

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

539.12.01

**МАГНИТНЫЙ МОНОПОЛЬ ПЯТЬДЕСЯТ ЛЕТ СПУСТЯ \*)****С. Коулмен****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	277
2. Монополи в абелевой теории, вид с больших расстояний	279
а) Фокус с монополем и первый подход к условию квантования Дирака (279).	
б) Калибровочная инвариантность и второй подход к условию квантования (281).	
в) Замечания об условии квантования (283). г) Загадка углового момента (285). д) Разрешение парадокса, связанного со спином и статистикой (290).	
3. Монополи в неабелевой теории, вид с больших расстояний	292
а) Калибровочная теория поля: молниеносный обзор (292). б) Сущность классического предела (295). в) Динамическая классификация монополей (Годдар, Нют и Олайв) (296). г) Топологическая классификация монополей (Любкин) (300). д) Крах динамической классификации (305). е) Одно приложение (309).	
4. Внутреннее строение монополя	311
а) Спонтанное нарушение симметрии: молниеносный обзор (311). б) Как делаются монополи (312). в) Монополи 'т Хоофта — Полякова (316). г) Почему монополи тяжелы? (317) д) Граница Богомольного и предел Прасада — Сомерфилда.	
5. Квантовая теория	318
а) Квантовые монополи и изовращательные возбуждения (319). б) Эффект Виттена (325). в) Несколько слов о монополях в теории с группой $SU(5)$ (327). г) Перенормировка абелева магнитного заряда (331). д) Влияние конфайнмента на неабелев магнитный заряд (334)	319
Цитированная литература	339

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Этот год — юбилейный. В 1931 г. П. А. М. Дирак положил начало теории магнитных монополей <sup>1</sup>. В последовавшие 50 лет никому не удалось наблюдать монополи, тем не менее интерес к этому объекту никогда еще не был столь велик, как в настоящее время.

Есть веская причина для этого. В течение более чем сорока лет магнитный монополи рассматривался как необязательное дополнение к теории: Дирак показал, как строить теории с монополями, но при желании их можно было не использовать. Ситуация изменилась в 1974 г.: 'т Хоофт <sup>2</sup> и Поляков <sup>3</sup>

\*) Coleman S. The Magnetic Monopole Fifty Years Later.—Перевод А. Д. Долгова.

Статья представляет собой запись (1982 г.) курса лекций, прочитанных автором в 1981 г. в Международной школе по субъядерной физике «Этторе Майорана». Этот курс в различных вариантах был прочитан также на VI Бразильском симпозиуме по теоретической физике, в Летней школе по теоретической физике в Лез-Уш (Франция) и в Летнем институте по частицам и полям в Бамфе (Канада).

Сидни Коулмен — сотрудник Физической лаборатории им. Лаймана при Гарвардском университете, Кембридж, Массачусетс, США.

© S. Coleman 1981.

© Перевод на русский язык, издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Успехи физических наук», 1984.

показали, что магнитные монополи неизбежно возникают в некоторых теориях калибровочных полей. В частности, все теории Великого объединения обязательно содержат монополи. (Под теорией Великого объединения мы имеем в виду здесь модель, в которой полупростая группа внутренней симметрии спонтанно нарушается, причем остается электромагнитная группа калибровочной симметрии  $U(1)$ .) Многие из нас верят, что теории Великого объединения действительно описывают природу, по крайней мере, вплоть до расстояний порядка планковской длины. Так где же монополи?

Как будет показано, монополи в теориях Великого объединения очень массивны, их характерная масса — приблизительно в сотни раз превосходит энергию, при которой наступает Великое объединение. Поэтому они едва ли могут возникнуть в современных ускорителях или сверхновых звездах. Однако вскоре после Большого взрыва энергия была в большом изобилии. Как указал Прескилл<sup>4</sup>, согласно наивным оценкам следовало бы ожидать, что на очень ранней стадии развития Вселенной монополи должны были бы рождаться в столь больших количествах, а в дальнейшем их аннигиляция происходит столь неэффективно, что в настоящее время они должны были бы составлять основную часть массы Вселенной.

Таким образом, отсутствие монополей — факт весьма знаменательный, так как оно является указанием на определенные свойства Вселенной на самой ранней стадии эволюции или физики на самых малых расстояниях, или же связано и с тем, и с другим. А так как у нас немного способов получить информацию об обеих этих областях, то монополи — предмет, заслуживающий внимания.

Больше в этих лекциях космология поминаться не будет, так же, как не будут приводиться доводы в пользу того, что монополи надо изучать. Вполне достаточно той задачи, которую ставит перед собой этот обзор: построение основ теории монополей.

