

537.312.62

**ТЕОРИЯ ТОКОВЫХ СОСТОЯНИЙ  
В УЗКИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ КАНАЛАХ**

**Б. И. Ивлев, Н. Б. Коннин**

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение . . . . .	435
2. Динамические уравнения . . . . .	437
3. Анализ устойчивости нормального состояния канала . . . . .	440
а) Бесконечно длинные однородные каналы (440). б) Влияние SN-границы и неоднородностей на устойчивость нормального состояния канала с током (442).	
4. Общие представления о резистивном состоянии . . . . .	447
5. Феноменологические теории резистивного состояния . . . . .	452
а) Флуктуационное возбуждение центров проскальзывания фазы (452). б) Спонтанное образование ЦПФ (455).	
6. Результаты численных исследований динамических уравнений для резистивного состояния . . . . .	457
7. Микроскопическая теория резистивного состояния . . . . .	459
а) Структура центров проскальзывания фазы (459). б) Вольт-амперная характеристика (463). в) Верхняя граница резистивного состояния (465). г) Скачки напряжения на ВАХ сверхпроводящих каналов конечной длины (467).	
8. Заключение . . . . .	469
Цитированная литература . . . . .	470

**1. ВВЕДЕНИЕ**

В настоящем обзоре рассматриваются свойства узких сверхпроводящих каналов, несущих постоянный ток. Узкими каналами будем называть такие проводники, поперечные размеры которых меньше (или, на практике, порядка) глубины проникновения магнитного поля и длины когерентности  $\xi(T)$ . Таким условиям удовлетворяют узкие полоски и вискеры. Например, для олова поперечные размеры должны быть порядка нескольких десятых — одного микрометра. Длину образцов будем считать достаточно большой — больше так называемой глубины проникновения электрического поля  $l_E$ , определение которой будет дано ниже. Свойства узких сверхпроводящих каналов достаточно хорошо изучены экспериментально. Состояния, реализующиеся в таких каналах, весьма своеобразны и для своего объяснения зачастую требуют привлечения новых (с точки зрения классических представлений о сверхпроводимости) достижений микроскопической теории. С другой стороны, такие объекты для теоретика удобны потому, что благодаря эффективной одномерности задачи, где все величины зависят только от координаты вдоль образца, заметно снижаются математические трудности, и физические явления проступают более отчетливо.

Суммируем кратко, что известно о свойствах узких сверхпроводящих каналов с током. Теория Гинзбурга — Ландау предсказывает, что при температуре ниже температуры сверхпроводящего перехода такой канал может находиться либо в однородном сверхпроводящем, либо в нормальном состоянии в зависимости от величины тока, протекающего по каналу: при малых токах канал находится в сверхпроводящем состоянии, а при увеличении плот-

ности тока выше так называемого критического тока Гинзбурга — Ландау  $j_c$  однородное сверхпроводящее состояние исчезает и канал должен переходить в нормальное состояние. Такая картина, однако, упрощает реальную ситуацию по крайней мере в двух аспектах.

Во-первых, эксперимент показывает, что выше критического тока Гинзбурга — Ландау сверхпроводящее состояние не исчезает полностью, а переходит в так называемое резистивное состояние, в котором в образце одновременно существуют сверхпроводимость и постоянное электрическое поле, т. е. на образце имеется конечная разность потенциалов, в то время как в прочих отношениях он остается сверхпроводящим. Такое состояние свидетельствует о том, что простое отсутствие электросопротивления не является фундаментальным свойством сверхпроводимости. Резистивные состояния, вообще говоря, встречаются не только в случае узких каналов. Наиболее хорошо известным примером является течение потока в смешанном состоянии сверхпроводников второго рода <sup>1, 2</sup>, где генерация электрического поля связана с движением вихрей под действием тока, протекающего по образцу. В узких сверхпроводящих каналах, однако, резистивное состояние не связано с движением каких-либо дефектов сверхпроводящей структуры, а представляет собой качественно новое явление. Обсуждению свойств резистивного состояния будет посвящена основная часть обзора.

Во-вторых, в теории Гинзбурга — Ландау остается в стороне вопрос, посредством какого механизма происходит переход из нормального состояния в сверхпроводящее при уменьшении тока. Известно, что нормальное состояние канала бесконечной длины устойчиво в малом (т. е. относительно бесконечно малых флуктуаций) при любом сколь угодно слабом токе. Объясняется это тем, что куперовская пара, возникнув флуктуационным образом, будет ускоряться существующим в образце электрическим полем до тех пор, пока она не наберет достаточно большой скорости и не разрушится. Такой вывод, однако, не распространяется на флуктуации конечной величины. Благодаря тому, что электрическое поле проникает в сверхпроводящую область на конечную глубину  $l_E$ , возможно возникновение критического зародыша сверхпроводящей фазы в нормальной. Такой критический зародыш характеризуется тем, что электрическое поле в нем достаточно подавлено и не может противодействовать куперовской неустойчивости нормального состояния. Зародыши, превышающие критический размер, будут расти и с течением времени заполнят весь образец, который, таким образом, перейдет в сверхпроводящее состояние. Следовательно, переход из нормального состояния в сверхпроводящее в узком однородном канале бесконечной длины при наличии тока является, по существу, переходом первого рода. Величина критического зародыша зависит от тока, увеличиваясь с ростом последнего. При токе выше некоторого значения  $j_2$  существование критического зародыша становится невозможным. Ток  $j_2$ , как правило, заметно превышает критический ток Гинзбурга — Ландау. Можно полагать поэтому, что интервал токов  $j_c < j < j_2$  соответствует области существования резистивного состояния, о котором говорилось выше. Этот вопрос, однако, исследован еще недостаточно.

Важную роль при переходе из нормального состояния канала в сверхпроводящее играют явления, происходящие на концах канала и вблизи различных неоднородностей, присутствующих в нем. Оказывается, что неоднородности, а также граница с нормальным металлом (имеющаяся, например, в местах контакта с нормальными проводниками, служащими для подключения измерительных приборов) существенно облегчают возникновение сверхпроводящего зародыша. Существует некоторое критическое значение тока  $j_1$  такое, что при  $j < j_1$  нормальное состояние вблизи неоднородности или SN-границы является абсолютно неустойчивым относительно образования бесконечно малого сверхпроводящего зародыша, который затем растет со временем и расширяется так, что по прошествии достаточно большого времени весь канал оказывается сверхпроводящим.

Упомянутые выше явления и представляют собой предмет настоящего обзора. Нужно подчеркнуть, что обзор посвящен теории этих явлений. Экспериментальные сведения даются лишь в той мере, которая необходима для качественного представления явлений, и не претендуют на полноту. Кроме того, мы не ставим целью упомянуть всю имеющуюся по этому поводу литературе, а хотим осветить лишь основные идеи и достижения теории.

## 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Поведение сверхпроводников в присутствии электрического поля является существенно нестационарным и должно описываться динамическими уравнениями сверхпроводимости. К сожалению, система нестационарных уравнений для сверхпроводников в общем случае чрезвычайно сложна и кроме уравнений для сверхпроводящих параметров содержит обобщенные кинетические уравнения для функции распределения возбуждений. С помощью такой системы уравнений общего вида чрезвычайно трудно проследить за интересующими нас явлениями. Обычно для получения конкретных результатов на основании микроскопической теории ограничиваются определенными интервалами значений каких-либо параметров (чаще всего — температуры), где можно существенно упростить полную систему динамических уравнений, сохраняя при этом те ее особенности, которые важны для изучаемых явлений.

В настоящем обзоре мы также встанем на эту точку зрения и выпишем ниже сравнительно простую систему динамических уравнений, которую можно вывести из микроскопической теории сверхпроводимости в определенном узком интервале температур вблизи критической температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$ . Эта система будет использоваться для получения количественных результатов. Качественные результаты, получающиеся без привлечения динамических уравнений конкретного вида, будут, естественно, иметь более общий характер.

Пусть  $\Delta$  и  $\chi$  — модуль и фаза сверхпроводящего параметра порядка. Введем также градиентно инвариантные потенциалы электромагнитного поля  $\mathbf{Q} = \mathbf{A} - (hc/2e)\nabla\chi$  и  $\Phi = \varphi + (\hbar/2e)\partial\chi/\partial t$ , где  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  — обычные электромагнитные потенциалы. В этом разделе мы выпишем систему динамических уравнений, содержащую только сверхпроводящие параметры  $\Delta$ ,  $\mathbf{Q}$  и  $\Phi$ , которую можно получить из микроскопической теории вблизи критической температуры при достаточно медленных пространственных и временных изменениях этих величин. Более конкретно будем требовать, чтобы  $Dk^2$ ,  $\omega \ll \tau_{ph}^{-1}$ , где  $D$  — коэффициент диффузии,  $\tau_{ph}$  — время неупругой электрон-фононной релаксации,  $a$  и  $\omega$  — характерные волновые векторы и частоты задачи. Эти уравнения обладают достаточной общностью и имеют вполне доступный с экспериментальной точки зрения диапазон применимости по температуре. В наиболее общем виде эти уравнения впервые были получены Крамером и Уоттс-Тобином<sup>3</sup> (см. также последующую работу Уоттс-Тобина и др.<sup>4</sup> и работы Голуба<sup>5</sup>, Шёна и Амбегоакара<sup>6</sup>). Они имеют вид

$$-\frac{\pi}{8T} V \sqrt{4\tau_{ph}^2 \Delta^2 + \hbar^2} \frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\pi\hbar}{8T} D \nabla^2 \Delta - \frac{\pi\hbar}{8T} D \left( \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{Q} \right)^2 \Delta + \frac{T_c - T}{T} \Delta - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{\Delta^3}{T^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{V \sqrt{4\tau_{ph}^2 \Delta^2 + \hbar^2}} \Delta^2 \Phi + \frac{D}{\hbar c} \operatorname{div}(\Delta^2 \mathbf{Q}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \frac{\sigma \pi \Delta^2}{2\hbar c T} \mathbf{Q}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (2.4)$$

На основании условия электронейтральности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (2.5)$$

из (2.2) и (2.3) можно получить

$$D\nabla^2\Phi + \frac{D}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \frac{\pi}{2T} \frac{\Delta^2\Phi}{\sqrt{4\tau_{ph}^2\Delta^2 + \hbar^2}}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) описывает процесс релаксации так называемого электронно-дырочного разбаланса. Мы не будем подробно останавливаться на этом явлении, которое рассмотрено в оригинальных работах <sup>7-10</sup> и обзорах (см., например, <sup>11, 12</sup>). Отметим лишь наиболее существенные для дальнейшего обстоятельства. Градиентно инвариантный потенциал  $\Phi = \varphi + (\hbar/2e)\partial\chi/\partial t$  можно представить в виде разности  $\Phi = (1/e)(\mu_p - \mu_e)$ , где  $\mu_e = -e\varphi$  — химический потенциал нормальных квазичастиц, отсчитанный от уровня Ферми, а  $\mu_p = (\hbar/2e)\partial\chi/\partial t$  — химический потенциал куперовских пар в расчете на одну частицу. В равновесии всегда  $\mu_p = \mu_e$  и  $\Phi = 0$ . В неравновесной ситуации, однако, химические потенциалы этих двух сортов частиц могут отличаться друг от друга. Такая неравновесность в сверхпроводнике может описываться также в терминах разбаланса заселенности электроноподобной и дырочноподобной ветвей энергетического спектра. Эта неравновесность обладает характерным временем релаксации  $\tau_Q$ , так что за счет диффузии электронов разность  $\Phi = (1/e)(\mu_p - \mu_e)$  затухает на расстояниях  $l_E = \sqrt{D\tau_Q}$ . Нетрудно видеть, что уравнение (2.6) описывает именно этот процесс, причем релаксация  $\Phi$  происходит за счет пространственной дисперсии (член, содержащий  $\partial\Phi/\partial t$ , мал при  $\omega \ll \tau_{ph}^{-1}$ ). Уравнение (2.6) определяет характерную длину  $l_E$ , которая в случае  $\Delta = \text{const}$  равна

$$l_E = \left( \frac{2DT}{\pi\Delta^2} \right)^{1/2} (4\tau_{ph}^2\Delta^2 + \hbar^2)^{1/4} \quad (2.7)$$

Эта длина и является глубиной проникновения постоянного ( $\partial\mathbf{Q}/\partial t = 0$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ) электрического поля.

Уравнения (2.1)–(2.3) в бесщелевом случае  $\tau_{ph}\Delta \ll \hbar$  переходят в уравнения временной теории Гинзбурга — Ландау <sup>13, 14</sup>. В обратном пределе  $\Delta\tau_{ph} \gg \hbar$  уравнение (2.1) совпадает с динамическим уравнением для щелевого сверхпроводника, впервые полученным Горьковым и Элиашбергом <sup>15</sup>, а уравнение (2.6) в этом случае определяет глубину проникновения электрического поля

$$l_E = \sqrt{D\tau_{ph} \frac{4T}{\pi\Delta}}, \quad (2.8)$$

совпадающую с результатом работ <sup>9, 10</sup>.

Релаксация потенциала  $\Phi$  происходит за счет взаимодействия конденсата с возбуждениями. В бесщелевом сверхпроводнике это взаимодействие велико, поэтому глубина проникновения электрического поля довольно мала,  $l_E = (2DT\hbar/\pi\Delta^2)^{1/2}$ , и имеет порядок длины когерентности  $\xi(T)$ , где

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\pi D\hbar}{8(T_c - T)}}. \quad (2.9)$$

В сверхпроводнике со щелью, однако, взаимодействие конденсата с возбуждениями может происходить только косвенным образом (в рассматриваемой модели — через фононы), поэтому в этом случае длина  $l_E$  из (2.8) содержит большое время электрон-фононных столкновений  $\tau_{ph}$  и велика по сравнению с  $\xi(T)$ .

Из уравнений (2.1)–(2.3) видно, что характерный масштаб частот имеет порядок

$$\omega_{\text{ГЛ}} = \frac{\pi\Delta_{\text{ГЛ}}^2}{2T\hbar}, \quad (2.10)$$

где

$$\Delta_{\text{ГЛ}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 T (T_c - T)}{7\zeta(3)}} \quad (2.11)$$

— равновесное значение параметра порядка. Поэтому условие применимости этих уравнений,  $\omega, Dk^2 \ll \tau_{\text{ph}}^{-1}$ , требует, чтобы температура была достаточно близка к  $T_c$ :

$$\frac{T_c - T}{T} \ll \frac{\hbar}{\tau_{\text{ph}} T_c}. \quad (2.12)$$

Величины  $\tau_{\text{ph}} T / \hbar$  для реальных материалов велики (см. таблицу). В смысле условия (2.12) наиболее благоприятной с экспериментальной точки зрения является ситуация в Pb, In

и, быть может, в Sn.

Таблица

Значения параметра  $\tau_{\text{ph}} k_B T_c / \hbar$   
для различных сверхпроводников

Материал	$T_c, \text{К}$	$\tau_{\text{ph}}, \text{с}$	$\tau_{\text{ph}} k_B T_c / \hbar$
Pb	7,2	$2 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10$
In	3,4	$10^{-10}$	$4 \cdot 10$
Sn	3,8	$3 \cdot 10^{-10}$	$10^2$
Al	1,2	$10^{-8}$	$10^3$

Иногда будет удобно пользоваться уравнениями (2.1)–(2.3) в безразмерной форме. В этих случаях в качестве масштабов длины и времени выбираются соответственно  $\xi(T)$  и  $\tau_{\text{ГЛ}} = \omega \xi$ , параметр порядка измеряется в единицах, нормированных на его равновесное значение  $\Delta_{\text{ГЛ}}$ , а ток — в единицах  $\pi \sigma \Delta_{\text{ГЛ}}^2 / 4eT\xi$ . Критический ток Гинзбурга — Ландау в таких единицах равен  $j_c = 2/3\sqrt{3} \simeq 0,385$ . В безразмерных переменных уравнения принимают вид

$$-u \left( \frac{\Delta^2}{\Gamma^2} + 1 \right)^{1/2} \frac{\partial \Delta}{\partial t} + \nabla^2 \Delta + (1 - \Delta^2 - Q^2) \Delta = 0, \quad (2.13)$$

$$u \Delta^2 \left( \frac{\Delta^2}{\Gamma^2} + 1 \right)^{-1/2} \Phi + \text{div}(\Delta^2 Q) = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \nabla \Phi - \Delta^2 \mathbf{Q}, \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 \Phi + \text{div} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = u \Delta^2 \left( \frac{\Delta^2}{\Gamma^2} + 1 \right)^{-1/2} \Phi. \quad (2.16)$$

Градиентно инвариантные потенциалы в таких единицах равны  $\Phi = \varphi + \partial \chi / \partial t$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{A} - \nabla \chi$ . Ниже мы будем пренебрегать магнитным полем по причине узости образца и считать  $\mathbf{Q} = -\nabla \chi$ . В уравнениях (2.13)–(2.16) введен фактор распаривания

$$\Gamma = \frac{\hbar}{2\tau_{\text{ph}} \Delta_{\text{ГЛ}}} = \frac{\pi \hbar}{8 \sqrt{u}} \frac{1}{\tau_{\text{ph}} T_c} \left( \frac{T_c - T}{T} \right)^{-1/2}, \quad (2.17)$$

а численный параметр  $u = \pi^4 / 14\zeta(3) \approx 5,79$ .

Бесщелевая ситуация отвечает  $\Delta \ll \Gamma$ . Фактор распаривания  $\Gamma$  зависит от температуры. В очень узкой окрестности вблизи  $T_c$ ,  $1 - (T/T_c) \ll \ll (\hbar/\tau_{\text{ph}} T)^2$ , фактор  $\Gamma$  велик,  $\Gamma \gg 1$ , и всегда имеет место бесщелевая ситуация. Однако для тех температур, при которых обычно проводятся эксперименты, фактор  $\Gamma$ , как правило, значительно меньше единицы, поскольку произведение  $\tau_{\text{ph}} T_c / \hbar$  достаточно велико. Поэтому в тех случаях, когда  $\Delta$  порядка своего равновесного значения ( $\Delta \sim 1$  в наших единицах), обычно имеет место неравенство  $\Delta \gg \Gamma$ , что соответствует наличию щели в энергетическом спектре. В такой ситуации глубина проникновения электрического поля, как видно из (2.16), имеет порядок  $l_E \sim (u\Gamma)^{-1/2}$  и значительно превосходит  $\xi(T)$  ( $\xi = 1$  в наших единицах).

