень простой. Проследим, как меняется параметр порядка при обходе вдоль канала по произвольному замкнутому контуру γ , отмечая путь Γ , который проходят значения параметра вырождения в области его изменения R . Путь Γ замкнут, потому что при обходе мы возвращаемся к значению параметра вырождения $\psi(r_0)$ в той точке канала r_0 , от которой мы стартовали (рис. 4). В пространстве R могут быть разные классы замкнутых контуров, которые невозможно непрерывно продеформировать друг в друга. Интуитивно ясно, и это подтверждается и при строгом рассмотрении, что число различных непереводимых друг в друга конфигураций поля параметра вырождения в канале определяется числом различных непереводимых друг в друга контуров в пространстве R .

Проверим это на примере HeII. Пространство параметра вырождения R (область изменения фазы Φ) представляет собой окружность. На окружности легко построить различные типы непереводимых друг в друга замкнутых контуров; это контуры $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$, которые 1, 2, ..., N раз оббегают в положительном направлении окружности (N может быть и отрицательным). Этим контурам и соответствуют конфигурации с одним, двумя и т. д. квантами циркуляции сверхтекучей скорости.

В А-фазе для характеристики классов замкнутых контуров в пространстве ортов R нам нужно удобным образом представить себе это пространство. Все возможные ориентации тройки ортов Δ', Δ'', I удобно задавать с по-

мощью ортогональной матрицы трехмерных поворотов \vec{R} (см. п. 1) гл. 1), переводящей эту тройку из фиксированного положения ψ_0 во все остальные.

Т. е. область изменения ψ — это область изменения матрицы \vec{R} , связанной с ψ по формуле

$$\psi = \vec{R}\psi_0. \quad (39)$$

Повороты удобно задавать вектором α , направление которого задает ось поворота, а модуль — угол поворота. Область изменения всех неэквивалентных значений вектора α — это шар с диаметром π , так как поворот

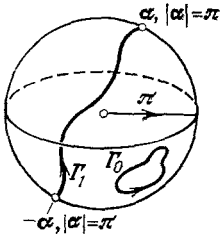


Рис. 5. Два класса замкнутых контуров в пространстве трехмерных поворотов.

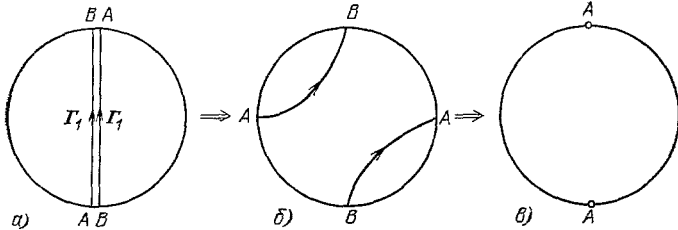


Рис. 6. Стягивание в точку замкнутого контура Γ_2 (ABA), представляющего собой в начальный момент (а) произведение двух замкнутых контуров класса Γ_1 (AB и BA, точки A и B на рис. а) эквивалентны).

на угол, больший π , всегда можно представить как поворот на угол, меньший π . Например, поворот на угол $2\pi > |\alpha| > \pi$ эквивалентен повороту на угол $2\pi - |\alpha| < \pi$ вокруг противоположной оси. Из этого также следует, что повороты на угол π вокруг противоположных осей эквивалентны, т. е. диаметрально противоположные точки на поверхности шара эквивалентны. Все возможные типы замкнутых контуров в пространстве R показаны на рис. 5. Замкнутый контур типа Γ_0 может быть непрерывно продеформирован в точку, это означает, что соответствующее ему неоднородное состояние может быть непрерывно переведено в состояние с постоянным параметром порядка, т. е. без потока. Контур Γ_1 также является замкнутым, так как он начинается и кончается в точках с одним и тем же ψ . Однако его невозможно продеформировать в контур типа Γ_0 . Других замкнутых контуров нет. Например, контур Γ_2 , последовательно проходящий два раза по Γ_1 (рис. 6), может быть непрерывно стянут в точку, т. е. принадлежит классу контуров Γ_0 . Алгебраически это записывается в виде

$$\Gamma_1\Gamma_1 = \Gamma_0, \quad (40)$$

т. е. произведение двух контуров класса Γ_1 представляет собой контур класса Γ_0 . Это отличается от соответствующего закона в случае окружности, где $\Gamma_n \cdot \Gamma_m = \Gamma_{n+m}$.

Таким образом, А-фаза в замкнутом канале может находиться лишь в двух топологически различных состояниях. Если состояние соответствует классу контуров Γ_0 , то оно непрерывно может перейти в состояние покоя. Если же оно соответствует классу Γ_1 , то может быть непрерывно переведено в состояние с наименьшей энергией (34) внутри этого класса, т. е. в состояние с наименьшим потоком, соответствующим по порядку величины течению с одним квантом циркуляции скорости в HeII, т. е. с $v^s \sim \hbar/m_3L$, где L — длина канала.

ж) Как непрерывно уменьшить поток в А-фазе?

Рассмотрим подробнее, как происходит релаксация макроскопического потока в одно из этих состояний. Пусть поле l направлено вдоль течения (ось z), такая ориентация l энергетически выгодна, благодаря члену с $\rho_0 > 0$

в энергии (31). Параметр порядка в этом токовом состоянии зависит от координат следующим образом:

$$\psi = \vec{R}(\alpha(z) \hat{z}) (\hat{x} + i\hat{y}). \quad (41)$$

Угол α поворота ортов Δ' и Δ'' вокруг оси \hat{z} пробегает при обходе канала значения от 0 до $2\pi N$. На рис. 7 показан путь Γ_N , проходимый параметром порядка в пространстве R и представляющий N следующих друг за другом путей Γ_1 . Контур Γ_1 направлен вертикально по z , показывая, что осуществляются повороты вокруг оси \hat{z} . Пары соседних контуров Γ_1 могут, как показано на рис. 6, непрерывно аннигилировать. В результате мы последовательно проходим состояния однородного течения с $1 \parallel \hat{z}$, но с потоком,

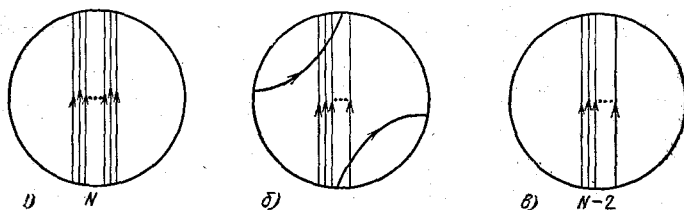


Рис. 7. Процесс непрерывного уменьшения потока на два кванта циркуляции в А-фазе изображен в пространстве R .

каждый раз уменьшающимся на два кванта (см. рис. 7, а и в). В промежуточных состояниях (рис. 7, б) 1 неоднородно меняется в пространстве (изогнутость контура Γ в R означает, что совершаются повороты не только вокруг \hat{z} , но и вокруг других осей, а это уже затрагивает и вектор 1).

Итак, мы видим, что, в отличие от HeII, топология не гарантирует устойчивости макроскопического сверхтекучего потока. Иначе говоря, поток глобально неустойчив. Поток может непрерывно релаксировать, в процессе релаксации происходит не рождение разрывных сингулярных образований — квантованных вихрей, как в HeII, а непрерывное неоднородное изменение поля вектора 1 , т. е. образование непрерывных текстур.

з) Устойчивость потока вблизи стенки и в магнитном поле

В отличие от топологической неустойчивости потока внутри канала, приповерхностный поток А-фазы топологически устойчив¹⁷. Действительно, поле 1 на границе канала зафиксировано, поэтому оно не может приводить к затуханию потока. В результате возникает уникальная ситуация, когда внутри канала потока нет (или он очень мал), но вдоль поверхности в узком пристеночном слое поток циркулирует. Поток на поверхности может релаксировать лишь путем рождения и движения точечных вихрей на поверхности, т. е. буджумов.

Во-вторых, в А-фазе имеется уникальная возможность регулировать топологию, прикладывая магнитное поле²⁴. В результате, как мы увидим в гл. 5, макроскопический поток А-фазы в замкнутом канале в магнитном поле становится глобально устойчивым.

и) Локальная устойчивость сверхпотока в А-фазе

Поскольку в А-фазе нет мощных топологических преград, препятствующих непрерывной релаксации сверхтекучего макроскопического потока, его гораздо легче разрушать, чем в HeII. Процесс релаксации может происходить либо безактивационно, если при переходе из состояния (рис. 7, а)

в состояние (рис. 7, в) происходит монотонное понижение энергии (31), либо путем преодоления энергетического барьера, если упругая энергия поля \mathbf{l} в (31) в промежуточном состоянии (рис. 7, б) превосходит выигрыш в кинетической энергии жидкости за счет уменьшения v^s . Но даже если барьер такого рода имеется, преодолевать его значительно легче, чем барьер, диктуемый топологией, при преодолении которого требуется создание разрывов в упорядоченном состоянии. Существование барьера зависит от соотношения между коэффициентами, входящими в энергию (31). Исследование течения с однородным \mathbf{l} , направленным вдоль потока, показывает, что оно локально устойчиво, если выполнено следующее условие ²⁵:

$$\left[C_0 + \frac{1}{2} (\rho^s - \rho_0) \right]^2 < \rho_0 K_3. \quad (42)$$

В модели бозе-газа из молекул $\rho_0 = C_0 = 0$, и условие (42) никогда не выполняется, т. е. поток всегда устойчив. В реальной А-фазе, хорошо описываемой вблизи T_c моделью слабой связи, неравенство (42) может выполняться или не выполняться при одной и той же температуре в зависимости от ширины канала. Происходит это из-за спин-орбитального (дипольного) взаимодействия между орбитальным вектором \mathbf{l} и спиновым вектором \mathbf{d} (см. обзор ¹). В узких каналах с диаметром, меньшим дипольной длины $\xi_D \sim 10^{-3}$ см, \mathbf{d} не зависит от орбитального вектора \mathbf{l} и не имеет отношения к сверхтекучести. В широких каналах с диаметром больше ξ_D дипольное взаимодействие ориентирует \mathbf{d} вдоль \mathbf{l} и энергия упругости поля \mathbf{d} добавляется к энергии упругости поля \mathbf{l} , эффективно увеличивая тем самым коэффициент K_3 в формуле (42). Рассмотрим оба случая отдельно.

В узких каналах

$$\rho_0 = C_0 = \frac{1}{2} \rho^s = \frac{2}{3} K_3 = 2K_1 = 2K_2, \quad (43)$$

и условие (42) не выполняется, т. е. такое течение неустойчиво, причем можно показать, что оно может быть при этих температурах переведено в состояние без потока с монотонным понижением энергии ²⁵.