Автор попытался так построить изложение, чтобы идти от простого к сложному: от монополей, какими они выглядят с больших расстояний, к их внутренней структуре, от классической физики — к квантовой механике. Разумеется, мне не удалось строго придерживаться этой программы; например, элементарную квантовую механику надо иметь в виду с самого начала, хотя лишь в самом конце мы столкнемся с присущими квантовой теории поля сложностями во всей их полноте.

Лекции построены следующим образом.

В гл. 2 обсуждается теория классического магнитного монополя, рассматриваемого, как целое. Иными словами, исследуются только те вопросы, на которые можно ответить, не заглядывая внутрь монополя, не спрашивая, например, имеется ли в его сердцевине настоящая особенность, или только сложное возбуждение степеней свободы, которые не способны распространяться наружу на большие расстояния, таких, как массивные калибровочные поля.

В гл. 3 анализ обобщается на классический монополи в неабелевой теории. Следует отметить, что речь там идет не об объекте, сердцевина которого содержит массивные неабелевы поля, а лишь о частице, окруженной безмассовыми неабелевыми калибровочными полями, распределение которых тянется до больших расстояний. Так как таких полей в природе нет, этот предмет мог бы показаться скучным упражнением; есть, однако, две веские причины, чтобы заниматься этим. Во-первых, это поучительно. Рассматривая монополи в теориях с ненарушенными неабелевыми калибровочными симметриями, мы столкнемся с математическими структурами, которые придутся позднее, при исследовании более сложного случая спонтанно нарушенной симметрии. Во-вторых, это не лишено физического смысла. Некоторые из монополей, возникающих в теориях Великого объединения, окружены цветовыми калибровочными полями: наряду с обычным магнитным зарядом они обладают свойствами магнитных монополей по группе, связанной с цветом.

Правда, эти цветовые поля затухают на расстояниях, превышающих  $10^{-13}$  см, благодаря эффектам конфайнмента. Однако размер сердцевины таких монополей — порядка длины Великого объединения, что-то около  $10^{-28}$  см, так что в нашем распоряжении 15 порядков величины. На промежуточных расстояниях рассматриваемые объекты выглядят как неабелевы монополи, и в этой области достаточно интересной физики.

В гл. 4 мы проникнем в недра монополя и рассмотрим условия, при которых структуры, обнаруженные на больших расстояниях, продолжают на малые расстояния без сингулярностей. Эта тема обсуждалась в моих лекциях<sup>5</sup> в Эриче в 1975 г. (там она рассматривалась в другой связи), и придется повторить кое-что из сказанного тогда еще раз, хотя я и стремился свети повторение к минимуму.

Наконец, в гл. 5 мы обратимся к квантовой теории и обсудим такие вопросы, как дионные возбуждения и эффекты конфайнмента.

Многие вопросы оказались вне рамок этих лекций. Это относится, как уже отмечалось, к космологии. Не обсуждается также взаимодействие монополей с обычной материей, характер треков, оставляемых монополями в эмульсиях, а также связанное с наличием монополей затухание галактических магнитных полей. Что касается более абстрактных вопросов, не будут обсуждаться точные решения, теоремы об индексе, дробно заряженные фермионы. Наконец, я не предпринял попытки собрать полную и справедливую библиографию. Если я не ссылаюсь на какую-либо статью, то прошу рассматривать это как проявление моего невежества и лени, а не как результат обоснованного критического суждения \*).

Большую часть того, что я знаю о предмете этих лекций, я почерпнул из бесед с Кэртисом Калланом, Мэреем Гелл-Манном, Джеффри Голдстоуном, Романом Джакивом, Реном Джонсоном, Дэвидом Олайвом, Герардом т Хоффом и Эриком Вейнбергом. С удовольствием выражаю свою признательность за все, чем я им обязан.

**И с п о л ь з у е м ы е о б о з н а ч е н и я.** Как обычно, греческие индексы пробегают значения от 0 до 4, индексы, обозначенные латинскими буквами из средней части алфавита, — от 1 до 3. Там, где используется обыкновенный векторный анализ (например, всюду в гл. 2), сигнатура трехмерной метрики  $(+++)$ , в четырехмерных формулах сигнатура  $(+---)$ . Как правило, я полагаю  $\hbar = c = 1$ , однако, иногда явная зависимость от  $\hbar$  будет восстановлена, когда речь пойдет о приближении к классическому пределу. Для электромагнитных величин используется рационализированная система единиц; таким образом, плотность электромагнитного лагранжиана имеет вид  $(E^2 - B^2)/2$  и уравнения Максвелла не содержат  $\pi$ .