Уравнения (2.13)–(2.15) можно также записать в комплексной форме, вводя комплексный параметр порядка  $\psi = \Delta \exp(i\chi)$ :

$$-u \left( \frac{|\psi|^2}{\Gamma^2} + 1 \right)^{-1/2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\phi\psi + \frac{1}{2\Gamma^2} \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} \right] + \nabla^2 \psi + \psi - |\psi|^2 \psi = 0, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi + \frac{1}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (2.19)$$

### 3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НОРМАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ КАНАЛА

#### а) Бесконечно длинные однородные каналы

В этом разделе мы исследуем устойчивость нормального состояния сверхпроводящего канала с током. Рассмотрим сначала однородный канал очень большой длины так, чтобы влиянием его границ можно было пренебречь.

Исследуем прежде всего устойчивость нормального состояния такого канала с током относительно бесконечно малых флуктуаций параметра порядка. При бесконечно малых значениях параметра порядка всегда имеет место бесщелевая ситуация  $\Delta\tau_{ph} \ll \hbar$ , так что сверхпроводник описывается временными уравнениями Гинзбурга — Ландау. Для анализа воспользуемся уравнением в форме (2.18), (2.19) и линеаризуем их при  $|\psi| \ll \Gamma, 1$ . В этом случае  $\phi = -jx$  и

$$-u \frac{\partial \psi}{\partial t} + iujx\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi = 0, \quad (3.1)$$

где ось  $x$  выбрана вдоль длины канала. Решение этого уравнения можно записать в виде <sup>16</sup>

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \sqrt{\frac{u}{4\pi t}} \exp \left( \frac{t}{u} - \frac{j^2 t^3}{12u} \right) \exp(ijxt) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi(y, 0) \exp \left[ -\frac{ijt}{2}(x-y) - \frac{u(x-y)^2}{4t} \right], \end{aligned}$$

где  $\psi(y, 0)$  дает флуктуацию  $\psi$  в начальный момент времени  $t = 0$ . Член  $t^3$  в экспоненте описывает разгон куперовских пар электрическим полем и приводит к тому, что все бесконечно малые флуктуации будут затухать при  $t \rightarrow \infty$ . Так, например, флуктуация с начальной амплитудой  $|\psi(x, 0)| = \Delta_0$  и характерными размерами, большими  $\xi$ , эволюционирует по закону

$$\Delta = \Delta_0 \exp \left( \frac{t}{u} - \frac{j^2 t^3}{3u} \right).$$

Отсюда в соответствии с работами Горькова <sup>17</sup> и Кулика <sup>18</sup> можно сделать вывод об устойчивости нормального состояния относительно бесконечно малых флуктуаций.

Поведение сверхпроводящего канала в электрическом поле существенно зависит от того, каким образом создается электрическое поле в нем. Если сверхпроводящий образец и внешние источники поля образуют систему, в которой в сверхпроводящем канале поддерживается постоянное электрическое поле (например, в случае, когда электрическое поле создается за счет индукции), то нормальное состояние будет всегда устойчиво. Это ясно из сказанного выше об ускорении куперовских пар электрическим полем. Иначе обстоит дело в случае, когда в системе реализуется схема с заданным током. Тут существенную роль будут играть флуктуации конечной амплитуды. Благодаря тому, что электрическое поле проникает в сверхпроводящую область лишь на глубину  $l_E$ , возможно возникновение такой сверхпроводящей флуктуации с конечной амплитудой, что электрическое поле внутри сверхпроводящей области будет существенно подавлено и не сможет противодействовать куперовской неустойчивости нормального состояния. Такая

флуктуация будет играть роль критического зародыша сверхпроводящей фазы в нормальной. Все зародыши, превышающие критический размер, будут расширяться и распространяться на весь канал.

Задача о критическом зародыше связана с исследованием нелинейных уравнений, поэтому она весьма сложна с математической точки зрения. Большую помощь здесь могут оказать численные методы. В работе Уоттса-Тобина и др.<sup>4</sup> задача о критическом зародыше решалась численно для системы уравнений (2.18), (2.19). Форма критического стаци-

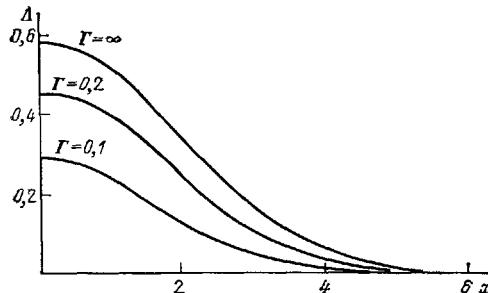


Рис. 1. Форма критического зародыша, полученная численным решением уравнений (2.18), (2.19) при токе  $j = 0,25$ <sup>4</sup>. Зародыш симметричен относительно точки  $x = 0$ . Показана лишь правая половина зародыша.

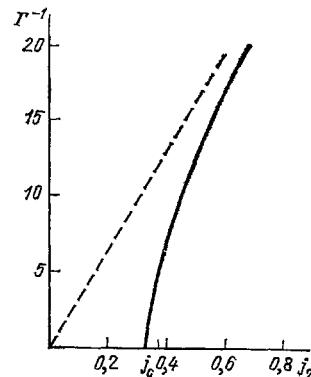


Рис. 2. Зависимость  $j_2$  от  $\Gamma^{-1}$ . При  $\Gamma = \infty$  ток  $j_s = 0,335$ , а при  $\Gamma = 0,18$  ток  $j_2 = j_c = 0,385$ . Штриховой линией изображена асимптотическая зависимость.

онарного, но неравновесного) зародыша при различных значениях параметра  $\Gamma$  в случае тока  $j = 0,25$  показана на рис. 1, взятом из работы<sup>4</sup>. Отмечалось, что при уменьшении тока амплитуда критического зародыша уменьшается, т. е. переход в сверхпроводящее состояние при меньших токах происходит легче. При увеличении тока, однако, амплитуда критического зародыша, растет, и при токе выше некоторого значения  $j_2$  существование критического зародыша становится невозможным. Оценки показывают, что величина

$$j_2 \sim j_c \frac{l_E^2}{\xi^2}. \quad (3.2)$$

На рис. 2 из работы<sup>4</sup> показана зависимость тока  $j_2$  от параметра  $\Gamma$ . При  $\Gamma \rightarrow 0$  получена асимптотика  $j_2 = 0,030 \Gamma^{-1}$  в безразмерных единицах. В обычных единицах в этом случае

$$j_2 = \frac{\sigma \Delta^2 \Gamma_{\text{пл}}}{4 \pi T \xi} \cdot 0,030 \Gamma^{-1}.$$

Таким образом, переход из нормального состояния в сверхпроводящее при наличии тока связан с образованием критического зародыша и является, следовательно, переходом первого рода.

Величина  $j_2$  определяет границу, выше которой нормальное состояние канала абсолютно устойчиво. Как уже говорилось выше, обычно  $l_E$  значительно превышает  $\xi(T)$ , поэтому ток  $j_2$  заметно выше  $j_c$ . Если ток  $j$ , текущий по каналу, меньше  $j_c$ , то из нормального состояния канал переходит в однородное сверхпроводящее состояние. В таком состоянии весь ток переносится сверхпроводящими электронами  $j = j_s$ , где сверхпроводящий ток  $j_s = \Delta^2 \nabla \chi$  связан с модулем параметра порядка соотношением

$$j_s = \Delta^2 \sqrt{1 - \Delta^2}.$$

Как хорошо известно<sup>19</sup>, такое сверхпроводящее токовое состояние может

6 УФН, т. 142, вып. 3

существовать только в интервале токов  $0 < j < j_c$ . Если же ток  $j$  лежит в интервале  $j_c < j < j_2$ , то переход из нормального состояния будет происходить не в однородное сверхпроводящее состояние, а в резистивное состояние, которое описывается в разделах 4—7.

**б) Влияние SN-границы и неоднородностей на устойчивость нормального состояния канала с током**

Переход, сопровождающийся образованием критического зародыша, связан с преодолением энергетического барьера, который по причине макроскопических размеров образца (ширина и толщина которого в сотни и тысячи раз превышает атомные размеры) имеет чрезвычайно большую величину.

В результате вероятность образования критического зародыша, вообще говоря, должна быть очень малой.

До сих пор речь шла об однородном сверхпроводящем канале бесконечно большой длины. По аналогии с обычными переходами первого рода возникает вопрос о том, какую роль концы сверхпроводящего канала и неоднородности в нем играют при

Рис. 3. Узкий сверхпроводящий канал (S) своими концами присоединен к нормальному проводникам (N).

переходе из нормального состояния в сверхпроводящее при наличии тока. Поскольку в реальной экспериментальной ситуации сверхпроводящий образец соединяется с измерительными приборами с помощью нормальных контактов, естественно рассмотреть сначала такую постановку задачи, при которой узкий сверхпроводящий канал своими концами присоединен к нормальному проводникам, так что в местах соединения образуются SN-границы (рис. 3). Влияние SN-границы на устойчивость нормального состояния канала с током исследовалась в работе <sup>20</sup>. Ниже мы изложим основные результаты этой работы.

Рассмотрим полубесконечный узкий сверхпроводящий канал, занимающий область  $x < 0$  (рис. 3). На границе с нормальным металлом будем полагать  $\Delta = 0$ , что выполняется, если контакт является «хорошим» нормальным металлом, т. е. если параметр порядка в нем спадает на расстояниях, меньших  $\xi(T)$  в сверхпроводнике.

Решение для бесконечно малого зародыша находится из линеаризованного уравнения (3.1). Положим

$$\Psi = e^{-i\omega t} f(x). \quad (3.3)$$

Для  $f(x)$  получается уравнение

$$[1 + iu(\omega + jx)] f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (3.4)$$

решение которого можно выразить через функции Бесселя порядка  $1/3$ :

$$f(x) = [1 + iu(\omega + jx)]^{1/2} Z_{1/3}(z), \quad (3.5)$$

где  $Z_{1/3}$  — одно из решений уравнения Бесселя, а

$$z = \frac{2i}{3u\omega} [1 + iu(\omega + jx)]^{3/2}.$$

область изменения  $z$  в комплексной плоскости при изменении  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  показана на рис. 4. Решение, убывающее при  $x \rightarrow -\infty$ , получается при выборе  $Z = H_{1/3}^{(2)}$ , где  $H_{1/3}^{(2)}$  — функция Ганкеля второго рода. Таким образом,

$$f(x) = [1 + iu(\omega + jx)]^{1/2} H_{1/3}^{(2)}(z). \quad (3.6)$$

На рис. 4 изображен разрез вдоль отрицательной действительной полуоси  $z$ .

соответствующий определению главной ветви функции  $H^{(2)}$ . При движении по  $x$  от  $-\infty$  аргумент функции Ганкеля уходит из области определения главной ветви  $H^{(2)}$ . Аналитическое продолжение под разрез дает

$$H_{1/3}^{(2)}(z) = H_{1/3}^{(2)}(z') + e^{i\pi/3} H_{1/3}^{(1)}(z') = 2e^{i\pi/6} \left[ J_{1/3}(z') \cos \frac{\pi}{6} - Y_{1/3}(z') \sin \frac{\pi}{6} \right], \quad (3.7)$$

где  $z = e^{i\pi} z'$ , а  $J_{1/3}$  и  $Y_{1/3}$  — соответственно функция Бесселя и функция Неймана. Как видно из (3.7), при  $x \rightarrow +\infty$  функция  $H_{1/3}^{(2)}(z)$  экспоненциально нарастала бы, что означает отсутствие бесконечно малого стационарного решения уравнения (3.1) в канале бесконечной длины в соответствии с результатами предыдущего раздела. В нашем случае, однако, сверхпроводящий

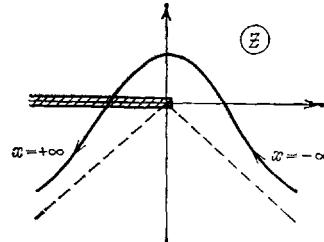


Рис. 4. Область изменения аргумента функции Ганкеля  $H_{1/3}^{(2)}(z)$  в комплексной плоскости при изменении  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Разрез соответствует определению главной ветви функции.

канал ограничен областью  $x < 0$ , и нужно потребовать  $H_{1/3}^{(2)}(z) = 0$  при  $x = 0$ . Корни цилиндрической функции  $J_{1/3}(z') \cos \frac{\pi}{6} - Y_{1/3}(z') \sin \frac{\pi}{6}$  располагаются на положительной вещественной полуоси  $z'$ . Нам нужен наименьший корень, который отвечает  $z' = s_1 \approx 2,383$ . Приравнивая  $z = s_1 e^{i\pi}$  при  $x = 0$ , получаем условие для частоты

$$-iu\omega = \left[ 1 - \left( \frac{j}{j_1} \right)^{2/3} \right] - i\sqrt{3} \left( \frac{j}{j_1} \right)^{2/3}, \quad (3.8)$$

где критический ток  $j_1$  определяется из

$$uj_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3s_1} \simeq 0,791.$$

С учетом численного значения параметра  $u = 5,79$  имеем

$$j_1 \approx 0,137 \approx 0,356j_c.$$

Из выражения (3.8) видно, что при токе  $j < j_1$  инкремент  $\operatorname{Re}(-i\omega) > 0$ , и бесконечно малое решение будет нарастать со временем. При  $j > j_1$  бесконечно малое решение затухает. Для выяснения дальнейшей судьбы бесконечно малого зародыша рассмотрим уравнения (2.18), (2.19) в области  $|j_1 - j| \ll j_1$  и учтем в них нелинейные члены. Имеем

$$\Phi = -jx - \varphi_s, \quad \varphi_s = \int_x^0 dx \cdot j_s,$$

где

$$j_s = \frac{1}{2i} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right). \quad (3.9)$$

Записав по-прежнему  $\Psi$  в виде (3.3), при  $|\operatorname{Re}(-i\omega)| \ll 1$  имеем

$$[1 + iu(\omega + jx)]f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left[ iu\varphi_s - \frac{iu}{2\Gamma^2} (\omega + jx) |f|^2 + |f|^2 \right] f = 0. \quad (3.10)$$

Положим

$$f = Cf_0(x) + f_1(x),$$

где  $C$  — положительная постоянная,  $C \ll 1$ , а  $f_0(x)$  имеет вид (3.6). Малая поправка  $f_1 \sim C^3$  также удовлетворяет условиям  $f_1(x) = 0$  при  $x = 0$

и  $f_1(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . С помощью условия ортогональности решения однородного линейного уравнения (3.4) по отношению к нелинейной части уравнения (3.10) получаем для частоты

$$-iu\omega = \left( \frac{2}{3} \frac{j_1 - j}{j_1} - \alpha' \right) - i \left( \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{j - j_1}{j_1} + \alpha'' \right), \quad (3.11)$$

где величины  $\alpha'$  и  $\alpha''$  даются определенными интегральными выражениями, содержащими нелинейную часть уравнения (3.10).

Для исследования устойчивости малого сверхпроводящего зародыша нужно знать величину  $\alpha'$ . После численного вычисления соответствующих интегралов получаем

$$\alpha' = C^2 \left( I_1 - I_2 u - \frac{I_3}{2\Gamma^2} \right), \quad (3.12)$$

где

$$I_1 \approx 0,981, \quad I_2 \approx 0,496, \quad I_3 \approx 0,372.$$

При вычислении интегралов функция  $f_0(x)$  нормировалась так, чтобы  $\max |f_0(x)| = 1$ . Результаты для  $|f_0(x)|$ ,  $\varphi_s$  и  $j_s$  показаны на рис. 5.

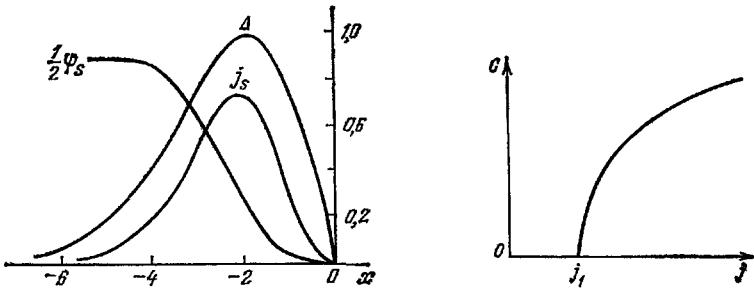


Рис. 5. Результат численного интегрирования уравнения (3.4) при  $j = j_1$ .

Функция  $f(x)$  нормирована таким образом, что  $\max |f(x)| = 1$ . Для получения истинного значения  $\Delta$ ,  $\varphi_s$ ,  $j_s$  надо умножить результат для  $|f(x)|$  на  $C$ , а результаты для  $j_s$  и  $\varphi_s$  — на  $C^2$ , где  $C$  определяется выражением (3.16).

Рис. 6. Схематическая зависимость амплитуды критического зародыша  $C(j)$  от тока.