к) Геликс — спиральная токовая структура

В широких каналах коэффициенты в энергии (31) имеют вид

$$\rho_0 = C_0 = \frac{1}{2} \rho^s = \frac{2}{5} K_3, \quad K_1 = K_2 = K_3, \quad (44)$$

и условие (42) выполняется, т. е. сверхтекучий поток локально устойчив. При понижении температуры возможно, что при некоторой $T = T^*$ условие (42) перестает выполняться и для широких каналов. Анализ потока при T чуть меньше T^* показывает, что хотя локальный минимум энергии, соответствующий однородному течению, исчезает, появляется локальный минимум, соответствующий потоку со спиральной структурой в поле вектора \mathbf{l} (геликс) ²⁶⁻²⁸:

$$\psi = \exp [i(u-v)z] \vec{\mathbf{R}}(-v\hat{\mathbf{z}}) \vec{\mathbf{R}}(\beta\hat{\mathbf{y}}) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}), \quad (45)$$

$$\mathbf{l} = \hat{\mathbf{z}} \cos \beta + (\hat{\mathbf{x}} \cos v\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{y}} \sin v\hat{\mathbf{z}}) \sin \beta;$$

здесь β — угол наклона \mathbf{l} к оси спирали $\hat{\mathbf{z}}$, $\frac{2\pi}{v}$ — шаг спирали. Скорость v^s в геликсе направлена вдоль течения

$$v^s = \frac{\hbar}{2m_3} \hat{\mathbf{z}} (u - v(1 - \cos \beta)), \quad (46)$$

но ток в силу тензорного характера сверхтекучей плотности ρ^s имеет также структуру геликса. Интересная особенность тока в геликоидальной структуре заключается в том, что члены с $\text{rot } \mathbf{l}$ вносят вклад в постоянную составляющую тока, т. е. часть макроскопического сверхтекучего потока создается текстурой.

Еще раз отметим, что из-за отсутствия топологических ограничений стабильность локально устойчивых макроскопических потоков является весьма слабой, и в эксперименте непосредственно наблюдается релаксация потока путем пространственно-временных изменений вектора \mathbf{l} ²⁹. Кинетическая энергия течения передается нормальной компоненте за счет вращательного трения, возникающего при локальной прецессии вектора \mathbf{l} . Для нахождения количественных характеристик релаксации потока нам нужно исследовать систему гидродинамических уравнений.

3. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ А-ФАЗЫ

а) Принцип построения

В этой главе мы обсудим вывод замкнутой системы нелинейных гидродинамических уравнений А-фазы и некоторые ее следствия. Система уравнений должна описывать динамику как переменных, характерных для обычной жидкости: массовая плотность ρ , плотность тока \mathbf{j} , энтропия S , так и переменных, связанных с параметром вырождения ψ : \mathbf{l} и \mathbf{v}^s . Феноменологические уравнения гидродинамики являются обобщением уравнений двухскоростной гидродинамики Ландау — Халатникова ⁸. Новые моменты, которые нужно учесть, связаны с наличием новой по сравнению с HeII переменной \mathbf{l} . Во-первых, для этой переменной нужно построить свое уравнение. Во-вторых, нужно учесть, что условие $\text{rot } \mathbf{v}^s = 0$ в HeII заменяется на условие Мермина — Хо (10), выражающее $\text{rot } \mathbf{v}^s$ через \mathbf{l} . В-третьих, из-за жидкокристаллической анизотропии А-фазы с осью анизотропии вдоль \mathbf{l} коэффициенты, входящие в уравнения, имеют тензорный характер. В остальном используются те же принципы построения, а именно: 1) должны выполняться все законы сохранения (массы, энергии, импульса, момента импульса), 2) диссипативная функция, описывающая переход динамической энергии в тепло и возрастание энтропии, должна быть положительно определенной и обращаться в нуль в локальном равновесии, 3) должны выполняться условия симметрии, т. е. уравнения не должны меняться при галилеевском преобразовании, повороте и сдвиге системы координат, 4) уравнения должны допускать решения, соответствующие состоянию равновесия в равномерно вращающемся сосуде, равновесное состояние не должно зависеть от времени в системе координат, связанной с сосудом ^{30, 31}. Все эти требования, особенно если мы не интересуемся членами высоких порядков по нелинейности, оставляют лишь небольшой произвол, заключающийся в неопределенности входящих в уравнения феноменологических коэффициентов: динамических (типа ρ^s , ρ_0 , C_0) и кинетических (коэффициент теплопроводности и различного рода коэффициенты вязкости). Последняя свобода устраняется сравнением с линейными уравнениями динамики, полученными в микроскопической теории ³².

б) Диссипативная функция и условия равновесия

Перед тем как выписать уравнения, удовлетворяющие перечисленным требованиям, обсудим диссипативную функцию R , вид которой вытекает из условий локального равновесия, при которых она обращается в нуль. В локальном равновесии энтропия жидкости, находящейся в замкнутом сосуде, должна иметь локальный максимум при условии постоянства полной энергии, массы, импульса и момента импульса, т. е.

$$\int dV \left\{ \delta S - a \delta \varepsilon - b \delta \rho - c \delta \mathbf{j} - d [\mathbf{r}, \delta \mathbf{j}] - \left(\mathbf{e}, \text{rot } \mathbf{v}^s - \frac{\hbar}{4m_s} e_{imn} l_i [\nabla l_m, \nabla l_n] \right) \right\} = 0; \quad (47)$$

здесь a, b, c, d — постоянные множители Лагранжа, а e — зависящий от координат множитель Лагранжа, обеспечивающий выполнение соотношения Мермина — Хо (10), δe — вариация энергии, связанная термодинамически с остальными переменными:

$$\delta E = \int dV \delta e = \int dV [T \delta S + \mu \delta \rho + v^n \delta j + h \delta l + (j - \rho v^n) \delta v^s]; \quad (48)$$

здесь

$$\mu = \frac{\delta E}{\delta \rho} \Big|_{S, l, v^s, j}$$

— химический потенциал,

$$h = \frac{\delta E}{\delta l} \Big|_{\rho, S, v^s, j}$$

— величина, аналогичная молекулярному полю в нематическом жидком кристалле³³, мы также воспользовались следующими из (31) и (27) соотношениями

$$\frac{\delta E}{\delta v^s} \Big|_{S, \rho, j, l} = j - \rho v^n, \quad \frac{\delta E}{\delta j} \Big|_{S, \rho, v^s, l} = v^n. \quad (49)$$

Соотношения (49) в действительности являются общими и не зависят от конкретного вида энергии, поскольку являются следствием галилеевской и градиентной инвариантности.

Подставляя (48) в (47) и приравнявая нулю коэффициенты при $\delta \rho, \delta S, \delta l, \delta v^s, \delta j$, получаем следующие условия, определяющие локальное равновесие:

$$T = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \quad v^n = [\omega, r] + v, \quad \omega = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad (50)$$

$$(\nabla, j - \rho v^n) = 0, \quad [l, \tilde{h}] = 0,$$

$$\tilde{h} = \frac{\delta E}{\delta l} \Big|_{v^s} + \frac{\delta E}{\delta v^s} \Big|_l \frac{\delta v^s}{\delta l} \equiv h - \frac{\hbar}{2m_s} [l, (j - \rho v^n, \nabla) l].$$

Диссипативная функция должна быть равна нулю в локальном равновесии, поэтому она может зависеть от гидродинамических переменных лишь в определенных комбинациях, обращающихся в нуль при выполнении (50), и именно, от следующих величин:

$$\nabla T, \nabla \mu, B_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_k v_i^n + \nabla_i v_k^n), \text{rot rot } v^n, [l, \tilde{h}], (\nabla, j - \rho v^n). \quad (51)$$

В квадратичном приближении по этим выражениям и в пренебрежении высшими градиентами (в том числе членом $\text{rot rot } v^n$) диссипативная функция имеет следующий вид:

$$R = \int dV \left\{ \frac{1}{2} v_{iklm} B_{ik} B_{lm} + \frac{1}{2\gamma} [l, \tilde{h}]^2 + \frac{1}{2} \kappa_{ij} \nabla_i T \nabla_j T + \frac{1}{2} \zeta (\nabla, j - \rho v^n)^2 + \right. \\ \left. + \xi_{ij} B_{ij} (\nabla, j - \rho v^n) + \xi l_m + l_j e_{ikm} B_{ij} \tilde{h}_k \right\}. \quad (52)$$

Обратим внимание на то, что в однородном состоянии с $v^s = v^n$, отличным от нуля, диссипация отсутствует, так как диссипативная функция обращается в нуль. Т. е. нет однородной релаксации сверхтекучей скорости, что и является признаком сверхтекучести (см. п. а) гл. 2).

Все кинетические коэффициенты, кроме ξ , встречаются в уравнениях гидродинамики HeII и гидродинамики одноосного нематического жидкого кристалла. Коэффициенты 2-й вязкости ζ и ξ_{ij} встречаются в HeII (см. ⁸). Только, в отличие от HeII, в котором ξ_{ij} имеет изотропный вид и равен $\xi_1 \delta_{ij}$, в He³-A ξ_{ij} анизотропен: $\xi_{ij} = \xi_0 \delta_{ij} + \xi_1 l_i l_j$. Тензорный коэффициент

теплопроводности $\kappa_{ij} = \kappa_0 \delta_{ij} + \kappa_1 l_i l_j$ характерен для жидкого кристалла с одноосной анизотропией. Тензор ν_{iklm} содержит пять коэффициентов вязкости, также характерных для одноосной анизотропии³³. Коэффициент γ описывает в нематиках вращательное трение, возникающее при вращении оси анизотропии относительно среды³³. В Нс³-А этот коэффициент называется коэффициентом орбитальной вязкости Кросса — Андерсона, которые впервые вычислили его³⁴. Один лишь коэффициент ξ не имеет аналога в жидких кристаллах. Это связано с тем обстоятельством, что вектор анизотропии \mathbf{l} в А-фазе и директор \mathbf{n} , указывающий в нематике ось анизотропии, имеют разные симметричные свойства. В А-фазе при инверсии времени вектор \mathbf{l} меняет направление на противоположное $\mathbf{l}(t) = -\mathbf{l}(-t)$, поскольку волновая функция (1) (или (2)) переходит при инверсии времени в комплексно-сопряженную. Член с ξ в (52) содержит нечетную степень \mathbf{l} и линеен по \mathbf{v}^n , поэтому при инверсии времени не меняется. В нематике состояния с \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$ неразличимы, поэтому физические величины могут содержать лишь четные степени \mathbf{n} .