## 2. МОНОПОЛИ В АБЕЛЕВОЙ ТЕОРИИ, ВИД С БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЙ

### а) Фокус с монополем и первый подход к условию квантования Дирака

Рассмотрим некоторое стационарное распределение зарядов и токов, содержащихся в ограниченной области. Вне этой области существуют лишь стационарные электромагнитные поля, исчезающие на бесконечности в пространстве. Что можно сказать об этих внешних полях, не зная в деталях распределение зарядов и токов?

Ответ известен всякому, кто прошел курс теории электромагнетизма. Внешние поля представляют собой сумму электрического монополярного, магнитного дипольного, электрического квадрупольного и т. д. Чем выше порядок члена, тем быстрее он спадает на бесконечности; доминирует на

\*) Более обширную библиографию можно найти в моей прежней работе<sup>5</sup>. См. также обзоры Годдара и Олайва<sup>6</sup>, Амальди и Кабиббо<sup>7</sup>.

больших расстояниях электрический монополю

$$E = \frac{er}{4\pi r^3}, \quad V = 0, \quad (2.1)$$

где  $e$  — вещественное число, называемое электрическим зарядом системы, заключенной внутри рассматриваемой области.

Этот анализ основан на предположении, что внутри области содержатся только заряды и токи; иными словами, уравнения Максвелла для пустого пространства

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 = [\nabla \times \mathbf{E}] + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (2.2)$$

справедливы и внутри области. Если отбросить это предположение, к указанному ряду следует добавить двойственный ему ряд, содержащий магнитный монополю, электрический диполь и т. д. В этом ряду на больших расстояниях доминирует магнитный монополю

$$E = 0, \quad V = \frac{gr}{r^3}, \quad (2.3)$$

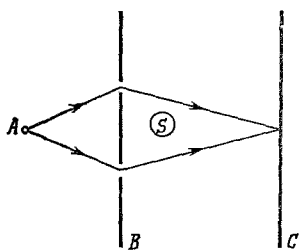


Рис. 1.

где  $g$  — вещественное число, называемое магнитным зарядом \*) (системы, заключенной внутри области). Системы, несущие ненулевой магнитный заряд, называются также магнитными монополями, что, конечно, не вполне последовательно.

Как уже отмечалось во Введении, магнитный монополю никогда не наблюдался. Представим себе, однако, что мы пытаемся разыграть легковверного экспериментатора и уверить его, что он открыл монополю. Раздобудем для этого очень длинный и очень тонкий соленоид; лучше всего, если бы он мог быть длиной во много миль и существенно тоньше, чем 1 Фм в диаметре. (Разумеется, мы обсуждаем сейчас лишь мысленный фокус.) Поместим один конец соленоида в лабораторию нашей жертвы в Женеве, а другой будем держать здесь в Эриче. После этого включим ток. Экспериментатор видит магнитный поток величиной  $4\pi g$ , исходящий из его установки, он не может обнаружить того, что этот поток питается соленоидом, и тут же решает, что открыл монополю.

Есть ли у него какой-нибудь способ понять, что его разыграли и его монополю — подделка? Безусловно нет, если в его распоряжении лишь классические заряженные частицы, так как с их помощью можно определить лишь поля  $E$  и  $V$ , а  $E$  и  $V$  в нашем случае — те же, что и для настоящего монополя. (Кроме области внутри соленоида, но она по условию столь тонка, что ее нельзя обнаружить.)

Совсем другое дело, если наш экспериментатор может пользоваться квантовыми заряженными частицами. Если он достаточно искусен, он сможет обнаружить соленоид с помощью эффекта Бомы — Ааронова <sup>8</sup>.

Этот эффект — вариант знаменитого эксперимента с дифракцией на двух щелях (рис. 1). Заряженные частицы, испускаемые из источника  $A$ , проходят через две щели в экране  $B$  и детектируются на экране  $C$ . Как знает всякий, осиливший первый десяток страниц в каком-нибудь учебнике квантовой механики, при прохождении частицы через различные щели амплитуды складываются когерентно, а плотность вероятности на экране  $C$  имеет вид

$$|\psi_1 + \psi_2|^2, \quad (2.4)$$

где  $\psi_1$  — амплитуда волны, прошедшей через первую щель, а  $\psi_2$  — амплитуда волны, прошедшей через вторую щель. Если между щелями поместить соле-

\*) Отметим отсутствие фактора  $4\pi$  в определении магнитного заряда.

ноид  $S$ , конец которого показан на рисунке, то плотность вероятности изменится и примет вид

$$|\psi_1 + e^{ie\Phi} \psi_2|^2, \quad (2.5)$$

где  $e$  — заряд частицы, а  $\Phi$  — поток магнитного поля, существующего внутри соленоида (в нашем случае этот поток равен  $4\pi g$ ).