Из выражений (3.11) и (3.12) видно, что малое решение при  $j < j_1$  могло бы быть устойчиво только при  $I_1 - I_2 u - I_3/2\Gamma^2 > 0$ . Однако, поскольку  $u > I_1/I_2 \approx 1,98$ , то  $\alpha' = -bC^2$ , где  $b = I_2 u - I_1 + (I_3/2\Gamma^2) > 0$ , и инкремент решения

$$\operatorname{Re}(-i\omega) = \frac{1}{u} \left( bC^2 + \frac{2}{3} \frac{j_1 - j}{j_1} \right) \quad (3.13)$$

будет всегда положительным при  $j < j_1$ . Таким образом, при  $j < j_1$  бесконечно малое решение будет нарастать со временем. Если же  $j > j_1$ , то кривая, описываемая формулой

$$C(j) = \sqrt{\frac{2}{3b} \left( \frac{j - j_1}{j_1} \right)}, \quad (3.14)$$

определяет порог устойчивости нормального состояния относительно образования вблизи SN-границы сверхпроводящего зародыша с амплитудой  $C$ . Кривая  $C(j)$  изображена схематически на рис. 6.

Эти результаты относятся к зародышам с малой амплитудой  $C \ll \Gamma$ , 1. Для того чтобы выяснить поведение зародыша после того, как он приобрел конечную амплитуду, в <sup>20</sup> было предпринято численное интегрирование уравнений (2.18), (2.19). Были получены следующие результаты.

При  $j > j_1$  малые возмущения затухают со временем. Существует, однако, критическая амплитуда  $C(j)$  такая, что исходное возмущение с большей амплитудой  $C > C(j)$  будет нарастать и при  $j > j_1$ . Такое поведение согласуется с описанным выше.

При токах  $j < j_1$  малые возмущения нарастают, причем сначала растет амплитуда зародыша, пока она не достигает значений, близких к единице, после чего зародыш начинает расширяться, а его граница движется в глубь сверхпроводника. Такое поведение аналогично расширению сверхпроводящего домена, изучавшегося в работах <sup>21, 22</sup> в рамках временных уравнений Гинзбурга — Ландау. Скорость движения границы зародыша и ее наклон

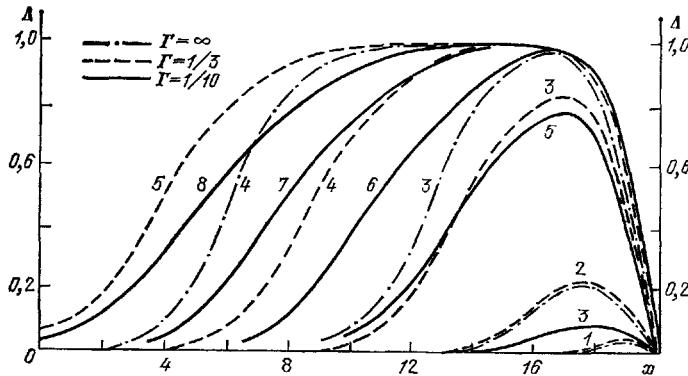


Рис. 7. Результаты численных расчетов, описывающие рост и расширение сверхпроводящего зародыша при токе  $j = 0,1$  и значениях параметра  $\Gamma = \infty$ ,  $\Gamma = 1/3$  и  $\Gamma = 0,1$ . Кривые 1, 2, ... соответствуют последовательным моментам времени  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 30$ ,  $t_3 = 60$  и т. д.;  $t_n = 30(n - 1)$ .

уменьшаются с уменьшением  $\Gamma$  при данном токе. С уменьшением тока скорость границы возрастает, а наклон ее уменьшается. На рис. 7 представлены результаты численных расчетов для значений параметров  $\Gamma = \infty$ ,  $\Gamma = 1/3$  и  $\Gamma = 1/10$  при токе  $j = 0, 1$ .

Таким образом, вблизи границы с нормальным металлом в сверхпроводнике существуют благоприятные условия для возникновения сверхпроводящего зародыша на фоне нормального состояния. Это связано с тем, что вблизи  $SN$  границы почти весь ток в сверхпроводнике переносится нормальными возбуждениями, так что ток куперовских пар и их скорость малы. Иными словами, граница препятствует ускорению куперовских пар электрическим полем, что облегчает образование сверхпроводящего зародыша.

Совершенно аналогично может быть исследован вопрос о роли неоднородностей. Следуя работе <sup>23</sup>, рассмотрим такую неоднородность, при которой критическая температура канала зависит от координаты  $x$ :

$$T_c = \begin{cases} T_c, & |x| > d, \\ T_{c1}, & |x| < d. \end{cases}$$

Если размер неоднородности мал по сравнению с  $\xi(T)$ , то, рассматривая задачу на масштабах порядка  $\xi(T)$ , можно в уравнении (2.1) заменить член  $(T_c - T)/T_c$  на  $[T_c - T + (T_{c1} - T_c) 2d\delta(x)]/T_c$ . При переходе к безразмерным единицам в уравнении (2.18) появится дополнительный член  $a\delta(x)$ , где параметр

$$a = \frac{2d}{\xi_0} \frac{T_c - T_{c1}}{T_c} \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^{-1/2}$$

характеризует «интенсивность» неоднородности. Параметр  $a$  может быть по абсолютной величине как больше, так и меньше единицы. Если неоднородность ослабляет сверхпроводимость ( $T_{c1} < T_c$ ), то  $a > 0$  и наоборот,

Наличие  $\delta$ -функции приводит к тому, что условие в точке  $x = 0$  будет теперь иметь вид

$$\psi(+0) = \psi(-0), \quad \frac{\partial \psi(+0)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(-0)}{\partial x} = a\psi(0). \quad (3.15)$$

Для бесконечно малого зародыша при  $x \neq 0$  вновь получаем уравнение (3.4), решение которого по-прежнему имеет вид (3.5), но в качестве  $Z_{1/3}(z)$  при  $x < 0$  и  $x > 0$  нужно теперь брать разные линейные комбинации функций Ганкеля  $H^{(1)}$  и  $H^{(2)}$ , удовлетворяющие условию убывания соответственно при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow +\infty$ . Сшивка этих функций с помощью условий (3.15) определяет критический ток  $j_1$  как функцию от параметра неоднородности  $a$ . Мы приведем здесь выражения для  $j_1(a)$  лишь в некоторых предельных случаях:

$$j_1(a) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{6}}{us} j_c, & a \rightarrow +\infty, \\ \frac{2\sqrt{3}}{u \ln(2/|a|)} j_c, & a \rightarrow \pm 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2u} j_c \left( \frac{2\pi|a|}{3\Gamma^2(2/3)} \right)^3, & a \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

В случае  $a \rightarrow +\infty$  результат совпадает со случаем SN-границы, рассмотренным ранее. В однородном канале,  $a \rightarrow 0$ , критический ток  $j_1$  стремится к нулю, что отражает факт устойчивости нормального состояния в однородном канале с током.

Анализ нелинейных уравнений показывает, что картина устойчивости нормального состояния выглядит точно так же, как и в рассмотренном выше случае SN-границы. При токах  $j < j_1$  нормальное состояние абсолютно неустойчиво. Вблизи неоднородности возникает растущий зародыш, который с течением времени будет расширяться и заполнит весь образец. Этот процесс не связан с преодолением энергетического барьера и происходит без активации. При токах  $j > j_1$  нормальное состояние будет устойчиво в малом, но неустойчиво относительно образования зародышей, превышающих некоторую критическую амплитуду. Физическая причина облегчения роста сверхпроводящего зародыша вблизи неоднородности состоит в том, что, как и в случае SN-границы, неоднородность ограничивает скорость куперовских пар, препятствуя их разгону под действием электрического поля.

В этом разделе мы рассмотрели вопрос об устойчивости нормального состояния с током. Мы видели, что переход из нормального состояния в сверхпроводящее при наличии тока происходит путем образования и роста надкритического зародыша и является по существу переходом первого рода. Если  $j < j_c$ , то развитие зародыша приводит к установлению обычного сверхпроводящего состояния, а если  $j > j_c$ , то конечным будет резистивное состояние. Как уже говорилось, при токах выше  $j_2$ , определяемого формулой (3.2), нормальное состояние однородного канала абсолютно устойчиво. По этой причине нормальное состояние при токах  $j < j_2$  можно назвать «переохлажденным» по аналогии с метастабильными состояниями в термодинамике. Величина надкритического зародыша обращается в нуль при  $j \leq j_1$ . Ток  $j_1$ , таким образом, есть нижняя токовая граница «переохлажденного» нормального состояния. При токах ниже  $j_1$  нормальное состояние не может существовать в неоднородном канале.

Следующие разделы обзора будут посвящены резистивному состоянию, занимающему область токов  $j_c < j < j_2$  (в некоторых случаях диапазон существования резистивного состояния может частично захватывать также область  $j < j_c$ ).

## 4. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РЕЗИСТИВНОМ СОСТОЯНИИ

Существование резистивного состояния экспериментально легче всего обнаружить, изучая вольт-амперную характеристику (ВАХ) образца. ВАХ чистых и не очень длинных образцов измерялись в работах<sup>24-27</sup>. На рис. 8, а приведены кривые, полученные в работе<sup>25</sup>. На них отчетливо видны ступеньки напряжения. С ростом длины образца и при уменьшении длины

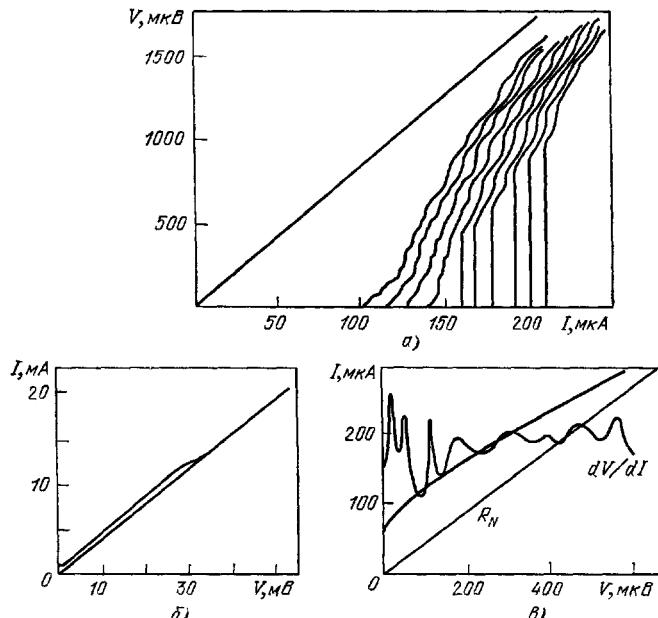


Рис. 8. Экспериментальные вольт-амперные характеристики (ВАХ) узких сверхпроводящих каналов.

а) ВАХ для случая узких оловянных полосок со ступеньками напряжения<sup>25</sup> (разные кривые отвечают разным температурам); б) ВАХ для длинной и узкой пленки олова с малой длиной свободного пробега электронов<sup>26</sup>. На рис. в) изображен начальный участок характеристики рис. б) в большем масштабе.

свободного пробега электронов ступеньки становятся менее выраженным и кривая слаживается. На некотором участке она идет почти параллельно закону Ома, а затем выходит на него<sup>28, 29</sup>. Такое поведение ВАХ показано на рис. 8, б, взятом из работы<sup>29</sup>. На рис. 8, в показан начальный участок этой характеристики в более крупном масштабе. Несмотря на то, что кривая почти полностью слажена, производная  $\partial V / \partial I$  обнаруживает следы скачков напряжения.

Экспериментальные ВАХ можно сравнить с характеристикой, полученной на основании теории Гинзбурга — Ландау<sup>19</sup>, которая показана на рис. 9. Здесь при токе, превышающем критический ток Гинзбурга — Ландау, сверхпроводимость должна разрушаться, а образец должен скачком переходить из сверхпроводящего в нормальное состояние. Основное отличие ВАХ на рис. 8 от характеристики, показанной на рис. 9, состоит в том, что на практике существует широкая область токов и напряжений, где сверхпроводимость существует на фоне постоянного электрического поля. Такое состояние и будем называть резистивным. Обратим внимание, что оно отсутствует в классической теории Гинзбурга — Ландау.

Важной чертой характеристик каналов конечной длины являются ступеньки напряжения, наблюдаемые как на вискерах<sup>24</sup>, так и на образцах в виде узких полосок<sup>25-27</sup>. Образцы, находящиеся в резистивном состоянии, обладают также существенными нестационарными свойствами. Прежде всего, в таких образцах можно наблюдать нестационарный эффект Джозеф-

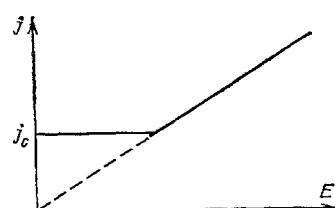


Рис. 9. ВАХ узкого канала в теории Гинзбурга — Ландау.

сона, облучая его микроволновым излучением<sup>25</sup>. Наблюдается также генерация более низких частот, при этом излучение генерируется на концах образца<sup>28, 30</sup>.

Мы видим, что поведение узких сверхпроводящих каналов в резистивном состоянии сильно отличается от классических представлений о сверхпроводимости. Кроме того, малые поперечные размеры образцов не позволяют объяснить эти явления в рамках обычного движения вихрей или областей нормальной фазы по образцу. Таким образом, можно констатировать, что резистивное состояние в узких каналах является новым типом сверхпроводящего состояния.

Задача теории состоит прежде всего в том, чтобы объяснить наиболее неожиданное обстоятельство, а именно, каким образом может существовать сверхпроводимость в образце, где имеется постоянное электрическое поле. Хорошо известно, что куперовские пары обладают зарядом и поэтому в присутствии электрического поля они должны ускоряться до тех пор, пока сверхпроводимость не разрушится. Как мы видим, однако, в резистивном состоянии этого не происходит. Дело состоит в том, что движение куперовских пар в сверхпроводнике и, вообще, его поведение в электромагнитном поле определяется не векторным  $\mathbf{A}$  и скалярным  $\Phi$  потенциалами электромагнитного поля, а градиентно-инвариантными потенциалами

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} - \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi, \quad \Phi = \varphi + \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (4.1)$$

введенными в разделе 2. С помощью потенциалов (4.1) можно записать

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \nabla \Phi), \quad (4.2)$$

где скорость куперовских пар  $\mathbf{v}_s$  выражается через градиентно-инвариантный потенциал  $\mathbf{Q}$  посредством соотношения

$$\mathbf{v}_s = -\frac{e}{mc} \mathbf{Q},$$

так что уравнение (4.2) описывает указанный выше процесс разгона куперовских пар. Для того чтобы скорость куперовских пар не возрастала до бесконечности, электрическое поле должно в среднем компенсироваться членом с  $\nabla \Phi$ . Отсюда следует, что резистивное состояние сверхпроводника должно быть существенно неравновесным с  $\Phi \neq 0$  и  $\mu_e \neq \mu_p$ , где  $\mu_e$  и  $\mu_p$  — соответственно химические потенциалы квазичастиц и куперовских пар (см. раздел 2). Потенциал  $\Phi$  в сверхпроводнике, однако, не может быть слишком большим, в противном случае сверхпроводимость также будет разрушаться. Предположим, что образец имеет бесконечную длину. Тогда разность потенциалов  $\Delta \Phi$  между достаточно удаленными точками может принимать очень большие значения. Чтобы сохранить конечность  $\Phi$ , эта разность потенциалов  $\Delta \Phi$  должна компенсироваться соответствующей разностью химических потенциалов пар  $\Delta \mu_p$  или, что то же, соответствующей скоростью роста, разности фаз между этими точками.

Получающуюся картину можно в принципе представлять себе двумя различными способами. Первая, статическая модель предполагает, что в образце устанавливается периодическая вдоль его длины структура, причем параметр сверхпроводящего упорядочения равен нулю в точках максимума  $|\Phi|$ . Соседние сверхпроводящие участки имеют разные значения химических потенциалов  $\mu_p$ , отличающиеся на разность потенциалов  $\Delta \Phi$  между этими участками. Таким образом, в каждом сверхпроводящем участке  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ ,  $\partial \mathbf{Q} / \partial t = 0$  и  $\mu_p = \text{const}$ . Ограниченнность  $\Phi$  обеспечивается компенсацией разности потенциалов  $\Delta \Phi$  разностью химических потенциалов пар в соседних сверхпроводящих участках. В точках, где равен нулю параметр порядка, макроскопическая фазовая когерентность нарушается и  $\mu_p$ , а с ним

и  $\Phi$ , испытывает скачок. Такая картина схематически изображена на рис. 10, где  $\Delta$  — модуль параметра порядка, а  $x$  — координата вдоль образца. Подобная статическая модель предлагалась в работах Финка и Поулсена<sup>31-34</sup> и Галайко и др.<sup>27, 35-41</sup>

Такая картина не учитывает, однако, одного весьма важного обстоятельства. Дело в том, что соседние сверхпроводящие участки имеют различные химические потенциалы пар  $\mu_p = (\hbar/2) \partial\chi/\partial t$ . Это означает, что разность фаз между соседними участками будет нарастать со временем. Поскольку переходная область по  $x$  между этими участками (т. е. область, где  $\Delta$  близко

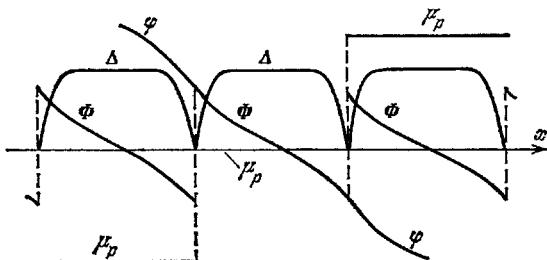


Рис. 10. Схематическая структура параметра порядка и потенциалов  $\mu_e$ ,  $\mu_p$  и  $\Delta$  в статической модели резистивного состояния.