в) Уравнения гидродинамики

Выпишем уравнения гидродинамики А-фазы, удовлетворяющие перечисленным в разделе 1 требованиям (их вывод см., например, в^{35, 36, 31}):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0, \quad (53)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \mathbf{Q} = \frac{2R}{T} + \nabla \frac{\partial R}{\partial \nabla T}, \quad (54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial t} + \nabla \left(\mu + \mathbf{v}^n \mathbf{v}^s + \frac{\hbar}{4m_3} \mathbf{l} \operatorname{rot} \mathbf{v}^n \right) + \frac{\hbar}{2m_3} e_{imn} l_i \nabla l_m \frac{\partial l_n}{\partial t} = \nabla \frac{\partial R}{\partial (\nabla, \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}^n)}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \nabla_h \pi_{ih} = \nabla_h \frac{\partial R}{\partial B_{ih}}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial t} + (\mathbf{v}^n \nabla) l_i - \alpha (\delta_{ij} - l_i l_j) l_n B_{jn} + \frac{1}{2} [\mathbf{l}, \operatorname{rot} \mathbf{v}^n] + \eta [\mathbf{l}, \tilde{\mathbf{h}}]_i = - \frac{\partial R}{\partial h_i}. \quad (57)$$

В (54) и (56) \mathbf{Q} и π_{ih} — обратимые потоки тепла и импульса:

$$\mathbf{Q} = S \mathbf{v}^n + \frac{1}{T} \beta [\mathbf{l}, \nabla T], \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ij} = & P \delta_{ij} + j_i v_j^n + v_i^s (j_j - \rho v_j^n) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_j \mathbf{l}} \nabla_j \mathbf{l} + \\ & + \frac{\hbar}{4m_3} e_{ijh} l_h (\nabla, \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}^n) - \frac{1}{2} \alpha (l_i \tilde{h}_{\perp j} + l_j \tilde{h}_{\perp i}) + \frac{1}{2} e_{ijk} [\mathbf{l}, \tilde{\mathbf{h}}]_k + \\ & + (\gamma_{il}^{(1)} e_{jpq} + \gamma_{jq}^{(2)} e_{ipl} + \gamma_{jl}^{(3)} e_{ipq} + \gamma_{iq}^{(3)} e_{jpl}) l_p \nabla_q v_l^n; \end{aligned} \quad (59)$$

здесь P — давление

$$P = -\varepsilon + TS + \mu \rho + \mathbf{v}^n \mathbf{j}. \quad (60)$$

Реактивные коэффициенты α , β и η в уравнениях (53)–(57) произвольны, тензоры γ в (59) симметричны и удовлетворяют условиям

$$\gamma_{||}^{(1)} = \gamma_{||}^{(2)} = \gamma_{||}^{(3)}, \quad \gamma_{\perp}^{(1)} = \gamma_{\perp}^{(2)}, \quad (61)$$

а в остальном произвольны. Эти коэффициенты, наряду с кинетическими коэффициентами, определяются из микроскопии³².

Совместность уравнений (53)–(57) с соотношением Мермина — Хо (10) можно увидеть, взяв операцию ротора от обеих частей уравнения (55). При этом получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{rot} \mathbf{v}^s - \frac{\hbar}{4m_3} e_{imn} l_i [\nabla l_m, \nabla l_n] \right) = 0, \quad (62)$$

т. е. если соотношение (10) выполнено в начальный момент времени, то оно выполняется и во все последующие моменты времени.

Уравнения (53) — (57) описывают все сверхтекучие явления. При постоянном l , что достигается, например, вблизи границ или в достаточно узких каналах, уравнения (53) — (56) отличаются от уравнений двухскоростной гидродинамики HeII практически лишь тензорным характером коэффициентов, если не обращать внимания на несколько дополнительных относительно малых членов (член с $l \operatorname{rot} v^n$ в уравнении для v^s , а также члены с β и γ_{ik}). Поэтому при $l = \text{const}$ воспроизводятся все сверхтекучие эффекты, характерные для HeII , например, механокалорический эффект и 4-й звук (колебания v^s и плотности ρ при заторможенной в узких каналах нормальной компоненте), экспериментальное наблюдение которого явилось строгим доказательством сверхтекучести новых фаз He^3 . Дополнительные члены в уравнениях могут привести к новым эффектам. Например, член $l \operatorname{rot} v^n$ в уравнении для v^s приводит к интересному, но пока еще не наблюдаемому эффекту «калибровочной турбины» (gauge wheel³⁷). Эффект заключается в том, что вращение нормальной компоненты с отличным от нуля градиентом $\nabla (l \operatorname{rot} v^n)$ генерирует поступательное движение сверхтекучей компоненты.

г) Голдстоуновские моды

В А-фазе, помимо обычной голдстоуновской моды, характерной для сверхтекучей жидкости, которая в зависимости от условий эксперимента является либо вторым, либо четвертым звуком, есть голдстоуновские моды, связанные с остальными четырьмя степенями свободы параметров вырождения А-фазы. Две из них — степени свободы вектора d — приводят к спиновым волнам¹, наблюдаемым в экспериментах с ЯМР. Остальные две связаны с динамикой вектора l .

1) Четвертый звук. Скорость распространения 4-го звука оказывается зависящей от направления его распространения³⁸. Действительно, запишем уравнения движения в узкой щели между двумя плоскими поверхностями, где $v^n = 0$, $l = \text{const}$, в линейном приближении, без учета диссипации и в пренебрежении изменениями температуры:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho^s v^s - \rho_0 l (l v^s)) = 0, \quad (63)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \nabla \rho = 0.$$

Из (63) имеем волновое уравнение для плотности

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \rho^s \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \left[\Delta \rho - \frac{\rho_0}{\rho^s} (l \nabla)^2 \rho \right], \quad (64)$$

из которого следует, что скорость распространения 4-го звука c_4 в направлении n зависит от ориентации l по следующему закону:

$$c_4^2(n) = c_1^2 \frac{\rho^s}{\rho} \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho^s} (nl)^2 \right], \quad (65)$$

где c_1 — скорость распространения обычного звука:

$$c_1^2 = \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}. \quad (66)$$

Соотношение (65) позволяет экспериментально измерять анизотропию сверхтекучей плотности (см., например, ³⁹).

2) Второй звук. Уравнения гидродинамики допускают решения, описывающие 2-й звук (колебания температуры, v^s и v^n при практически

постоянном токе j). Однако скорость 2-го звука

$$c_2^2(n) = \frac{S^2}{\rho} \frac{\partial T}{\partial S} \left(\frac{\rho_{\perp}^s}{\rho_{\perp}^n} n_{\perp}^2 + \frac{\rho_{\parallel}^s}{\rho_{\parallel}^n} n_{\parallel}^2 \right) \quad (67)$$

оказывается весьма малой (порядка 1 см/с) из-за малости энтропии жидкости при столь низких температурах. Поэтому учет диссипации приводит к тому, что мнимая часть частоты существенно превышает действительную для экспериментально доступных длин волн. В результате 2-й звук оказывается ненаблюдаемым при существующих размерах измерительных ячеек как в А-фазе, так и в В-фазе. 2-й звук экспериментально наблюдался в А₁-фазе, где благодаря специфической комбинированной инвариантности скорость 2-го звука резко возрастает из-за зацепления со спиновыми волнами (см. гл. 6).

3) Динамика вектора \mathbf{l} . Уравнение (57) для \mathbf{l} по внешнему виду напоминает уравнение для директора \mathbf{n} в нематике³³. Выпишем это уравнение в линейном приближении, в отсутствие потоков и в широких каналах, где $\mathbf{d} \parallel \mathbf{l}$, учитывая, что коэффициент η , обусловленный своим происхождением внутреннему орбитальному моменту L_0 , практически всегда мал по сравнению с γ^{-1} :

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = \left(\frac{\hbar}{2m_3} \right)^2 K_3 [\Delta \mathbf{l} - \mathbf{l}(\mathbf{l}, \Delta \mathbf{l})]. \quad (68)$$

Это уравнение имеет диффузионный характер.

Переменная \mathbf{l} является очень медленной переменной из-за большой величины γ :

$$\gamma \sim 6,6 \cdot 10^{-6} (1 - T/T_c)^{3/2} \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (69)$$

Это означает, что всегда (пока мы находимся в области применимости гидродинамических уравнений) в звуковом процессе вектор \mathbf{l} можно считать постоянным. Динамика вектора \mathbf{l} становится существенной лишь при медленных гидродинамических течениях, где играет определяющую роль в распаде сверхтекучих потоков.

4. РЕЛАКСАЦИЯ СВЕРХТЕКУЧИХ ПОТОКОВ В А-ФАЗЕ

а) Эффективное трение между сверхтекучей и нормальной компонентами

Первый эксперимент, в котором непосредственно наблюдался распад сверхтекучего потока за счет динамики вектора \mathbf{l} , был выполнен Манчестерской группой²⁹. В эксперименте исследовались колебания вращательного маятника, содержащего стопку из 25 тороидальных каналов с диаметром $4,9 \cdot 10^{-3}$ см и радиусом большого круга $7,5 \cdot 10^{-2}$ см и имеющего собственную частоту колебаний ~ 60 гц. Эксперимент показал, что при переходе в сверхтекучее состояние в обеих фазах А и В возникает смещение частоты колебаний, связанное с тем, что сверхтекучая компонента не участвует в колебаниях и это приводит к изменению инерционной массы маятника. Зависимость смещения частоты от амплитуды колебаний существенно различна для А- и В-фазы. В А-фазе при достаточно больших амплитудах колебаний смещение сильно уменьшается, чего не происходит в В-фазе. Это означает, что в А-фазе возникает сильное эффективное трение между \mathbf{v}^s и \mathbf{v}^n , заставляющее сверхтекучую компоненту следовать за нормальной, в результате чего инерционная масса маятника становится почти такой же, как в нормальной жидкости, и смещение частоты резонанса почти исчезает. Этот механизм релаксации сверхтекучего потока, отсутствующий в В-фазе, и связан с динамикой вектора \mathbf{l} . Влияние релаксации потока сказывается и на затухании

маятника. Эксперимент показал, что если переход происходит в В-фазу, то затухание практически не меняется, но меняется существенно в А-фазе.

Сравним количественно теорию и эксперимент. Для этого рассмотрим те уравнения и члены в этих уравнениях из системы (53) — (57), которые имеют отношение к эксперименту. Нормальная компонента в используемых узких каналах из-за ее большой вязкости движется как целое вместе с маятником (вязкая глубина проникновения $\sqrt{\nu/\omega}$, где ν — кинематическая вязкость, превышает диаметр канала). При медленных движениях можно пренебречь изменением плотности. Из всех диссипативных коэффициентов самым существенным является коэффициент орбитальной вязкости γ , поэтому мы сохраним только его. Эффект влияния температуры на динамику \mathbf{l} при заторможенной нормальной компоненте мал. Выпишем необходимые уравнения в системе координат, движущейся вместе с маятником ($\mathbf{a}(t)$ — мгновенное ускорение маятника):

$$\nabla \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho^s \mathbf{v}^s + \frac{\hbar}{2m_s} \overleftrightarrow{\mathbf{C}} \text{rot } \mathbf{l}, \quad (70)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial t} + \nabla \mu + \frac{\hbar}{2m_s} e_{imn} l_i \nabla l_m \frac{\partial l_n}{\partial t} = -\mathbf{a}, \quad (71)$$

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = -\mathbf{h}_\perp + \frac{\hbar}{2m_s} [\mathbf{l}, (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{l}]. \quad (72)$$

Рассмотрим подробнее уравнение (71). Поскольку канал замкнут, $\nabla \mu = 0$. Если \mathbf{l} постоянно во времени, \mathbf{v}^s следит за ускорением и остается неподвижным в лабораторной системе. Однако, как мы видели в гл. 2, из-за топологической неустойчивости потока сверхтекучая скорость релаксирует к \mathbf{v}^n за счет динамики вектора \mathbf{l} . В уравнении (71) это сказывается в появлении эффективной силы трения

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = \frac{\hbar}{2m_s} e_{imn} l_i \nabla l_m \frac{\partial l_n}{\partial t}, \quad (73)$$

действующей на сверхтекучую компоненту со стороны нормальной. Эту силу можно оценить из размерных соображений. Характерные пространственный (z_0) и временной (t_0) масштабы равны:

$$z_0 \sim \frac{\hbar}{m_s (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^n)}, \quad (74)$$

$$t_0 \sim \frac{\rho^s}{\gamma} (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^n)^2.$$

t_0 находится подстановкой z_0 в уравнение (68) для \mathbf{l} . Таким образом, эффективная сила трения между сверхтекучей и нормальной компонентой имеет следующий вид ⁴¹⁻⁴³:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\rho^s}{\gamma} (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^n)^3, \quad (75)$$

где β — коэффициент порядка 1. Эффективное уравнение для сверхтекучей скорости, таким образом, имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial t} + \nabla (\mu + \mathbf{v}^s \mathbf{v}^n) + \frac{1}{\beta} \frac{\rho^s}{\gamma} (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^n)^3 = -\mathbf{a}. \quad (76)$$

Данные эксперимента, обработанные с помощью формулы (75), дают $\beta \sim 4$.