Таким образом, двигая эту установку и наблюдая изменение интерференционной картины, наш экспериментатор сможет обнаружить соленоид, если только произведение  $eg$  не равно целому или полуцелому числу,

$$eg = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots \quad (2.6)$$

В этом случае выражения (2.4) и (2.5) совпадают. Обнаружить соленоид нельзя, и наш фокус увенчается успехом.

Формула (2.6) — это знаменитое условие квантования Дирака<sup>1</sup>. Как мы увидим, если оно выполнено, соленоид нельзя обнаружить не только с помощью эффекта Бомы — Ааронова, но и вообще каким бы то ни было образом. Соленоид можно устранить вовсе, сведя его к математической сингулярности, лишенной физического смысла, к дираковской струне; и все, что останется, и будет настоящим монополем. Чтобы в этом убедиться, нужно провести более тщательный анализ поведения заряженной частицы в поле монополя. Этим мы сейчас и займемся.

#### б) Калибровочная инвариантность и второй подход к условию квантования

Рассмотрим бесспиновую нерелятивистскую частицу, движущуюся в некотором постоянном магнитном поле (которое описывается, как обычно, с помощью векторного потенциала  $A$ ), возможно также присутствие скалярного потенциала  $V$ . Уравнение Шрёдингера для этой системы имеет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (\nabla - ieA)^2 \psi + V\psi. \quad (2.7)$$

Как известно, такая система обладает калибровочной инвариантностью. Нам потребуются лишь калибровочные преобразования, не зависящие от времени,

$$\psi \rightarrow e^{-ie\chi} \psi, \quad (2.8a)$$

$$A \rightarrow A - \nabla\chi = A - \frac{1}{e} e^{ie\chi} \nabla e^{-ie\chi}. \quad (2.8б)$$

Второе из этих соотношений написано здесь в не совсем обычной форме, чтобы подчеркнуть тот факт, что результат зависит только от величины  $\exp(-ie\chi)$ . Таким образом, например, хотя  $\chi$  и  $(\chi + 2\pi)/e$  — различные функции, они задают одно и то же калибровочное преобразование \*).

После этих общих замечаний перейдем к интересующему нас конкретному частному случаю и поместим точечный монополь в начало системы координат. Создаваемое им магнитное поле можно рассматривать как поле настоящего точечного объекта или как поле распределенной системы, наблюдаемое на больших расстояниях от нее, это не важно. Очевидно, что нельзя подобрать векторный потенциал, ротор которого был бы равен полю магнитного монополя, так как это поле обладает ненулевой дивергенцией. Можно найти, однако, такой потенциал, который годится всюду, кроме линии, исходящей из монополя и уходящей на бесконечность, «дираковской струны». Это тот самый

\*) Это вполне очевидный факт для неабелевых калибровочных теорий, где, как все понимают, калибровочные преобразования задаются функциями, отображающими пространство-время в калибровочную группу. Для обсуждаемой здесь абелевой теории калибровочная группа —  $U(1)$ , и функция на группе имеет вид  $\exp(-ie\chi)$ .

потенциал, который обсуждался в предыдущем разделе, если считать соленоид бесконечно длинным и бесконечно тонким.

Если направить струну, например, вдоль отрицательной полуоси  $z$ , то вектор-потенциал можно найти из формулы

$$\mathbf{A} \, dx = g (1 - \cos \theta) \, d\varphi. \quad (2.9)$$

Как мы и ожидали, вектор  $\mathbf{A}$  не определен на струне, при  $\theta = \pi$ . Проверим, что во всех других точках пространства его ротор имеет нужный вид. Легче всего провести вычисления, пользуясь методами тензорного анализа. Единственная не исчезающая компонента  $\mathbf{A}$  равна

$$A_\varphi = g (1 - \cos \theta). \quad (2.10)$$

Соответственно, единственная, отличная от нуля, компонента тензора напряженности равна

$$F_{\theta\varphi} \equiv \partial_\theta A_\varphi - \partial_\varphi A_\theta = g \sin \theta, \quad (2.11)$$

так что магнитное поле действительно направлено по радиусу. Чтобы проверить, что оно имеет правильную величину, вычислим поток через инфинитезимальный элемент телесного угла:

$$F_{\theta\varphi} \, d\theta \, d\varphi = \frac{g}{r^2} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (2.12)$$

Это как раз тот результат, какого мы хотим, так как элемент площади поверхности умножается на  $g/r^2$ .

Следует подчеркнуть, что мы не пытались определить  $\mathbf{A}$ , или вычислить  $\mathbf{B}$ , на самой струне. Мы увидим, что это и не нужно.