к нулю) имеет ширину порядка  $\xi$ , то значения комплексного параметра порядка в них будут сильно взаимодействовать друг с другом. Действительно, запишем комплексный параметр порядка  $\psi = \Delta e^{ix}$  в виде

$$\psi = \Delta^{(1)} \exp \left( 2i\mu_p^{(1)} t \frac{1}{\hbar} \right) + \Delta^{(2)} \exp \left( 2i\mu_p^{(2)} t \frac{1}{\hbar} \right),$$

где  $\Delta^{(1,2)} \exp (2i\mu_p^{(1,2)} t \frac{1}{\hbar})$  — значения параметра порядка в двух соседних сверхпроводящих участках. Ясно, что в области перекрытия  $\Delta^{(1)}(x)$  и  $\Delta^{(2)}(x)$  модуль параметра порядка будет осциллировать со временем, и статическая картина здесь должна нарушаться. Поэтому возникает вопрос, в какой степени статическая модель вообще соответствует действительности. Более подробно это обсуждается в разделе 7, пока мы отметим только, что, как будет показано ниже, осцилляции происходят лишь в весьма узких окрестностях точек нарушения фазовой когерентности, а практически на всем интервале между соседними такими точками все величины колеблются весьма слабо.

Второй подход состоит в том, чтобы с самого начала рассматривать нестационарную картину. Далее мы будем иметь в виду именно такую ситуацию. Как уже говорилось выше, для того чтобы сохранить конечность величины  $\Phi$ , разность потенциалов  $\delta\phi$  между достаточно удаленными точками образца  $x_1$  и  $x_2$  должна компенсироваться скоростью роста разности фаз между этими точками:

$$\delta\phi + \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial}{\partial t} \delta\chi \approx 0. \quad (4.3)$$

Такую картину удобно представлять в пространстве, где по двум осям откладываются действительная и мнимая части комплексного параметра порядка  $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ , а по третьей оси — координата  $x$  вдоль образца<sup>42</sup> (рис. 11). В однородном состоянии модуль  $\Delta = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$  постоянен и витки спирали на рис. 11 имеют постоянный радиус. С течением времени разность фаз  $\delta\chi$  растет и витки спирали сгущаются. Это, однако, не может происходить бесконечно долго. Дело в том, что разность фаз  $\delta\chi$  определяет скорость конденсата

$$v_s \sim \frac{\hbar \delta\chi}{m(x_2 - x_1)},$$

которая, таким образом, будет нарастать, что должно вновь привести к разрушению сверхпроводимости. Чтобы этого не происходило, должен существовать механизм, обеспечивающий сброс разности фаз, нарастающей со временем. Из рис. 11 ясно, что для того, чтобы спираль могла потерять одну из петель, необходимо, чтобы в какой-либо точке  $x$  между  $x_1$  и  $x_2$  радиус спирали  $\Delta$  обратился в нуль.

Точки, в которых параметр порядка обращается в нуль, а его фаза испытывает скачки на величину, кратную  $2\pi$ , называются центрами проскальзывания фазы (ЦПФ).

Чтобы обеспечить существование сверхпроводимости в образце, процесс проскальзывания фазы должен повторяться во времени, причем связь среднего времени  $t_0$  между скачками фазы и средним напряжением  $V$  между

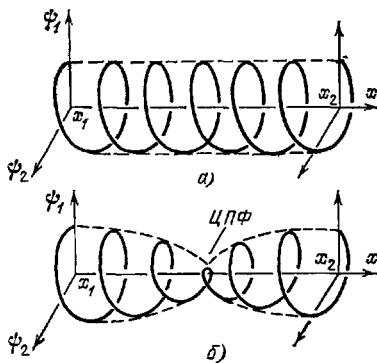


Рис. 11. Представление комплексного параметра порядка в пространстве  $(\phi_1, \phi_2, x)$ . Единственная возможность для спиралей уменьшить число витков состоит в обращении в нуль радиуса витков в какой-либо точке.

точками  $x_1$  и  $x_2$  можно установить из соотношения (2.3). Так как при сбросе каждой петли разность фаз изменяется на  $2\pi$ , то, усредняя (2.3) по времени, получим

$$2eV = \frac{2\pi\hbar}{t_0}, \quad (4.4)$$

т. е. обычное соотношение Джозефсона. Ниже мы дадим строгий вывод подобного соотношения, основанный на топологических свойствах ЦПФ.

Возможны два различных механизма образования ЦПФ. Прежде всего, ЦПФ могут образовываться за счет термодинамических флюктуаций в системе. Вероятность этого события пропорциональна  $\exp(-\delta F/T)$ , где  $\delta F$  — энергетический барьер между двумя однородными состояниями до проскальзывания фазы и после него. Ясно, что процесс этот более вероятен в непосредственной близости от критической температуры, где барьер  $\delta F$  мал. Такой механизм был предложен Лангером и Амбераокаром<sup>42</sup>, им принадлежит также и общая картина проскальзывания фазы, описанная выше.

При удалении от критической температуры вероятность флюктуационного образования ЦПФ резко понижается, и на сцену выступают внутренние, а потому и более фундаментальные причины. Можно представлять себе, что процесс возбуждения ЦПФ в сверхпроводящем канале за счет достаточно большого протекающего по нему постоянного тока аналогичен автоколебаниям. С более формальной точки зрения это означает, что процесс образования ЦПФ, т. е. осцилляций параметра порядка в некоторых точках образца, является следствием нелинейностей типа предельного цикла, присущих системе.

Если сверхпроводящий канал имеет неоднородности структуры, то образование ЦПФ будет происходить более вероятно в «слабых точках», где параметр порядка подавлен за счет посторонних причин. В достаточно длинных и однородных образцах, однако, в силу пространственной и временной однородности ЦПФ должны образовываться периодично по координате и по времени.

Удобно рассматривать процесс образования ЦПФ в двумерном пространстве-времени  $\{x; ct\}$ <sup>43</sup> (рис. 12). На рис. 12 кружками обозначены ЦПФ, т. е. пространственно-временные точки, где модуль параметра порядка обращается в нуль,  $\Delta = 0$ . Мы будем полагать, что эти точки образуют периодическую структуру в пространстве  $\{x; ct\}$ . Легко убедиться в том, что процесс сбрасывания  $n$  петель при обращении  $\Delta$  в нуль на рис. 11 эквивалентен требованию, чтобы при обходе по замкнутому контуру вокруг ЦПФ в пространстве-времени  $\{x; ct\}$  на рис. 12 фаза параметра порядка изменялась на  $2\pi n$ , где  $n$  — целое число. Таким образом, центры проскальзывания фазы можно представлять себе как топологические особенности типа вихрей в двумерном пространстве-времени  $\{x; ct\}$ .

Для таких топологических особенностей можно получить<sup>43</sup> правило квантования «потока» электрического поля в пространстве  $\{x; ct\}$ , аналогичное квантованию магнитного потока в обычном пространстве.

Введем в двумерном пространстве-времени двумерные векторы

$$\rho = \{x, ct\}, \quad q = \{Q_x, -\Phi\}, \quad a = \{A_x, -\varphi\}.$$

Они связаны соотношением

$$q = a - \frac{\hbar c}{2e} \frac{\partial \chi}{\partial \rho}. \quad (4.5)$$

Проинтегрируем теперь вектор  $q$  по замкнутому контуру вокруг ЦПФ. С помощью (4.5) получаем

$$\oint_l q d\rho = \oint_l a d\rho - \frac{\hbar c}{2e} \oint_l \frac{\partial \chi}{\partial \rho} d\rho. \quad (4.6)$$

Первый интеграл в правой части можно по теореме Стокса выразить через интеграл от  $\text{rot } a$  по площади, ограниченной контуром  $l$ . Нетрудно заметить, что

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = (\text{rot } a)_z$$

Второй интеграл в правой части (4.6) дает набег фазы  $2\pi n$  при обходе вокруг ЦПФ. Итак,

$$\oint_l q d\rho = \oint_S E dx \cdot c dt - \frac{2\pi \hbar c}{2e} n.$$

Если рассматривать изолированный ЦПФ, то интеграл по бесконечно удаленному контуру, стоящий слева, исчезает. В случае периодической системы ЦПФ этот интеграл обращается в нуль, если в качестве контура интегрирования выбрать границу элементарной ячейки ЦПФ в пространстве  $\{x, ct\}$ . Таким образом, получаем

$$\oint_{S_0} E ds = \varphi_0 n, \quad (4.7)$$

где  $\varphi_0 = \pi \hbar c/e$  — квант «потока», численно равный кванту магнитного потока в обычном пространстве, а интегрирование распространяется на элементарную ячейку в пространстве  $\{x, ct\}$ :  $ds = dx \cdot c dt$ . «Правило квантования» (4.7) является обобщением соотношения Джозефсона на случай переменного и распределенного по образцу падения потенциала. В случае, когда  $E$  постоянно по времени, из (4.7) немедленно получается обычное соотно-

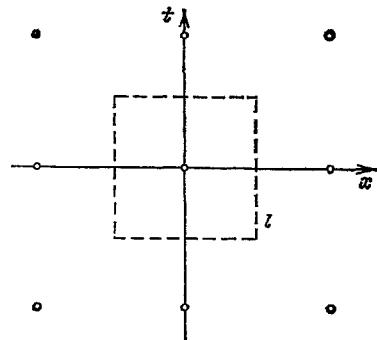


Рис. 12. Пространство  $\{x; ct\}$ . Кружками показаны ЦПФ, т. е. такие точки, при обходе вокруг которых по замкнутому контуру фаза изменяется на  $2\pi n$ . Контуром  $l$  ограничена элементарная ячейка структуры ЦПФ в пространстве-времени  $\{x; ct\}$ .

шение Джозефсона (4.4). Правило квантования (4.7) весьма полезно, так как оно выражает среднее по времени и пространству электрическое поле (которое, собственно, и измеряется экспериментально) через периоды структуры ЦПФ по времени,  $t_0$ , и координате,  $L$ :

$$\langle E \rangle = \frac{\Phi_0 n}{ct_0 L}. \quad (4.8)$$

## 5. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ РЕЗИСТИВНОГО СОСТОЯНИЯ

### а) Флуктуационное возбуждение центров проскальзывания фазы

В этом разделе мы кратко рассмотрим основные качественные теории, предложенные для описания резистивного состояния.

Когда ток, текущий по образцу, мал (мала возбуждающая сила), основным механизмом, создающим ЦПФ, должны быть термодинамические флуктуации в системе. Их вероятность пропорциональна  $\exp(-\delta F/T)$ , поэтому они будут проявляться только в непосредственной близости к  $T_c$ , где энергия активации мала,  $\delta F \sim (F_n - F_s) \xi(T) s_0 \sim (T_c - T)^{3/2}$ . В настоящее время имеются экспериментальные подтверждения того, что именно термодинамические флуктуации ответственны за возникновение резистивного состояния в области температур, весьма мало отличающихся от критической температуры  $1 - (T/T_c) \lesssim 10^{-4}$ <sup>44-46</sup>. Это явление рассматривалось впервые Литтлом<sup>47</sup>. Более последовательная теория была предложена Лангером и Амбераокаром<sup>42</sup> и развивалась далее в работах Гальперина и др.<sup>48, 49</sup>. Здесь мы опишем основные результаты теории Лангера и Амбераокара (ЛА)<sup>42</sup>.

Как было установлено выше, скорость сброса фазы, т. е. частота образования ЦПФ, связана с напряжением на участке сверхпроводящего канала, где образуется ЦПФ, соотношением (4.8) или, что то же, соотношением (4.4). Таким образом, чтобы найти сопротивление сверхпроводящего канала, нужно связать частоту флуктуационного образования ЦПФ с током, текущим по образцу. В теории ЛА эта задача решается следующим образом.

Рассмотрим канал длиной  $L_0$  и предположим, для определенности, что параметр порядка на его концах удовлетворяет циклическим граничным условиям, т. е. что спираль на рис. 11 имеет целое число петель. Пусть волновая функция сверхпроводящих электронов, пропорциональная параметру порядка, в однородном токовом состоянии имеет вид

$$\psi_k = \Delta_k \exp(i k x), \quad (5.1)$$

где  $k = 2\pi n/L_0$ . Соответствующая плотность тока

$$j = \frac{e\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

равна  $j_k = (e\hbar/m) k \Delta_k^2$ . Свободная энергия ( $a = a_0 (T_c - T)$ )

$$F = \int d^3r \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - a |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 \right] \quad (5.2)$$

в токовом состоянии (5.1) равна

$$F \{ \psi_k \} = s_0 L_0 \left[ \left( \frac{\hbar^2}{2m} k^2 - a \right) \Delta_k^2 + \frac{b}{2} \Delta_k^4 \right], \quad (5.3)$$

где  $s_0$  — поперечное сечение канала. Легко подсчитать, насколько отличается свободная энергия образца, находящегося в состоянии (5.1) с  $n$  петлями, от состояния с  $n - 1$  петлями. Эта разность равна

$$\delta F_k = \frac{\partial F_k}{\partial k} \frac{2\pi}{L_0} = \frac{2\pi\hbar s_0}{e} j.$$

Таким образом, частота переходов между состояниями  $k \rightarrow k + 2\pi/L_0$  пропорциональна величине

$$\gamma = \Omega(T) \exp \left( -\frac{\delta F_0}{T} \pm \frac{\delta F_1}{2T} \right). \quad (5.4)$$

Предэкспоненциальный множитель  $\Omega(T)$  в теории ЛА записывается как

$$\Omega(T) = \frac{2\pi N_e}{\tau},$$

где  $N_e = S_0 L_0 n_e$  — число электронов в образце ( $n_e$  — плотность электронов), а  $\tau$  — некоторое характерное время микроскопических процессов, остающееся неопределенным в данной теории. Величина  $\delta F_0$  представляет собой энергетический барьер между состояниями  $\psi_k$  и  $\psi_{k-(2\pi/L_0)}$ . Находя поток вероятности системы из состояния  $\psi_k$  в состояние  $\psi_{k-2\pi/L}$  и приравнивая его согласно (4.4) величине  $2eV/\hbar$ , получаем

$$\frac{2eV}{\hbar} = \frac{4\pi n_e s_0 L_0}{\tau} \operatorname{sh} \left( \frac{\delta F_1}{2T} \right) \exp \left( -\frac{\delta F_0}{T} \right),$$

Лангер и Амбегаокар предположили, что время  $\tau$ , содержащееся в этом выражении, совпадает со временем релаксации, входящим в выражение для проводимости нормального металла  $\sigma_n = ne^2\tau/m$ . Если принять такое предположение, то легко получить сопротивление образца в пределе  $j \rightarrow 0$ . С помощью (5.4) имеем

$$\frac{\rho_s}{\rho_n} = \frac{2\pi^2 \hbar^2 n^2 s_0^2}{mT} \exp \left( -\frac{\delta F_0}{T} \right). \quad (5.5)$$

Для окончательного вычисления сопротивления в (5.5) нужно найти величину энергетического барьера, отделяющего состояния, отличающиеся тем, что разности фаз на концах канала в этих состояниях отличаются друг от друга на  $2\pi$ . Энергетический барьер представляет собой седловую точку функционала (5.2) в пространстве функций  $\psi(x)$ . Поэтому функция  $\psi_0(x)$ , отвечающая «перевальному» решению, должна удовлетворять условию  $\delta F/\delta\psi = 0$ , т. е. должна быть решением уравнения Гинзбурга — Ландау

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (5.6)$$

которое записано в безразмерных единицах теории Гинзбурга — Ландау, где  $x$  измеряется в единицах  $\xi(T)$ , а  $\psi$  — в единицах  $\Psi_{\text{ГЛ}} = \sqrt{a/b}$ . В этих единицах плотность тока имеет вид

$$j = \frac{1}{2i} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right). \quad (5.7)$$

Удобно отделить в этих уравнениях модуль и фазу параметра порядка  $\psi = \Delta e^{ix}$ , т. е. перейти к градиентно инвариантным переменным  $\Delta = |\psi|$  и  $Q = -\partial\chi/\partial x$  (здесь  $A = 0$ ). Уравнения (5.6), (5.7) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + (1 - \Delta^2 - Q^2) \Delta &= 0, \\ j &= -\Delta^2 Q. \end{aligned} \quad (5.8)$$

В силу условия электронейтральности плотность тока постоянна вдоль длины образца:

$$\frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (5.9)$$

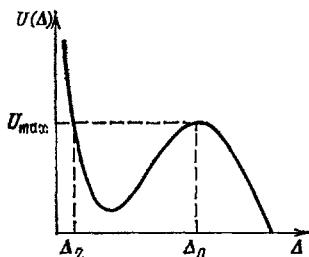
Уравнения (5.8), (5.9) имеют первый интеграл

$$\left( \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right)^2 + \Delta^2 - \frac{\Delta^4}{2} + \frac{j^2}{\Delta^2} = \text{const.} \quad (5.10)$$

Структуру решения  $\Delta(x)$  легко представить себе, если воспользоваться механической аналогией движения частицы в потенциале

$$u(\Delta) = \Delta^2 + \frac{j^2}{\Delta^2} - \frac{\Delta^4}{2}. \quad (5.11)$$

При такой аналогии  $\Delta$  играет роль координаты частиц, а  $x$  — времени. Потенциал  $u$  изображен на рис. 13. Ограниченнные решения для  $\Delta$  возможны



только при значениях константы в правой части (5.10), меньших либо равных  $u_{\max}(j)$  (см. рис. 13). В этом случае решение  $\Delta(x)$  представляет собой периодическую по  $x$  функцию, которую можно записать в неявной форме

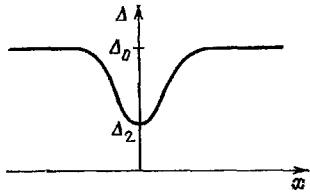
$$x = \int_{\Delta_2}^{\Delta} \frac{d\Delta}{\sqrt{C - u(\Delta)}}, \quad (5.12)$$

Рис. 13. Схематический вид потенциала  $u(\Delta)$  для уравнения (3.10).