Более явное проявление влияния орбитальной динамики на свойства сверхтекучего потока наблюдалось в экспериментах ⁴⁴, где были обнаружены устойчивые и долгоживущие осцилляции вектора \mathbf{l} , которые теперь уже можно интерпретировать как аналог нестационарного эффекта Джозефсона для А-фазы.

б) Нестационарный эффект Джозефсона в А-фазе

Эксперимент ⁴⁴ первоначально был задуман с целью измерить с помощью ультразвука ориентацию вектора \mathbf{l} в тепловом потоке при наличии стенок и магнитного поля. (В тепловом потоке $Q = Sv^n$ при отсутствии потока массы $j = 0$ возникает разность скоростей

$$v^s - v^n \sim \frac{\rho}{\rho^s} \frac{Q}{S} \quad (77)$$

которая благодаря второму члену в энергии (31) ориентирует \mathbf{l} вдоль Q .) Для этого последовательно включались магнитные поля различной величины и направления, меняющие ориентацию поля \mathbf{l} благодаря спин-орбитальному взаимодействию (см. обзор ¹), и измерялось чувствительное к ориентации \mathbf{l} затухание ультразвука. Неожиданно при определенном процессе включения, а затем полного выключения поля в интенсивности проходящего через образец звукового сигнала были обнаружены большие и периодические осцилляции, которые указывали на возникновение осцилляций в поле вектора \mathbf{l} . Осцилляции оказались очень устойчивыми и в ряде случаев наблюдались часами.

Осцилляции выглядят менее загадочными, если вспомнить, что аналогичное явление наблюдается в сверхпроводниках, где при заданной разности потенциалов, т. е. при стационарных внешних условиях, возникает осцилляционный режим, наблюдаемый, например, по индуцируемому им электромагнитному излучению. Этот режим возникает в результате действия двух противоположных факторов: с одной стороны, ток должен увеличиваться за счет разности потенциалов на джозефсоновском контакте, с другой стороны, он уменьшается за счет какого-либо механизма проскальзывания фазы, например, за счет движения вихрей в сечении, перпендикулярном направлению тока. Возникающая эффективная сила трения компенсирует действие электрического поля. В результате устанавливается равновесный осциллирующий ток с периодическим проскальзыванием фазы. Можно задавать не разность потенциалов, а ток через контакт, тогда при малом токе сопротивление отсутствует, а при достаточно большом токе возникает осцилляционный режим с разностью потенциалов на контакте.

Очевидно, так же возникают осцилляции в А-фазе ^{42, 45}. Течение при заданном тепловом потоке, т. е. при заданном $v^s - v^n$, может осуществляться в двух режимах. Это либо стационарный режим без трения с однородным полем \mathbf{l} , либо диссипативный режим, при котором на краях канала появляется разность химических потенциалов. В таком режиме происходит релаксация сверхтока за счет силы трения (73), которая компенсируется возникающей разностью химического потенциала так, что в среднем $\langle \partial v^s / \partial t \rangle = 0$ (см. (76), где a нужно положить равным нулю). Вектор \mathbf{l} в этом режиме непрерывно эволюционирует, осуществляя за счет орбитальной вязкости непрерывный переход кинетической энергии в тепло. Движение это, как часто бывает в процессах проскальзывания фазы, оказывается периодическим. Его период определяется из соображений размерности формулой (74), которая хорошо описывает экспериментальную ситуацию.

в) Инстантонный процесс проскальзывания фазы

Эволюция поля \mathbf{l} может иметь различный характер. Проскальзывание фазы может осуществляться, например, путем движения в поперечном сечении потока так называемых несингулярных вихрей, имеющих фонтанобразное распределение поля \mathbf{l} ⁴⁶ (мы их рассмотрим в следующей главе). Экспериментальные данные говорят скорее в пользу безвихревого осцилляционного режима. В этом режиме распределение поля \mathbf{l} зависит только от одной координаты z вдоль потока ^{41, 42}. На плоскости z, t (t — время) поле \mathbf{l}

образует двумерную периодическую структуру с площадью ячейки ΔS

$$\Delta S \sim z_0 t_0 \quad (78)$$

(см. (74)).

Два из возможных вариантов структуры приведены на рис. 8. Обратим внимание на то, что каждая ячейка структуры содержит определенный целочисленный топологический инвариант ν ⁴², равный степени отображения двумерного тора (ячейки с периодическими граничными условиями) на сферу (область изменения вектора \mathbf{l}). Этот инвариант имеет аналитическое выражение

$$\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S} dt dz \left(\mathbf{l}, \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right] \right), \quad (79)$$

он показывает, сколько раз вектор \mathbf{l} замотает при своем движении единичную сферу, когда координаты z, t обегают ячейку ΔS . Для конфигураций, изображенных на рис. 8, $\nu = 2$ и $\nu = 1$ соответственно.

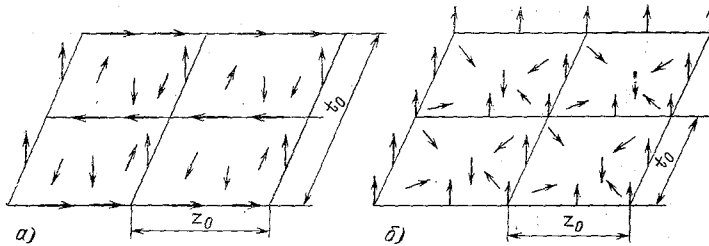


Рис. 8. Пространственно-временная периодическая структура поля $\mathbf{l}(z, t)$ в процессе нестационарного эффекта Джозефсона в А-фазе. Топологический заряд (79) ячейки структуры равен 2 для структуры на рис. а) и 1 для структуры на рис. б).

Усредненная по пространственному и временному периодам сила трения (73)

$$\langle F_{\text{тр}}^z \rangle = \frac{\hbar}{2m_3} \int \frac{dt dz}{\Delta S} \left(\mathbf{l}, \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right] \right) = \frac{2\pi\hbar}{m_3} \frac{\nu}{\Delta S}, \quad (80)$$

мы видим, что отличие ν от нуля — необходимое условие существования диссипативного осцилляционного режима.

Ячейка периодической структуры имеет прямую аналогию с инстантонами в теории поля⁴⁷ — динамическими структурами с топологическим зарядом. В теории поля инстантон является процессом перехода между двумя вакуумами с разными топологическими зарядами. В А-фазе инстантон также обладает топологическим зарядом ν и осуществляет переход между «вакуумными» состояниями жидкости (состояниями с однородным распределением \mathbf{l}), отличающимися на целое число квантов циркуляции сверхтекучей скорости $2\pi\hbar\nu/m_3$. Таким образом, процесс нестационарного эффекта Джозефсона в А-фазе представляет собой периодическую решетку инстантонов в пространственно-временном континууме.

В отличие от сверхпроводника, в котором при заданном электрическом токе реально осуществляется лишь один из двух режимов (или бездиссипативный, или режим нестационарного эффекта Джозефсона), в А-фазе, как можно убедиться на грубой модели, которая позволяет исследовать траектории движения системы в фазовом пространстве⁴⁸, при одном и том же противотоке \mathbf{v}^s — \mathbf{v}^n могут быть устойчивы оба режима. Переход между режимами может осуществляться сильным возмущением системы, что и наблюдается на эксперименте, где требуется сложный процесс включения и выключения достаточно сильного поля.

5. ВРАЩАЮЩАЯСЯ А-ФАЗА

а) Свободная энергия жидкости во вращающемся сосуде

Теоретические выводы о возможности непрерывного вихревого движения сверхтекучей компоненты А-фазы подтвердились в экспериментах с вращающейся А-фазой⁴⁹⁻⁵¹, в которой возникают непрерывные вихревые структуры.

Рассмотрим равновесные бездиссипативные структуры, возникающие во вращающемся сосуде. Условия равновесия А-фазы даются формулами (50). Для того чтобы они были совместны с граничными условиями на поверхности сосуда для нормальной скорости v^n , мы должны в (50) положить ω равной угловой скорости вращения сосуда. Разумеется, условия (50) удовлетворяются для многих различных состояний локального равновесия. Из них абсолютно устойчивым будет состояние с максимальной энтропией при заданном $d/a = -\omega$ (см. (47)). Это соответствует состоянию с минимальной величиной функционала

$$\tilde{F} = F - \omega \int dV [\mathbf{r}, \mathbf{j}], \quad (81)$$

где $F = E - TS$ — свободная энергия. Учитывая, что в равновесии $\mathbf{v}^n = [\omega, \mathbf{r}]$, получаем из (31) следующее выражение для \tilde{F} :

$$\begin{aligned} \tilde{F} = \int dV \left\{ \frac{1}{2} \rho^s (\mathbf{v}^s - [\omega, \mathbf{r}])^2 - \frac{1}{2} \rho_0 (1, \mathbf{v}^s - [\omega, \mathbf{r}])^2 + \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{2m_3} C (\mathbf{v}^s - [\omega, \mathbf{r}], \text{rot } \mathbf{l}) - \frac{\hbar}{2m_3} C_0 (1, \mathbf{v}^s - [\omega, \mathbf{r}]) (1 \text{ rot } \mathbf{l}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m_3} \right)^2 K_1 (\nabla \mathbf{l})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m_3} \right)^2 K_2 (1 \text{ rot } \mathbf{l})^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m_3} \right)^2 K_3 [1, \text{rot } \mathbf{l}]^2 \right\} + \frac{1}{2} \int dV \rho [\omega, \mathbf{r}]^2. \quad (82) \end{aligned}$$

Мы рассматриваем движения с достаточно малыми ω , так что изменением плотности ρ можно пренебречь и последний член в (82) отбросить, считая его постоянной величиной, не влияющей на минимизацию.

