

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУКМЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

535.24

**ФОТОМЕТРИЯ И КОГЕРЕНТНОСТЬ: ВОЛНОВЫЕ АСПЕКТЫ  
ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ****Л. А. Апресян, Ю. А. Кравцов****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение . . . . .	689
2. Фотометрия и статистическое определение понятия яркости для свободного излучения . . . . .	691
а) Фотометрическое описание свободного излучения (691). б) Модель волнового поля (692). в) Взаимосвязь фотометрии и волновой теории для свободного излучения (693). г) Локальный спектр квазиоднородного поля (694).	
3. Яркость плоских источников и обобщенная фотометрия . . . . .	696
а) Фотометрическое описание излучения плоских источников (696). б) Волновое описание и обобщенная яркость плоских источников (696). в) Примеры (698). г) Связь яркости с функцией когерентности в малоугловом приближении (701). д) Предельная разрешающая способность при фотометрических измерениях (702). е) О связи между фотометрическими и корреляционными измерениями (703).	
4. Статистическая теория переноса излучения в рассеивающей среде . . . . .	705
а) Уравнение переноса излучения (705). б) Статистический вывод уравнения переноса излучения (706).	
5. Заключение . . . . .	708
Цитированная литература . . . . .	709

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Фотометрия, т. е. учение об измерении световых величин, сформировалась как самостоятельная область физики задолго до формулировки Максвеллом основных законов электродинамики. Длительное время она с успехом использовалась в разнообразных приложениях оптики, оставаясь неизменно феноменологической теорией, которая оперирует с простыми и, что более важно, наглядными геометрикооптическими понятиями, такими как лучевые трубки, независимые пучки излучения и т. п.

В конце XIX — начале XX века благодаря трудам Хвольсона и Шустера<sup>1,2</sup> фотометрия получила дальнейшее развитие в виде теории переноса излучения, позволившей описывать с помощью феноменологических фотометрических понятий излучение в рассеивающих средах (историю вопроса и более поздние достижения феноменологической теории см. в обзорах<sup>3-7</sup>).

Долгое время феноменологическая фотометрия\*) существовала как замкнутая самосогласованная теория, построенная практически без всякой связи с волновой оптикой и полностью игнорирующая волновые и статистические свойства света (недаром уравнение переноса практически без изменений было перенесено в физику нейтронов). Все, что заимствовала фотоме-

\*) Под этим названием мы будем подразумевать здесь собственно фотометрию, а также теорию переноса излучения.

трия от строгой волновой теории, сводилось, по существу, к утверждению о необходимости перехода к геометрикооптическому пределу  $\lambda \rightarrow 0$ , а также к требованию некогерентности естественных источников света. «Самоочевидность» геометрикооптических образов, на которых строится фотометрия, приводила к явно недостаточному интересу к ее физическим основам, к стремлению трактовать фотометрию изолированно и независимо от электродинамической теории света (см., например, руководства по фотометрии<sup>8,9</sup>).

За последние 10—20 лет положение существенно изменилось. Развитие статистической оптики вскрыло более глубокое — статистико-волновое содержание фотометрии, позволив вывести фотометрические соотношения из первых принципов, т. е. из уравнений Максвелла для случайного электромагнитного излучения. Нетривиальность этих результатов становится ясной сразу же, стоит лишь попытаться придать обычным фотометрическим понятиям более строгий смысл: в рамках традиционного феноменологического подхода такие попытки в конечном итоге оказываются безрезультатными и лишь разрушают первоначальную иллюзию «очевидности» фотометрических понятий. Это замечание в особенности справедливо применительно к теории переноса излучения, когда речь идет об описании излучения в рассеивающих средах. Если для применимости фотометрии свободного излучения в основном достаточно использовать предположения о переходе к геометрикооптическому пределу и о взаимной некогерентности разнонаправленных пучков (как будет показано ниже, эти предположения не являются необходимыми!), то в случае рассеивающей среды традиционный фотометрический подход сталкивается с почти непреодолимыми трудностями. Многие принципиальные вопросы фактически остаются за пределами феноменологической теории. Так, например, в рамках теории переноса остается неясным, что понимать под яркостью излучения вблизи отдельной рассеивающей неоднородности, которая может вовсе и не быть плавной в масштабе длины волны, так что приближение геометрической оптики теряет силу. Удовлетворительный ответ на этот и на аналогичные вопросы может быть дан лишь при более строгом статистическом подходе, когда излучение и среда трактуются как два взаимодействующих случайных поля (естественно, в линейной теории, которой мы здесь всюду ограничимся, все свойства среды считаются заданными и не зависящими от свойств поля).

Главная цель данного обзора — описать состояние вопроса о статистическом и волновом содержании фотометрии и теории переноса излучения, ориентируясь в первую очередь на читателей, привыкших к классическому феноменологическому подходу. Часть из затронутых ниже вопросов нашла отражение в обзорах<sup>10,11</sup> и монографиях<sup>12,13</sup>, которые, однако, не позволяют представить достаточно ясной картины в целом.

Волновое обоснование теории переноса строится в обзоре на основе концепции статистической квазиоднородности излучения (необходимость квазиоднородности была впервые подчеркнута в<sup>21</sup> и позже — в<sup>14,15</sup>, где рассматривался общий случай частично поляризованного излучения в рассеивающей многомодовой среде, хотя в неявном виде это условие использовалось и ранее практически во всех работах по обоснованию фотометрии, см. ниже).

В обзоре приводится довольно подробный список литературы по вопросу обоснования теории переноса излучения. Число статей по этой теме продолжает непрерывно расти, обгоняя число по-настоящему новых результатов.

Авторы посвящают эту работу памяти ее инициатора — Г. В. Розенберга, неожиданная кончина которого помешала ему принять непосредственное участие в составлении данного обзора.

## 2. ФОТОМЕТРИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЯРКОСТИ ДЛЯ СВОБОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

### а) Фотометрическое описание свободного излучения

Прежде всего напомним основные результаты фотометрии и волновой теории для излучения в свободном пространстве. Фотометрическое описание свободного излучения дается спектральной яркостью  $I_\omega = I_\omega(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})$ , заданной в каждой точке пространства  $\mathbf{r}$  для всех направлений  $\hat{\mathbf{n}}$  и частот  $\omega$  (для простоты мы считаем картину излучения стационарной, т. е. не меняющейся со временем  $t$ ). Как известно<sup>8,9,16</sup>, волновое поле в фотометрии рассматривается как совокупность некогерентных (т. е. дающих независимые энергетические вклады) лучевых пучков, так что если в точку  $\mathbf{r}$  поместить произвольно ориентированную воображаемую площадку с нормалью  $\hat{\mathbf{z}}$ , то ее будут пронизывать пучки всевозможных направлений (рис. 1). В соответствии с этой картиной величина яркости  $I_\omega$  позволяет выразить среднюю плотность потока энергии  $\bar{\mathbf{S}}$  и среднюю плотность энергии  $\bar{W}$  обычными соотношениями

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \int \hat{\mathbf{n}} I_\omega(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}) d\Omega_n d\omega,$$

$$\bar{W} = \bar{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int I_\omega(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}) d\Omega_n d\omega,$$

где  $c$  — скорость света. Отсюда видно, что  $I_\omega$  можно определить как

$$I_\omega = \frac{d\bar{S}_z}{d\Omega_n d\omega \cos \theta},$$

где  $\bar{S}_z$  — компонента плотности потока  $\bar{\mathbf{S}}$  в направлении единичного вектора  $\hat{\mathbf{z}}$ , а  $\cos \theta = n_z$ .

Далее для простоты мы ограничимся случаем монохроматического излучения и рассмотрим соответствующие этому случаю значения спектральных плотностей

$$S_\omega = \frac{d\bar{\mathbf{S}}}{d\omega} = \int \hat{\mathbf{n}} I_\omega d\Omega_n, \quad W_\omega = \frac{d\bar{W}}{d\omega} = \frac{1}{c} \int I_\omega d\Omega_n, \quad (1)$$

опуская для кратности аргументы или индексы  $\omega$ :  $S_\omega = S$ ,  $W_\omega = W$ .

Элементарные соображения, связанные с сохранением энергии в лучевой трубке, приводят к основному для фотометрии уравнению переноса излучения для яркости  $I = I_\omega$  (см., например,<sup>16</sup>). В случае однородной среды при удалении от источника излучения одновременно с уширением лучевой трубки уменьшается телесный угол, под которым виден источник, в результате чего яркость оказывается постоянной вдоль луча. Это условие для стационарного поля можно записать в виде уравнения переноса

$$\frac{dI}{ds} = 0, \quad (2)$$

где  $d/ds = \hat{\mathbf{n}} \nabla$  — производная вдоль луча.

Таким образом, в классической фотометрии мы имеем, с одной стороны, соотношения (1), связывающие с яркостью средние поток и плотность энергии, и с другой стороны, уравнение переноса (2), которое определяет поведение яркости излучения. При этом яркость  $I$  считается неотрицательной (энергетической) величиной,  $I \geq 0$ , а в остальном она может быть произвольной. Черта над  $\bar{\mathbf{S}}$  и  $\bar{W}$  в (1) означает усреднение по пространству на не-

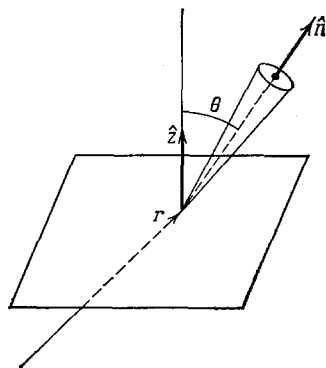


Рис. 1. К определению понятия яркости излучения.

которых масштабах  $L \gg \lambda$  и по интервалу времени  $T \gg \tau$ , где  $\lambda$  и  $\tau$  — характерные длина волны и период излучения (последнее утверждение является несколько расплывчатым, что вообще характерно для феноменологической теории, хотя и «достаточно очевидным»).

Сравним фотометрические соотношения (1) и (2) с результатами строгой волновой теории, где основной величиной является не яркость, а случайная комплексная амплитуда волнового поля. Мы не будем рассматривать здесь квантовые эффекты и ограничимся рамками классической теории, достаточной для понимания существа дела.