где начало координат выбрано в точке  $\Delta = \Delta_2$ . Нам нужно построить решение, которое при  $x \rightarrow \pm\infty$  выходит на однородное состояние  $\Delta = \Delta_0$  с данным током  $j$ . Такое решение получается при выборе  $C = u_{\max}$ , при этом период обращается в бесконечность

$$x = \int_{\Delta_2}^{\Delta} \frac{d\Delta}{\sqrt{u_{\max} - u(\Delta)}}. \quad (5.13)$$

Его поведение схематически изображено на рис. 14. Величина  $\Delta_0$  для однородного токового состояния связана с  $j$  соотношением



$$j = \Delta_0^2 \sqrt{1 - \Delta_0^2}. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.14) имеет решение только при  $j \leq j_c$ . При  $j > j_c$  однородное токовое состояние невозможно.

Решение (5.13), изображенное на рис. 14, представляет собой функцию, соответствующую максимальному значению свободной энергии  $F\{\psi\}$  на пути в пространстве функций  $\psi$ , соединяющем два состояния, лежащие до и после проскальзывания петли на рис. 11, и наименьшей возможной свободной энергией.

Рис. 14. Решение Лангера — Амбера (3.13) для уравнения (3.10).

сле образования ЦПФ, т. е. проходящем по состояниям с

Мы интересуемся здесь малыми токами  $j \rightarrow 0$ . В этом случае решение (5.13) принимает вид

$$\Delta = \operatorname{th} \frac{|x|}{\sqrt{2}}. \quad (5.15)$$

Это решение проходит через нуль в точке  $x = 0$  и непосредственно соответствует моменту образования ЦПФ.

Подставляя (5.15) в (5.2), легко теперь вычислить высоту барьера

$$\delta F_0 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \frac{a_0^{3/2}}{2b} s_0 (T_c - T)^{3/2}. \quad (5.16)$$

Выражения (5.5) и (5.16) представляют собой основной результат теории ЛА.

Нужно отметить, однако, что оценки предэкспоненциального множителя  $\Omega(T)$  в формуле (5.4) для вероятности флюктуаций в теории ЛА могут вызывать серьезные сомнения. Для точного его вычисления необходимо непосредственно рассмотреть динамику перехода системы через потенциаль-

ный барьер при образовании ЦПФ. Такая задача решалась Маккамбером и Гальпериным<sup>48</sup> в рамках временных уравнений Гинзбурга — Ландау, дополненных случайными силами Ланжевена, описывающими флуктуации. Согласно результатам<sup>48</sup> предэкспоненциальный множитель  $\Omega(T)$  в выражении (5.4) оказался равным

$$\Omega(T) = \frac{N(T)}{\tau(T)},$$

где  $\tau(T) = \pi\hbar/8(T_c - T)$  — характерное время релаксации модуля параметра порядка во временной теории Гинзбурга — Ландау, а  $N(\tau)$  — эффективное число статистически независимых подсистем на длине образца, пропорциональное отношению  $L_0/\xi$ , где  $L_0$  — длина канала. При малых токах

$$\Omega(T) = \frac{\sqrt{3} L_0}{\xi \cdot 2\pi^{3/2} \tau(T)} \sqrt{\frac{\delta F}{T}}.$$

Оценка этого выражения показывает, что предэкспоненциальный множитель в теории Маккамбера и Гальперина примерно на 10 порядков величины меньше результата, полученного ЛА.

### б) Спонтанное образование ЦПФ

Флуктуационный механизм образования ЦПФ, как уже говорилось, играет роль только в очень узкой окрестности  $T_c$ :  $1 - (T/T_c) \lesssim 10^{-4}$ . Если выйти из этого специально узкого интервала, то вероятность флуктуаций будет чрезвычайно малой. Если к тому же ток через образец достаточно мал, то механизмы образования ЦПФ отсутствуют и напряжение на сверхпроводящем канале будет равно нулю. При повышении тока выше некоторого значения (зависящего от длины образца) в системе удовлетворяются условия спонтанного возбуждения ЦПФ (т. е. система попадает в область притяжения предельного цикла) и в образце возникает сначала один ЦПФ. Это проявляется на ВАХ в виде скачка напряжения (см. рис. 8, а). При дальнейшем увеличении тока в образце могут возникнуть два, три и т. д. ЦПФ, что будет сопровождаться соответствующими скачками напряжения на ВАХ. Так обстоит дело в образцах конечной длины. В бесконечно длинном образце полное число ЦПФ всегда велико, а их плотность плавно увеличивается с увеличением тока; соответствующая ВАХ имеет вид гладкой кривой (см. рис. 8, б).

Из вышеизложенного ясно, что получить точное решение этой нелинейной задачи чрезвычайно трудно, если вообще возможно. Поэтому сначала мы остановимся на некоторых качественных теориях, описывающих свойства ЦПФ.

Качественная картина возбуждения ЦПФ состоит в том, что под действием разности потенциалов скорость сверхпроводящего конденсата нарастает. В некоторый момент времени в определенном месте образца она достигает такого значения, что развивается неустойчивость сверхпроводящего состояния, приводящая к тому, что параметр порядка в этом месте падает до нуля. В момент обращения  $\Delta$  в нуль фазовая когерентность разрушается. Так как образец находится при температуре ниже критической, в окрестности этой точки затем вновь начинается образование сверхпроводящего конденсата. Восстановление сверхпроводимости происходит, однако, уже с другой фазой, так что разность фаз справа и слева от ЦПФ отличается на  $2\pi$  от разности фаз в исходном состоянии. Через некоторое время, определяемое соотношением (4.4), процесс повторяется.

Образование ЦПФ моделировалось Ригером и др.<sup>50</sup> численными методами. Момент образования ЦПФ они определяли как момент, когда свободная энергия участка образца, возрастаая за счет ускорения куперовских пар электрическим полем, становилась выше, чем свободная энергия состоя-

ния, которое имел бы этот участок, если бы разность фаз на его концах была меньше на  $2\pi$ . Это условие, конечно, является весьма искусственным, и процедура, предложенная в <sup>50</sup>, годится только в качестве первого шага при решении вопроса о возбуждении ЦПФ.

Рассмотрим качественно процесс формирования напряжения на ЦПФ. При этом мы будем следовать модели Скочпола, Бизли и Тинкхэма (СБТ) <sup>26</sup>.

Представим полную плотность тока, текущего по сверхпроводящему каналу, в виде суммы сверхпроводящей,  $j_s$ , и нормальной,  $j_n = \sigma E$ , частей:

$$j = \sigma E + j_s = -\sigma \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t} \right) + j_s. \quad (5.17)$$

Все величины в правой части (5.17) зависят от времени, изменяясь периодически с периодом  $t_0 = 2\pi/\omega_J$ , где  $\omega_J$  — джозефсоновская частота. Будем интересоваться средним по времени напряжением, которое измеряется в реальных условиях. Усредним (5.17) по времени, после чего член с  $\partial Q/\partial t$  исчезает в силу периодичности. Имеем

$$j = -\sigma \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \bar{j}_s. \quad (5.18)$$

В модели СБТ уравнение для усредненного по времени потенциала  $\Phi$  записывается просто в виде (ср. с уравнениями (2.6) и (2.7))

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{l_E^2} \Phi, \quad (5.19)$$

где  $l_E$  считается не зависящей от  $x$ . В этом случае решение (5.19) имеет вид

$$\Phi = c \operatorname{sh} \left( \frac{x - x_1}{l_E} \right),$$

где  $c$  — некоторая постоянная, а  $x_1$  — точка, где  $\bar{\Phi} = 0$ . Мы предполагаем для определенности, что концы сверхпроводящего канала присоединены к массивным сверхпроводящим «берегам», находящимся в равновесии, так что  $x = x_1$  соответствует концу кавала. С помощью (5.19) получаем

$$j - \bar{j}_s(x) = -\frac{\sigma}{l_E} c \operatorname{ch} \left( \frac{x - x_1}{l_E} \right).$$

Предположим, что образец имеет конечную длину, и в нем находится только один ЦПФ в точке  $x = x_0$ . Набег потенциала от  $x_1$  до ЦПФ составляет

$$\bar{\Phi}_1 = c \operatorname{sh} \frac{x_0 - x_1}{l_E}.$$

Добавляя сюда набег потенциала  $\bar{\Phi}_2$  от точки  $x_0$  до другой точки  $x_2$ , где  $\bar{\Phi} = 0$  (другой конец канала), получим

$$V = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 = \frac{l_E}{\sigma} \left( \operatorname{th} \frac{x_0 - x_1}{l_E} + \operatorname{th} \frac{x_2 - x_1}{l_E} \right) (j - \bar{j}_s(x)). \quad (5.20)$$

Если  $|x_0 - x_1|, |x_2 - x_0| \gg l_E$ , то

$$\bar{V} = \frac{2l_E}{\sigma} (j - \bar{j}_s(x_0)),$$

а дифференциальное сопротивление для одного ЦПФ  $\rho_d = 2l_E/\sigma$ .

Величина  $\bar{V}$  представляет собой разность средних по времени химических потенциалов куперовских пар справа и слева от ЦПФ. Блестящий эксперимент Долана и Джакеля <sup>51</sup> подтвердил пространственное распределение потенциалов вблизи ЦПФ, получаемое в модели СБТ.

Если сверхпроводящий канал не имеет неоднородностей, то первый ЦПФ образуется посередине, так что из (5.20) получаем

$$\bar{\Phi} = -(j - \bar{j}_s(x_0)) \frac{l_E}{\sigma} \frac{\operatorname{sh}[(x - x_1)/l_E]}{\operatorname{ch}(L_0/2l_E)},$$

где  $L_0 = x_2 - x_1$  — длина канала. Отсюда легко получить выражение для сверхпроводящего тока

$$j_s = j + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x} = j - [j - \bar{j}_s(x_0)] \frac{\operatorname{ch}[(x - x_1)/l_E]}{\operatorname{ch}(L_0/2l_E)}.$$

Сверхпроводящий ток  $j_s$  достигает максимума на концах канала (соединенных со сверхпроводящими берегами), где он равен

$$j_{s, \max} = j - \frac{j - \bar{j}_s(x_0)}{\operatorname{ch}(L/2l_E)}.$$

Ясно, что эта величина не может превышать критического тока Гинзбурга — Ландау  $j_c$ . С другой стороны, при увеличении полного тока  $j$  условие  $j_{s, \max} \leq j_c$ , начиная с некоторого тока, будет нарушаться. В этом случае решение с одним ЦПФ в канале становится невозможным, и должен образоваться еще один ЦПФ. При этом на ВАХ возникает скачок напряжения. При дальнейшем увеличении тока образуются три и т. д. ЦПФ, что проявляется в виде соответствующих скачков напряжения на ВАХ. Таким образом, модель СБТ может также дать качественное объяснение скачкам напряжения на ВАХ<sup>52</sup>. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться в разделе 7 на основании уравнений, полученных из микроскопической теории.

Изложенные выше простые физические соображения дают ключ к пониманию природы резистивного состояния. Важно, однако, чтобы они согласовались с известными динамическими свойствами сверхпроводимости, установленными на основании микроскопической теории. Рассмотрению этого вопроса будут посвящены следующие разделы обзора.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕЗИСТИВНОГО СОСТОЯНИЯ

Мы уже говорили выше, что процессы проскальзывания фазы являются по своей природе существенно нелинейными, поэтому получить точное в математическом смысле аналитическое решение даже сравнительно простых динамических уравнений (2.1) — (2.4) весьма сложно, и до настоящего времени такое решение не найдено. Существенную помощь в понимании явления могут оказать численные методы.

Первые результаты на этом пути были получены Крамером и Баратовым<sup>53</sup>. Они исследовали временные уравнения Гинзбурга — Ландау, справедливые в случае бесщелевой сверхпроводимости, которая в терминах уравнений (2.18) — (2.19) соответствует пределу  $\Gamma \gg 1$ , когда бесщелевая ситуация обеспечивается электрон-фононным взаимодействием:

$$-u \left( \frac{\partial}{\partial t} + i\varphi \right) \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 - |\psi|^2) \psi = 0, \quad (6.1)$$

$$j = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2i} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right). \quad (6.2)$$

Аналогичные уравнения имеют место для бесщелевых сверхпроводников с большой концентрацией магнитных примесей<sup>54</sup>. В последнем случае нужно положить  $u = 12$ .

Крамер и Баратов исследовали уравнения (6.1) — (6.2) для двух значений  $u = 5,79$  и  $u = 12$  и получили следующие результаты:

1. При токе  $j$  меньше некоторого значения  $j_{\min}$  ( $j_{\min} = 0,326$  для  $u = 5,79$  и  $j_{\min} = 0,284$  для  $u = 12$ ) возмущения на фоне чисто сверхпроводящего состояния затухают, и сверхпроводник возвращается в однородное токовое состояние с параметром порядка, удовлетворяющим условию  $j = \Delta^2 \sqrt{1 - \Delta^2}$ . Обратим внимание, что  $j_{\min} < j_c$ .

2. При токе  $j > j_2$  (где  $j_2 = 0,335$  для  $u = 5,79$  и  $j_2 = 0,291$  для  $u = 12$ ) сверхпроводящее токовое состояние распадается и переходит в расширяющийся нормальный домен. Таким образом, при  $j > j_2$  сверхпроводящее состояние оказывается неустойчивым. Это условие совпадает с условием устойчивости границы раздела сверхпроводящей и нормальной фаз в токовом состоянии, исследовавшемся Лихаревым и Якобсоном<sup>21, 22</sup>.

3. В интервале токов между  $j_{\min}$  и  $j_2$  реализуется решение, соответствующее проскальзыванию фазы. Это решение устроено следующим образом. На основном своем протяжении канал остается сверхпроводящим, но в некотором месте происходят локальные осцилляции модуля параметра порядка. В момент обращения  $\Delta$  в нуль фаза испытывает скачок на  $2\pi$ . При  $j \rightarrow j_{\min}$  период осцилляций стремится к бесконечности, а решение при  $t \rightarrow \pm\infty$  асимптотически выходит на решение Лангера и Амбераокара<sup>42</sup>.

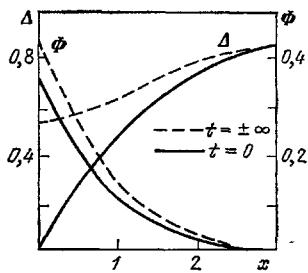


Рис. 15. Координатная зависимость  $\Delta$  и потенциала  $\mu_e$  в различные моменты времени согласно результатам численных расчетов<sup>53</sup> для уравнений временной теории Гинзбурга — Ландау.  
Значения параметров:  $u = 5,79$ ;  $j = j_{\min} = 0,326$ .

(5.12). При увеличении тока амплитуда осцилляций уменьшается. Решение Крамера и Баратова для  $u = 5,79$  и  $j = j_{\min}$  приведено на рис. 15.

Эти результаты явились первым прямым подтверждением существования решения, при котором происходит проскальзывание фазы, и свидетельствуют о наличии у системы (6.1) — (6.2) предельного цикла, приводящего к осцилляциям нужного типа.

В дальнейшем система уравнений (6.1) — (6.2) исследовалась также Ивлевым и др.<sup>16, 55</sup>. В этих работах уравнения бесщелевой сверхпроводимости использовались для моделирования процессов, происходящих в щелевых сверхпроводниках. Основная идея заключалась в следующем. В щелевой ситуации, которая соответствует малым значениям  $\Gamma \ll 1$ , глубина проникновения электрического поля велика:  $l_E \sim \Gamma^{-1/2} \gg 1$ . В терминах уравнений (6.1) и (6.2) это обстоятельство можно смоделировать, если придать параметру  $u$  малые значения,  $u \ll 1$ . Таким образом, с помощью простейших уравнений (6.1) — (6.2) можно описать наиболее существенное с точки зрения резистивного состояния свойство реальных сверхпроводников, а именно большую величину глубины проникновения электрического поля.

В работах<sup>16, 55</sup> система (6.1) — (6.2) решалась численно для значений  $u = 0,01$ . Выбирался отрезок  $0 < x < L$ , где  $L = 40$ , на границах которого налагались условия  $\partial\Delta^2/\partial x = 0$  и  $\Phi = \varphi + (\partial\chi/\partial t) = 0$ , вытекающие из периодичности структуры по координате  $x$  и симметрии задачи относительно точек  $x = 0$ ,  $L$  с учетом четности  $\Delta$  и  $j_s$  и нечетности  $\Phi$ . Длина  $L$  представляет собой, таким образом, расстояние между соседними ЦПФ, образующими периодическую структуру по длине образца. На рис. 16 приведено решение, описывающее осцилляции модуля параметра порядка при  $j = 0,4$ . Кривые 1 — 3 соответствуют моментам времени  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 0,053$  и  $t_3 = 2,188$ . Период осцилляций  $t_0 = 2,52$ .

Эти результаты обладают одной весьма важной особенностью: осцилляции параметра порядка сосредоточены только в довольно узкой окрестности ЦПФ, в то время как на основном протяжении между двумя ЦПФ  $\Delta$ ,  $j_s$  и  $\Phi$  практически не изменяются со временем. Причины такого поведения будут обсуждаться в следующем разделе.

В работах Крамера и Уоттс-Тобина<sup>3</sup> и Уоттс-Тобина и др.<sup>4</sup> численные исследования были продолжены непосредственно для уравнений (2.18) — (2.19) при различных значениях параметра  $\Gamma$ . Было установлено, что интервал токов, при которых существует решение с проскальзыванием фазы, расширяется с уменьшением параметра  $\Gamma$ , причем ток  $j_2$  растет пропорционально  $\Gamma^{-1}$  при малых  $\Gamma \ll 1$ . Осцилляции параметра порядка происходят качественно так же, как и в случае простого временного уравнения Гинзбурга — Ландау. На рис. 17 воспроизведены результаты<sup>4</sup> для  $\Delta$  при  $L = 6$  и токе  $j = 0,4$  для нескольких значений  $\Gamma$ . В<sup>4</sup> отмечался тот факт, что при уменьшении  $\Gamma$  кривые  $\Delta(x, t)$  приближались к кривой, соответствующей статической зависимости параметра порядка вблизи границы с нормальной фазой, т. е. к кривой, удовлетворяющей граничному условию  $\Delta(x = 0) = 0$ . Объяснение этого факта будет дано в разделе а) гл. 7.