В HeII соответствующий функционал имеет вид

$$\tilde{F} = \int dV \frac{1}{2} \rho^s (\mathbf{v}^s - [\omega, \mathbf{r}])^2, \quad (83)$$

где $\mathbf{v}^s = \hbar \nabla \Phi / m_4$. Наивная минимизация (83) по \mathbf{v}^s дает для сверхтекучей компоненты твердотельное вращение $\mathbf{v}^s = [\omega, \mathbf{r}]$, что, естественно, противоречит потенциальности сверхтекучего течения. Условие твердотельности вращения в HeII может быть выполнено лишь в среднем, для этого должна образоваться система квантованных сингулярных вихрей. Поскольку каждый вихрь имеет один квант циркуляции, равный $2\pi\hbar/m_4$, их плотность должна быть равной $m_4\omega/\pi\hbar$ с тем, чтобы средняя завихренность соответствовала твердотельному вращению

$$\langle \text{rot } \mathbf{v}^s \rangle = \hat{z} \frac{2\pi\hbar}{m_4} \frac{m_4\omega}{\pi\hbar} = 2\omega. \quad (84)$$

Энергия вихря на единицу длины равна

$$\frac{E}{L} = \pi \rho^s \left(\frac{\hbar}{m_4} \right)^2 \ln \frac{r_\omega}{a},$$

где $r_\omega \sim (\pi\hbar/m_4\omega)^{1/2}$ — расстояние между вихрями, a — радиус кора вихря. Отсюда плотность энергии \tilde{F} для HeII равна (на единицу объема сосуда)

$$\frac{\tilde{F}}{V} = \frac{\hbar\omega}{m_4} \rho^s \ln \frac{r_\omega}{a}. \quad (85)$$

б) Топология непрерывных вихревых структур в А-фазе

В А-фазе сверхтекучая скорость в принципе может иметь твердотельный характер не в среднем, а точно, поскольку скорость \mathbf{v}^s не обязана быть потенциальной. Поэтому нет необходимости в образовании разрывов. Из соотношения Мермина — Хо (10) следует, что при $\mathbf{v}^s = [\omega, \mathbf{r}]$ должны возникнуть градиенты \mathbf{l} по поперечным к оси вращения координатам x, y , равные по порядку величины

$$\left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x}\right)^2 \sim \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial y}\right)^2 \sim \frac{m_3 \omega}{\hbar}. \quad (86)$$

Подстановка (86) в \tilde{F} (82) с учетом того, что $K_{1, 2, 3} \sim \rho^s$, дает для энергии \tilde{F} несингулярной периодической структуры следующую оценку:

$$\frac{\tilde{F}}{V} = \lambda \frac{\hbar \omega}{m_3} \rho^s, \quad (87)$$

где λ — величина порядка единицы. Формула (87) отличается от соответствующей формулы (85) для HeII отсутствием большого логарифма. Это является следствием разницы между непрерывным распределением параметра вырождения в А-фазе и разрывным в HeII. Точное вычисление коэффициента λ в (87) и нахождение равновесной конфигурации полей \mathbf{l} и \mathbf{v}^s пока еще остается нерешенной задачей. Можно, однако, сделать определенные качественные выводы⁵². Конфигурация поля \mathbf{l} с постоянными в среднем градиентами по x и y , естественно, должна быть двумерной периодической структурой, как и система сингулярных вихрей в HeII. Характерный период этой структуры должен иметь порядок расстояния между вихрями в HeII $r_\omega \sim |\nabla_i \mathbf{l}|^{-1} \sim (\hbar/m_3 \omega)^{1/2}$. Площадь ячейки можно найти точно из топологических соображений. Поле вектора $\mathbf{l}(x, y)$ в ячейке описывает отображение ячейки (двумерного тора в силу периодических граничных условий) на сферу изменения вектора \mathbf{l} . Целочисленный топологический инвариант — степень отображения — дается аналитическим выражением (79), в котором вместо t и z нужно вставить двумерные координаты x, y :

$$\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S} dx dy \left(\mathbf{l} \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial y} \right] \right). \quad (88)$$

Средняя завихренность $\langle \text{rot } \mathbf{v}^s \rangle = 2\omega$ может быть выражена через ν и площадь ячейки ΔS с помощью соотношения Мермина — Хо (10):

$$\begin{aligned} 2\omega = \langle \text{rot } \mathbf{v}^s \rangle &= \frac{1}{\Delta S} \int dx dy \text{rot } \mathbf{v}^s = \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{\hbar}{2m_3} \int \frac{dx dy}{\Delta S} \left(\mathbf{l} \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial y} \right] \right) = \frac{2\pi\hbar}{m_3} \hat{\mathbf{z}} \frac{\nu}{\Delta S}. \end{aligned} \quad (89)$$

Следовательно, площадь ячейки непрерывной периодической структуры является квантованной величиной:

$$\Delta S = \frac{\pi\hbar}{m_3 \omega} \nu. \quad (90)$$

Топологический инвариант ν , как видно из (89), должен быть отличен от нуля. Из энергетических соображений легко понять, что состояния с большим ν в ячейке энергетически невыгодны. Поэтому естественно ожидать, что ν принимает значения 1 или 2. Пример конфигураций поля с $\nu = 2$ и $\nu = 1$ уже был показан на рис. 8, а и б соответственно. Численный анализ, проведенный в⁵³ с помощью пробных функций определенного вида, дает предпочтение структуре с $\nu = 2$. Этот анализ не учитывает, однако, всех возможных реализаций и поэтому оставляет вопрос о структуре открытым.

Интересно распределение поля \mathbf{v}^s в ячейке. Циркуляция по границе ячейки C

$$\oint_C d\mathbf{r} \mathbf{v}^s = \hat{z} \int_{\Delta S} dx dy \operatorname{rot} \mathbf{v}^s = \frac{2\pi\hbar}{m_3} \mathbf{v} \quad (91)$$

также является квантованной величиной. Т. е. ячейка представляет собой квантованный вихрь, который, в отличие от квантованных вихрей в HeII, нигде не имеет особенностей. Квантованный несингулярный вихрь с $v = 1$ был впервые рассмотрен в ⁵⁴ и ⁴⁶. Помимо несингулярных вихрей, в А-фазе могут существовать и сингулярные, решетка которых при определенных условиях может быть энергетически выгоднее, чем несингулярная структура. Поэтому остановимся подробнее на свойствах вихрей в А-фазе.

в) Топология вихрей в А-фазе

В HeII вихри представляют собой топологически устойчивые сингулярные дефекты структуры в форме линий. Нам нужно выяснить, какие возможны топологически различные конфигурации поля ортов в А-фазе,

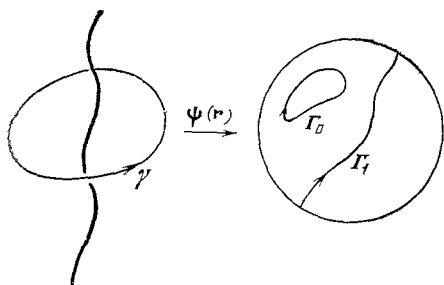


Рис. 9. Контур γ , охватывающий особую линию в А-фазе, отображается полем параметра вырождения в замкнутый контур одного из двух возможных классов Γ_0 и Γ_1 в пространстве R .

имеющие особенности на линии. Классы линейных дефектов находятся так же, как классы течений в кольцевом канале (гл. 2, п. е)). Мы должны окружить исследуемую линию замкнутым контуром γ и выяснить, во что переходит этот контур в пространстве параметра порядка. Мы уже знаем, что в этом пространстве возможны лишь два класса контуров Γ_0 и Γ_1 (рис. 9). Поэтому возможны лишь два класса особых линий, соответствующих контурам Γ_0 и Γ_1 . Особая линия с индексом $N = 1$, соответствующая контуру Γ_1 , топологически устойчива, поскольку при любой деформации поля ψ , контура γ и самой линии контур Γ_1 не выйдет из своего класса. Особая линия с индексом $N = 0$ может непрерывно исчезнуть. При слиянии двух особых линий с $N = 1$ происходит их взаимная аннигиляция в силу равенства (40), которое можно записать в виде

$$1 + 1 = 0. \quad (92)$$

Два примера линейных особенностей с $N = 1$ изображены на рис. 10. На рис. 10, а изображен вихрь с одним квантом циркуляции сверхтекучей скорости $2\pi\hbar/2m_3$ (в He³ в квант циркуляции входит удвоенная масса атома $2m_3$ — масса пары)

$$\mathbf{l} = \hat{z}, \quad \Delta' + i\Delta'' = e^{i\varphi} (\hat{x} + i\hat{y}), \quad \mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{2m_3} \nabla \varphi = \frac{\hbar}{2m_3 \rho} \hat{\varphi}, \quad \oint \mathbf{v}^s d\mathbf{r} = \frac{2\pi\hbar}{2m_3}, \quad (93)$$

где ρ , z , φ — координаты цилиндрической системы координат. На рис. 10, б изображен объект того же класса, но без какого-либо сверхтекучего течения:

$$\mathbf{l} = \hat{\rho}, \quad \Delta' + i\Delta'' = \hat{\varphi} + i\hat{z}, \quad \mathbf{v}^s = 0. \quad (94)$$

Объект имеет особенность в поле \mathbf{l} и называется радиальной дисгирацией. Поскольку оба линейных дефекта принадлежат одному классу, они могут непрерывно переходить друг в друга. При этом циркуляция сверхтекучей скорости вокруг линии не сохраняется. Таким образом, в отличие от HeII ,

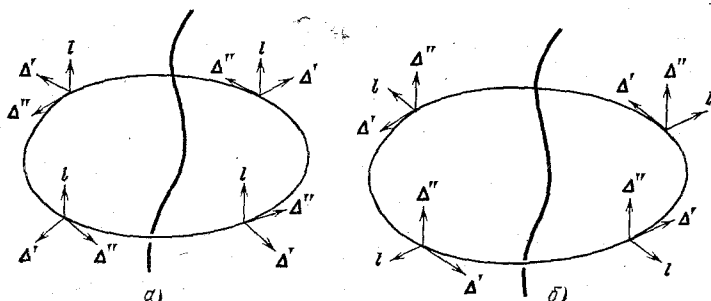


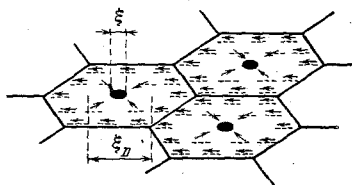
Рис. 10. Линейные особенности в А-фазе, соответствующие классу Γ_1 замкнутых контуров: сингулярный вихрь (а), радиальная дисгирация (б).

топологический инвариант, характеризующий линейные особенности в А-фазе, не связан с квантованием циркуляции. Квантование циркуляции, полученное в ячейке периодической структуры вращающейся А-фазы (91), связано с совсем другим топологическим инвариантом ν , характеризующим непрерывные периодические распределения поля \mathbf{l} .