### б) Модель волнового поля

В качестве исходной «волновой» модели мы используем модель случайного, для простоты — скалярного поля  $\varphi$ , поскольку учет поляризации излучения для дальнейшего не принципиален и связан, по существу, лишь с техническими трудностями. Будем считать, что мгновенные поток и плотность энергии поля выражаются через вещественный скалярный потенциал как

$$\mathbf{S} = -\dot{\varphi} \nabla \varphi, \quad W = \frac{1}{2} \left[ (\nabla \varphi)^2 + \left( \frac{\dot{\varphi}}{c} \right)^2 \right], \quad (3)$$

где  $\dot{\varphi} \equiv \partial \varphi / \partial t$ . Тогда уравнение непрерывности

$$\nabla \mathbf{S} + \dot{W} = \dot{\varphi} \left( -\Delta \varphi + \frac{\ddot{\varphi}}{c^2} \right) = 0,$$

выражающее закон сохранения энергии, при  $\dot{\varphi} \neq 0$  сводится к волновому уравнению

$$\Delta \varphi - \frac{\ddot{\varphi}}{c^2} = 0. \quad (4)$$

Для монохроматического излучения можно ввести комплексное поле  $u$ , полагая, как обычно,  $\varphi = \text{Re } u e^{-i\omega t}$ . Тогда уравнение (4) принимает форму

$$(\Delta + k_0^2) u = 0, \quad (5)$$

где  $k_0 = \omega/c$ , причем средние по периоду  $\tau = 2\pi/\omega$  значения  $\mathbf{S}$  и  $W$  запишутся как

$$\tilde{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{S} dt = \frac{i\omega}{4} (u \nabla u^* - u^* \nabla u), \quad \tilde{W} = \frac{1}{4} (|\nabla u|^2 + k_0^2 |u|^2). \quad (6)$$

Поле  $u = u(\mathbf{r})$  в (5) естественно рассматривать как случайное, т. е.  $u(\mathbf{r})$  — случайная функция пространственных координат (для простоты будем считать среднее по статистическому ансамблю значение равным нулю,  $\langle u \rangle = 0$ , хотя это требование не является обязательным, см. <sup>78</sup>). Очевидно, величины  $\tilde{\mathbf{S}}$  и  $\tilde{W}$  также будут случайными функциями. Если принять далее естественные предположения о статистической однородности и о пространственной эргодичности  $u$  (для выполнения последнего условия в случае гауссовского поля достаточно потребовать спада корреляции; см., например, <sup>12,17</sup>), то средние по статистическому ансамблю значения  $\langle \tilde{\mathbf{S}} \rangle$  и  $\langle \tilde{W} \rangle$  совпадут со средними по пространству, т. е. со средними значениями  $\bar{\mathbf{S}}$  и  $\bar{W}$ , фигурирующими в феноменологической теории:

$$\langle \tilde{\mathbf{S}} \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) d^3r \equiv \bar{\mathbf{S}}, \quad \langle \tilde{W} \rangle = \bar{W}. \quad (7)$$

Для статистически однородного поля средние значения (7) можно выразить через функцию когерентности:

$$\Gamma = \Gamma(\rho) = \langle u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) \rangle,$$

где  $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . В результате имеем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S} \rangle &= \frac{i\omega}{4} \langle u \nabla u^* - u^* \nabla u \rangle = -\frac{i\omega}{2} \nabla_\rho \Gamma \Big|_{\rho=0}, \\ \langle \overline{W} \rangle &= \frac{1}{4} (k_0^2 - \Delta_\rho) \Gamma \Big|_{\rho=0} = \frac{k_0^2}{2} \Gamma \Big|_{\rho=0}. \end{aligned} \quad (8)$$

В последнем соотношении учтено, что  $\Gamma$  удовлетворяет волновому уравнению

$$(\Delta_\rho + k_0^2) \Gamma = 0, \quad (9)$$

вытекающему непосредственно из волнового уравнения для  $u$  (5).

#### в) Взаимосвязь фотометрии и волновой теории для свободного излучения

Выясним взаимосвязь между феноменологическими выражениями (1) и результатами статистической теории из п. б). Из (1) видно, что яркость  $I = I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})$  имеет смысл углового спектра излучения, и, следовательно, она должна быть как-то связана с пространственным спектром случайного поля, т. е. с преобразованием Фурье от функции когерентности

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{k}} \equiv \int \Gamma(\rho) e^{-i\mathbf{k}\rho} d^3\rho \cdot (2\pi)^{-3}. \quad (10)$$

Подставив в (9) обратное (10) выражение функции когерентности через спектр

$$\Gamma(\rho) = \int \mathcal{Y}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\rho} d^3\mathbf{k}, \quad (11)$$

приходим к уравнению

$$(-\mathbf{k}^2 + k_0^2) \mathcal{Y}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (12)$$

Отсюда видно, что спектральная плотность  $\mathcal{Y}_{\mathbf{k}}$  может быть отличной от нуля лишь при  $k = k_0$ . Физический смысл этого условия состоит в учете волнового характера излучения и связан с тем, что свободное поле  $u$  образуется бегущими плоскими волнами, волновые векторы которых  $\mathbf{k}$  удовлетворяют дисперсионному уравнению  $k = k_0$ . Учитывая это,  $\mathcal{Y}_{\mathbf{k}}$  можно записать в виде произведения дельта-функции  $\delta(k - k_0)$  на некоторую функцию  $I'_{\hat{\mathbf{n}}}$ :

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{k}} = I'_{\hat{\mathbf{n}}} \delta(k - k_0), \quad (13)$$

где  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}/k$ . Подставив (13) и (11) в (8) и сравнивая полученные выражения с (1), находим

$$I = \frac{k_0^3 \omega}{2} I'_{\hat{\mathbf{n}}}. \quad (14)$$

Таким образом, спектр функции когерентности свободного статистически однородного излучения выражается через феноменологическую яркость  $I$  как

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{k}} = aI \frac{\delta(k - k_0)}{k_0^2}, \quad (15)$$

где коэффициент пропорциональности  $a$  в рассматриваемом случае скалярного поля равен  $2/k_0\omega$ , а в общем случае зависит от природы поля (для электромагнитного поля  $a = c/8\pi$ ; см.<sup>12</sup>, с. 116). Наличие в (15) дельта-функции соответствует локализации спектра на дисперсионной поверхности  $k = k_0$ .

Из (15) и (11) следует, что через яркость  $I$  можно выразить не только средние поток и плотность энергии поля (2), но также и функцию когерентности

$$\Gamma(\rho) = a \int I e^{ik \cdot \hat{n} \rho} d\Omega_n. \quad (16)$$

В классической фотометрии его соотношение никак не использовалось, поскольку корреляционные характеристики излучения не относятся к числу традиционных фотометрических величин.

Интересно отметить, что хотя для равновесного теплового излучения связь яркости с корреляционными функциями поля (16) была известна уже давно (см., например, работы<sup>18-20</sup>, где соотношения вида (16) использовались для расчета корреляционных функций теплового излучения), в фотометрии эта связь стала ясна лишь после работ Долина<sup>21,22</sup>, где был рассмотрен специальный случай излучения в малоугловом приближении. Это объясняется тем, что тепловое излучение в свободном пространстве есть пример статистически однородного поля, тогда как в теории переноса основной интерес представляет описание изменений яркости излучения, т. е. учет статистической неоднородности. Поэтому для использования в теории переноса (16) необходимо сначала обобщить на случай статистически неоднородных полей, что, по существу, и было сделано в<sup>21,22</sup>.

#### г) Локальный спектр квазиоднородного поля

Согласно (15) спектр волнового поля  $\mathcal{Y}_k$  пропорционален яркости излучения. Между тем соотношение (15), как и само понятие спектра  $\mathcal{Y}_k$ , применимо лишь для статистически однородного поля  $u$ , когда яркость  $I$  не зависит от пространственных координат. Реальные физические поля никогда не являются строго статистически однородными уже в силу своей пространственной ограниченности, причем необходимость учета зависимости  $I$  от  $\mathbf{r}$  для конечных физических систем очевидна. К счастью, условие статистической однородности можно значительно ослабить: для «волнового» обоснования фотометрии оказывается достаточным потребовать, чтобы поле было статистически квазиоднородным. Последнее означает, что поле отличается от статистически однородного не слишком сильно — в том смысле, что его статистические характеристики могут плавно (в масштабе радиуса когерентности) меняться от точки к точке.

Для описания квазиоднородного поля необходимо обобщить обычное понятие спектра (10) с тем, чтобы учесть возможность слабой неоднородности. Такое обобщение мы будем называть *локальным спектром* флуктуаций с волновым вектором  $\mathbf{k}$  вблизи точки  $\mathbf{r}$  и обозначим как  $\mathcal{Y}_k(\mathbf{r})$ . Очевидно, что локальный спектр должен выражаться линейным преобразованием от функции когерентности:  $\mathcal{Y}_k(\mathbf{r}) = \hat{Q}\Gamma$ , где  $\hat{Q}$  — некоторый линейный оператор. Ввести спектр  $\mathcal{Y}_k(\mathbf{r})$  так, чтобы он строго удовлетворял всем интуитивным свойствам спектра, оказывается невозможным уже из-за приближенности самого понятия «волнового вектора  $\mathbf{k}$  вблизи точки  $\mathbf{r}$ ». Можно рассматривать разные определения локальных спектров (см. в этой связи работы<sup>23-28</sup>, где аналогичные понятия спектров обсуждались главным образом для нестационарных процессов). При наиболее распространенном определении в качестве локального спектра принимают так называемую *функцию Вигнера*

$$\mathcal{Y}_k(\mathbf{R}) = \int e^{-ik \cdot \rho} \left\langle u \left( \mathbf{R} + \frac{\rho}{2} \right) u^* \left( \mathbf{R} - \frac{\rho}{2} \right) \right\rangle d^3\rho \cdot (2\pi)^{-3}, \quad (17)$$

введенную Вигнером в квантовую механику для совершенно иных целей (как первый пример квазивероятности)<sup>29,95</sup>. Легко видеть, что функция (17) вещественна и для статистически однородного поля  $u$  совпадает с обычным

спектром  $\mathcal{Y}_k$  (10). Однако при наличии статистической неоднородности она может принимать отрицательные значения, и, следовательно, в общем случае ей нельзя приписать энергетический смысл. Лишь в случае квазиоднородного поля, которое не слишком сильно отличается от статистически однородного, становится допустимой трактовка функции Вигнера как меры интенсивности флуктуаций с волновым вектором  $\mathbf{k}$  вблизи точки  $\mathbf{r}$ . Необходимость этого требования не является недостатком функции Вигнера и присуща любому другому разумному определению локального спектра.