Описанные численные результаты весьма важны. Прежде всего они устанавливают сам факт существования решений, отвечающих проскальзыванию фазы, и

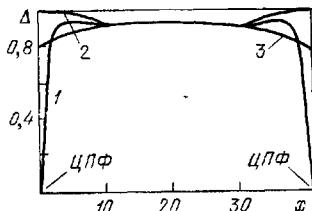


Рис. 16. Координатная зависимость  $\Delta$  в различные моменты времени согласно численным результатам<sup>16, 55</sup> для уравнений временной теории Гинзбурга — Ландау.

Значения параметров:  $u=5,79$ ;  $j=0,4$ .

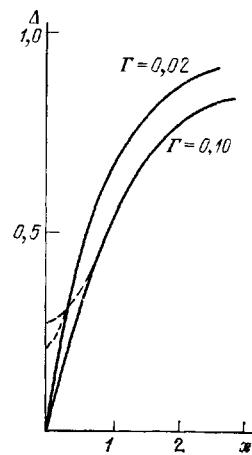


Рис. 17. Координатная зависимость  $\Delta$  для различных значений параметра  $\Gamma$ .

Сплошная линия соответствует минимуму  $\Delta(x=0)$ , а штрихованная линия — максимуму  $\Delta(x=0)$ . По результатам численных расчетов<sup>4</sup> для уравнений (4.9) — (4.12).

подтверждают, таким образом, правильность основных представлений, на которые опирается наше понимание природы резистивного состояния. Однако численные методы не могут в силу своей специфики дать полную информацию о свойствах резистивного состояния в зависимости от различных параметров, характеризующих образец, и условий реального эксперимента. Чрезвычайно важно поэтому попытаться получить (в тех случаях, когда это возможно) аналитическое решение соответствующих уравнений. Последующие разделы будут посвящены описанию современных достижений теории резистивного состояния в этом направлении.

## 7. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕЗИСТИВНОГО СОСТОЯНИЯ

Перейдем теперь к описанию более строгой теории разистивного состояния, основанной на анализе микроскопических нестационарных уравнений сверхпроводимости.

а) Структура центров проскальзывания фазы

Ниже мы будем рассматривать динамические уравнения сверхпроводимости (2.13) — (2.16) в наиболее интересном как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения случае щелевой сверхпроводимости  $\Gamma \ll 1$ ,

что соответствует области температур  $(\hbar/\tau_{\text{ph}}T_c)^2 \ll 1 - (T/T_c)$ . Напомним, что в этом случае глубина проникновения электрического поля велика,  $l_E/\xi \sim \Gamma^{-1/2}$ . Дальнейшее изложение будет опираться на результаты работ <sup>16, 55, 56</sup>.

Напомним в этой связи, что согласно правилу квантования (4.7), среднее по времени и координате электрическое поле связано с периодами структуры ЦПФ. В безразмерных единицах раздела 2 это соотношение имеет вид

$$\langle E \rangle = \frac{2\pi n}{L t_0}. \quad (7.1)$$

Целое число  $n$  показывает, сколько раз по  $2\pi$  теряет фаза в момент образования ЦПФ. Ниже мы полагаем  $n = 1$  по аналогии с обычными вихрями в сверхпроводниках второго рода.

Если рассматривать однородный образец (без дефектов), то ясно, что расстояние между ЦПФ будет определяться скоростью релаксации потенциала  $\Phi$ , т. е. скоростью релаксации неравновесности между химическим потенциалом пар  $\mu_p$  и химическим потенциалом квазичастиц  $\mu_e$ , которая создается при проскальзывании фазы. Отсюда следует, что это расстояние должно быть порядка глубины проникновения электрического поля  $l_E$ . Если ток, текущий по образцу, не очень велик, т. е.  $j \sim \sigma E \sim j_s$  (в наших единицах  $j \sim 1$ ), то период осцилляций по времени,  $t_0$ , согласно (7.1) будет иметь порядок  $t_0 \sim L^{-1} \sim \Gamma^{1/2}$ .

На достаточных расстояниях от ЦПФ, где  $\Delta \sim 1$ , можно записать уравнения (2.14), (2.15) в виде

$$j = -\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{u\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial(\Delta^2 Q)}{\partial x} \right] - \Delta^2 Q. \quad (7.2)$$

Оценим теперь члены, стоящие в правой части (7.2). Первый член имеет порядок  $Q \sim t_0^{-1} \sim Q \sim \Gamma^{-1/2}$ . Здесь  $Q \sim$  — переменная часть  $Q$ :  $Q = \bar{Q} + Q \sim$ , а черта означает усреднение по времени. Второй и третий члены на расстояниях порядка  $l_E$  имеют порядок  $Q$ . Отсюда следует, что переменная часть  $Q \sim$  должна быть мала,  $Q \sim \Gamma^{1/2} \bar{Q}$ , так что  $Q \approx \bar{Q}$ . Переменная часть  $Q \sim$  будет сравниваться по порядку величины с  $\bar{Q}$  только на более коротких расстояниях от ЦПФ, где первый и второй члены в (7.2) будут одного порядка. Ясно, что это произойдет на расстояниях от ЦПФ порядка  $x_1 \sim \Gamma^{-1/4} \ll L$ . В обычных единицах имеем  $x_1 = (\xi l_E)^{1/2}$ . Важно подчеркнуть, что колебания параметра на таких расстояниях остаются еще малыми. В этом легко убедиться, оценив соответствующие члены в уравнении (2.13). На расстояниях  $x \gg 1$  из (2.13) имеем  $(\Delta/\Gamma) \partial \Delta / \partial t \sim \Delta$ , откуда следует, что  $\Delta \sim \Gamma t_0 \sim \Gamma^{3/2}$ . При  $\Delta \sim 1$  такого размаха колебаний недостаточно для обращения  $\Delta$  в нуль в некоторые моменты времени. Отсюда ясно, что вблизи ЦПФ параметр порядка должен подавляться до весьма малых значений  $\Delta_2 \ll 1$ . Эта область очень малых  $\Delta$  определяет характерный размер собственно ЦПФ, т. е. того участка образца, где параметр порядка сильно осциллирует. Будем обозначать размер этой области  $x_2$ . Так как в этой области  $\Delta_2 \sim (\partial \Delta / \partial x) x_2$ ,  $\partial \Delta / \partial x \sim 1$ , то  $x_2 \sim \Delta_2 \sim 1$ .

Рассмотрим сначала задачу на больших расстояниях от ЦПФ,  $x \gg x_1$ , где все величины практически не зависят от времени. Систему уравнений (2.13) — (2.15) в этом случае можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \left( 1 - \Delta^2 - \frac{j_s^2}{\Delta^4} \right) \Delta = 0, \quad (7.3)$$

$$j = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + j_s, \quad (7.4)$$

$$u\Gamma\Delta\Phi = \frac{\partial j_s}{\partial x}, \quad (7.5)$$

где проведено усреднение по времени и введен сверхпроводящий ток  $j_s = -\Delta^2 Q$ . На расстояниях  $x \gg 1$  (в 7.3) можно опустить член с  $\partial^2 \Delta / \partial x^2$ , так что

$$j_s = \Delta^2 \sqrt{1 - \Delta^2}. \quad (7.6)$$

Система уравнений (7.4) — (7.6) легко интегрируется:

$$\Phi^2 = \frac{2}{u\Gamma} \int_{j_s}^{j_{s0}} dj_s \frac{j - j_s}{\Delta(j_s)} = \frac{2}{u\Gamma} \int_{\Delta_0}^{\Delta} d\Delta \frac{(j - \Delta^2 \sqrt{1 - \Delta^2})(3\Delta^2 - 2)}{\sqrt{1 - \Delta^2}}, \quad (7.7)$$

$$\frac{L}{2} - x = \frac{1}{u\Gamma} \int_{j_s}^{j_{s0}} \frac{dj_s}{\Delta(j_s) \Phi(j_s)} = \frac{1}{u\Gamma} \int_{\Delta_0}^{\Delta} d\Delta \frac{3\Delta^2 - 2}{\sqrt{1 - \Delta^2} \Phi(\Delta)}; \quad (7.8)$$

здесь  $j_{s0}$  и  $\Delta_0$  — соответственно значения  $j_s$  и  $\Delta$  посередине между ЦПФ, т. е. в точке  $x = L/2$ . Пределы интегрирования выбраны из тех соображений, что в силу симметрии структуры относительно точки  $x = L/2$  потенциал  $\Phi$ , будучи нечетным, в этой точке обращается в нуль. Таким образом,  $j_{s0}$  — это максимальное значение  $j_s$ , которое достигается посередине

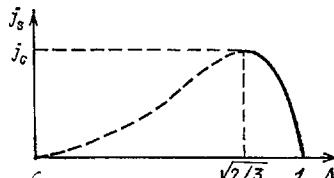


Рис. 18. Функция  $j_s(\Delta)$ . Термодинамически устойчивая ветвь показана сплошной линией, а неустойчивая — штриховой.

между ЦПФ. При интегрировании в (7.7) и (7.8) следует выбирать ту ветвь зависимости  $\Delta(j_s)$  из (7.6), которая является термодинамически устойчивой, т. е. ветвь  $0 < j_s < j_c$ ,  $1 > \Delta > \sqrt{2/3}$  (рис. 18).

Обратимся теперь к области расстояний  $x \ll l_E \sim \Gamma^{-1/2}$ . Оценим величину  $\partial j_s / \partial x$ . Согласно (7.5) имеем  $\partial j_s / \partial x \sim \Gamma \Phi$ . Поскольку  $\Phi = \pi t_0^{-1} \sim \Gamma^{-1/2}$ , то

$$\frac{\partial j_s}{\partial x} \sim \Gamma^{1/2}. \quad (7.9)$$

Благодаря малости производной  $\partial j_s / \partial x$  величину  $j_s$  можно считать не зависящей от  $x$  на расстояниях  $x \ll \Gamma^{-1/2}$ . Усредним (2.13) по времени и запишем его в области статичности  $\Delta$ , т. е. при  $x \gg x_2$ . При усреднении производная  $\partial \Delta / \partial t$  выпадает, и мы получаем

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \left(1 - \Delta^2 - \frac{j_s^2}{\Delta^4}\right) \Delta = 0. \quad (7.10)$$

В силу условия (7.9) решение уравнения (7.10) получается аналогично решению Лангера и Амбера <sup>42</sup> (см. раздел а) гл. 5) и имеет вид (5.12), где потенциал  $u(\Delta) = \Delta^2 - (\Delta^4/2) + (j_s^2/\Delta^2)$  (см. рис. 13, 14). Это решение при  $x \gg 1$  должно сшиваться с решением (7.8), имеющим малую производную  $\partial \Delta / \partial x \ll 1$ . Решение (5.12), выходящее на  $x \gg 1$  с нулевой производной, получается при выборе  $C = u_{\max}$ . Таким образом, искомое решение имеет вид (5.13), где  $x = 0$  соответствует некоторому минимальному значению  $\Delta_2$ . Как было установлено выше, по мере приближения к ЦПФ в пределах статической области по  $x$  параметр порядка должен понижаться до значений, гораздо меньших единицы, что соответствует  $\Delta_2 \ll 1$ . Малое значение  $\Delta$  возможно только в случае  $j_s^2 \ll 1$ . Из вида потенциала  $u(\Delta)$

ясно, что при этом  $\Delta_2 = \sqrt{2j_s^2}$ . В этом случае (5.13) сводится к

$$\Delta = \operatorname{th} \frac{|x|}{\sqrt{2}} \quad (7.11)$$

в той области, где  $\Delta \gg \sqrt{j_s^2}$ .

Величина  $\Delta_2$  по порядку величины представляет собой среднее значение  $\Delta$  в области осцилляций. В этой области, очевидно,  $\Delta \sim j_s$ , поэтому из (2.13) легко оценить величину  $\Delta$ . Так как  $Q \sim j_s/\Delta^2 \sim \Delta^{-1}$ , то имеем  $(\Delta/\Gamma) \partial\Delta/\partial t \sim \Delta^{-1}$ . Отсюда заключаем, что в области осцилляций  $\Delta \sim \sim (\Gamma t_0)^{1/3} \sim \Gamma^{1/2}$ . Для ширины области осцилляций находим  $x_2 \sim \sim \Gamma^{1/2}$ . В обычных единицах это дает  $x_2 = \xi \Gamma^{1/2}$ .

Интересно проследить за поведением потенциала  $\Phi$ . Его среднее по времени значение  $\bar{\Phi}$  практически не зависит от  $x$  при  $x \ll l_E \sim \sim \Gamma^{-1/2}$ . Это следует из (2.16), усредненного по времени:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} = u \Gamma \Delta \bar{\Phi}.$$

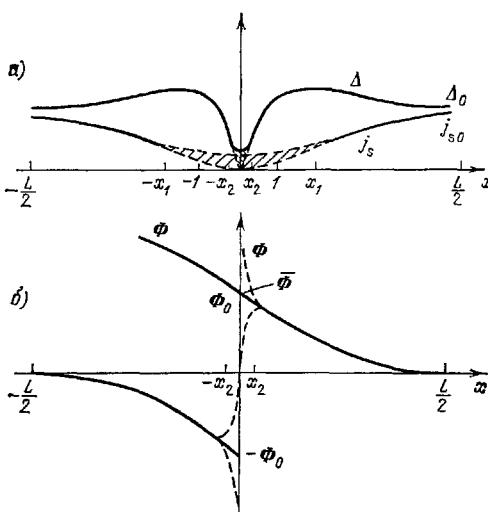


Рис. 19. Поведение  $\Delta$  и  $j_s$  (а) и потенциала  $\Phi$  (б) в статической (сплошные линии) и динамической (штриховые линии) областях.

Заштрихованы значения, которые могут принимать  $\Delta$  и  $j_s$  в процессе осцилляций.

ращаться в нуль во все моменты времени, за исключением моментов проскальзывания фазы, когда  $\Phi(x=0)$  обращается в бесконечность. Из уравнения (2.15) легко оценить, что нарастание  $\Phi$  от нуля до величины порядка  $\Phi_0$  происходит на расстояниях порядка  $x_2$ .

Таким образом, мы получили следующие результаты:

1. В области ЦПФ шириной порядка  $\xi \Gamma^{1/2}$  все величины испытывают существенные колебания. В моменты обращения  $\Delta$  в нуль фаза  $\chi$  испытывает скачок на  $2\pi$ , а  $\Phi(x=0)$  обращается в бесконечность. Амплитуда осцилляций  $\Delta$  порядка  $\Delta_{\text{пл}} \Gamma^{1/2}$ .

2. По мере удаления от ЦПФ осцилляции  $\Delta$  быстро затухают, и на расстояниях  $x \gg x_2 = \xi \Gamma^{1/2}$  параметр порядка практически не зависит от времени. Его поведение в этой области дается формулой (7.11). При  $x \gg \xi$  параметр порядка выходит на равновесное значение ( $\Delta = 1$  в наших единицах). Сверхпроводящий ток осциллирует, но остается малым, так что весь ток переносится нормальными возбуждениями.

3. На расстояниях  $x_1 \ll x \ll l_E$  осцилляции всех величин пренебрежимо малы. В этой области происходит релаксация неравновесности  $\Phi$ , создаваемой в области ЦПФ. Поведение  $\Phi$  и токов определяется формулами (7.7), (7.8). По мере убывания  $\Phi$  нормальный ток уменьшается, сверхпроводящий ток растет, а  $\Delta$  убывает.

Поведение параметра порядка, потенциала и токов показано на рис. 19. Поведение параметра порядка вблизи ЦПФ хорошо согласуется с результатами численных расчетов <sup>4</sup>.

В заключение этого подраздела установим область применимости полученных результатов по температуре. Джозефсоновская частота осцилляций  $\omega_J$  имеет порядок  $(\Delta^2/T) \Gamma^{-1/2}$ . Поскольку для применимости уравнений (2.1) — (2.3) необходимо, чтобы  $\Gamma \ll 1$ ,  $\omega_J \ll \tau_{ph}^{-1}$ , то температура должна удовлетворять условию  $(\hbar/\tau_{ph}T_c)^2 \ll 1$  —  $(T/T_c) \ll (\hbar/\tau_{ph}T_c)^{6/5}$ .

### б) Вольт-амперная характеристика<sup>16, 56</sup>

Усреднив выражение для электрического поля

$$E = -\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

по времени, получаем  $\bar{E} = -\partial\Phi/\partial x$ . Отсюда следует, что средняя по времени и координате напряженность, которую мы также будем обозначать буквой  $E$ , имеет вид

$$E = \frac{2\Phi_0}{L}, \quad (7.12)$$

где  $\Phi_0$  и  $L$  определяются формулами (7.7) — (7.8) с учетом установленных выше граничных условий, что при  $1 \ll x \ll l_E$  параметр порядка  $\Delta = 1$ . С помощью (7.8) получаем для периода структуры:

$$L = \frac{2}{u\Gamma} \int_{\Delta_0}^1 d\Delta \frac{3\Delta^2 - 2}{\sqrt{1 - \Delta^2} \Phi(\Delta)}, \quad (7.13)$$

где  $\Phi(\Delta)$  определяется формулой (7.7). Окончательно для ВАХ имеем<sup>16, 56</sup>

$$E \int_{\Delta_0}^1 d\Delta \frac{3\Delta^2 - 2}{(1 - \Delta^2)^{1/2} f(\Delta, \Delta_0)} = 2f(\Delta = 1, \Delta_0), \quad (7.14)$$

где

$$f^2(\Delta, \Delta_0) = \int_{\Delta_0}^{\Delta} dx \frac{(j - x^2 \sqrt{1 - x^2})(3x^2 - 2)}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (7.15)$$

Таким образом, для нахождения ВАХ оказывается достаточным получить решение уравнений для потенциала только в статической области. В этом пункте результаты динамической теории резистивного состояния<sup>16, 43, 55, 56</sup> сближаются с результатами статической модели, разрабатывавшейся Галайко и др.<sup>26, 35-40</sup>. Действительно, из сравнения рис. 10, иллюстрирующего статическую модель, с рис. 19 видно, что поведение потенциала  $\Phi$  в обоих случаях близки почти на всем протяжении между ЦПФ, за исключением узкой области непосредственно вблизи ЦПФ. В статической модели процесс формирования напряжения на ЦПФ имеет ту же физическую природу, что и в динамической теории, и происходит в результате релаксации разности химических потенциалов  $\Phi = (\mu_p - \mu_e)/e$  на расстояниях, больших по сравнению с длиной когерентности. Нужно отметить, однако, что результаты статической модели<sup>26, 35-40</sup>, взятые буквально, имеют один важный недостаток. Дело в том, что при интегрировании уравнений для потенциала типа уравнений (7.4), (7.5) в работах Галайко и др. использовалась термодинамически неустойчивая ветвь зависимости  $\Delta(j_s)$ , соответствующая обращению  $\Delta$  в нуль при  $j_s \rightarrow 0$  (см. рис. 18). Такое решение не может осуществляться в реальной физической системе. Таким образом, результаты этих работ должны быть исправлены с учетом указанного обстоятельства.