г) Сингулярный вихрь и структурный фазовый переход

Линейный дефект из класса $N = 1$, который обладает наименьшей энергией и тем самым реально осуществляется, в отличие от остальных дефектов этого класса, которые могут непрерывно в него релаксировать, представляет

Рис. 11. Решетка сингулярных вихрей во вращающемся сосуде (линейные дефекты с минимальной энергией в классе $N = 1$). Распределения полей \mathbf{l} и \mathbf{d} показаны соответственно стрелками и прерывистыми линиями.



собой вихрь с одним квантом циркуляции, но с гораздо более сложной структурой, чем вихрь, даваемый формулой (93) (см. 55-57).

Обратим внимание на то, что и у сингулярного вихря поле сверхтекучей скорости не имеет особенностей, так как сингулярностью обладает только поле \mathbf{l} . Завихренность $\text{rot } \mathbf{v}^s$ сосредоточена в области $\sim \xi_D$ от оси вихря, в так называемом «мягком» коре вихря (в отличие от «жесткого» кора вихря $\sim \xi$, возникающего за счет особенности в поле \mathbf{l} (см. рис. 11)).

При малых угловых скоростях вращения, когда $\ln(r_0/\xi_D)$ достаточно велик, несингулярная периодическая структура энергетически выгоднее решетки сингулярных вихрей. В следующем разделе мы увидим, что в магнитном поле ситуация изменяется и решетка сингулярных вихрей становится выгоднее. Поэтому можно будет наблюдать структурный фазовый переход при изменении величины поля. На рис. 12 показано, как может реально осуществляться такой переход от сингулярной структуры к несингулярной. Для простоты мы полагаем, что поле \mathbf{l} в сингулярном вихре устроено, как на рис. 10, а. В процессе перехода пары вихрей с $N = 1$ объединяются в вихри

с двумя квантами циркуляции (рис. 12, б), которые принадлежат классу $N = 0$ в силу равенства (92) и поэтому могут рассасываться путем деформации поля \mathbf{l} . При рассасывании образуются вихри с концами — монополи, которые разбегаются вверх и вниз, съедая сингулярные вихри (рис. 12, в).

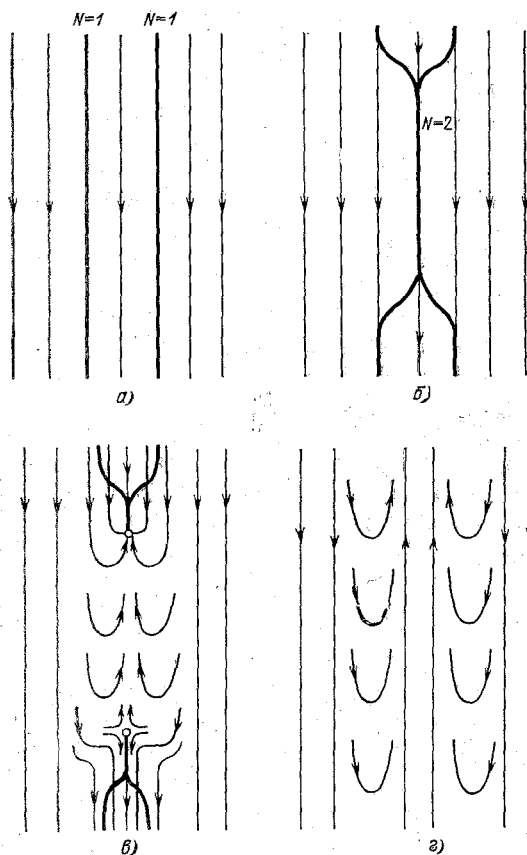


Рис. 12. Процесс слияния двух сингулярных вихрей (а), приводящий к образованию несингулярного вихря (б).

В промежуточном состоянии образуется неустойчивый сингулярный вихрь с двумя квантами циркуляции (б), который разрывается, образуя монополи — вихри с концами (в), убегающие на поверхность сосуда.

вектора \mathbf{l} в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} . Эти переменные независимы, никаким поворотом \mathbf{l} в плоскости невозможно устранить набег фазы Φ . Сверхтекучая скорость $\mathbf{v}^s = (\hbar/2m_3) \nabla \Phi$ не связана с орбитальной переменной \mathbf{l} , поскольку для плоского распределения \mathbf{l} правая часть соотношения Мермина — Хо (10) обращается в нуль и \mathbf{v}^s оказывается потенциальной. Поскольку фаза Φ задана на окружности, основные сверхтекучие свойства А-фазы в магнитном поле должны быть аналогичны свойствам HeII и He³-В. В частности, вихри должны обладать квантованной циркуляцией с квантом циркуляции, равным $2\pi\hbar/2m_3$. Вихри с четной и нечетной циркуляцией обладают, однако, разной структурой кора. Размер кора вихря с четным числом квантов равен длине λ , характерной для взаимодействия между \mathbf{H} и \mathbf{l} :

$$\lambda = \begin{cases} \xi_D \frac{25}{H}, & H < 25 \text{ Гс}, \\ \xi_D, & H > 25 \text{ Гс}. \end{cases} \quad (96)$$

В результате образуется несингулярное состояние (рис. 12, г). В этом состоянии сверхтекучая скорость, даваемая в аксиально симметричном случае формулой (37), меняется от нуля в центре до $\hbar/m_3 r$ на периферии. Т. е. мы получили несингулярный вихрь с двумя квантами циркуляции, образующий ячейку несингулярной периодической структуры.

д) Вращение в магнитном поле

Мы видели, что необычные сверхтекучие свойства А-фазы являются следствием определенной структуры параметра порядка. Эту структуру можно менять путем внешнего воздействия, например, магнитного поля, меняя тем самым и поведение А-фазы. Магнитное поле \mathbf{H} , действуя на спиновый вектор \mathbf{d} , влияет через дипольное взаимодействие и на \mathbf{l} , ориентируя \mathbf{l} перпендикулярно \mathbf{H} (см. обзор ¹). Параметр вырождения ψ имеет в этом случае вид

$$\psi = e^{i\Phi} (\mathbf{h} + i [\mathbf{l}, \mathbf{h}]),$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}. \quad (95)$$

У параметра вырождения две степени свободы — фаза конденсата Φ и угол поворота

Вблизи кора и внутри него магнитное поле уже не может удерживать \mathbf{l} в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , и параметр порядка меняется во всем пространстве трехмерных поворотов. Внутри области размера λ четный вихрь нигде не имеет особенностей, поскольку принадлежит классу $N = 0$ в пространстве трехмерных поворотов. Число квантов циркуляции $2\pi\hbar/2m_3$ у четного вихря равно удвоенному топологическому инварианту ν (88), где интеграл берется по поверхности, пересекающей вихрь. Нечетный вихрь, напротив, принадлежит классу $N = 1$, и поэтому внутри «мягкого» кора

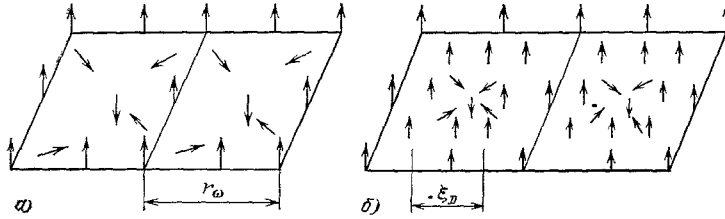


Рис. 13. Непрерывное изменение несингулярной периодической структуры (а) во вращающемся $\text{He}^3\text{-A}$ при увеличении магнитного поля.

Несингулярные вихри становятся хорошо локализованными (б).

с размером λ находится жесткий кор с размером порядка длины когерентности ξ , где параметр ψ не определен. В результате четный и нечетный вихри имеют различный вид энергии. Например, энергия вихря с $N = 2$ равна

$$\frac{E_2}{L} = 1,4 \frac{\pi}{2} \frac{\hbar^2}{m_3^2} \rho^s \ln \frac{R}{\lambda}, \quad N = 2. \quad (97)$$

Энергия же вихря с $N = 1$ в магнитном поле практически не меняется.

Посмотрим теперь, что будет происходить во вращающемся сосуде, при увеличении магнитного поля от нуля ⁵⁵. В слабых полях, когда λ больше размера ячейки r_ω , периодическая несингулярная структура (см. п. б)) не возмущается. При увеличении поля, когда λ становится меньше r_ω , несингулярные квантовые вихри в ячейке становятся хорошо локализованными с размером кора $\sim \lambda$ (см. рис. 13, где изображен случай, когда ячейка структуры является неособым вихрем с двумя квантами циркуляции, в формуле (91) это соответствует равному единице топологическому инварианту ν (88)).

е) Эксперименты с вихрями в А- и В-фазах

Вихри в А-фазе были недавно экспериментально обнаружены ^{49, 50} в Технологическом университете г. Хельсинки, где построена вращающаяся миная лаборатория, предназначенная для исследования сверхтекучего He^3 при вращении. Вихри детектировались по появлению нового, так называемого вихревого, пика поглощения ЯМР, связанного с возбуждением спиновых волн, локализованных на мягком коре вихрей. Теоретически как сингулярные, так и несингулярные вихри в магнитном поле $H \sim 300$ Гс, используемом в экспериментах с ЯМР, должны приводить к вихревому пику, так как оба сорта вихрей обладают мягким кором. Сравнение теоретических результатов ⁵⁶ для положения вихревого пика с экспериментальными данными позволяет утверждать, что обнаружены именно несингулярные вихри, несмотря на то, что в этих полях они менее выгодны, чем сингулярные. Дело в том, что несингулярному вихрю легче родиться, чем сингулярному, для которого требуется создание жесткого кора. Поэтому несингулярные вихри, быстро рождаясь, занимают все позиции в периодической структуре, не оставляя места для сингулярных вихрей. Переход же из одной структуры в другую затруднен, поскольку, как видно из рис. 12, процесс расщепления несингулярного вихря на два сингулярных, обратный к изображенному на рисунке,

требует больших энергетических затрат. Подробнее о вихрях в А-фазе и об их влиянии на ЯМР см. в ^{51, 58, 59}.

Обнаружены вихри и в В-фазе He^3 (см. ^{60, 61}). Хотя ожидалось, что эти вихри будут похожи на вихри в HeII , между ними оказалось существенное различие: в структуре кора вихря. В то время как в коре вихря в HeII сверхтекучесть нарушается ($\rho^s = 0$), в коре вихря в В-фазе могут оказаться другие сверхтекучие фазы с непрерывным распределением завихренности $\text{rot } \mathbf{v}^s$ и без исчезновения сверхтекучести. Кор может содержать как А-фазу, так и другую фазу с нетривиальным нарушением градиентной инвариантности — β -фазу с ферромагнитоупорядоченными спинами (см. ⁶²). Экспериментально обнаружен фазовый переход I рода при $T = 0,6T_c$ ($P = 29,4$ атм) из одной структуры ядра в другую. Обнаружен также магнитный момент вихря, сосредоточенный в его коре ⁶³. Существование спонтанного магнитного момента в ядре вихря — результат специфического нарушения симметрии в В-фазе, сохраняющей инвариантность относительно комбинированного вращения спинового и орбитального пространства. Благодаря этому орбитальный момент импульса жидкости, связанный с движением вокруг вихря, приводит к появлению спинового момента. Подробнее о вихрях в В-фазе см. ⁶¹⁻⁶⁵.