Качественно условие квазиоднородности можно записать в виде неравенства

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{R}} \right| \ll \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right|, \quad \Gamma = \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \left\langle u \left( \mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) u^* \left( \mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \right\rangle, \quad (18)$$

которое означает малость изменений функции когерентности по аргументу «центра тяжести»  $\mathbf{R}$  по сравнению с ее изменениями по разностной переменной  $\boldsymbol{\rho}$  (для статистически однородного поля  $\partial \Gamma / \partial \mathbf{R} = 0$  и (18) выполняется с любой степенью точности). При выполнении неравенства (18), используя вытекающие из (5) волновые уравнения для функции когерентности  $\Gamma$ , можно показать, что для локального спектра приближенно будет выполняться соотношение (15), т. е.

$$\mathcal{Y}_k(\mathbf{R}) = a I(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \frac{\delta(k - k_0)}{k_0^2}, \quad (19)$$

где яркость  $I$  теперь уже может плавно зависеть от  $\mathbf{R}$ . С учетом определения  $\mathcal{Y}_k(\mathbf{R})$  (17) отсюда следует аналогичное (16) выражение:

$$\Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = a \int I(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) e^{i k_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\rho}} d\Omega_n. \quad (20)$$

Подставив это соотношение в (8) и пренебрегая тем самым в выражении для  $\langle \hat{W} \rangle$  членами порядка  $\nabla_{\mathbf{R}} \Gamma$ , мы снова получаем фотометрические соотношения вида (4), где средние поток и плотность энергии теперь уже могут плавно зависеть от пространственных координат  $\mathbf{R}$ . Далее, из (20) и волнового уравнения для  $\Gamma$  с учетом условия квазиоднородности (18) для  $I(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})$  вытекает уравнение переноса (2). Таким образом, мы получили в «квазиоднородном пределе» (18) волновое обоснование основных фотометрических соотношений (1) и (2).

Отметим, что, хотя согласно (20) яркость  $I$  позволяет выразить функцию когерентности волнового поля, обратное выражение яркости через функцию когерентности неоднозначно. Это связано с тем, что соотношение (20) справедливо лишь для квазиоднородного поля, для которого выполняется неравенство (18). Другими словами, не всякая функция когерентности допускает разложение в угловой спектр вида (20). Так, для свободного излучения разложение случайной амплитуды  $u$  в пространственный спектр содержит, вообще говоря, вклад от неоднородных — затухающих волн. Этот вклад отвечает статистически неоднородному полю и не учитывается в выражении (19), где поле считается статистически однородным и образованным только бегущими волнами. Простейшее из возможных обращений (20) нетрудно получить из соотношения (19) простым интегрированием по  $k$ , что дает

$$I = I(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{a} \int_0^\infty k^2 dk \int \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) e^{-i k \boldsymbol{\rho}} d^3 \boldsymbol{\rho} (2\pi)^{-3}. \quad (21)$$

Это соотношение впервые обсуждалось в работе <sup>30</sup> для задачи о скалярном излучении плоских источников (см. также <sup>31</sup>, где эта задача рассмотрена для векторного электромагнитного излучения). Другие формы выражения  $I$  через  $\Gamma$  можно получить, домножив предварительно обе части (19) на произвольную функцию  $\varphi(\mathbf{k})$ .

Подчеркнем, что при выполнении условий квазиоднородности для обоснования (1) вместо функции Вигнера можно было бы использовать и другие, отличные от (17) определения локальных спектров, придя в конечном итоге к эквивалентным результатам. Фактически существенным для обоснования фотометрии является не столько выбор определения локального спектра, сколько необходимое требование квазиоднородности (18), которое выражает ограничение на статистику волнового поля, допускающего фотометрическое описание.

До сих пор мы говорили о монохроматическом излучении, для которого зависимость поля от времени описывается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Вполне аналогичные рассуждения сохраняются и применительно к немонохроматическому полю, причем требование квазиоднородности, естественно, нужно дополнить условием квазистационарности поля (совместно эти два условия можно объединить под названием пространственно-временной квазиоднородности).

### 3. ЯРКОСТЬ ПЛОСКИХ ИСТОЧНИКОВ И ОБОБЩЕННАЯ ФОТОМЕТРИЯ

#### а) Фотометрическое описание излучения плоских источников

Следующей по сложности за описанием свободного излучения является задача об излучении плоских источников в свободном пространстве. Для этой задачи известно строгое решение, позволяющее непосредственно сравнить фотометрический и волновой подходы. Рассмотрим сначала фотометрическое описание этой задачи.

В фотометрии плоские источники излучения можно задать распределением яркости  $I^0(\mathbf{r}_\perp, \hat{\mathbf{n}})$  по плоскости  $z = 0$  (здесь и далее  $\mathbf{a}_\perp$  означает поперечную относительно  $z$  компоненту вектора  $\mathbf{a}$ ). Тогда яркость излучения  $I$  при  $z > 0$  выразится через яркость источников  $I^0$  как решение уравнения переноса (2):

$$I = I(\mathbf{r}_\perp, z; \hat{\mathbf{n}}) = I^0\left(\mathbf{r}_\perp - \frac{z\hat{\mathbf{n}}_\perp}{n_z}, \hat{\mathbf{n}}\right), \quad (22)$$

что отвечает сохранению яркости вдоль лучей.

Используя яркость (22), можно выразить функцию когерентности поля в соответствии с (20), что дает

$$\Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = a \int I^0\left(\mathbf{R}_\perp - R_z \frac{\hat{\mathbf{n}}_\perp}{n_z}, \hat{\mathbf{n}}\right) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \boldsymbol{\rho}} d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}. \quad (23)$$

Сравним это соотношение с результатами волновой теории.

#### б) Волновое описание и обобщенная яркость плоских источников

В волновой теории вместо яркости источников  $I^0$  на плоскости  $z = 0$  задается граничное значение комплексной амплитуды поля  $u^0(\mathbf{r}_\perp)$ , которое позволяет выразить значение амплитуды дифрагированного поля  $u$  при  $z > 0$  с помощью метода Рэлея (разложение по плоским волнам) или с использованием известной для данной задачи функции Грина (см., например, <sup>12</sup>). Результат имеет вид

$$u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\perp) u^0(\mathbf{r}'_\perp) d^2r'_\perp, \quad (24)$$

где

$$G(\mathbf{r}) = -ik_0 \frac{z}{r} \frac{e^{ik_0 r}}{2\pi r} \quad (25)$$

— функция Грина,  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\perp, z)$ .



Перемножив почленно выражения (24), взятые в двух точках  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , и усреднив результат, получим, что функция когерентности поля

$$\Gamma = \langle u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \left\langle u\left(\mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) u^*\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) \right\rangle, \quad \mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{R} \pm \frac{\boldsymbol{\rho}}{2},$$

при  $z_{1,2} > 0$  выражается через функцию когерентности поля на экране

$$\Gamma^0 = \Gamma^0(\mathbf{R}_\perp, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \left\langle u^0\left(\mathbf{R}_\perp + \frac{\boldsymbol{\rho}_\perp}{2}\right) u^{0*}\left(\mathbf{R}_\perp - \frac{\boldsymbol{\rho}_\perp}{2}\right) \right\rangle \quad (26)$$

как

$$\Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int G\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\perp + \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{2}\right) G^*\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\perp - \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{2}\right) \Gamma^0(\mathbf{R}'_\perp, \boldsymbol{\rho}'_\perp) d^2\mathbf{R}'_\perp d^2\boldsymbol{\rho}'. \quad (27)$$

Оказывается, что если в (27) использовать приближение

$$G\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\perp + \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{2}\right) G^*\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\perp - \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{2}\right) \approx |G(\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\perp)|^2 e^{i\mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}, \quad (28)$$

в котором зависимости от разностных переменных  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\rho}'$  и координат центров тяжести  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}'_\perp$  разделяются (здесь  $\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\perp) / |\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\perp|$ ), то выражение (27) приобретает фотометрическую структуру (23), при этом в качестве яркости  $I^0$  выступает величина

$$I^0(\mathbf{R}_\perp, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{a} \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \cos \theta \int \Gamma^0(\mathbf{R}_\perp, \boldsymbol{\rho}_\perp) e^{i\mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{n}} \boldsymbol{\rho}_\perp} d^2\boldsymbol{\rho}_\perp. \quad (29)$$

Для вывода соотношение (29) достаточно подставить (28) в (27) и перейти от интегрирования по  $\mathbf{R}'_\perp$  к интегрированию по телесному углу вблизи направления  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Для применимости приближения (28) достаточно, чтобы в (27) в существенной для интегрирования области выполнялись неравенства

$$|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_\perp| \equiv \frac{R_z}{n_z} \gg \frac{1}{2} |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|, \quad \mathbf{R} = (\mathbf{R}_\perp, R_z), \quad (30)$$

$$\frac{R_z}{n_z} \gg \sqrt{k_0 \hat{\mathbf{n}} \left(\frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{2}\right) \left|\frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{2}\right|}, \quad (31)$$

первое из которых позволяет положить  $(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')/2 \approx 0$  в амплитудных множителях функций Грина (25), а второе — удержать в фазовых множителях лишь линейные по  $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'$  члены (квадратичные члены в фазах сокращаются, так что (31) выражает условие малости членов третьего порядка).

Важность соотношения (29) состоит в том, что оно связывает характеристики плоских источников в феноменологической и волновой теориях. Формула такого вида была впервые получена Вальтером<sup>32</sup>, после чего она рассматривалась с разных точек зрения во многих работах (см., например, <sup>33-52</sup>, а также обзоры <sup>53,54</sup>). Наличие такого большого интереса к простейшей задаче об излучении плоских источников, для которой известно точное волновое решение, давно и подробно исследованное в радиофизической литературе (см., например, <sup>12,55,56</sup>), можно объяснить относительной новизной «корреляционного» подхода к фотометрии, сущность которого в этой задаче прослеживается наиболее четко.

Важно отметить, что в общем случае (29) можно трактовать лишь как некоторую *обобщенную яркость* источников, так как она не обладает всеми свойствами феноменологической яркости. Дело в том, что условия квазиоднородности поля, вообще говоря, не требуют квазиоднородности самих источников. В случае существенно неоднородных источников поле вблизи них также будет существенно неоднородно, и, следовательно, в этой области оно не допускает фотометрического описания. В то же время условия квазиоднородности могут выполняться вдали от источников, где становится право-

мерным и фотометрический подход. Именно в этом случае (29) следует понимать как обобщенную яркость, которая не обладает всеми свойствами фотометрической яркости, но тем не менее дает правильное описание излучения в области квазиоднородности, позволяя учесть по теории переноса дифракционные эффекты, чего нельзя сделать, оставаясь полностью в рамках классической фотометрии.

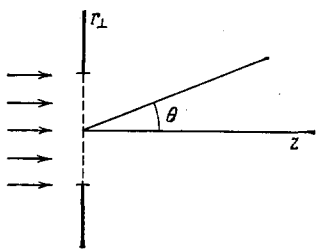
Заметим, что если для обоснования фотометрии воспользоваться вместо функции Вигнера каким-либо другим определением локального спектра, то можно получить другие, отличные от (29) выражения для яркости источников  $I^0$  через функцию когерентности (см. в этой связи <sup>32,33</sup>). Эти отличия связаны с отмеченной выше неоднозначностью выражения яркости через функцию когерентности поля, но для квазиоднородного, и тем более для статистически однородного поля все эти различия пропадают.

