1984 г. Декабрь Том 144, вып. 4
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.114

ЕЩЕ РАЗ ОБ УРАВНЕНИИ ЛАНДАУ—ЛИФШИЦА

Г. В. Скроцкий

1. Уравнение Ландау — Лифшица

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\gamma[\mathbf{M},\ \mathbf{H}]-\alpha\frac{\gamma}{M}[\mathbf{M},\ [\mathbf{M},\ \mathbf{H}]] \tag{1}$$

было предложено [1] для описания изменения со временем намагниченности **M** однодоменного ферромагнитного образца. Оно было получено из простых феноменологических соображений. Первый член в правой части уравнения описывает прецессию вектора **M** в однородно намагниченном образце, находящемся в магнитном поле **H**. Второй, релаксационный, член определяет его приближение к положению рановесия. Он представляет собой простейшую нелинейную комбинацию правильной тензорной размерности, которую можно составить из аксиальных векторов **M** и **H**.

Эффективное поле **H** в рамках теории молекулярного поля определяется через плотность свободной энергии F:

$$\mathbf{H}=-\frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}}, \tag{2}$$

зависимость которой от компонент вектора **M** для образцов определенной формы с заданным характером магнитной анизотропии известна [2].

Уравнение (1) легло в основу теории магнитного резонанса в ферромагнитных диэлектриках [3] и нашло себе многочисленные и разнообразные применения в феноменологической теории динамических процессов в ферромагнетиках [3–5]. Оно не только качественно, но и вполне удовлетворительно количественно описывает эволюцию электронной намагниченности ферромагнитных образцов различной формы в правильно выбранном эффективном магнитном поле. Множитель γ в этом случае отрицателен и весьма близок к гиромагнитному отношению свободных электронов. Безразмерная постоянная $\alpha>0$, характеризующая скорость релаксации вектора намагниченности, определяется спин-спиновыми и спин-орбитальными взаимодействиями.

Наряду с канонической формой записи уравнения (1) часто используется другая, эквивалентная ей форма записи:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\tilde{\gamma}[\mathbf{M},\ \mathbf{H}]-\frac{\alpha}{M}\left[\mathbf{M},\ \frac{d\mathbf{M}}{dt}\right], \tag{3}$$

где $\gamma=\tilde{\gamma}(1+\alpha^2)$. В эквивалентности (3) и (1) легко убедиться, исключив $d\mathbf{M}/dt$ из релаксационного члена [3] и учтя, что длина вектора **M** при его эволюции остается неизменной: $(\mathbf{M}\,d\mathbf{M}/dt)=0$. Последнее обстоятельство позволяет, введя единичный вектор $\mathbf{m}=\mathbf{M}/M$, записать уравнение (1) в форме

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt}=[\mathbf{m},\ \boldsymbol{\omega}]-\alpha[\mathbf{m}[\mathbf{m},\ \boldsymbol{\omega}]], \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\omega}=\gamma\mathbf{H}$.

В сферической системе координат

$$m_x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad m_y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad m_z = \cos\vartheta$$

векторное уравнение (1) распадается на два уравнения [7]:

$$\frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta - \omega_\vartheta = \alpha\omega_\varphi, \quad \frac{d\vartheta}{dt} + \omega_\varphi = \alpha\omega_\vartheta, \tag{5}$$

определяющие мгновенное положение вектора **m** через независимые углы прецессии φ и нутации ϑ. Здесь

$$\omega_\vartheta = \omega_x\cos\vartheta\cos\varphi + \omega_y\cos\vartheta\sin\varphi - \omega_z\sin\vartheta,$$
$$\omega_\varphi = -\omega_x\sin\varphi + \omega_y\cos\varphi. \tag{6}$$

Запись уравнения Ландау — Лифшица в форме (5) особенно удобна потому, что свободная энергия ферромагнитных образцов обычно может быть явно выражена через углы ϑ и φ [2,5].

Заметим, что в простейшем случае $F = -(\mathbf{M}\,\mathbf{H})$, когда сферический ферромагнитный образец находится только в постоянном магнитном поле $H_z = H_0 : \omega_\varphi = 0$, $\omega_\vartheta = -\omega_0\sin\vartheta$, $\omega_0 = \gamma H_0$, уравнения (5) принимают вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\alpha\omega_0\sin\vartheta. \tag{7}$$

2. Неизменность длины вектора **M** намагниченного до насыщения ферромагнитного образца выражает одну из основных особенностей ферромагнетизма. Положение вектора **m** однозначно определяется двумя любыми его компонентами. Оно может быть определено при помощи одной комплексной функции ξ [6]:

$$\xi(t) = \frac{m_x - im_y}{1 - m_z} = \frac{1 + m_z}{m_x + im_y}. \tag{8}$$

Действительно, из (8) следует, что

$$m_x = \frac{\xi^* + \xi}{|\xi^2| + 1}, \quad im_y = \frac{\xi^* - \xi}{|\xi|^2 + 1}, \quad m_z = \frac{|\xi|^2 - 1}{|\xi|^2 + 1}. \tag{9}$$

Комплексная переменная $\xi(t)$ однозначно определяет положение точки на поверхности сферы единичного радиуса.