ж) Вихреобразование в магнитном поле

В заключение этой главы отметим, что магнитное поле влияет и на устойчивость потока. Макроскопический поток в канале становится устойчивым, как в He II , из-за квантования потока вдоль канала. Распад тока может происходить при малых скоростях лишь за счет активационного рождения несингулярных квантованных вихрей с размером кора $\sim \lambda$ (см. (96)), распад тока за счет инстантонной динамики вектора \mathbf{l} или за счет безактивационного рождения несингулярных вихрей может стать возможным лишь при скоростях, превышающих $\hbar/m_z\lambda$ ⁴⁶. Меняя магнитное поле, мы имеем уникальную возможность исследовать зависимость вихреобразования от радиуса кора вихря, и, возможно, это прольет свет на пока еще не решенную проблему вихреобразования в He II . Критическая скорость v_c , начиная с которой течение в канале А-фазы становится диссипативным, наблюдалась экспериментально ⁶⁶. Критическая скорость v_c оказалась независимой от температуры и близкой к $\hbar/m\xi_D$ ($v_c \sim 0,5$ мм/с) при больших полях ($H \geq 40$ Гс). При уменьшении поля v_c уменьшалась, отражая увеличение радиуса кора λ (96) при уменьшении поля. Уширение линии поглощения ЯМР, наблюдаемое при превышении критической скорости, свидетельствует об интенсификации вихреобразования. Та же величина критической скорости наблюдалась в экспериментах с вращением ⁴⁹⁻⁵¹, свидетельствуя о рождении несингулярных вихрей.

6. СИСТЕМЫ, ПОДОБНЫЕ А-ФАЗЕ

Мы видели, что уникальность сверхтекучих свойств А-фазы является следствием своеобразного нарушения симметрии, при котором параметр порядка не инвариантен относительно градиентного преобразования, но инвариантен относительно комбинированного преобразования: градиентное преобразование + поворот в орбитальном пространстве. Могут ли быть другие вещества с подобным нарушением симметрии?

а) А₁-фаза He^3

В сильных магнитных полях в узкой области температур между нормальным He^3 и He^3 -А существует еще одна сверхтекучая фаза He^3 — А₁-фаза ¹. В этой жидкости спариваются только те атомы, спины которых

ориентированы по полю. Поэтому спины куперовских пар ориентированы одинаково — по полю. Орбитальная структура куперовской пары такая же, как у А-фазы, т. е. (1). Это приводит к тому, что многие сверхтекучие свойства А- и A_1 -фаз похожи. В обеих фазах могут существовать несингулярные вихри (радиус кора этих вихрей в обеих фазах в сильных полях имеет порядок ξ_D) и поверхностные вихри — буджумы, которые осуществляют релаксацию потока соответственно внутри канала и на его поверхности. Вместе с тем имеются существенные отличия, связанные с тем, что общая структура параметра порядка, включая и его спиновую часть, у этих фаз различна. Полный параметр порядка с учетом спина задается матрицей $A_{\mu k}$, имеющей в A_1 -фазе следующий вид:

$$A_{\mu k} = \text{const} \cdot (d'_\mu + i d''_\mu) (\Delta'_k + i \Delta''_k) e^{i\Phi}; \quad (98)$$

здесь d' и d'' — единичные ортогональные друг другу векторы; их векторное произведение $s = [d', d'']$ показывает направление спинового момента пары. Орты d' , d'' , s преобразуются как векторы при повороте системы координат в спиновом пространстве. Нарушение симметрии в A_1 -фазе даже более интересное, чем в А-фазе. Параметр порядка не меняется, если градиентное преобразование сопровождается соответствующим поворотом либо орбитального, либо спинового пространства, либо обоих пространств одновременно. Т. е. два комбинированных преобразования с параметрами α и α'

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi + \alpha, \\ d' + i d'' &\xleftrightarrow{\quad} R(-\alpha' s) (d' + i d''), \\ \Delta' + i \Delta'' &\xleftrightarrow{\quad} R((\alpha' + \alpha) I) (\Delta' + i \Delta''), \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

не меняют $A_{\mu k}$. Сверхтекучая скорость v^s , определенная инвариантным относительно этих преобразований образом, имеет следующий вид:

$$v^s = \frac{\hbar}{2m_3} (\nabla \Phi + \Delta'_k \nabla \Delta''_k + d'_\mu \nabla d''_\mu) \quad (100)$$

и удовлетворяет модифицированному соотношению Мермина — Хо (см. (10)):

$$\text{rot } v^s = \frac{\hbar}{4m_3} (e_{imn} l_i [\nabla l_m, \nabla l_n] + e_{\alpha\mu\nu} s_\alpha [\nabla s_\mu, \nabla s_\nu]). \quad (101)$$

Из вида сверхтекучей скорости, в частности, следует, что релаксация сверхтекучего тока в принципе может происходить путем осцилляций вектора s . Реально это, однако, не происходит, потому что s довольно жестко связано с магнитным полем.

Есть и реально наблюдаемые следствия такого нарушения симметрии. Поток массы относительно нормальной компоненты $\partial \varepsilon / \partial v^s = j - \rho v^n$ (см. (49)) одновременно представляет собой сверхтекучий поток спина, поскольку спины пар ориентированы одинаково. Благодаря этому 2-й звук в A_1 -фазе представляет собой зацепленные колебания температуры и намагниченности^{67,68}. Из-за большой спиновой жесткости скорость распространения 2-го звука не мала, как в А-фазе (см. п. г) гл. 3), а близка к скорости спиновых волн $\sim 10^3$ см/с, что сделало возможным их экспериментальное обнаружение⁶⁹.

б) А-фаза в нейтронных звездах

Система, подобная А-фазе, может возникнуть и в нейтронных звездах¹⁴. Предполагается, что в нейтронных звездах осуществляется такое же куперовское спаривание, как и в сверхтекучем He^3 , т. е. с орбитальным моментом $L = 1$ и спиновым моментом $S = 1$, причем из-за сильного спин-орбитального взаимодействия осуществляется состояние с суммарным моментом $J = 2$. Параметр порядка, как и в He^3 , представляет собой комплексную матрицу A_{ik} , которая из-за ограничения на полный момент J должна быть симметрич-

ной и бесследной:

$$A_{ik} = A_{ki}, \quad A_{ii} = 0.$$

Параметр порядка в фазе с нетривиальным нарушением симметрии имеет следующий вид:

$$A_{ik} = \text{const} \cdot e^{i\Phi} (\Delta'_i + i\Delta''_i) (\Delta'_k + i\Delta''_k); \quad (102)$$

здесь, как в А-фазе, Δ' и Δ'' — единичные ортогональные векторы, их векторное произведение $\mathbf{l} = [\Delta', \Delta'']$ указывает одновременно направление орбитального и спинового моментов пары. Параметр порядка не меняется при одновременном выполнении градиентного преобразования и поворота спин-орбитального пространства вокруг оси

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi + \alpha, \\ \Delta' + i\Delta'' &\rightarrow \mathbf{R} \left(\frac{\alpha}{2} \mathbf{l} \right) (\Delta' + i\Delta''). \end{aligned} \quad (103)$$

Инвариантно определенная сверхтекучая скорость

$$\mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{2m_n} (\nabla\Phi + 2\Delta'_i \nabla\Delta''_i), \quad (104)$$

где m_n — масса нейтрона, удовлетворяет модифицированному соотношению Мермина — Хо:

$$\text{rot } \mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{2m_n} e_{imn} l_i [\nabla l_m, \nabla l_n]. \quad (105)$$

Во вращающейся нейтронной звезде со структурой (102) должна существовать несингулярная периодическая структура в поле вектора \mathbf{l} , в отличие от сингулярной решетки вихрей, которая должна существовать, если осуществляется другая фаза. Такое различие может привести к экспериментально наблюдаемым следствиям.

в) Сверхпроводящая А-фаза и магнитный монополю

Интересные явления следует ожидать в тех еще не обнаруженных пока сверхпроводниках, в которых куперовское спаривание осуществляется в p -состоянии со структурой А-фазы. Вот только некоторые из наиболее удивительных свойств таких сверхпроводников: отсутствие эффекта Мейснера, связанное с непотенциальностью сверхтекучей скорости, и возможность существования монополеподобных дефектов — образований с полем вектора потенциала \mathbf{A} , совпадающим с полем \mathbf{A} вблизи монополя Дирака. Рассмотрим такой дефект. Для простоты энергию сверхпроводника в лондоновском пределе запишем в упрощенном виде, оставляя лишь две константы ρ^s и K из семи возможных в (31):

$$F = \int dV \left\{ \frac{1}{2} \rho^s \left(\mathbf{v}^s - \frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2} K (\nabla \cdot \mathbf{l})^2 \right\}. \quad (106)$$

Уравнения, получающиеся путем минимизации F при условии Мермина — Хо (10), имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} &= 4\pi \mathbf{j}, \\ K (\Delta \mathbf{l})_{\perp} + \frac{\hbar}{2m_e} [\mathbf{l}, (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{l}] &= 0, \\ \mathbf{j} &= \rho^s \left(\mathbf{v}^s - \frac{e}{m_e c} \mathbf{A} \right). \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Ищем решение этих уравнений на расстояниях от дефекта, превышающих характерную глубину проникновения магнитного поля в обычных сверх-

проводниках:

$$\lambda = \frac{m_e c}{e} (4\pi\rho^s)^{-1/2}.$$

В этом случае вектор-потенциал \mathbf{A} полностью компенсирует сверхтекучую скорость в потоке: $\mathbf{A} = (m_e c/e) \mathbf{v}^s$, и решение, описывающее монополе подобный дефект, имеет следующий вид ($\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ — орты сферической системы координат):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}^s = \frac{\hbar}{2m_e} \hat{\varphi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta}, \\ \mathbf{A} &= \frac{m_e c}{e} \mathbf{v}^s = \frac{\hbar c}{2e} \hat{\varphi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta}. \end{aligned} \quad (108)$$

Дефект представляет собой точечную особенность в поле вектора \mathbf{I} , из которой вытекает линейная особенность полей \mathbf{v}^s и \mathbf{A} — вихрь с двумя квантами циркуляции (см. рис. 14). В то время как в обычном сверхпроводнике магнитное поле из-за эффекта Мейснера экспоненциально спадает с увеличением расстояния от вихря, в данном случае магнитное поле

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{m_e c}{e} \text{rot } \mathbf{v}^s = \frac{\hbar c}{2e} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (109)$$

спадает степенным образом из центра точечной особенности. Магнитный заряд монополеподобного дефекта равен $\hbar c/2e$. Магнитный поток, $2\pi\hbar c/e$, радиально выходящий из точечного дефекта, компенсируется магнитным потоком, втекающим в него по вихрю. Поле \mathbf{A} имеет точный вид вектора-потенциала монополя Дирака. Обратим внимание на то, что если настоящий магнитный монополь ^{70,71} сидит на этом монополеподобный дефект, то линейная особенность в поле \mathbf{v}^s полностью исчезнет. Останется лишь точечная особенность в поле \mathbf{I} , в центре которой будет находиться магнитный монополь.