Разумеется, выбор отрицательной полуоси  $z$  совершенно произволен. С тем же успехом можно было бы направить струну вдоль положительной полуоси, при этом

$$\mathbf{A}' \, dx = -g (1 + \cos \theta) \, d\varphi. \quad (2.13)$$

Для дальнейшего полезно заметить, что два указанных нами выбора вектор-потенциала связаны простым соотношением

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(-\mathbf{x}). \quad (2.14)$$

В своей классической статье о монополе Дирак показал, что струна не наблюдаема, если выполнено условие квантования магнитного заряда. Наиболее прямой способ убедиться в этом состоит в том, чтобы показать, что существует калибровочное преобразование, с помощью которого можно переместить струну с отрицательной полуоси  $z$  в любое наперед заданное место, причем меняется вид вектор-потенциала. Однако в этом аргументе есть один неприятный момент: такое калибровочное преобразование обязательно содержит сингулярности как на линии, которую струна занимала вначале, так и на линии, на которую она перемещается, а использование сингулярных калибровочных преобразований вызывает неприятный осадок.

Чтобы избежать этих трудностей, рассмотрим модификацию указанного рассуждения, которая принадлежит Ву и Янгу<sup>9</sup>. В их методе не возникают ни сингулярные калибровочные преобразования, ни сингулярные потенциалы (за исключением, конечно, сингулярности в начале координат, где  $\mathbf{B}$  обращается в бесконечность, но это сингулярность физическая). Цена, которую приходится платить за это, состоит в том, что надо использовать различные потенциалы в различных областях пространства.

Определим верхнюю область пространства как открытое множество  $\theta < 3\pi/4$ , а нижнюю область пространства — как открытое множество  $\theta > \pi/4$ . Объединение этих двух областей — все пространство (за исключением начала координат, где все равно имеется сингулярность). Пусть потенциал  $\mathbf{A}$  задает поле монополя в верхней области, и другой потенциал  $\mathbf{A}'$  — в нижней области. При этом ни один из потенциалов не имеет сингулярности в своей области определения: в обоих случаях струна лежит вне области.

Мы применили здесь метод, используемый в картографии. Невозможно отобразить всю земную сферу на конечную часть плоскости без сингулярностей. Например, на флаге ООН Земля изображена в проекции со стороны Северного Полюса, и при этом Южный полюс, одна точка, отображается на окружность, ограничивающую карту. Можно, однако решить поставленную задачу с помощью двух карт. Например, область, расположенную севернее Тропика Козерога, можно спроектировать со стороны Северного полюса, а область к югу от Тропика Рака — со стороны Южного полюса. Эти две карты в совокупности изображают весь Земной шар без сингулярностей. Мы, однако, должны быть уверены, что обе карты правильно совмещаются, так что мы не получили, например, по ошибке северную часть Земли и южную часть Марса. Иными словами, в экваториальном поясе, там где карты перекрываются, они должны описывать одну и ту же географию.

Переноса этот принцип из картографии в теорию поля, мы должны проверить, что оба вектор-потенциала описывают одну и ту же физику в области пересечения верхней и нижней областей, т. е. что  $A'$  связано с  $A$  калибровочным преобразованием. Таким образом, нам надо найти такую функцию  $\chi$ , что

$$A - A' = \nabla \chi. \quad (2.15)$$

Сделать это нетрудно:

$$(A - A') dx = 2g d\varphi, \quad (2.16)$$

так что

$$\chi = 2g\varphi. \quad (2.17)$$

Эта функция многозначна в области перекрытия двух областей, однако, как отмечалось в начале этого раздела, результат зависит не от  $\chi$ , а от  $\exp(-ie\chi)$ . Последняя однозначна, если

$$eg = 0, \quad \pm \frac{1}{2}, \quad \pm 1, \quad \dots, \quad (2.6)$$

и мы вновь пришли к условию квантования Дирака. На этом наше рассуждение заканчивается.

В принципе, предложенное Ву и Янгом описание, свободное от сингулярностей, гораздо аккуратнее описания, данного Дираком и использовавшего сингулярную струну. Однако на практике довольно нудно непрерывно менять калибровку, перемещаясь в пространстве. Поэтому я буду, как правило, работать с дираковским описанием в этих лекциях, не забывая о струне там, где это существенно, так же как работая с полярными координатами, приходится помнить о координатной сингулярности.

#### в) З а м е ч а н и я   о б   у с л о в и я м   к в а н т о в а н и я

1) Все наблюдаемые электрические заряды кратны некоторому единичному; это называется квантованием заряда. Это поразительное явление не нашло своего объяснения ни в классической, ни в квантовой электродинамике: например, ничего плохого не случилось бы, если бы заряд протона был в  $\pi$  раз больше заряда электрона. Одна из наиболее привлекательных черт теории монополя Дирака в то время, когда она была предложена, состояла как раз в том, что она объяснила квантование заряда. Если бы во Вселенной были монополи (в действительности, достаточно единственного монополя), то все электрические заряды с необходимостью должны были бы быть кратными некоторой универсальной единице, обратной удвоенному минимальному магнитному заряду.