Векторное уравнение (4) для трех вещественных переменных m_x, m_y, m_z с помощью (9) можно свести к одному уравнению для скалярной комплексной функции $\xi(t)$. Воспользовавшись (8), получаем

$$\frac{dm_x}{dt} - i\frac{dm_y}{dt} = (1 - m_z)\frac{d\xi}{dt} - \frac{dm_z}{dt}\xi,$$
$$\frac{dm_x}{dt} + i\frac{dm_y}{dt} = \frac{(dm_z/dt)\,\xi - (1 + m_z)\,d\xi/dt}{\xi^2}.$$

Теперь, согласно (9), после несложных алгебраических преобразований находим уравнение *)

$$\frac{i}{1 - i\alpha}\frac{d\xi}{dt} - \frac{\omega_{12}}{2}\xi^2 + \omega_z\xi + \frac{\omega_{12}^*}{2} = 0; \tag{10}$$

здесь $\omega_{12} = \omega_x + i\omega_y$.

---

*) Уравнение (3) в переменной $\xi(t)$ имеет вид

$$i(1 + i\alpha)\dot{\xi} - \frac{\tilde{\omega}_{12}}{2}\xi^2 + \tilde{\omega}_z\xi + \frac{\tilde{\omega}_{12}^*}{2} = 0,$$

где $\tilde{\omega} = \gamma H$.

Переменная $\xi(t)$, определяемая соотношениями (8), была впервые введена Дарбу [8] при решении системы уравнений вида (4) (без релаксационного члена). Уравнение Ландау — Лифшица (10) для переменной $\xi(t)$ при помощи подстановки (8) свелось к одному линейному дифференциальному уравнению первого порядка с, вообще говоря, зависящими от времени коэффициентами [9].

Поразительным образом учет релаксации намагниченности в форме (1) или (3) приводит только к появлению в уравнении (10) множителя $(1-i\alpha)^{-1}$ при производной $d\xi\, dt$, т. е. к замене $t \to \tau = (1 - i\alpha)\, t$. Вид уравнения (10) не изменяется, если пренебрегать релаксацией, т. е. положить $\alpha = 0$.

От нелинейного уравнения Риккати (10) можно перейти путем подстановок к линейному уравнению второго порядка с зависящими от времени коэффициентами [7,9].

Найдя решение уравнения (10), пользуясь (9), находим зависимость компонент вектора $\mathbf{m}(t)$. Так, в простейшем случае, когда магнитный образец сферической формы находится в достаточно сильном однородном магнитном поле $H_0 = H_z$,

$$i\frac{d\xi}{dt} + \omega_0\xi = 0, \quad \omega_0 = \gamma H_0. \tag{11}$$

Уравнения (7) и (11), разумеется, эквивалентны, так как описывают одну и ту же ситуацию в разных системах координат. Их решения

$$\varphi = -\omega_0 t, \quad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta_0}{2}\,e^{-\alpha\omega_0 t} \quad \text{и} \quad \xi(t) = \xi_0 e^{\alpha\omega_0 t} e^{i\omega_0 t} \tag{12}$$

сводятся одно к другому, так как согласно (8)

$$\xi(t) = \frac{m_x - im_y}{1 - m_z} = \frac{\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}}{2\sin^2(\vartheta/2)} = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{-i\varphi},$$

где $\vartheta_0 = \vartheta(0)$ и $\xi_0 = \xi(0)$.

Легко видеть, что

$$\operatorname{tg}\vartheta(t) = \frac{\sin\vartheta_0}{\cos^2(\vartheta_0/2)\cdot e^{\alpha\omega_0 t} - \sin^2(\vartheta_0/2)\cdot e^{-\alpha\omega_0 t}}.$$

Если в момент $t = 0$ $m_z(0) = 0$, т. е. населенности спиновых уровней в поле H_0 одинаковы, $\vartheta_0 = \pi/2$, то

$$\sin\vartheta(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha\omega_0 t}, \quad \cos\vartheta = \operatorname{th}\alpha\omega_0 t. \tag{13}$$