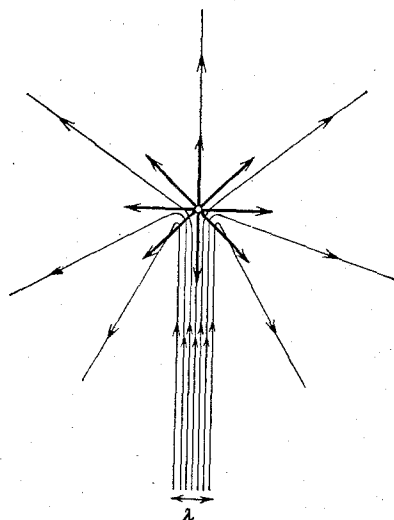


Рис. 14. Монополеподобный дефект в гипотетической сверхпроводящей А-фазе.

Жирные линии — поле вектора \mathbf{I} , тонкие линии изображают магнитное поле \mathbf{H} .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, уникальность свойств А-фазы и других подобных ей систем связана со своеобразным нарушением симметрии, при котором сохраняется инвариантность относительно комбинированного преобразования, включающего в себя градиентное преобразование.

Внутренняя симметрия определяет и другие свойства сверхтекучих фаз He^3 — магнитные, жидкокристаллические, электрические и т. д. Особенно полезным оказался симметричный подход для изучения недавно обнаруженных вихревых структур в сверхтекучем He^3 -В. Исследование необычного нарушения так называемой относительной спин-орбитальной симметрии в В-фазе привело к экспериментальному обнаружению магнитного момента, сконцентрированного в жестких корках квантовых вихрей, возникающих во вращающемся сосуде ⁶³. Симметричный подход использовался для описания обнаруженного во вращающейся В-фазе фазового перехода, происходящего внутри кора вихрей ^{60,61}. В результате выяснилось, что существует 5 типов вихрей, имеющих одно и то же число квантов циркуляции, но отличающихся симметричной структурой кора ⁶². В корках одних вихрей сверхтекучесть нарушается, как у вихрей в $\text{He} \text{ II}$, коры других вихрей сверхтекучи, как

в А-фазе. Есть вихри со спонтанно нарушенной четностью, они обладают спонтанной электрической поляризацией вдоль оси вихря. У других вихрей со спонтанно нарушенной комбинированной четностью в коре имеется неза-
 тухающий сверхтекучий поток вдоль оси вихря и т. д.

Уникальные сверхтекучие фазы He^3 по богатству нарушенных симметрий и по разнообразию топологически нетривиальных объектов не имеют себе равных среди других конденсированных сред и могут соперничать с вакуумами в современных теориях поля. Не удивительно поэтому, что изучение симметрии в сверхтекучем He^3 оказывается полезным для многих других областей физики.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР,
 Черноголовка (Московская обл.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Минеев В. П. — УФН, 1983, т. 139, с. 303.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
3. Mermin N. D., Ho T.-L. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 36, p. 594.
4. Cross M. C. — J. Low Temp. Phys., 1975, v. 21, p. 525.
5. Воловик Г. Е., Минеев В. П. — ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1130.
6. Brinkman W. F., Cross M. C. — In: Progress in Low Temperature Physics/Ed. by D. F. Brewer. Amsterdam: North-Holland, 1978. — V. VIIA, p. 105.
7. Воловик Г. Е., Минеев В. П. — ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1025.
8. Халатников И. М. Теория сверхтекучести. — М.: Наука, 1971.
9. Bethbeder-Matibet O., Nozieres P. — Ann. de Phys., 1969, v. 51, p. 392.
10. Williams M. R. Ph. D. Thesis. — Stanford University, 1979.
11. Воловик Г. Е., Минеев В. П. — ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 989.
12. Muzikar P., Rainer D. — Phys. Rev. Ser. B, 1983, v. 27, p. 4243.
13. Combescot R., Dombre T. — In: Quantum Fluids and Solids — 1983/Ed. E. D. Adams, G. G. Ihas: AIP Conference Proceedings No. 103 (American Institute of Physics). — N. Y., 1983. — P. 261.
14. Mermin N. D. — In: Quantum Liquids/Ed. J. Ruvalds, T. Regge — Amsterdam: North-Holland, 1978. — P. 195.
15. Blaha S. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 874.
16. Воловик Г. Е., Минеев В. П. — Письма ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 647.
17. Mermin N. D. — In: Quantum Fluids and Solids/Ed. S. B. Trickey, E. D. Adams, J. W. Dufty. — N. Y.; Lnd.: Plenum Press, 1977. — P. 3; перевод в кн. Новости фундаментальной физики. — М.: Мир, 1979. — Вып. 10, с. 9.
18. Mermin N. D. — Phys. Today, 1981, v. 34, p. 46.
19. Воловик Г. Е. — Письма ЖЭТФ, 1978, т. 28, с. 65.
20. Toulouse G., Kleman M. K. — J. de Phys. Lett., 1976, t. 37, p. L149.
 Воловик Г. Е., Минеев В. П. — Письма ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 605; ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 2256.
21. Mermin N. D. — Rev. Mod. Phys., 1979, v. 51, p. 591.
22. Mineyev V. P. — In: Soviet Science Review. Physics Reviews/Ed. I. M. Khalatnikov. — Amsterdam: North-Holland, 1981. — V. 2, p. 173.
23. Trebin H.-R. — Adv. Phys., 1982, v. 31, p. 195.
24. Mineyev V. P., Volovik G. E. — Phys. Rev. Ser. B, 1978, v. 18, p. 13197.
25. Bhattacharyya P., Ho T.-L., Mermin N. D. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 1290.
26. Fetter A. L. — Ibid., 1978, v. 40, p. 1656.
27. Cross M. C., Liu M. — J. Phys. Ser. C, 1978, v. 11, p. 1975.
28. Kleinert H. — Phys. Lett. Ser. A, 1979, v. 71, p. 66.
29. Bagley M., Main P. C., Hook J. L., Sandiford D. J., Hall H. E. — J. de Phys. Colloque, 1979, t. C6-39, p. 13.
30. Ho T.-L., Mermin N. D. — Phys. Rev. Ser. B, 1980, v. 21, p. 5190.
31. Ashida M. — Progr. Theor. Phys., 1981, v. 65, p. 409.
32. Nagai K. — J. Low Temp. Phys., 1980, v. 38, p. 677; Progr. Theor. Phys., 1981, v. 65, p. 793.
33. Де Жен П. Физика жидких кристаллов. — М.: Мир, 1977.
34. Cross M. C., Anderson P. W. — In: Proc. of 14th Intern. Conference on Low Temperature Physics, Finland, 1975. — V. 1, p. 29.
35. Hu C. R., Saslow W. M. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 605.
36. Ho T.-L. — Цит. в ¹⁷ сб. — P. 97; перевод, как в ¹⁷, с. 82.
37. Liu M., Cross M. C. — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 296.
38. De Gennes P. G. — Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 44, p. 271.
39. Main P. C. et al. — Цит. в ¹⁷ сб. — P. 117; перевод в ¹⁷, с. 122.

40. Graham R.—Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1431.
41. Hall H. E.—J. de Phys. Colloque, 1978, t-C6, 39, p. 15.
42. Воловик Г. Е.—Письма ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 605.
43. Gay R., Hall H. E., Hook J. R., Sandiford D. J.—Physica. Ser. B, 1981, v. 108, p. 797.
44. Paulson D. N., Krusius M., Wheatley J. C.—Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 599.
Krusius M., Paulson D. N., Wheatley J. C.—J. Low Temp. Phys., 1978, v. 33, p. 225.
45. Hook J. R., Hall H. E.—J. Phys. Ser. C, 1979, v. 12, p. 783.
46. Anderson P. W., Toulouse G.—Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 508.
47. Belavin A., Polyakov A., Schwarz A. S., Tyupkin Y.—Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 85.
48. Воловик Г. Е.—ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 309.
49. Hakonen P. J., Ikkala O. T., Islander S. T., Lounasmaa O. V., Markkula T. K., Roubeau P., Saloheimo K. M., Volovik G. E., Andronikashvili E. L., Garibashvili D. I., Tsakadze J. S.—Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, p. 1838.
50. Hakonen P. J., Ikkala O. T., Islander S. T.—Ibid., v. 49, p. 1258.
51. Hakonen P. J., Ikkala O. T., Islander S. T., Lounasmaa O. V., Volovik G. E.—J. Low Temp. Phys., 1983, т. 53, с. 423.
52. Воловик Г. Е., Копнин Н. Б.—Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 26.
53. Fujita T., Nakahara M., Ohmi T., Tsuneto T.—Progr. Theor. Phys., 1978, v. 60, p. 671.
54. Чечеткин В. Р.—ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1463.
55. Volovik G. E., Hakonen P. J.—J. Low Temp. Phys., 1981, v. 42, p. 503.
56. Seppälä H. K., Volovik G. E.—Ibid., 1983, v. 51, p. 279.
57. Fetter A. L., Sauls J. A., Stein D. L.—Phys. Rev. Ser. B, 1983, v. 28, p. 5061.
58. Salomaa M.—M., Volovik G. E.—Цит. в ¹³ сб.—Р. 21.
59. Fetter A. L.—Ibid.—Р. 229.
60. Иккала О. Т., Воловик Г. Е., Хаконен П. Ю., Буньков Ю. М., Исландер С. Т., Харадзе Г. А.—Письма ЖЭТФ, 1982, т. 35, с. 338.
61. Бунков Ю. М., Hakonen P. J., Krusius M.—Цит. в ¹³ сб.—Р. 194.
62. Salomaa M. M., Volovik G. E.—Phys. Rev. Lett., 1983, v. 51, p. 2040.
63. Hakonen P. J., Krusius M., Salomaa M. M., Simola J. T., Bunkov Yu. M., Mineev V. P., Volovik G. E.—Phys. Rev. Lett., 1983, v. 51, p. 1362.
64. Воловик Г. Е., Гонгадзе А. Д., Гургенишвили Г. Е., Саломая М. М., Харадзе Г. А.—Письма ЖЭТФ, 1982, т. 36, с. 404.
65. Hakonen P. J., Volovik G. E.—J. Phys. Ser. C, 1982, v. 15, p. L1277.
66. Raalanen M. A., Osheroff P. P.—Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 362.
67. Гургенишвили Г. Е., Харадзе Г. А.—Письма ЖЭТФ, 1980, т. 31, с. 593.
68. Liu M.—Zs. Phys., 1980, Bd. B40, S. 175.
69. Osheroff D. D.—Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 25.
70. 't Hooft G.—Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 79, p. 276.
71. Поляков А. М.—Письма ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430.