Проиллюстрируем сказанное на нескольких примерах.

### в) П р и м е р ы

1) К о г е р е н т н ы й источник. Рассмотрим дифракцию когерентной (т. е. нефлуктуирующей) плоской волны  $u^0 = e^{ikr}$ , падающей нормально на отверстие в плоском экране с характерным размером  $L \gg \lambda$  (рис. 2). Хотя флуктуации в этой задаче отсутствуют, функция когерентности поля  $\Gamma = \langle u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) \rangle = u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2)$  при определенных условиях оказывается квазиоднородной и вследствие этого допускает фотометрическое описание.

Действительно, полагая в приближении физической оптики  $u^0(\mathbf{r}_\perp) = \theta_\Sigma(\mathbf{r}_\perp)$ , где  $\theta_\Sigma(\mathbf{r}_\perp)$  — функция пропускания отверстия, равная единице непосредственно на отверстии и нулю — вне его, из (29) получаем следующее выражение для обобщенной яркости источника:



$$I^0(\mathbf{R}_\perp, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{a} \left( \frac{k_0}{2\pi} \right)^2 n_z \int \theta_\Sigma(\mathbf{R}_\perp + \frac{\rho'_\perp}{2}) \theta_\Sigma(\mathbf{R}_\perp - \frac{\rho'_\perp}{2}) e^{-ik_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \rho'_\perp} d^2 \rho'_\perp. \quad (32)$$

Рис. 2. Дифракция на отверстии.

Подставив это выражение в (23), оценим значение функции когерентности  $\Gamma$  для точек наблюдения, лежащих в зоне Фраунгофера по отношению к отверстию, где  $|\mathbf{R}_z \pm (\rho_z/2)| \gg \gg k_0 L^2$ , ограничиваясь для простоты случаем

дифракции на малые углы, так что  $n_z \sim 1$ . В результате получаем

$$\Gamma(\mathbf{R}, \rho) = a \int I(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) e^{ik_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \rho} d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} \approx \left( \frac{k_0}{2\pi R_z} \right)^2 \int \theta_\Sigma(\mathbf{R}'_\perp + \frac{\rho'_\perp}{2}) \theta_\Sigma(\mathbf{R}'_\perp - \frac{\rho'_\perp}{2}) \times \times \exp \left[ i \frac{k_0}{R_z} (\mathbf{R}_\perp - \mathbf{R}'_\perp) (\rho_\perp - \rho'_\perp) \right] d^2 \rho'_\perp d^2 \mathbf{R}'_\perp, \quad (33)$$

где  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_\perp, R_z)$ . Точно такое же выражение можно найти из волновой теории, воспользовавшись малоугловой функцией Грина для решения дифракционной задачи <sup>12</sup>.

Отметим, что хотя распределение поля по отверстию в данном случае однородно, обобщенная яркость  $I^0$  уже не является однородной, а меняется от точки к точке. Так, например, если рассмотреть в качестве  $\Sigma$  неограниченную вдоль оси  $y$  щель шириной  $2L$ , то вычисление интеграла в правой части (32) дает

$$I^0(\mathbf{R}_\perp, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{n_z}{\pi a n_x} \delta(n_y) \sin [2k_0 n_x (L - |\mathbf{R}_x|)] \theta(L - |\mathbf{R}_x|),$$

где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Эта величина меняется на поверхности щели и может принимать отрицательные значения. Однако, если

подставить это выражение в (23), то интегрирование по  $d\Omega_n$  с учетом условий (30) и (31) для интенсивности излучения  $\Gamma|_{\rho=0} = \langle |u|^2 \rangle$  дает уже неотрицательную величину.

Обратимся к условиям (30) и (31), которые позволяют использовать для данной задачи фотометрическое описание в терминах обобщенной яркости  $I^0$ . Входящий в эти неравенства вектор  $\rho$  задает разнесение точек наблюдения, вектор  $\rho'_\perp$  — разнесение точек на отверстии ( $|\rho'_\perp| \lesssim L$ ), а единичный вектор  $\hat{n}$  оценивает характерное направление дифракции ( $n_z \sim \cos \vartheta$ , где  $\vartheta$  — характерный угол дифракции). Для выполнения условия (30) достаточно потребовать одновременного удовлетворения неравенств  $R_z \gg \rho \cos \vartheta \sim \rho$  (т. е. разнесение точек наблюдения должно быть малым по сравнению с их расстоянием до источника) и  $R_z \gg L \cos \vartheta$  (видимый с направления  $\vartheta$  размер источника  $L \cos \vartheta$  мал по сравнению с  $R_z$ ; см. рис. 2). Что касается условия (31), то для случая совмещения точек наблюдения ( $\rho = 0$ ), опуская численные множители, имеем  $R_z \gg L \cos \vartheta \sqrt{k_0 L \sin \vartheta}$ . Это неравенство гораздо слабее условия зоны Фраунгофера  $R_z \gg k_0 L^2$ , так что применимость обобщенной яркости (32) не требует ухода в зону Фраунгофера по отношению к отверстию.

Таким образом, в данном случае обобщенная яркость (32) позволяет описать дифракцию излучения на отверстии. Выражение (32) остается применимым и в случае двух отверстий, если считать, что функция пропускания  $\theta_\Sigma$  равна единице на каждом из них (т. е.  $\theta_\Sigma = \theta_\Sigma^{(1)} + \theta_\Sigma^{(2)}$ , где  $\theta_\Sigma^{(1,2)}$  — функция пропускания каждого из отверстий). Отсюда следует, что (32) описывает также и интерференцию на отверстиях, в частности, двухщелевой интерферометр Юнга. Заметим, что в этом случае обобщенная яркость (32) будет содержать интерференционные члены, пропорциональные произведению  $\theta_\Sigma^{(1)} \theta_\Sigma^{(2)}$ , которые оказываются отличными от нуля для значений  $R_\perp$ , лежащих между отверстиями, что совершенно не отвечает физической интуиции. Объяснение этого парадокса состоит в том, что в рассматриваемой ситуации обычное фотометрическое описание становится применимым лишь вдали от отверстий, в области, по отношению к которой отверстия выступают как один эффективный источник.

2) К в а з и о д н о р о д н ы й и с т о ч н и к. Для квазиоднородного источника функция когерентности  $\Gamma^0(\mathbf{R}_\perp, \rho_\perp)$  плавно меняется с изменением аргумента  $\mathbf{R}_\perp$  по сравнению с быстрым изменением по  $\rho_\perp$ . Для простоты предположим, что  $\Gamma^0$  факторизуется, т. е.

$$\Gamma^0 = \sigma^2(\mathbf{R}_\perp) K(\rho_\perp). \quad (34)$$

Это условие не является необходимым, хотя в литературе аналогичные условия факторизации иногда включают в определение квазиоднородности<sup>41</sup>. Здесь зависимость дисперсии  $\sigma^2(\mathbf{R}_\perp) \equiv \langle |u^0(\mathbf{R}_\perp)|^2 \rangle$  от  $\mathbf{R}_\perp$  описывает плавную статистическую неоднородность с характерным масштабом  $L_R$ , а коэффициент корреляции  $K(\rho_\perp)$  стремится к нулю при  $|\rho_\perp| \gg l_K$ , причем  $l_K \ll L_R$ . Соответствующее (34) выражение для яркости (32) имеет вид

$$I^0(\mathbf{R}_\perp, \hat{n}) = \frac{1}{a} k_0^2 n_z \sigma^2(\mathbf{R}_\perp) \tilde{K}(k_0 \hat{n}_\perp), \quad (35)$$

где

$$\tilde{K}_1(\mathbf{x}) = \int K(\rho_\perp) e^{-i\mathbf{x}_\perp \cdot \rho_\perp} d^2 \rho_\perp \cdot (2\pi)^{-2}, \quad (36)$$

при этом, согласно (23), функция когерентности равна

$$\Gamma = \int k_0^2 n_z \sigma^2 \left( \mathbf{R}_\perp - \frac{\hat{n}_\perp R_z}{n_z} \right) \tilde{K}(k_0 \hat{n}_\perp) e^{ik_0 \hat{n} \cdot \rho} d\Omega_n. \quad (37)$$

Если поле на экране  $z = 0$  статистически однородно, так что  $\sigma^2 = \text{const}$ , то это выражение нетрудно привести к виду

$$\Gamma = \sigma^2 \int_{|\kappa_{\perp}| \leq k_0} \tilde{K}(\kappa_{\perp}) \exp[i(\kappa_{\perp} \rho_{\perp} + \rho_z \sqrt{k_0^2 - \kappa_{\perp}^2})] d^2 \kappa_{\perp}, \quad (38)$$

что совпадает с хорошо известным результатом волновой теории для дифракции на хаотическом экране (см.<sup>12</sup>, с. 74). В отличие от точного решения, в (38) пренебрегается вкладом от неоднородных волн, экспоненциально затухающих при удалении от плоскости  $z = 0$  \*).

3) Сила света и обратная задача — измерение функции когерентности источников. Рассмотрим выражение для силы света, отвечающее локализованному в плоскости  $z = 0$  источнику с размерами порядка  $L$ . По отношению к точкам наблюдения вдали от источника (при  $z \gg L$ ) такой источник выступает как точечный, причем соответствующая ему сила света  $J(\hat{n})$  получается интегрированием яркости (32), домноженной на  $n_z = \cos \theta$ , по плоскости источника  $z = 0$ :

$$J(\hat{n}) = n_z \int I^0(\mathbf{R}_{\perp}, \hat{n}) d^2 \mathbf{R}_{\perp} = \frac{1}{a} \left( \frac{k_0 n_z}{2\pi} \right)^2 \int \Gamma^0(\mathbf{R}_{\perp}, \rho_{\perp}) d^2 \mathbf{R}_{\perp} d^2 \rho_{\perp} = \frac{1}{a} \left( \frac{k_0 n_z}{2\pi} \right)^2 \langle |\tilde{u}^0(k_0 \hat{n}_{\perp})|^2 \rangle, \quad (39)$$

где

$$\tilde{u}^0(\kappa_{\perp}) = \int u^0(\mathbf{R}_{\perp}) e^{i\kappa_{\perp} \mathbf{R}_{\perp}} d^2 \mathbf{R}_{\perp} \quad (40)$$

— пространственный спектр поля источника. Из (39) видно, что сила света  $J(\hat{n})$ , отвечающая обобщенной яркости (32), неотрицательна и зависит лишь от низкочастотной (т. е. крупномасштабной) части спектра  $\tilde{u}^0(\kappa_{\perp})$ , которая соответствует достаточно малым волновым числам  $|\kappa_{\perp}| = k_0 |\hat{n}_{\perp}| \leq k_0$ . Большие значения  $|\kappa_{\perp}| > k_0$ , описывающие экспоненциально затухающие волны, в (32) не учитываются.