В этом случае согласно (8) и (12) или (13) решения уравнения Ландау — Лифшица имеют вид

$$m_x = \frac{\cos\omega_0 t}{\operatorname{ch}\alpha\omega_0 t}, \quad m_y = \frac{\sin\omega_0 t}{\operatorname{ch}\alpha\omega_0 t}, \quad m_z = \frac{\operatorname{sh}\alpha\omega_0 t}{\operatorname{ch}\alpha\omega_0 t}. \tag{14}$$

Эти решения описывают свободную прецессию магнитного момента однородно намагниченного ферромагнитного образца во внешнем постоянном поле $\mathbf{H}_0$. Как видно из (14), затухание поперечных компонент магнитного момента, определяющее форму линий поглощения, происходит по закону

$$m_x + im_y = \frac{2e^{i\omega_0 t}}{e^{\alpha\omega_0 t} + e^{-\alpha\omega_0 t}}.$$

В начале процесса $t < (\alpha\omega_0)^{-1}$ эта зависимость далека от простой экспоненциальной, а форма линии — от лоренцевой.

Это известные не столько в теории электронного спинового магнитного резонанса, сколько в теории сверхизлучения, решения для свободной прецессии псевдоспинового электрического дипольного момента, взаимодействующего с собственным полем излучения [10,11]. Они описывают распад когерентного состояния индуцированных внешним (оптическим) полем дипольных моментов [12,13] Они лежат в основе полуклассической теории излучения, широко используемой для описания явления оптического эха, индуцированной прозрачности и других быстропротекающих переходных процессов [13,14]. Эти же зависимости характеризуют затухающую прецессию вектора поляризации потока медленных нейтронов, пролетающих через псевдомагнитное поле ориентированной ядерной мишени [15,16]. Уравнения (1) описывают магнитный ядерный резонанс в ядерных ферромагнетиках.

3. Перечисленные примеры приводят к мысли, что уравнения Ландау — Лифшица описывают значительно более широкий круг явлений, чем это обычно предполагается. Можно думать, что они описывают поведение ансамбля двухуровневых систем любой природы, между которыми имеется некоторое определенное взаимодействие. Попробуем выяснить, какой характер должно иметь это взаимодействие. С этой целью положим $\xi(t) = a_1(t)/a_2(t)$; тогда выражения (9) примут вид

$$m_x = \frac{a_1^* a_2 + a_1 a_2^*}{|a_1|^2 + |a_2|^2}, \quad im_y = \frac{a_1^* a_2 - a_1 a_2^*}{|a_1|^2 + |a_2|^2}, \quad m_z = \frac{|a_1|^2 - |a_2|^2}{|a_1|^2 + |a_2|^2}. \tag{15}$$

Если теперь принять, что матрица-колонка $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = |a\rangle$ описывает состояние двухуровневой квантовой системы, то выражения (7) определяют средние значения спинового вектора-оператора Паули [17] $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$:

$$\mathbf{m} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{\langle a \mid \boldsymbol{\sigma} \mid a \rangle}{\langle a \mid a \rangle}. \tag{16}$$

4. Уравнение (10) в переменных $a_1(t)$, $a_2(t)$ распадается на два уравнения Паули:

$$\begin{aligned} -i\,\frac{da_1}{d\tau} &= \frac{\omega_z}{2}\,a_1 + \frac{\omega_{12}^*}{2}\,a_2, \\ -i\,\frac{da_2}{d\tau} &= \frac{\omega_{12}}{2}\,a_1 - \frac{\omega_z}{2}\,a_2, \end{aligned} \tag{17}$$

описывающие поведение двухуровневой системы во внешних полях. В этом легко убедиться, заметив, что

$$i\,\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{i}{a_2}\,\frac{da_1}{d\tau} - \frac{i}{a_2}\,\frac{da_2}{d\tau}\cdot\frac{a_1}{a_2}.$$

Запишем (17) в форме уравнения Шрёдингера

$$i\hbar|\dot{a}\rangle = \widehat{\mathscr{H}}|a\rangle, \tag{18}$$

где $|\dot{a}\rangle = d|a\rangle/dt$, а

$$\widehat{\mathscr{H}} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x - i\omega_y \\ \omega_x + i\omega_y & -\omega_z \end{pmatrix}(1 - i\alpha). \tag{19}$$

Таким образом, релаксационный член в уравнении Ландау — Лифшица возникает за счет простого умножения гамильтониана двухуровневой системы невзаимодействующих спинов

$$\mathscr{H}_0 = -\frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}, \omega) \tag{20}$$

на комплексный множитель $1 - i\alpha$.

Уравнение (18) описывает поведение спинового (или псевдоспинового) момента любой природы. Коэффициенты ω_{12} и ω_z в (17) представляют собой матричные элементы переходов. Диагональные элементы $\pm\,\omega_z$ пропорциональны энергии уровней, между которыми происходят эти переходы.