Для дальнейшего обсуждения важно, как соотносятся длина сверхпроводящего канала  $L_0$  и расстояние  $L$  между соседними ЦПФ. Если  $l_E \sim L_0$ , то в канале помещается конечное число ЦПФ и ход ВАХ определяется возникновением новых ЦПФ при увеличении тока. Этот вопрос обсуж-

дается в разделе г) гл. 7. Здесь мы рассмотрим обратный предельный случай  $l_E \ll L_0$ . В такой ситуации число ЦПФ в канале велико, поэтому можно считать, что их плотность плавно возрастает с увеличением тока. Формулы (7.14) и (7.15) представляют собой семейство кривых, определяемых свободным параметром  $\Delta_0$  (или  $j_{s_0}$ ). Эти кривые изображены на рис. 20. Для выбора параметра  $\Delta_0$  нужно привлечь дополнительные физические соображения. Здесь можно воспользоваться принципом минимума производства энтропии (минимума диссипации). В соответствии с этим принципом при заданном токе в системе должен осуществляться режим с минимально возможной напряженностью  $E$ , так чтобы была минимальна диссипативная

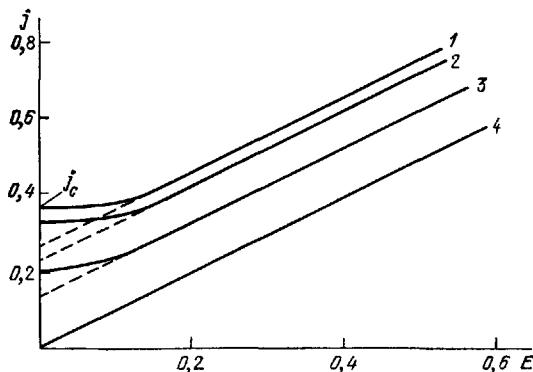


Рис. 20. ВАХ, рассчитанные по формулам (5.19), (5.20) при различных значениях параметра  $\Delta_0$ . Видны участки с избыточным током  $j_{\text{exc}} = a j_c$ . 1 —  $\Delta_0 = \sqrt{2/3}$ ,  $a = 0,68$ ; 2 —  $\Delta_0 = 0,9$ ,  $a = 0,61$ ; 3 —  $\Delta_0 = 0,975$ ,  $a = 0,35$ ; 4 — нормальное состояние.

функция  $jE$ . Такой режим отвечает верхней кривой на рис. 20, соответствующей значению параметра  $\Delta_0 = \sqrt{2/3}$  (или  $j_{s_0} = j_c$ ). Такой выбор эквивалентен условию, что сверхпроводящий ток должен достигать максимально возможного значения. Ниже мы будем предполагать именно такой выбор параметра  $\Delta_0$ .

При переходе в формулах (7.14), (7.15) к обычным единицам надо заменить  $E$  на  $2\sigma E/3\sqrt{3}j_c$ , а  $j$  на  $2j/3j_c\sqrt{3}$ . В результате получаем

$$\frac{\sigma E}{c} \int_{\sqrt{2/3}}^1 dx \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{1-x^2} f(x, \sqrt{2/3})} = 3\sqrt{3} f\left(1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right). \quad (7.16)$$

Функция  $f(x, \sqrt{2/3})$  определяется формулой (7.15).

На ВАХ (7.16) можно выделить два характерных участка (рис. 20):

1) Начальный участок.  $j - j_c \ll j_c$ . В этом случае период структуры логарифмически велик,

$$L = 2l_E \sqrt{\frac{\Delta_{\text{ГЛ}}}{\Delta_0}} \ln \frac{cj_c}{j - j_c},$$

где  $c \sim 1$ , а ВАХ имеет вид

$$j - j_c = j_c \exp\left(-\frac{0,94j_c}{\sigma E}\right).$$

При  $E \rightarrow 0$  она имеет нулевой наклон, что является следствием бесконечной длины образца.

2) Участок больших токов.  $j \gg j_c$ . Здесь ВАХ идет параллельно закону Ома:  $j = \sigma E + j_{\text{exc}}$  с избыточным током  $j_{\text{exc}} = aj_c$ , где

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4} p^{-1} \left(1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \int_{\sqrt{2/3}}^1 dx \frac{x^2 (3x^2 - 2)}{p(x, \sqrt{2/3})},$$

а

$$p^2(x, x_0) = \int_{x_0}^x dy \frac{3y^2 - 2}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

BAX (7.16) была получена в работе <sup>16</sup>. В этой же работе были вычислены BAX и для более сложного случая, когда на релаксацию  $\Phi$  влияет скорость движения сверхпроводящего конденсата, т. е.  $j_s$ . Как уже говорилось выше, для нахождения BAX достаточно решить задачу о распределении потенциала лишь в статической области. В этой области уравнение для потенциала выглядит аналогично уравнению (2.6), с тем отличием, что в его правой части содержится фактор, учитывающий влияние сверхпроводящего тока (см. <sup>57</sup>):

$$D\nabla^2\Phi = \frac{\pi\Delta}{4T\tau_{ph}} q(z)\Phi,$$

где

$$q(z) = 1 + \frac{2z}{\pi} \int_1^{\infty} dx \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x(x\sqrt{x^2 - 1} + z)} = \begin{cases} 1, & z \ll 1, \\ \sqrt{z}, & 1 \ll z \ll T^2/\Delta_{\Gamma, \text{Л}}^2, \end{cases}$$

а  $z = 4De^2Q^2\tau_{ph}/\hbar^2c^2$ . В единицах (2.9) — (2.11) это уравнение можно записать в виде, аналогичном (7.5):

$$\frac{\partial j_s}{\partial x} = u\Gamma\Delta q(z)\Phi, \quad (7.17)$$

где теперь  $z = 8(T_c - T)\tau_{ph}Q^2/\pi\hbar$ . Уравнения (7.3), (7.4) и (7.17) также легко интегрируются. В результате вместо формул (7.7), (7.8) получаем ( $Q^2 = 1 - \Delta^2$ )

$$\Phi^2 = \frac{2}{u\Gamma} \int_{\Delta_0}^{\Delta} d\Delta \frac{(j - \Delta^2 \sqrt{1 - \Delta^2})(3\Delta^2 - 2)}{\sqrt{1 - \Delta^2} q(z)},$$

$$\frac{L}{2} - x = \frac{1}{u\Gamma} \int_{\Delta_0}^{\Delta} d\Delta \frac{3\Delta^2 - 2}{\sqrt{1 - \Delta^2} \Phi(\Delta) q(z)}.$$

BAX, определяемая выражением (7.12), в этом случае выглядит аналогично разобранной выше, а ее ход качественно совпадает с рис. 20.

Эти результаты охватывают более широкий температурный интервал

$$\left(\frac{\hbar}{\tau_{ph}T_c}\right)^2 \ll 1 - \frac{T}{T_c} \ll \sqrt{\frac{\hbar}{\tau_{ph}T_c}}.$$

Если взглянуть на данные, приведенные ранее в таблице, то видно, что этот температурный интервал соответствует тем температурам, при которых могут выполняться реальные эксперименты. Таким образом, эти BAX в принципе допускают не только качественное, но и количественное сравнение с экспериментом (см. гл. 8).

### в) В е р х н я я г р а н и ц а р е з и с т и в н о г о с о с т о я н и я

Резистивное состояние узких сверхпроводящих каналов на эксперименте занимает довольно широкую область токов (см. 8, а, б). Нижняя граница, как мы видели, порядка критического тока Гинзбурга — Ландау  $j_c$  и имеет температурную зависимость  $(T_c - T)^{3/2}$ . Интересно определить верхнюю границу резистивного состояния, т. е. такой ток, при котором впервые наблюдаются отклонения от закона Ома. Строго говоря, за счет флюктуационного образования куперовских пар, исчезающих затем в результате ускорения электрическим полем, всегда должны иметь место отклоне-

ния от закона Ома<sup>17, 18</sup>, однако при тех больших токах, при которых в эксперименте реально наблюдаются отклонения, такие флуктуационные поправки должны быть еще чрезвычайно малыми. Тут речь может идти только о перестройке всего состояния канала с током и о возникновении резистивного состояния рассматриваемого типа.

Первая попытка определить границу, при которой нормальное состояние канала переходит в резистивное, была предпринята Галайко<sup>35, 39, 40</sup> в рамках статической модели резистивного состояния. В этих работах изучалось возникновение зародышей сверхпроводящего состояния на фоне нормального состояния канала с током. Согласно результатам<sup>35, 39, 40</sup> резистивное состояние появляется при токе ниже критического значения

$$\frac{4\sigma(T_c - T)}{e} \sqrt{\frac{2\pi T_c}{7\xi(3)\hbar D}}. \quad (7.18)$$

Этот результат, однако, имеет тот же недостаток, что и вся статическая модель резистивного состояния, которая не учитывает неизбежных осцилляций параметра порядка в областях перекрытия зародышей. В результате статическое уравнение для модуля параметра порядка, использовавшееся при получении (7.18), будет нарушаться, так что результат (7.18) не решает вопроса о верхней границе резистивного состояния.

Как ясно из результатов гл. 3, резистивное состояние должно возникать и разрушаться посредством перехода типа перехода первого рода. При этом с увеличением тока выше некоторого критического значения  $j'_2$  динамическое состояние, описанное в разделе а) гл. 7, должно скачком разрушаться, а образец будет скачком переходить в нормальное состояние. Оценим верхнюю границу этого динамического состояния<sup>16</sup>. Согласно формулам (7.7), (7.13) при больших токах период структуры по координате уменьшается и имеет порядок  $L \sim \xi \sqrt{j_c/\Gamma}$ . При токе  $j \sim j_c/\Gamma$  расстояние между ЦПФ будет порядка  $\xi$ . При этом параметр порядка  $\Delta$  должен быть мал в точках нахождения ЦПФ и достигать значений порядка единицы посредине между ЦПФ. Ясно, что такое решение должно исчезать, если расстояние между ЦПФ будет существенно меньше  $\xi$ . Отсюда заключаем, что резистивное состояние такого типа будет исчезать при токах выше

$$j'_2 \sim \frac{j_c}{\Gamma} \sim \frac{\sigma \sqrt{T} \tau_{ph}}{e \sqrt{D} \hbar^{3/2}} (T_c - T)^2. \quad (7.19)$$

Такая оценка верхнего критического тока дает по порядку величины тот же результат, что и для верхнего критического тока  $j_2$ , связанного с образованием сверхпроводящих зародышей на фоне нормального состояния канала<sup>4</sup>. Отметим, что хотя функциональные зависимости выражений (3.2) и (7.19) совпадают, соответствующие численные коэффициенты могут отличаться. Это связано с тем, что, как уже говорилось, возникновение резистивного состояния из нормального и переход резистивного состояния в нормальное происходит посредством переходов типа первого рода. В такой ситуации возможен гистерезис, который и будет проявляться в разных значениях токов в (3.2) и (7.19).

Важную роль в разрушении сверхпроводимости в резистивном состоянии играет нагрев за счет выделяемой током мощности. Этот нагрев усиливается при отходе от критической температуры, когда возрастают критические токи, и сильно зависит от условий охлаждения образца. Но даже при идеальном теплоотводе, поддерживающем температуру кристаллической решетки образца равной температуре охлаждающей среды, электронная система все же будет перегрета по отношению к фононам. Это приводит к эффективному понижению  $T_c$ , и при достаточно больших токах сверхпроводимость будет вообще исчезать. Оценить соответствующее значение тока можно, учитывая в уравнении (2.1) наряду с членом  $\Delta^3$  также поправку к функции распреде-

деления, вызванную перегревом электронов. В  $\tau$ -приближении эта поправка пропорциональна  $\tau_{ph} De^2 E^2 \partial^2 f / \partial \varepsilon^2$ , где  $f(\varepsilon)$  — равновесная функция распределения. В результате в уравнение (2.1) войдет также член

$$\frac{7\zeta(3)}{2\pi^2} \frac{\tau_{ph} De^2 E^2}{T^2} \Delta.$$

Критическое значение поля находится из приравнивания его к члену  $\Delta$  ( $T_c = T$ ), что дает

$$j_2^* = \frac{\pi \sigma}{e} \sqrt{\frac{2T_c(T_c - T)}{7\zeta(3)\tau_{ph}D}}. \quad (7.20)$$

Этот результат получен в <sup>39, 40</sup> и справедлив при  $\hbar/T_c\tau_{ph} \ll 1 - (T/T_c)$ . При более высоких температурах,  $1 - (T/T_c) \ll \hbar/T_c\tau_{ph}$ , роль нагрева уменьшается, и ток  $j_2$  будет определяться выражением (7.19).

Следует отметить, что описанные результаты для  $j_2$  являются скорее оценочными, и вопрос о верхнем критическом токе остается все еще нерешенным.

### г) Скачки напряжения на ВАХ сверхпроводящих каналов конечной длины

Как говорилось в разделе 4, на ВАХ не очень длинных сверхпроводящих каналов наблюдаются скачки напряжения. Они связаны с появлением в канале новых ЦПФ, образующихся при увеличении тока. Качественная картина скачков напряжения, основанная на модели СБТ <sup>25, 52</sup>, описывалась в разделе б) гл. 5. Здесь мы изложим более последовательный подход, основанный на микроскопической теории. Задача о скачках напряжения впервые решалась Безуглым и др. <sup>41</sup>; ниже мы изложим результаты этой работы.

По причине узости динамической области здесь, так же как и при определении ВАХ длинных каналов в разделе б) гл. 7, можно пользоваться статическими уравнениями. Будем считать, что сверхпроводящий канал длиной  $L_0$  соединен с источником тока с помощью нормальных контактов (рис. 21). При токе  $j < j^{(1)}$ , где  $j^{(1)}$  соответствует появлению первого ЦПФ, напряжение на канале определяется проникновением электрического поля из нормальных контактов в глубь канала (см., например, <sup>10, 58</sup>). Это состояние изображено на рис. 21, а. Вблизи SN-границы параметр порядка резко подавляется от равновесного значения до нуля на расстояниях порядка  $\xi$ . При удалении от границы  $\Phi$  и  $j_n$  падают,  $j_s$  возрастает, а  $\Delta$  убывает на расстояниях порядка  $l_E$ . При увеличении тока выше  $j^{(1)}$  в центре канала появляется первый ЦПФ (рис. 21, б). Такое состояние сохраняется в интервале токов  $j^{(1)} < j < j^{(2)}$ , после чего возникает второй ЦПФ и т. д. Условия вблизи границы с нормальным металлом <sup>58</sup>, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с  $\xi$ , но малых по сравнению с  $l_E$ , и на границе статической

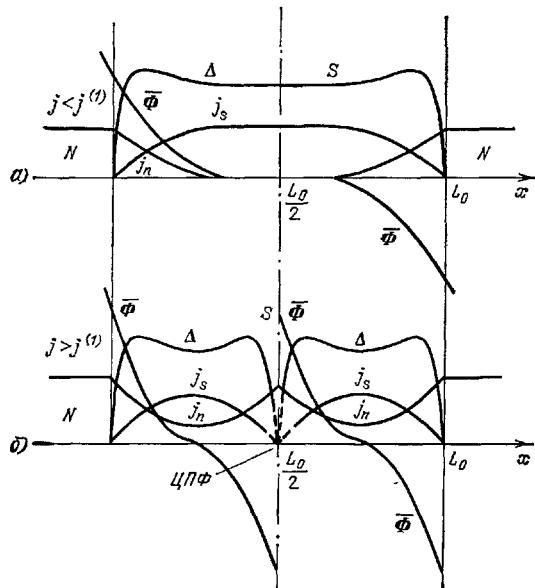


Рис. 21. Поведение  $\Delta$  и токов в сверхпроводящем канале с нормальными контактами.  
а) Ток  $j < j^{(1)}$ , ЦПФ отсутствуют; б) ток  $j^{(1)} < j < j^{(2)}$ , в центре канала имеется один ЦПФ.