Отсюда следует, что при известном угловом распределении силы света можно выразить вклад низкочастотной части спектра  $u^0$  в функцию когерентности поля на отверстии. Действительно, предположим, что поле  $u^0$  можно приближенно считать статистически однородным. Для этого размеры источника  $L$  должны быть достаточно велики по сравнению с радиусом корреляции  $l_k$  поля  $u^0$ , чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами, связанными с ограниченностью источника. Тогда из (39) и (40) получаем

$$J(\hat{n}) \approx \frac{1}{a} \left( \frac{k_0 n_z}{2\pi} \right)^2 \Sigma \int \Gamma^0(\rho_{\perp}) e^{-ik_0 \hat{n}_{\perp} \rho_{\perp}} d^2 \rho_{\perp}, \quad (41)$$

где  $\Sigma$  — площадь отверстия.

Если теперь обозначить вклады от низкочастотной ( $|\kappa_{\perp}| \leq k_0$ ) и высокочастотной ( $|\kappa_{\perp}| > k_0$ ) части спектра  $u^0$  в функцию когерентности  $\Gamma^0$  как  $\Gamma_{\text{нч}}^0$  и  $\Gamma_{\text{вч}}^0$  соответственно, то, обращая входящее в (41) преобразование Фурье, нетрудно получить<sup>59</sup>

$$\Gamma_{\text{нч}}^0(\rho_{\perp}) = \frac{a}{\Sigma} \int_{|\hat{n}_{\perp}| \leq 1} \frac{J(\hat{n}) e^{ik_0 \hat{n}_{\perp} \rho_{\perp}}}{1 - n_{\perp}^2} d^2 n_{\perp}. \quad (42)$$

Заметим, что в некоторых случаях, используя аналитическое продолжение, функцию  $\Gamma_{\text{вч}}^0$  можно выразить через  $\Gamma_{\text{нч}}^0$ , при этом измерение угловой

\*) В большинстве случаев этим вкладом можно пренебречь, хотя имеются и исключения<sup>57, 58</sup>.

зависимости силы света позволяет полностью восстановить функцию когерентности источников  $\Gamma^0$  (см. <sup>60-64</sup>).

Таким образом, мы видим, что классическая фотометрия и теория переноса излучения являются с «волновой» точки зрения феноменологической теорией статистически квазигомогенного случайного поля.

г) Связь яркости с функцией когерентности в малоугловом приближении

В оптических приложениях часто приходится сталкиваться с распространением узких пучков излучения. Для волнового описания таких пучков можно использовать малоугловое приближение, называемое также квазиоптическим приближением или приближением параболического уравнения. В этом приближении соотношение (21), которое выражает связь яркости с функцией когерентности поля, можно несколько упростить. С этой целью запишем, как это делается обычно, комплексную амплитуду пучка, распространяющегося вдоль оси  $z$ , в виде

$$u = u' e^{ik_0 z},$$

где случайная амплитуда  $u'$  медленно меняется по  $z$  по сравнению с быстро осциллирующим фазовым множителем. Тогда функция когерентности представится в виде

$$\Gamma = \langle u_1 u_2^* \rangle = \langle u'_1 u'^*_2 \rangle e^{ik_0 \rho z} \equiv \Gamma' e^{ik_0 \rho z}, \quad (43)$$

где  $u_{1,2} = u(\mathbf{r}_{1,2})$ , а  $\Gamma'$  — функция когерентности для амплитуды  $u'$ , которая медленно меняется с изменением  $\rho_z$  по сравнению с «быстрым» множителем  $\exp(ik_0 \rho z)$ . Пренебрегая этим изменением, можно записать

$$\Gamma' = \Gamma|_{\rho_z=0} = \Gamma(\mathbf{R}, \rho_\perp). \quad (44)$$

Подставив теперь (43) и (44) в общее соотношение (21), находим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int_0^\infty k^2 dk \int \Gamma(\mathbf{R}, \rho_\perp) e^{ik_0 \rho z - ik \rho} d^3 \rho \cdot (2\pi)^{-3} = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty k^2 dk \int \Gamma(\mathbf{R}, \rho_\perp) e^{-ik \hat{n}_\perp \rho_\perp} d^2 \rho_\perp \delta(k_0 - \sqrt{k^2 - k_\perp^2}) (2\pi)^{-2} \approx \\ &\approx \frac{1}{a} \left( \frac{k_0}{2\pi} \right)^2 \int \Gamma(\mathbf{R}, \rho_\perp) e^{-ik_0 \hat{n}_\perp \rho_\perp} d^2 \rho_\perp. \end{aligned} \quad (45)$$

В аргументе дельта-функции мы положили приближенно  $|\hat{n}_\perp| \approx 0$ , что допустимо в случае остронаправленных пучков с достаточно малой угловой шириной  $\delta\theta$ :  $|\hat{n}_\perp| \leq \delta\theta \ll 1$ .

Таким образом, в малоугловом приближении яркость выражается как преобразование Фурье от функции когерентности поля по поперечным относительно направления распространения «разностным» координатам. Такая связь яркости с функцией когерентности была установлена в цитированных выше работах Долина <sup>21,22</sup>. Отметим, что (45) совпадает по форме с выражением (29) для яркости плоских источников, если положить там  $n_z = 1$ .

Обратное выражение функции когерентности  $\Gamma$  через  $I$  можно получить, перейдя к малоугловому приближению непосредственно в общем соотношении (20), что дает

$$\Gamma(\mathbf{R}, \rho) \approx a \int I \exp \left\{ ik_0 \left[ \hat{n}_\perp \rho_\perp + \left( 1 - \frac{\hat{n}_\perp^2}{2} \right) \rho_z \right] \right\} d^2 n_\perp;$$

здесь, в отличие от (45), мы удержали в экспоненте квадратичные по  $\hat{n}_\perp$  члены. Полагая теперь  $\rho_z = 0$  с учетом известных свойств преобразования

Фурье для радиуса поперечной корреляции пучка  $l_{\perp}$ , отсюда легко получить оценку

$$l_{\perp} k_0 |n_{\perp}| \sim l_{\perp} k_0 \delta\theta \gtrsim 1$$

или, опуская численные множители,  $l_{\perp} \approx \lambda/\delta\theta$ . Аналогично, полагая  $\rho_{\perp} = 0$ , для радиуса продольной корреляции  $l_{\parallel}$  находим

$$\frac{k_0 n_{\perp}^2 l_{\parallel}}{2} \sim \frac{k_0 (\delta\theta)^2 l_{\parallel}}{2} \gtrsim 1,$$

так что  $l_{\parallel} \gtrsim \lambda/(\delta\theta)^2$ .

#### д) Пределная разрешающая способность при фотометрических измерениях

Волновой характер излучения налагает на точность фотометрических измерений принципиальные ограничения, которые можно рассматривать как следствие волнового соотношения неопределенностей. Фотометрическая яркость  $I(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})$  зависит от двух аргументов — направления распространения  $\hat{\mathbf{n}}$  и радиуса-вектора  $\mathbf{R}$ .

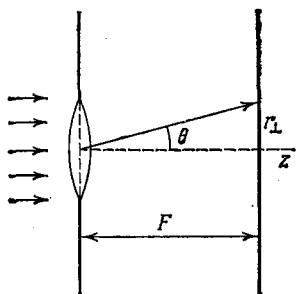


Рис. 3. Регистрация излучения в фокальной плоскости линзы.

Целесообразно поэтому выяснить, насколько совместимо увеличение разрешения по углам с увеличением разрешения по координатам. Ответ на этот вопрос можно получить на примере простейшего измерительного прибора — линзы диаметром  $D$ , в фокальной плоскости которой фиксируется угловое распределение излучения (рис. 3).

Угловое разрешение линзы  $\Delta\theta$ , равное  $\lambda/D$ , улучшается с увеличением диаметра линзы  $D$ . В то же время происходит ухудшение локализации яркости: измеренную яркость  $I(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})$  следует приписать не точке  $\mathbf{R}$ , а пространственной области поперечником  $D$ , т. е. неопределенность координаты  $\Delta R$  составляет примерно  $D$ . В итоге произведение неопределенностей  $\Delta\theta$  и  $\Delta R$  равно длине волны:

$$\Delta\theta \cdot \Delta R \approx \frac{\lambda}{D} D = \lambda. \quad (46)$$

Таким образом, увеличение углового разрешения неизбежно влечет за собой потерю разрешения по пространственным переменным, и наоборот.

Если поле в плоскости наблюдения статистически однородно, то угловое разрешение можно сделать как угодно высоким за счет увеличения диаметра линзы  $D$ . В то же время в квазиоднородном поле увеличение  $D$  сверх масштаба квазиоднородности  $L_R$  становится бессмысленным, так как при  $D \gtrsim L_R$  распределение излучения в фокальной плоскости линзы не в состоянии характеризовать распределение излучения по углам. Следовательно, предельное разрешение по углу  $\Delta\theta_{\min}$  составит

$$\Delta\theta_{\min} = \frac{\lambda}{L_R}, \quad (47)$$

для чего потребуется линза диаметром  $D \leq L_R$ .

Зафиксировав в фокальной плоскости линзы угловое распределение излучения, при помощи фурье-преобразования вида (20) можно определить функцию когерентности поля  $\Gamma(\mathbf{R}, \rho)$ . Точность, с которой известна координата центра тяжести  $\mathbf{R}$ , т. е. точность локализации, составляет примерно диаметр линзы  $D$ . С увеличением разностной переменной  $\rho$  качество восстановления функции когерентности ухудшается. Предельное значение  $\rho_{\max}$  оценивается как  $\rho_{\max} \sim \lambda/\Delta\theta = D$ , т. е. тоже диаметром линзы.

Подобные же ограничения действуют и при восстановлении временной функции когерентности по измеренному значению спектральной плотности.

е) О связи между фотометрическими и корреляционными измерениями

Рассмотрим условия, при которых показания фотодетектора можно интерпретировать в терминах фотометрии. Основным фотометрическим прибором является квадратичный фотодетектор, ток на выходе которого  $i$  пропорционален интенсивности светового поля  $E^2$ , усредненной за некоторое время  $T$ :

$$i \propto \frac{1}{T} \int_0^T E^2(\mathbf{r}, t + \tau) d\tau \equiv \overline{E^2(\mathbf{r}, t)^T} \quad (48)$$

(для простоты мы отвлекаемся от поляризации, рассматривая в качестве  $E$  одну из компонент вектора  $\mathbf{E}$ ). Здесь время усреднения  $T$  определяется инерционностью детектора и в оптических измерениях обычно оказывается большим по сравнению с характерным периодом световых колебаний  $\tau = 2\pi/\omega$ . Если считать поле квазимонохроматическим (этого можно достигнуть, например, предварив фотодетектор монохроматором с полосой пропускания  $\Delta\omega_s \ll \omega$ ) и записать  $E = \text{Re} E' e^{-i\omega t}$ , где  $E'$  — медленная комплексная амплитуда поля, то (48) примет вид

$$i \propto \frac{1}{2} \text{Re} (\overline{|E'|^2 + E'^2 e^{-2i\omega t}})^T \approx \frac{1}{2} \overline{|E'|^2}^T, \quad (49)$$

так что измеряемый ток пропорционален усредненному за время  $T$  квадрату комплексной амплитуды поля  $|E'(\mathbf{r}, t)|^2$ .