Кажется более последовательным и обоснованным умножать на $1 - i\alpha$ не все члены матрицы гамильтониана, а только его диагональные члены:

$$\widehat{\mathscr{H}} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0(1 - i\alpha) & \omega_{12} \\ \omega_{12}^* & -\omega_0(1 - i\alpha) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

т. е. считать комплексной только энергию уровней. Поперечное переменное поле $\omega_{12}(t)$ в этом случае вызывает только переходы между подуровнями, не влияя на их ширину. Уравнения (1) и (3) становятся в этом случае уже неэквивалентными. В релаксационный член уравнения (1) поперечные составляющие поля не войдут. Он содержит в этом случае только компоненту поля или псевдополя, обеспечивающую расщепление уровней.

В принятых обозначениях матрица плотности системы спинов простым образом выражается через переменную

$$\rho \equiv \frac{|a\rangle\langle a|}{\langle a|a\rangle} = \frac{1}{|\xi|^2+1}\begin{pmatrix} |\xi|^2 & \xi \\ \xi^* & 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

причем

$$\rho_{12} + \rho_{21} = m_x, \quad \rho_{21} - \rho_{12} = \mathrm{i}m_y, \quad \rho_{11} - \rho_{22} = m_z. \tag{23}$$

Коэффициенты $a_1(t)$ и $a_2(t)$ выражаются через углы ϑ и φ, и, как и следовало ожидать, равны

$$a_1(t) = \cos\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{-i\frac{\varphi}{2}}e^{-\alpha\omega_0 t}, \quad a_2(t) = \sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}e^{-\alpha\omega_0 t}.$$

Неэрмитов характер гамильтониана не позволяет произвести обычную нормировку $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ коэффициентов a_1 и a_2. Поэтому

$$\frac{\mathrm{d}\langle\sigma\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle\dot a|\sigma|a\rangle + \langle a|\sigma|\dot a\rangle}{\langle a|a\rangle} - \langle\sigma\rangle\frac{\langle\dot a|a\rangle + \langle a|\dot a\rangle}{\langle a|a\rangle}. \tag{24}$$

Исключая с помощью уравнения движения (18) и ему сопряженного $|\dot a\rangle$ и $\langle\dot a|$ и разбивая гамильтониан (19) на эрмитову и антиэрмитову части, вновь получим для $\langle\sigma\rangle = \mathbf{m}$ уравнение Ландау — Лифшица (4).

Таким образом, уравнения Ландау — Лифшица вида (1) или (4) описывают изменение со временем суперпозиции состояний двухуровневой системы любой природы, ширина уровней которой задается постоянной $\alpha\omega_0$. Процедуру такого рода можно вполне удовлетворительно обосновать для случая, когда $\alpha\omega_0 \ll \omega_0$ [18]. Это, по существу, было словесно оговорено в классической работе [1] и продемонстрировано для случая взаимодействия ансамбля двухуровневых систем через общее поле излучения [10].

Московский физико-технический институт,
Долгопрудный (Московская обл.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Собрание трудов·. — М.: Наука, 1969. — Т. 1, с. 128.
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. — М.: Наука, 1978. — (Курс теоретической физики. Т. IX).
3. Ферромагнитный резонанс. — М.: Физматгиз, 1961. — (Современные проблемы физики.)
4. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. — М.: Наука, 1973.
5. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. — М.: Наука, 1967.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: ИЛ, 1950. — С. 57, 803.
7. Скроцкий Г. В., Курбатов Л. В. — ЖЭТФ, 1958, т. 35, с.216.
8. Darboux G. Lecons sur la theorie generale des Surfaces. — Paris, 1887.
9. Кузьмичев С. Д., Скроцкий Г. В. — Опт. и спектр., 1983, 55, с. 918.
10. Файн В. М. Фотоны и нелинейные среды. Т.1: — М.: Сов. радио, 1972.
11. Nussenzveig H. M. Introduction to Quantum Optics. — Lnd.: Gordon and Breach, 1973.

12. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. — М.: Мир, 1978.
13. Макомбер Дж. Динамика спектроскопических переходов. — М.: Мир, 1979.
14. Mandel L. — Progr. Optics, 1976, v. 13, p. 29.
15. Показаньев В. Г., Скроцкий Г. В. — УФН, 1979, т. 129, с. 615.
16. Абрагам А., Гольдман М. Ядерный магнетизм: порядок и беспорядок. Т. 2. — М.: Мир, 1984.
17. Пантел Р., Путхоф Г. Основы квантовой теории. — М.: Мир, 1972.
18. Лоудон Р. Основы квантовой электроники. — М.: Мир, 1972.