области вблизи ЦПФ (см. раздел *a*) гл. 7) одинаковы:  $j_s = 0$ ,  $\Delta = 1$ , поэтому для определения напряжения на канале можно непосредственно воспользоваться формулой (7.7). Пусть в канале имеется  $n$  ЦПФ, тогда потенциал, формирующийся на одном ЦПФ, равен

$$\Phi_n^2(\Delta) = \frac{2}{u\Gamma} \int_{\Delta_{0n}}^1 d\Delta \frac{(j - \Delta^2 \sqrt{1 - \Delta^2}) (3\Delta^2 - 2)}{\sqrt{1 - \Delta^2}}, \quad (7.21)$$

здесь  $\Delta_{0n}$  — значение  $\Delta$  посередине между соседними ЦПФ (или посередине между SN-границей и ближайшим ЦПФ). Параметр  $\Delta_{0n}$  связан теперь с током и полной длиной канала  $L_0$  соотношением

$$\frac{L_0}{2(n+1)} = \frac{1}{u\Gamma} \int_{\Delta_{0n}}^1 d\Delta \frac{3\Delta^2 - 2}{\sqrt{1 - \Delta^2} \Phi(\Delta)}. \quad (7.22)$$

Полное падение напряжения на канале

$$V = 2(n+1) \Phi_n(\Delta = 1). \quad (7.23)$$

Выражения (7.21) — (7.23) полностью описывают ВАХ канала длины  $L_0$ . Их явный вид, однако, весьма громоздок. Ограничимся поэтому случаем слабой надкритичности  $j - j_c \ll j_c$ ,  $n \sim 1$ , и предположим, что  $L_0 \gg \Gamma^{-1/2}$  (т. е.  $L_0 \gg l_E$ ). Из (7.21) — (7.22) получаем

$$\frac{L_0}{2(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{u\Gamma \Delta_{0n}}} \ln \frac{c j_c}{j - j_{s0}^{(n)}}; \quad (7.24)$$

здесь  $c \sim 1$ , а  $j_{s0}^{(n)} = \Delta_{0n}^2 \sqrt{1 - \Delta_{0n}^2}$  — сверхпроводящий ток посередине между ЦПФ. Если при заданном числе ЦПФ в канале,  $n = \text{const}$ , увеличивать внешний ток  $j$ , то согласно (7.24) должен увеличиваться и ток  $j_{s0}^{(n)}$ . Когда  $j_{s0}^{(n)}$  достигает величины  $j_c$ , то решение с  $n$  ЦПФ становится невозможным и возникает  $(n+1)$ -й ЦПФ. Ток  $j^{(n)}$ , при котором происходит образование  $n$ -го ЦПФ, т. е.  $n$ -й скачок напряжения, определяется из (7.24):

$$j^{(n)} - j_c = j_c \exp \left[ - \frac{(u\Gamma)^{1/2} L_0}{2n} \left( \frac{2}{3} \right)^{1/4} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.25)$$

Величина скачка практически не зависит от  $n$  при малых  $n$  и равна напряжению  $2\Phi_0$  на одном ЦПФ, где

$$\Phi_0^2 = \frac{2}{u\Gamma} \int_{\sqrt{2/3}}^1 d\Delta \frac{(j_c - \Delta^2 \sqrt{1 - \Delta^2}) (3\Delta^2 - 2)}{\sqrt{1 - \Delta^2}} \approx \frac{0,150}{u\Gamma}. \quad (7.26)$$

Зависимость напряжения  $\Phi_n$  на одном ЦПФ от тока между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м скачком имеет вид

$$\Phi_n^2 = \Phi_0^2 + \frac{2}{u\Gamma} (j - j_c) \int_{\sqrt{2/3}}^1 d\Delta \frac{3\Delta^2 - 2}{\sqrt{1 - \Delta^2}}. \quad (7.27)$$

Поэтому в промежутке между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м скачком ВАХ имеет постоянный наклон с дифференциальным сопротивлением

$$\left( \frac{\partial V}{\partial j} \right)_n = \frac{2(n+1)}{u\Gamma \Phi_0} p^2 \left( 1, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \approx 2,06 \frac{n+1}{u\Gamma}. \quad (7.28)$$

Вольт-амперная характеристика изображена на рис. 22.

В обычных единицах для дифференциального сопротивления получаем

$$\left( \frac{\partial V}{\partial j} \right)_n = 2,06 (n+1) \frac{l_E}{\sigma}, \quad (7.29)$$

где  $l_E$  определяется формулой (2.8). Стметим весьма интересное обстоятельство, что полученное из точной микроскопической теории численное значение дифференциального сопротивления, вносимого одним изолированным ЦПФ, равное  $2,06 l_E/\sigma$ , удивительно хорошо согласуется с феноменологическим результатом СБТ<sup>26</sup>, равным  $2l_E/\sigma$  (см. раздел б) гл. 5).

Начальный участок ВАХ от  $j = 0$  до  $j = j^{(1)}$  соответствует сверхпроводящему состоянию канала и определяется исключительно проникновением поля из нормальных контактов. В общем случае этот участок ВАХ описывается зависимостью, полученной в<sup>58</sup>.

Если канал присоединен к сверхпроводящим контактам, то на начальном участке напряжение наблюдаться не будет, а в формулах (7.22) — (7.28) надо заменить  $n + 1$  на  $n$ .

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом можно констатировать, что основные особенности ВАХ узких сверхпроводящих каналов находят свое объяснение в современной теории.

Однако говорить о численном согласии, по-видимому, пока рано. Дело в том, что теоретические результаты получены для весьма жестких ограничений на значения параметров, например, близости к критической температуре, ширины образцов, условий теплоотвода и т. п. Все эти требования могут быть выполнены на практике, но для этого нужны специальные усилия, которые пока в экспериментах не предпринимались. Кроме того, недостаточно надежно установлены значения такого важного параметра теории, как время неупругой электрон-фононной релаксации (данные, приведенные в таблице, верны лишь по порядку величины). Поэтому при сравнении теории с экспериментом эту величину надо считать подгоночным параметром. Тем не менее основные качественные черты резистивного состояния, без сомнения, правильно описываются теорией. Следа прежде всего относятся общий вид ВАХ и скачки напряжения на ней. Это видно уже из сравнения экспериментальных кривых, показанных на рис. 8, с предсказаниями теории (см. рис. 20, 22). Наиболее удобны для сравнения скачки напряжения на ВАХ. В работе 27 установлено, что дифференциальное сопротивление на участках между соседними скачками удовлетворяет соотношению  $\partial V/\partial j = R_0 N$ , где  $R_0$  — некоторая постоянная, а  $N$  — целое число. Это находится в согласии с формулой (7.18). Из величины дифференциального сопротивления можно также извлечь информацию о поведении  $l_E$  и сравнить ее с теоретическими выражениями (2.7), (2.8). Эксперимент подтверждает основные тенденции зависимости  $l_E$  от температуры<sup>27, 60</sup> и магнитного поля<sup>60</sup>. Эксперимент подтверждает, кроме того, пространственное распределение потенциалов  $\mu_p$  и  $\mu_e$  вблизи ЦПФ<sup>51</sup>. Нестационарный эффект Джозефсона, наблюдаемый экспериментально<sup>26</sup>, без сомнения, связан с осцилляциями ЦПФ, происходящими с джозефсоновской частотой<sup>59</sup>. Что касается генерации более низких частот<sup>28, 30</sup>, то этот эффект не получил пока надежного объяснения. Его можно, по-видимому, связать с движением всей структуры ЦПФ как целого<sup>28</sup>, хотя окончательное заключение сделать пока трудно. Недостаточно данных также и для проверки температурной зависимости верхнего критического тока  $j_2$ . Экспериментальные данные по этому вопросу имеются только в работе<sup>28</sup>, где получена линейная зависимость  $j_2 \propto T_c - T$ , которая не согласуется ни с формулой (7.19), ни с (7.20).

Несмотря на эти и некоторые другие открытые вопросы, можно утверждать, что общая картина резистивного состояния как структуры ЦПФ установлена все же достаточно надежно.

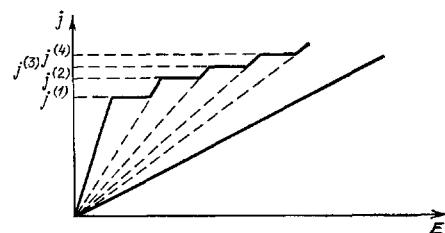


Рис. 22. Схематическая ВАХ канала конечной длины.

Идеи о проскальзывании фазы в резистивных состояниях разного типа оказались весьма плодотворными. Движение вихрей в сверхпроводнике второго рода (и в сверхтекучей жидкости), движение трубок потока в сверхпроводниках первого рода также являются механизмами проскальзывания фазы. Сам термин «проскальзывание фазы» был введен<sup>61</sup> для описания именно этих процессов. Однако в узких сверхпроводящих каналах мы встречаемся с качественно новым видом проскальзывания фазы. Дело в том, что в сверхпроводниках массивных размеров проскальзывание фазы осуществляется за счет движения дефектов сверхпроводящей структуры, которые существуют в системе даже в отсутствие диссипации. Здесь же центры проскальзывания фазы существуют только в течение малого промежутка времени и только при наличии диссипации. Система с ЦПФ является существенно диссипативной, и здесь неприменимы методы, основанные на термодинамическом рассмотрении.

Понятие о проскальзывании фазы оказалось весьма полезным также и для описания двумерного смешанного состояния и промежуточного состояния сверхпроводящей проволоки с током (см. обзор<sup>62</sup>). В работах<sup>63, 64</sup> показано, что и в этих состояниях существование электрического поля на фоне сверхпроводимости обязано механизму проскальзывания фазы, наподобие ЦПФ в резистивном состоянии узких сверхпроводящих каналов. Неоднородное распределение параметра порядка и химического потенциала куперовских пар вдоль сверхпроводящего канала в резистивном состоянии можно использовать также для объяснения результатов, полученных в экспериментах Игуты и др.<sup>65</sup> по туннельной инжекции. Ими было обнаружено неоднородное состояние в сверхпроводящем туннельном контакте, которое интерпретировалось как состояние с несколькими значениями щели на длине контакта. Такое неоднородное состояние может быть объяснено следующим образом<sup>66</sup>. Туннельный ток, протекающий сквозь контакт, течет затем вдоль сверхпроводящей пленки, возрастаая с координатой. В реальной экспериментальной ситуации средняя плотность тока вдоль пленки может превышать критический ток Гинзбурга — Ландау, что приводит к возникновению резистивного состояния, характеризующегося скачками химического потенциала куперовских пар. В результате таких скачков сдвигается начало отсчета порогового напряжения на вольт-амперной характеристике детектора, что дает картину, похожую на наблюдавшуюся экспериментально. Механизмом этого явления может быть образование ЦПФ, если пленка достаточно узка, либо движение вихрей, если пленка широка.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау  
АН СССР, Черноголовка (Московская обл.)

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Горьков Л. П., Копнин Н. Б. — УФН, 1975, т. 116, с. 413.
- Larkin A. I., Ovchinnikov Yu. N. — In: *Advances in Solid State Physics. Nonequilibrium Superconductivity*/Ed. by A. I. Larkin, D. N. Langenberg. — Amsterdam: North-Holland (in press).
- Крамер L., Watts-Tobin R. J. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 1041; In: *Proc. of 15th Intern. Conference on Low Temperature Physics*. — J. de Phys., 1978, t. 39, Suppl. Nr. 8, p. C6-554.
- Watts-Tobin R. J., Krähenbühl Y., Kramer L. — J. Low Temp. Phys., 1981, v. 42, p. 459.
- Голуб А. А. — ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 341.
- Shön G., Ambegaokar V. — Phys. Rev. Ser. B, 1979, v. 19, p. 3515.
- Tinkham M., Clarke J. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1366.
- Tinkham M. — Phys. Rev. Ser. B, 1972, v. 6, p. 1747.
- Schmid A., Schön G. — J. Low Temp. Phys., 1975, v. 20, p. 207.
- Artemenko S. N., Volkov A. F., Zaitsev A. V. — Ibid., 1978, v. 30, p. 487.
- Артеменко С. Н., Волков А. Ф. — УФН, 1979, т. 128, с. 3.
- Clarke J. In: *Nonequilibrium Superconductivity, Phonons and Kapitza Boundaries*/Ed. by K. E. Gray. — Plenum Press, N.Y., Lnd., 1981. — P. 353.

13. A b r a h a m s E., T s u n e t o T.— Phys. Rev., 1966, v. 152, p. 416.
14. S c h m i d A.— Phys. Kondens. Mater., 1966, Bd. 5, S. 302.
15. Г о р ъ к о в Л. П., Э л и а ш б е р г Г. М.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1297.
16. И в л е в Б. И., К о п н и н Н. Б., М а с л о в а Л. А.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, с. 1963.
17. Г о р ъ к о в Л. П.— Письма ЖЭТФ, 1970, т. 11, с. 52.
18. К у л и к И. О.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 584.
19. Д е Ж е н П. Сверхпроводимость металлов и сплавов.— М.: Мир, 1968.
20. И в л е в Б. И., К о п н и н Н. Б., М а с л о в а Л. А.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1533.
21. Л и х а р е в К. К.— Письма ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 730.
22. Л и х а р е в К. К., Я к о б с о н Л. А.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 1150.
23. I v l e v B. I., K o r p n i n N. B., L a r k i n I. A.— J. Low Temp. Phys., 1983, v. 53, p. 153.
24. M e y e r J., M i n n i g e r o d e G. V.— Phys. Lett. Ser. A, 1972, v. 38, p. 529.
25. S m i t h L. N.— J. Low Temp. Phys., 1980, v. 38, p. 553.
26. S k o c r o l W. J., B e a s l e y M. R., T i n k h a m M.— Ibid., 1974, v. 16, p. 145.
27. Д м и т р и е в В. М., Х р и с т е н к о Е. В.— ФНТ, 1977, т. 3, с. 1210.
28. Г а л а и к о В. П., Д м и т р и е в В. М., Ч у р и л о в Г. Е.— ФНТ, 1976, т. 2, с. 299.
29. М у с и е н к о Л. Е., Ш н и р к о в В. И., В о л о ц к а я В. Г., Д м и т р е н к о И. М.— ФНТ, 1975, т. 1, с. 413.
30. Ч у р и л о в Г. Е., Д м и т р и е в В. М., Б е с к о р с ы й А. П.— Письма ЖЭТФ, 1969, т. 10, с. 231.  
Г а л а и к о В. П., Д м и т р и е в В. М., Ч у р и л о в Г. Е.— Ibid., 1973, т. 18, с. 362.
31. F i n k H. J.— Phys. Stat. Sol. Ser. b, 1973, v. 60, p. 843; Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 42, p. 465.
32. F i n k H. J., P o u l s e n R. S.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 762.
33. F i n k H. J., P o u l s e n R. S.— Phys. Stat. Sol., Ser. b, 1974, v. 63, p. 317.
34. F i n k H. J., P o u l s e n R. S.— Phys. Rev. Ser. B, 1975, v. 11, p. 1870.
35. Г а л а и к о В. П.— ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 379.
36. Г а л а и к о В. П.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 223.
37. Г а л а и к о В. П.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 273.
38. Г а л а и к о В. П., Ш у м е й к о В. С.— Ibid., p. 671.
39. Г а л а и к о В. П.— ФНТ, 1976, т. 2, с. 807.
40. G a l a i k o V. P.— J. Low Temp. Phys., 1977, v. 26, p. 483.
41. Б е з у г л ы й Е. В., Б р а т у с ь Е. Н., Г а л а и к о В. П.— ФНТ, 1977, т. 3, с. 1010.
42. L a n g e r J. S., A m b e g a o k a g V.— Phys. Rev., 1967, v. 164, p. 498.
43. И в л е в Б. И., К о п н и н Н. Б.— Письма ЖЭТФ, 1978, т. 28, с. 640.
44. W e b b W. W., W a r g u r t o n R. J.— Phys. Rev. Lett., 1968, v. 20, p. 461.
45. L u k e n s J. E., W a r g u r t o n R. J., W e b b W. W.— Ibid., 1970, v. 25, p. 1180.
46. N e w b o w e r R. S., B e a s l e y M. R., T i n k h a m M.— Phys. Rev. Ser. B, 1972, v. 6, p. 864.
47. L i t t l e W. A.— Ibid., 1967, v. 156, p. 396.
48. M c C u m b e r D. E., H a l p e r i n B. I.— Ibid. Ser. B, 1970, v. 1, p. 1054.
49. T u c k e r J. R., H a l p e r i n B. I.— Ibid., 1971, v. 3, p. 3768.
50. R i e g e r T. J., S c a l a p i n o D. J., M e r g e r e a u J. E.— Ibid., 1972, v. 6, p. 1734.
51. D o l a n G. J., J a c k e l L. D.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 1628.
52. T i n k h a m M.— J. Low Temp. Phys., 1979, v. 35, p. 147.
53. К г а м е г L., B a g a t o f f A.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 518.
54. Г о р ъ к о в Л. П., Э л и а ш б е р г Г. М.— ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 612.
55. И в л е в Б. И., К о п н и н Н. Б., М а с л о в а Л. А.— ФТТ, 1980, т. 22, с. 252.
56. I v l e v B. I., K o r p n i n N. B.— J. Low Temp. Phys., 1981, v. 44, p. 453.
57. Б у л ы ж е н к о в И. Э., И в л е в Б. И.— ФТТ, 1979, т. 21, с. 2325.
58. И в л е в Б. И., К о п н и н Н. Б., П е т и к К. Дж.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1017; J. Low Temp. Phys., 1980, 41, p. 297.
59. I v l e v B. I., K o r p n i n N. B.— Sol. State Comm., 1982, v. 41, p. 107.
60. K a d i n A. M., S k o c r o l W. J., T i n k h a m M.— J. Low Temp. Phys., 1978, v. 33, p. 481.
61. A n d e r s o n P. W.— Rev. Mod. Phys., 1966, v. 38, p. 298.
62. L a n d a u I. L., D o l g o r o l o v V. T.— Цит. в <sup>2</sup> сб.
63. И в л е в Б. И., К о п н и н Н. Б.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 672.
64. И в л е в Б. И., К о п н и н Н. Б., М е л ь н и к о в В. И.— ФТТ, 1980, т. 22, с. 3386.
65. I g u c h i I., L a n g e n b e r g D. N.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 486.  
I g u c h i I., K e n t D., G i l m a r t i n H., L a n g e n b e r g D. N.— Phys. Rev. Ser. B, 1981, v. 23, p. 3240.
66. I v l e v B. I., K o r p n i n N. B.— J. Low Temp. Phys., 1982, v. 47, p. 223.