Теперь, конечно, никто уже не верит в чистую электродинамику. Предполагается, что электромагнитная группа  $U(1)$  является составной частью более обширной группы, подвергаемой спонтанному нарушению. Однако

квантование заряда в этом подходе объясняется, только если эта единая группа полупроста. (На самом деле, это утверждение несколько преувеличено. Единая группа может быть произведением полупростой группы на несколько групп  $U(1)$ , но электромагнитная калибровочная группа должна целиком принадлежать полупростой группе.) А в этом случае, как отмечалось во Введении и как будет показано ниже, теория неизбежно содержит монополи.

Таким образом, теперь связь между монополями и квантованием заряда прочнее, чем когда бы то ни было, хотя конкретные черты теории сильно отличаются от первоначальных концепций. Причина существования монополей и квантования заряда одна и та же, это — спонтанное нарушение полупростой группы симметрии.

2) Хотя в настоящих лекциях об этом почти не будет идти речь, за истекшие годы люди приложили много усилий, чтобы построить квантовую электродинамику с монополями, т. е. релятивистскую теорию поля с электрически и магнитно заряженными фундаментальными частицами. Специфическая особенность этой теории состоит в том, что к ней нельзя применить диаграммную технику теории возмущений, метод, столь успешно используемый в стандартной КЭД. Всякая теория возмущений лишена здесь смысла. Присутствующие в теории две константы связи не могут быть одновременно произвольно малы; из-за условия квантования, если  $e$  становится малым, то  $g$  возрастает.

Это вовсе не означает, что эффекты виртуальных монополей должны быть обязательно велики, даже при очень малом  $e$ . Большие константы связи усиливают эффекты виртуальных частиц, однако большие массы подавляют эти эффекты, как из-за больших энергетических знаменателей, так и из-за падения форм-факторов при больших передачах импульса. Поэтому даже частицы с очень сильной связью могут приводить к малым эффектам при низких энергиях, если они достаточно массивны. Как будет показано, именно это и происходит с монополями в калибровочных теориях. Массы этих частиц пропорциональны  $1/e^2$ , а их эффекты становятся пренебрежимо малыми при любой фиксированной энергии, когда  $e$  обращается в нуль.

3) По определению, дайоны — это частицы, обладающие как электрическим, так и магнитным зарядом. Можно представлять себе дайоны как связанные состояния электрически и магнитно заряженных частиц, или как фундаментальные объекты, не сводящиеся к более элементарным сущностям. Так или иначе, мы можем немедленно вывести свойства дайонов из инвариантности уравнений Максвелла относительно дуальных вращений.

Дуальное вращение определяется следующим образом:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} \cos \alpha + \mathbf{B} \sin \alpha, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E} \sin \alpha + \mathbf{B} \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — вещественное число. Легко проверить, что уравнения Максвелла в пустоте инвариантны относительно такого вращения. Эту симметрию можно представить, считая  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  дуальным вектором. Из формул (2.3) и (2.4) следует, что  $(e, 4\pi g)$  — также дуальный вектор.

Если даны два дайона, с электрическими и магнитными зарядами  $e_i$  и  $g_i$  ( $i = 1, 2$ ), то можно образовать два инварианта, билинейных по зарядам и не меняющихся при дуальных вращениях. Они соответствуют скалярному произведению

$$e_1 e_2 + 16\pi^2 g_1 g_2 \quad (2.19a)$$

и векторному произведению

$$4\pi (e_1 g_2 - e_2 g_1). \quad (2.19b)$$

Любое наблюдаемое свойство двухдайонной системы должно выражаться через эти инварианты.

Например, сила, действующая со стороны дайона, закрепленного в начале отсчета, на другой (движущийся) дайон, должна быть линейной функцией указанных инвариантов. В нерелятивистском пределе эта сила равна

$$\mathbf{F} = \left( \frac{e_1 e_2}{4\pi} + 4\pi g_1 g_2 \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + (e_1 g_2 - g_1 e_2) \frac{[\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}, \quad (2.20)$$

где индекс 1 относится к движущемуся дайону, а 2 — к покоящемуся. Действительно, это единственное выражение, совпадающее с известными результатами при  $g_1 = g_2 = 0$  и  $g_1 = e_2 = 0$ .

Те же соображения приводят к модификации дираковского условия квантования

$$e_1 g_2 - g_1 e_2 = 0, \quad \pm \frac{1}{2}, \quad \pm 1, \quad \dots \quad (2.21)$$

Это уравнение обладает некоторыми забавными решениями. Например, оно удовлетворяется, если

$$e_i = n_i e + m_i f, \quad g_i = \frac{m_i}{2e}, \quad (2.22)$$

где  $n_i$  и  $m_i$  — целые,  $e$  — произвольное вещественное число, так же как и  $f$ . Иными словами, условие квантования вполне согласуется с наличием у всех магнитно заряженных частиц дробных электрических зарядов. (Со временем мы увидим, что это не только возможно, но даже неизбежно при некоторых обстоятельствах.)