Если входная апертура фотодетектора достаточно мала, а сам прибор обладает малой инерцией, так что за время  $T$  медленная амплитуда  $E'$  не успевает заметно измениться, то  $\overline{|E'|^2}^T \approx |E'|^2$  и регистрируемой величиной является *локальная мгновенная интенсивность*  $|E'(\mathbf{r}, t)|^2$ . В этом случае показания фотодетектора, очевидно, не допускают интерпретации в терминах средних по ансамблю величин, поскольку фототок оказывается флуктуирующим со временем и от точки к точке.

С другой стороны, если поле стационарно и эргодично по времени (см.<sup>12</sup>), а время усреднения  $T$  велико по сравнению со временем когерентности поля  $\tau_{\text{ког}}$  (которое по порядку величины равно времени изменения  $E'$  и в случае монохроматора будет иметь порядок обратный ширине полосы пропускания  $\tau_{\text{ког}} \sim 1/\Delta\omega_s$  \*), то время  $T$  в (49) можно устремить к бесконечности, причем среднее по времени будет равно среднему по ансамблю:  $\overline{|E'|^2}^T \approx \langle |E'|^2 \rangle$ . В этом случае фототок практически не флуктуирует и описывает среднюю интенсивность поля в точке  $\mathbf{r}$  на частоте  $\omega$ , т. е. пропорционален интегралу от фотометрической яркости  $I_\omega$  по направлениям,  $i \sim \int I_\omega d\Omega_n$ .

Если излучение можно считать изотропным, так что  $\int I_\omega d\Omega_n = 4\pi I_\omega$ , то измеряется спектральная плотность  $I_\omega$ , что позволяет найти временную корреляционную функцию излучения  $\Gamma(\tau)$ . Имеется и обратная возможность — по измерениям  $\Gamma(\tau)$  найти спектральную плотность  $I_\omega$  (фурье-спектроскопия).

Другой случай, когда усредняющее действие прибора сводится к усреднению по ансамблю, связан с пространственной эргодичностью. Предположим, что поле является строго монохроматическим, отвлекаясь тем самым

\*) См. также <sup>65</sup>, где подробно описывается трактовка времени когерентности как характерной длительности составляющих поле световых цугов.

от временных флуктуаций амплитуды  $E'$ , т. е. считая ее не зависящей от времени (практически это означает, что время наблюдения  $T$  мало по сравнению со временем когерентности поля  $\tau_{\text{ког}}$ ). Тогда интенсивность  $|E'|^2 \approx |E'|^2$  не зависит от времени усреднения  $T$  и является случайной функцией пространственных координат. Рассмотрим типичную схему фотометрических измерений, показанную на рис. 3. Фотодетектор располагается в фокальной плоскости линзы, которая может быть ориентирована в различных направлениях с тем, чтобы определить угловое распределение излучения, т. е. яркость  $I_\omega(\hat{n})$ . Амплитуда поля в фокальной плоскости  $E^F$  пропорциональна преобразованию Фурье от амплитуды в плоскости непосредственно перед линзой:

$$E^F(\mathbf{r}_\perp) \sim \int_{\Sigma} E'(\mathbf{r}'_\perp) e^{i\mathbf{k}_0 \hat{n}_\perp \mathbf{r}'_\perp} d^2 r'_\perp, \quad (50)$$

где мы ограничимся малоугловым приближением, рассматривая точки вблизи оси  $z$ , так что  $\hat{n}_\perp = \mathbf{r}_\perp/F$ . При этом фототок детектора есть

$$\begin{aligned} i &\sim |E^F|^2 \propto \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} E'(\mathbf{r}'_\perp) E'^*(\mathbf{r}''_\perp) e^{i\mathbf{k}_0 \hat{n}_\perp (\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}''_\perp)} d^2 r'_\perp d^2 r''_\perp = \\ &= \int \int_{\mathbf{R}'_\perp \pm (\rho'_\perp/2) \in \Sigma} E'(\mathbf{R}'_\perp + \frac{\rho'_\perp}{2}) E'^*(\mathbf{R}'_\perp - \frac{\rho'_\perp}{2}) e^{i\mathbf{k}_0 \hat{n}_\perp \rho'_\perp} d^2 R'_\perp d^2 \rho'_\perp, \end{aligned} \quad (51)$$

где интегрирование проводится по распределению падающего поля по апертуре линзы  $\Sigma$ . Входящее в (51) интегрирование по  $\mathbf{R}'_\perp$  можно рассматривать как пространственное усреднение по апертуре.

Предположим теперь, что случайное падающее поле в плоскости линзы является статистически однородным и пространственно эргодичным, обладая некоторым конечным радиусом когерентности  $l_{\text{ког}}$ . Тогда, если размер линзы  $D$  велик по сравнению с  $l_{\text{ког}}$ , то интегрирование по  $\mathbf{R}'_\perp$  в (51) сводится к статистическому усреднению и умножению на площадь линзы  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} i &\propto \Sigma \int \left\langle E'(\mathbf{R}'_\perp + \frac{\rho'_\perp}{2}) E'^*(\mathbf{R}'_\perp - \frac{\rho'_\perp}{2}) \right\rangle e^{i\mathbf{k}_0 \hat{n}_\perp \rho'_\perp} d^2 \rho'_\perp = \\ &= \Sigma \int \Gamma(\rho'_\perp) e^{i\mathbf{k}_0 \hat{n}_\perp \rho'_\perp} d^2 \rho'_\perp \propto \Sigma I_\omega(\hat{n}), \end{aligned} \quad (52)$$

где  $\Gamma$  — функция когерентности поля  $E'$ , а  $I_\omega(\hat{n})$  — яркость излучения, связанная с  $\Gamma$  соотношением (45). Мы видим, что в этом случае за счет усредняющего по пространству действия линзы фототок оказывается не флуктуирующим и пропорциональным фотометрической яркости  $I_\omega$ .

Если же размер линзы мал по сравнению с масштабом когерентности  $l_{\text{ког}}$ , то усредняющее действие линзы будет несущественно, так что фототок будет флуктуирующей величиной, для усреднения которой нужно набирать статистику повторных измерений при разных положениях линзы в плоскости  $z = 0$ . Этот случай аналогичен рассмотренному выше случаю усреднения по времени с малым интервалом усреднения  $T$ .

По измеренным значениям яркости  $I_\omega(\hat{n})$  можно найти функцию когерентности  $\Gamma(\rho)$ , воспользовавшись основным соотношением (45), устанавливающим соответствие фотометрических и полевых характеристик электромагнитного поля. В принципе возможна и обратная последовательность определения  $I_\omega$  и  $\Gamma$ : сначала измерить функцию когерентности  $\Gamma(\rho)$ , а затем вычислить яркость  $I_\omega(\hat{n})$ . Такого рода измерения можно было бы назвать пространственной фурье-спектроскопией. Именно так, по существу, поступают при использовании звездного интерферометра Майкельсона: см.<sup>16</sup>.



В заключение этого пункта укажем некоторые работы, где рассматривались вопросы, связанные с обоснованием фотометрии свободного излучения. В <sup>66</sup> обсуждались свойства функции когерентности объемных (неплоских) источников в свободном пространстве (точное волновое решение этой задачи, как и в рассмотренном выше случае плоских источников, хорошо известно); в <sup>67,68</sup> рассмотрено прохождение через линзы обобщенной яркости, определенной несколько иначе, чем в данном обзоре (возможность разных определений обобщенной яркости отмечалась выше); в <sup>69,70</sup> исследовалась обобщенная яркость для векторной электромагнитной задачи; в <sup>71</sup> сделана попытка построить более детальную теорию переноса для свободного электромагнитного излучения; в <sup>72</sup> та же задача рассмотрена на основе квантового подхода.

#### 4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Перейдем теперь к наиболее сложному случаю излучения в рассеивающей среде, ограничившись лишь кратким обзором основных результатов, полученных к настоящему времени. Более подробное изложение этих вопросов можно найти в <sup>10-12</sup>.

##### а) Уравнение переноса излучения

В феноменологической теории поведение яркости излучения в рассеивающей среде описывается хорошо известным уравнением переноса (см., например, <sup>73,74</sup>), которое в простейшем случае скалярного монохроматического поля имеет вид

$$\frac{dI}{ds} + \alpha I = \int \sigma(\hat{n} \leftarrow \hat{n}') I(r, \hat{n}') d\Omega_{n'}. \quad (53)$$

Левая часть (53) описывает ослабление яркости  $I$  вдоль луча, связанное с рассеянием и поглощением и объединяемое под названием «экстинкция» ( $\alpha$  — коэффициент экстинкции,  $s$  — длина луча). Правая же часть характеризует вклад рассеяния, причем параметр  $\sigma$  представляет собой сечение рассеяния единицы объема. Для слабо рассеивающей среды с непрерывными флуктуациями  $\sigma$  обычно рассчитывается в борновском приближении, а в случае разреженных дискретных рассеивателей — в приближении независимых частиц с возможной поправкой на слабую корреляцию рассеивателей. Так, например, в наиболее распространенной скалярной модели рассеяния излучения на непрерывных флуктуациях диэлектрической проницаемости  $\epsilon = 1 + \tilde{\epsilon}$ ,  $\langle \tilde{\epsilon} \rangle = 0$ ; борновское приближение для сечения рассеяния дает

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{\pi k_0^4}{2} \int \langle \tilde{\epsilon}(0) \tilde{\epsilon}(\rho) \rangle e^{-ik_0(\hat{n} - \hat{n}') \cdot \rho} d^3\rho (2\pi)^{-3}, \quad (54)$$

а для рассеяния на точечных диполях с поляризуемостью  $\beta$  в приближении однократного рассеяния имеем

$$\sigma = \sigma_1 [N + N(N-1) \chi(k_0(\hat{n} - \hat{n}'))], \quad (55)$$

где  $N$  — число диполей в единице объема,  $\sigma_1 = k_0^4 \beta^2$  — сечение рассеяния на одиночном диполе (без учета поляризационного множителя),  $\chi(q) = \langle \exp(iq \cdot (r_1 - r_2)) \rangle$  — характеристическая функция распределения относительных координат диполей  $r_1$  и  $r_2$ , причем первое слагаемое в (55) отвечает рассеянию на независимых частицах, а второе учитывает корреляции положений частиц (см., например, <sup>12</sup>, § 26, 31).