4) При обсуждении фокуса с ложным монополем было сказано, что соленоид не наблюдаем с помощью классических заряженных частиц, но его можно обнаружить (если не выполнено условие квантования), используя квантовые частицы. Соленоид можно обнаружить, однако, с помощью физического объекта другого рода; я имею в виду классическое заряженное поле. В сущности, мы могли бы уже это заметить. Мы рассматривали уравнение Шрёдингера для амплитуды квантовой вероятности (каковым оно и является), но все наши доводы вполне применимы в том случае, если  $\psi$  — обычное классическое поле (как в течение короткого времени полагал вначале сам Шрёдингер).

Таким образом, дираковское условие квантования может быть и следствием классической физики, если в классической физике есть заряженные поля. Это замечание сделано теперь потому, что вскоре будут рассмотрены классические теории, содержащие заряженные поля, а именно, теории полей Янга — Миллса. Там мы вновь придем к условию квантования, и мне не хотелось бы вводить читателя в заблуждение, внося элемент квантовой механики в чисто классическую теорию.

(В действительности, между выводами, использующими классическое поле и квантовые частицы, имеется одно различие, которое не заметно при использовании системы единиц, в которой  $\hbar = 1$ . Электрический заряд классического поля, величина, определяющая силу его электромагнитных взаимодействий, — совсем не то же самое, что электрический заряд квантовой частицы; эти величины имеют даже разную размерность. Они связаны между собой только в силу корпускулярно-волнового дуализма:  $e$  (поля) =  $e$  (частицы)/ $\hbar$ . Поэтому для полей условие квантования означает, что  $eg$  — целое или полуцелое число, а для частиц  $eg$  — кратно  $\hbar$ .)

### г) Загадка углового момента

Ротационная инвариантность обычно существенно упрощает решение динамических проблем. Например, гамильтониан нерелятивистской бесспиновой частицы, движущейся в центрально-симметричном потенциале, имеет вид

$$H = -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(r). \quad (2.23)$$

Этот оператор коммутирует с угловым моментом. В подпространстве состояний с фиксированным полным угловым моментом оператор  $H$  приводится к виду

$$H_l = -\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l(l+1)}{2mr^2} + V, \quad (2.24)$$

где  $l = 0, 1, 2, \dots$

Предметом настоящего раздела является распространение этого результата на задачу о движении частицы в поле монополя \*):

$$H = -\frac{1}{2m} (\nabla - ie\mathbf{A})^2 + V(r), \quad (2.25)$$

где  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал монополя (см. формулу (2.9)). Первое препятствие на нашем пути состоит в том, что потенциал монополя не обладает явной ротационной инвариантностью. Чтобы исправить положение, введем оператор

$$\mathbf{D} \equiv \nabla - ie\mathbf{A}, \quad (2.26)$$

обладающий калибровочной инвариантностью. Гамильтониан выражается через  $\mathbf{D}$  и оператор координаты  $\mathbf{r}$ :

$$H = -\frac{1}{2m} \mathbf{D}^2 + V(r), \quad (2.27)$$

и эти операторы удовлетворяют ротационно инвариантной системе перестановочных соотношений \*\*)

$$[r_i, r_j] = 0, \quad (2.28)$$

$$[D_i, r_j] = \delta_{ij}, \quad (2.29)$$

$$[D_i, D_j] = -ie g \varepsilon_{ijk} r_k r^{-3}. \quad (2.30)$$

Суть нашего метода состоит в том, чтобы побольше сделать, основываясь на формулах (2.27) — (2.30) и не используя явного вида  $\mathbf{A}$ .

Прежде всего надо построить оператор углового момента  $\mathbf{L}$ , векторную функцию, зависящую от операторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{r}$  и удовлетворяющую перестановочным соотношениям

$$[L_i, D_j] = i\varepsilon_{ijk} D_k, \quad (2.31)$$

$$[L_i, r_j] = i\varepsilon_{ijk} r_k. \quad (2.32)$$

Вследствие этих соотношений имеем

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k, \quad (2.33)$$

и

$$[L_i, H] = 0. \quad (2.34)$$

Естественное предположение, что

$$\mathbf{L} = -i [\mathbf{r}\mathbf{D}], \quad (2.35)$$

\*) Эта проблема была решена И. Е. Таммом еще в 1931 г.<sup>10</sup> Здесь мы выводим его результаты несколько иным методом. Насколько мне известно, среди опубликованных работ используемый здесь метод ближе всего к работе Липкина, Вайзбергера и Пешкина<sup>11</sup>.