В отсутствие поглощения коэффициент экстинкции  $\alpha$  оказывается равным полному (по всем направлениям) сечению рассеяния

$$\alpha = \int \sigma(\hat{n}' \leftarrow \hat{n}) d\Omega_{n'}. \quad (56)$$

(это соотношение называют оптической теоремой).

Для получения уравнения переноса (53) в феноменологической теории используют простые соображения энергетического баланса в физически бесконечно малом объеме рассеивающей среды.

#### б) Статистический вывод уравнения переноса излучения

Переходя к статистическому обоснованию уравнения переноса (53), прежде всего заметим, что статистический смысл яркости как углового спектра функции когерентности волнового поля, очевидно, должен сохраняться и для излучения в рассеивающей среде. Разумеется, при этом должно выполняться условие квазиоднородности (18), позволяющее ввести понятие локального спектра, в качестве которого мы по-прежнему будем использовать функцию Вигнера. Однако условия квазиоднородности теперь уже недостаточно, так как для справедливости уравнения переноса рассеяния должно быть в некотором смысле «малым», что приводит к определенным ограничениям на параметры рассеивающей среды.

Для «волнового» вывода уравнения переноса в линейной теории естественно исходить из стохастического волнового уравнения для случайного поля  $u$ , считая заданными статистические характеристики рассеивающей среды. Такая среда может быть как непрерывной и описываться некоторым случайным полем (обычно в качестве такого поля выступает диэлектрическая проницаемость среды), так и дискретной, т. е. состоящей из отдельных рассеивающих частиц, свойства и положения которых случайны. При этом ход рассуждений практически не зависит от модели среды: при любой модели среды стохастические волновые уравнения используются для получения уравнений для статистических моментов поля, причем уравнение для второго момента (т. е. для функции когерентности  $\Gamma$ ) служит для вывода уравнения переноса. Уравнение для функции когерентности известно под названием уравнения Бете — Солпитера. Для излучения в отсутствие источников его можно записать в виде (см., например, <sup>12</sup>)

$$D_1 D_2^* \Gamma_{12} = K_{12} \Gamma_{12}; \quad (57)$$

здесь  $\Gamma = \langle u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle u_1 u_2^* \rangle$  — функция когерентности поля в рассеивающей среде, операторы Дайсона  $D_1$  и  $D_2$  действуют по аргументам с индексами 1 и 2 соответственно, а  $K_{12}$  называют оператором интенсивности.

Операторы  $D_{1,2}$  и  $K_{12}$  в общем случае известны лишь в виде разложений в бесконечные ряды. Поэтому для того, чтобы использовать уравнение (57), практически всегда приходится ограничиваться теми или иными приближенными значениями операторов  $D_{1,2}$  и  $K_{12}$ , связанными с предположением о «достаточной слабости» рассеяния.

Получить из уравнения Бете — Солпитера уравнение переноса излучения можно разными по форме, но совпадающими по своему физическому содержанию способами: диаграммным методом <sup>75, 76</sup>, операторным методом <sup>77</sup>, с помощью асимптотических разложений <sup>14, 78</sup> и т. д. (см. также работы <sup>79-93</sup>, где уравнения переноса выводились при самых разнообразных исходных предположениях). Фактически сущность всех этих методов состоит в том, что уравнение Бете — Солпитера решается в приближении геометрической оптики в предположении о квазиоднородности функции когерентности поля  $\Gamma$ . В конечном итоге это позволяет ввести содержательные понятия локального спектра (17) и яркости излучения (21); при этом яркость  $I$  будет удовлетворять уравнению переноса (53). Существенно, что при таком подходе метод геометрической оптики применяется не к отдельным реализациям поля, а лишь к уравнению для средней по ансамблю величины — функции когерентности. Это сразу же снимает ряд методологических вопросов, связанных с трактовкой понятия яркости в рассеивающей среде. В частности, теряет смысл во-

прос, о котором говорилось во Введении, — что понимать под яркостью вблизи резких рассеивающих неоднородностей? Действительно, как мы видели, яркость — это существенно статистическое понятие, характеризующее ансамбль реализаций, или иначе — усредненные по большим областям пространства квадратичные характеристики излучения. Поэтому говорить о значении яркости в точке вблизи отдельной неоднородности, вообще говоря, бессмысленно.

Описанный только что подход позволяет перейти от строгого уравнения Бете — Солпитера (57) к обычному уравнению переноса излучения (53), выразив одновременно коэффициент экстинкции  $\alpha$  и сечение рассеяния единицы объема  $\sigma$  через статистические параметры, фигурирующие в волновой теории — явный вид этих параметров зависит от используемой модели среды.

Как мы уже отмечали выше, используя уравнение Бете — Солпитера, приходится ограничиваться приближенными значениями операторов  $D_{1,2}$  и  $K_{12}$ . Наиболее важное для теории переноса излучения приближение, известное под названием «однотруппового», было предложено в <sup>94</sup>. Для среды с непрерывными флуктуациями это приближение является естественным обобщением простейших приближений, в которых удерживаются первые исчезающие члены разложений по степеням флуктуаций — приближения Бурре для  $D_{1,2}$  и лестничного приближения для  $K_{12}$ . Для среды с дискретными вкраплениями однотрупповое приближение обобщает приближение независимых частиц.

Важность однотруппового приближения для  $K_{12}$  связана с тем, что в этом приближении удерживаются только те члены разложения  $K_{12}$ , которые приводят к «локальному» сечению рассеяния, зависящему от свойств среды в объеме порядка нескольких радиусов корреляции флуктуаций — именно такое сечение, характеризующее локальные свойства среды, вводится в феноменологической теории. Однотрупповое приближение для  $K_{12}$  оказывается энергетически согласованным с однотрупповым приближением для  $D_{1,2}$  в том смысле, что они приводят к приближенному (справедливому с точностью до отброшенных многотрупповых членов) выполнению закона сохранения энергии.

Сформулируем некоторые важные результаты, вытекающие из «волнового» вывода уравнения переноса (53).

1. Вместо эвристического представления о некогерентной суперпозиции лучевых пучков, на которое опирается фотометрия, волновая теория использует представление о квазиоднородных случайных полях. Квазиоднородная функция когерентности в рассеивающей среде связана с яркостью тем же соотношением (20), что и в свободном пространстве, но при этом волновое число свободного пространства  $k_0$  следует заменить величиной  $\text{Re } k^{\text{эфф}}$ , где  $k^{\text{эфф}}$  — эффективное волновое число в рассеивающей среде. Оно удовлетворяет дисперсионному уравнению для среднего поля, которое отвечает однородному уравнению Дайсона  $D \langle u \rangle = 0$ .

2. При получении уравнения переноса метод геометрической оптики применяется не для нахождения отдельных реализаций поля, а для решения уравнений для моментов, и это устраняет многие трудности по обоснованию фотометрии. «Эффективная среда», в которой распространяется излучение, описывается уравнением Дайсона для среднего поля, что позволяет учесть многие эффекты, лежащие за пределами классической фотометрии, в частности, влияние неоднородности флуктуаций на рефракцию лучей.

3. Уравнение переноса (53) удается получить лишь в предположении слабого затухания среднего поля, т. е. малой экстинкции. Это, в свою очередь, требует малости как истинного поглощения, так и рассеяния, с тем, чтобы среднее поле имело характер бегущих волн в пределах отдельных неоднородностей. Если определить длину экстинкции  $l_e$  как величину, обратную коэффициенту экстинкции  $\alpha$ , то должно выполняться неравенство  $l_e \gg \rho_e$ , где  $\rho_e$  — радиус корреляции неоднородностей среды.

4. При волновом выводе уравнения переноса прежние феноменологические характеристики — сечение рассеяния  $\sigma$  и коэффициент экстинкции  $\alpha$  — приобретают микроскопический смысл. В волновой теории эти величины оказываются выраженными в виде рядов, первые члены которых мало отличаются от борновского приближения типа (54) или (для дискретной среды) — от приближения однократного рассеяния типа (55). Последующие же члены ряда, вычисленные при помощи «однотруппового» приближения, учитывают возможный негауссовский характер непрерывных флуктуаций или эффекты корреляции частиц. Однако при этом в теории фигурируют многоточечные функции распределения, экспериментальное определение которых в настоящее время затруднительно. Кроме того, отсутствуют теоретические модели, дающие достаточно полное статистическое описание каких-либо реальных рассеивающих сред. Все это затрудняет оценки условий применимости однотрупповых приближений, а также сравнение результатов теории с экспериментом.

5. При волновом обосновании стало очевидным дифракционное содержание уравнения переноса. В частности, это уравнение, дополненное уравнением Дайсона для среднего поля, позволило описать трансформацию когерентного излучения в рассеянную компоненту<sup>78</sup>; при этом оказалось, что приближение однократного рассеяния в теории переноса излучения дает результаты, эквивалентные дифракционной теории однократного рассеяния. Кроме того, как было показано Долиным<sup>22</sup>, уравнение переноса в малоугловом приближении тождественно дифракционному параболическому уравнению.

6. Если исходить не из волнового уравнения, а из уравнений Максвелла, то можно получить уравнение переноса для яркостной матрицы, эволюция которой описывает разнообразные поляризационные эффекты: двойное лучепреломление, деполяризацию волн в процессе распространения, рывтовское вращение плоскости поляризации и т. д. (об учете поляризационных эффектов в теории переноса см. работы<sup>3, 7, 67, 69, 71, 31, 14, 80, 82-84, 87-88</sup>).

7. До сих пор мы рассматривали в основном случай трехмерной задачи теории рассеяния. Имеется большое число работ, в которых оценивались условия применимости уравнения переноса в одномерной задаче (см.<sup>96-99</sup> и цитированную там литературу). Оказалось, что область применимости уравнения переноса в одномерной задаче существенно уже, чем в трехмерной. При учете обратного рассеяния в отсутствие поглощения она мало отличается от области применимости борновского приближения, что не позволяет в рамках теории переноса эффективно учесть многократное рассеяние назад. Результат об ограниченной применимости уравнения переноса в одномерной задаче получен непосредственным сравнением волновых решений с выводами теории переноса и, по всей вероятности, связан с известным в физике твердого тела явлением локализации собственных состояний в одномерных системах<sup>100, 101</sup>.

8. Говоря о теории переноса излучения, необходимо упомянуть также о нелинейных задачах. Уравнения переноса в этих задачах широко используются и известны под названием уравнений для чисел квантов или — в теории турбулентности — кинетических уравнений для волн<sup>102, 103</sup>. Обсуждение нелинейной теории выходит за рамки данного обзора. Отметим только, что в нелинейных задачах обоснование теории переноса тесно связано с вопросом о возникновении случайного поведения в динамических системах<sup>104-106</sup>.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главный результат исследований статистического и волнового содержания понятий классической фотометрии состоит в том, что эти понятия нашли свое естественное истолкование в терминах статистической оптики как спектральные характеристики функции когерентности квазиоднородного и квази-

стационарного случайного волнового поля. Наиболее полно разработаны физические основы фотометрии свободного излучения, хотя и здесь имеются некоторые нерешенные вопросы. В частности, предстоит исследовать более подробно случай неплоских источников, а также изучить обратные задачи типа упомянутой в гл. 3 задачи о восстановлении функции когерентности источников по распределению силы света. Более детального рассмотрения требуют и задачи, связанные с описанием отдельных экспериментов, в том числе практически не затронутые в данном обзоре вопросы об условиях пространственной и временной эргодичности излучения, о выборе необходимых интервалов усреднения, о возможности «самоусреднения» некоторых параметров излучения в процессе распространения и т. п.

Значительно больше неясного остается в теории переноса излучения в рассеивающих средах. Здесь прежде всего следует отметить необходимость количественного уточнения условий применимости основного уравнения переноса излучения (53), а также необходимость построения детальных моделей для расчета статистических характеристик рассеивающих сред. Далее, поскольку обосновать уравнение переноса удастся лишь при условии достаточно слабого поглощения и рассеяния, до сих пор остается открытым принципиально важный вопрос об описании рассеяния в сильноумутных средах, в которых существенны эффекты ближнего поля, т. е. эффекты сильного взаимного облучения частиц с участием неоднородных волн. Наконец, имеется поле деятельности для проведения экспериментов, интерпретируемых на основе корреляционного содержания фотометрической яркости.

Радиотехнический институт

АН СССР

Институт общей физики

АН СССР

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Хвольсон О. Д. — Изв. Петерб. Акад. наук, 1890, т. 33, с. 221.
2. Scuster A. — *Astrophys. J.*, 1905, v. 21, p. 1.
3. Розенберг Г. В. — УФН, 1955, т. 56, с. 77.
4. Розенберг Г. В. — УФН, 1959, т. 69, с. 57.
5. Розенберг Г. В. — УФН, 1967, т. 91, с. 569.
6. Розенберг Г. В. — УФН, 1977, т. 121, с. 97.
7. Розенберг Г. В. — *Опт. и спектр.*, 1970, т. 28, с. 392.
8. Сапожников Р. А. Теоретическая фотометрия. — М.: Наука, 1978.
9. Гуревич М. М. Введение в фотометрию. — Л.: Энергия, 1968.
10. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. — УФН, 1970, т. 102, с. 3.
11. Барабаненков Ю. Н. — УФН, 1975, т. 117, с. 49.
12. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. — Ч. II.
13. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981.
14. Апресян Л. А. — Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1973, т. 16, с. 461.
15. Апресян Л. А. Автореферат кандидатской диссертации. — Горький, 1978.
16. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
17. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976. — Ч. I.
18. Bourret R. C. — *Nuovo Cimento*, 1960, v. 18, p. 347.
19. Kano Y., Wolf E. — *Proc. Phys. Soc.*, 1962, v. 80, p. 1273.
20. Metna C. L., Wolf E. — *Phys. Rev.*, 1964, v. A134, p. 1143.
21. Долин Л. С. — Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1964, т. 7, с. 559.
22. Долин Л. С. — *Ibid.*, 1968, т. 11, с. 840.
23. Page C. H. — *J. Appl. Phys.*, 1952, v. 23, p. 103.
24. Lampard D. C. — *J. Appl. Phys.*, 1954, v. 25, p. 802.
25. Marc W. D. — *J. Sound. Vib.*, 1970, v. 11, p. 19.
26. Eberly J. H., Wodkiewicz K. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1977, v. 67, p. 1252.
27. Bartelt H. O., Brenner K. H., Lohmann A. W. — *Opt. Comm.*, 1980, v. 32, p. 32.
28. Claassen T. A. C., Mecklenbräuker W. F. G. — *Philips J. Res.*, 1980, v. 35, p. 217, 276, 372.

29. Wigner E.— *Phys. Rev.*, 1932, v. 40, p. 749.
30. Овчинников Г. И., Татарский В. И.— *Изв. вузов. Сер. «Радиофизика»*, 1972, т. 15, с. 1419.
31. Апресян Л. А.— *Ibid.*, 1975, т. 18, с. 1870.
32. Walter A.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1968, v. 58, p. 1256.
33. Walter A.— *Ibid.*, 1973, v. 63, p. 1622.
34. Marchand E. W., Wolf E.— *Ibid.*, 1974, v. 64, p. 1273.
35. Marchand E. W., Wolf E.— *Opt. Commun.*, 1972, v. 6, p. 305.
36. Marchand E. W., Wolf E.— *J. Opt., Soc. Amer.*, 1972, v. 62, p. 379.
37. Marchand E. W., Wolf E.— *Ibid.*, 1974, v. 64, p. 1219.
38. Wolf E., Carter W. H.— *Opt. Comm.*, 1975, v. 13, p. 205.
39. Carter W. H., Wolf E.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1975, v. 65, p. 1067.
40. Carter W. H., Wolf E.— *Opt. Commun.*, 1976, v. 16, p. 297.
41. Carter W. H., Wolf E.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1977, v. 67, p. 789.
42. Wolf E., Collett E.— *Opt. Comm.*, 1978, v. 25, p. 293.
43. Gori F., Palma C.— *Ibid.*, v. 27, p. 185.
44. Gori F.— *Optica Acta*, 1980, v. 27, p. 1025.
45. Carter W. H.— *Opt. Comm.*, 1978, v. 26, p. 1.
46. Leader J. C.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1978, v. 68, p. 1332.
47. Wolf E.— *Ibid.*, p. 1597.
48. Saleh B. E. A.— *Opt. Comm.*, 1979, v. 30, p. 135.
49. Collett E., Wolf E.— *Ibid.*, 1980, v. 32, p. 27.
50. Friberg A. T.— *Optica Acta*, 1981, v. 28, p. 261.
51. Steine B., Baltes H. P.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1977, v. 67, p. 241.
52. Gori F.— *Opt. Comm.*, 1980, v. 34, p. 301.
53. Baltes H. P.— *Appl. Phys.*, 1977, v. 12, p. 221.
54. Wolf E.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1978, v. 68, p. 6.
55. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1966.
56. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.— М.: Наука, 1981.
57. Sherman G. C., Stamnes J. J., Davenly J. J.— *Opt. Comm.*, 1973, v. 8, p. 271.
58. Carter W. H.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1975, v. 65, p. 1054.
59. Wolf E., Carter W. H.— *Ibid.*, 1978, v. 68, p. 953.
60. McQuire D.— *Opt. Commun.*, 1979, v. 29, p. 17.
61. McQuire D.— *J. Math. Phys.*, 1980, v. 21, p. 2686.
62. Baltes H. P., Steinle B., Antes G.— *Opt. Comm.* 1976, v. 18, p. 242.
63. Antes G., Baltes H. P., Steinle B.— *Helv. Phys. Acta*, 1976, v. 49, p. 759.
64. *Inverse Source Problems in Optics*/Ed. by H. P. Baltes. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1978.— (Topics in Current Physics. V. 9).
65. Франсон М., Сланский С. Когерентность в оптике.— М.: Наука, 1967.
66. Carter W. H., Wolf E.— *Opt. Acta*, 1981, v. 28, p. 227, 245.
67. Walther A.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1978, v. 68, p. 1606.
68. Johnson T.— *Ibid.*, 1980, v. 70, p. 1544.
69. Carter W. H.— *Ibid.*, v. 70, p. 1067.
70. Leader J. C.— *Optica Acta*, 1978, v. 25, p. 395.
71. Wolf E.— *Phys. Rev. Ser. D.*, 1976, v. 13, p. 869.
72. Sudarshan C. G.— *Ibid. Ser. A*, 1981, v. 23, p. 2802.
73. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии.— М.: ИЛ, 1953.
74. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики.— М.: Наука, 1975.
75. Барабаненков Ю. Н.— *ДАН СССР*, 1967, т. 174, с. 53.
76. Барабаненков Ю. Н., Финкельберг В. М.— *ЖЭТФ*, 1967, т. 53, с. 978.
77. Furutsu K.— *Radio Sci.*, 1975, v. 10, p. 29.
78. Барабаненков Ю. Н., Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.— *Изв. вузов. Сер. «Радиофизика»*, 1972, т. 15, с. 1852.
79. Гнедин Ю. Н., Долгинов А. З.— *ЖЭТФ*, 1963, т. 45, с. 1136.
80. Долгинов А. З., Гнедин Ю. Н., Силантьев Н. А.— *JQSRT*, 1970, v. 10, p. 707.
81. Овчинников Г. И.— *Радиотехн. и электрон.*, 1973, т. 18, с. 2044.
82. Ерухимов Л. Н., Кирш П. И.— *Изв. вузов. Сер. «Радиофизика»*, 1973, т. 16, с. 1783.
83. Сазонов В. Н., Цытович В. Н.— *Ibid.*, 1968, т. 11, с. 1287.
84. Железняков В. В.— *Astrophys. Sp. Sci.*, 1968, v. 2, p. 403.
85. Watson K. M.— *Phys. Rev.*, 1960, v. 118, p. 886.
86. Watson K. M.— *J. Math. Phys.*, 1969, v. 10, p. 688.
87. Peacher J. L., Watson K. M.— *Ibid.*, 1970, v. 11, p. 1496.
88. Stott P. E.— *J. Phys. Ser. A.*, 1968, v. 1, p. 675.
89. Galinas R. J., Ott R. L.— *Ann. Phys.*, 1970, v. 59, p. 323.
90. Howe M. S.— *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, 1973, v. 274, p. 523.
91. Acquista C., Anderson J. L.— *Ann. Phys.*, 1977, v. 106, p. 435.

92. Zubairy M. S.— Opt. Comm., 1981, v. 37, p. 313.
93. Morgan S. E.— Radio Sci., 1980, v. 15, p. 1195.
94. Финкельберг В. М.— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 401.
95. Татарский В. И.— УФН, 1983, т. 139, с. 587.
96. Kohler W., Rapanicolaou G. C.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1733.
97. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Козлов В. Ф., Ярощук Е. В.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1981, т. 24, с. 952.
98. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М.: Наука, 1980.
99. Апресян Л. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1978, т. 21, с. 1868.
100. Займан Дж. Модели беспорядка.— М.: Мир, 1982.
101. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем.— М.: Наука, 1982.
102. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы.— М.: Атомиздат, 1971.
103. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
104. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М.: Наука, 1970.
105. Заславский Г. М., Чприков Б. В.— УФН, 1971, т. 105, с. 3.
106. Рабинович М. И.— УФН, 1978, т. 125 с. 123.