\*\*) Эти коммутаторы не столь безобидны, как кажется. Если мы попытаемся проверить выполнение тождества Якоби для компонент  $D_j$ , то вместо нуля получим член, пропорциональный  $\delta^3(\mathbf{r})$ . Однако этот факт не вызывает затруднений по двум причинам. Во-первых, мы вовсе не считаем, что поле точечного монополя продолжается до начала координат, мы рассматриваем лишь дальнююдействующую часть поля какого-то объекта, который может быть устроен более сложно на малых расстояниях. В разделе 4 мы рассмотрим этот объект более детально. Во-вторых, даже если считать, что поле имеет указанный характер вплоть до  $r = 0$ , как будет показано ниже, во всех парциальных волнах имеется центробежный барьер, не подпускающий частицу к нулю.

не оправдывается: этот оператор правильно коммутирует с  $\mathbf{r}$ , но не с  $\mathbf{D}$ . Оказывается, ответ имеет вид

$$\dot{\mathbf{L}} = -i [\mathbf{r}\mathbf{D}] - eg \mathbf{r}\mathbf{r}^{-1}. \quad (2.36)$$

Второй член выглядит здесь довольно-таки неуместно; как сказал по другому поводу Раби: «Кто это заказал?».

Я знаю три ответа на этот вопрос. Я дам наброски двух из них (оставив детали для читателей, как упражнение), а третий ответ приведу полностью.

1) Первый ответ был уже дан: формула (2.36) приводит к правильным перестановочным соотношениям. Проверка этого утверждения предоставляется читателю.

2) Из гейзенберговских уравнений движения следует, что

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{i\mathbf{D}}{m}; \quad (2.37)$$

следовательно,

$$\mathbf{L} = m [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] - eg\mathbf{r}\mathbf{r}^{-1}. \quad (2.38)$$

Таким образом, система обладает ненулевым угловым моментом, даже если частица покоится: единственный возможный источник этого углового момента — электромагнитное поле

$$\mathbf{L}_{\text{em}} = \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{x} [\mathbf{E}\mathbf{B}]]. \quad (2.39)$$

Вычислить этот интеграл нетрудно. Во-первых, он должен быть пропорционален  $eg$ . Во-вторых, подсчет размерности показывает, что он должен быть однородной функцией  $\mathbf{r}$  нулевого порядка. В-третьих, в силу ротационной инвариантности, этот интеграл должен быть пропорционален  $\mathbf{r}$ , единственному вектору, присутствующему в задаче. Таким образом,

$$\mathbf{L}_{\text{em}} = \beta eg\mathbf{r}\mathbf{r}^{-1}, \quad (2.40)$$

где  $\beta$  — числовая постоянная. Вычисление  $\beta$  предоставляется читателю.

3) Когда я начинал учить физику, мне довелось выполнить такой опыт. Я держал за ось вращающееся велосипедное колесо и пытался повернуть ось. К моему удивлению, я ощутил силу, приложенную под прямым углом к приложенной силе. Позднее я узнал, что дело в том, что система обладает угловым моментом.

Именно это и происходит, если мы пытаемся сдвинуть покоящуюся заряженную частицу в поле монополя. Сила Лоренца сносит частицу по направлению, ортогональному начальному импульсу. Это наводит на мысль, что система обладает также угловым моментом.

Попробуем вычислить этот угловой момент, приравнивая скорость его изменения во времени внешнему моменту силы, приложенной к системе. Основываясь на приведенном выше аргументе, предположим, что

$$\dot{\mathbf{L}} = m [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] + \beta eg\mathbf{r}\mathbf{r}^{-1}, \quad (2.41)$$

где  $\beta$  — константа, которую мы найдем в ходе вычисления.

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} + eg [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}] r^{-3}, \quad (2.42)$$

где  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  — внешняя сила. Используя тождество

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.43)$$

получим из (2.42)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{F}^{\text{ext}}] + \frac{eg [\mathbf{r} [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}]]}{r^3} + \frac{eg\beta (r^2\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r})}{r^3}. \quad (2.44)$$

Таким образом, если  $\beta = -1$ , то

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{F}^{ext}]. \quad (2.45)$$

На этом мы заканчиваем обсуждение дополнительного члена в выражении для углового момента и возвращаемся к анализу гамильтониана (2.27).

Начнем с тождества

$$\mathbf{D}\mathbf{D} = (\mathbf{D}\mathbf{r}) \frac{1}{r^2} (\mathbf{r}\mathbf{D}) - [\mathbf{D}\mathbf{r}] \frac{1}{r^2} [\mathbf{r}\mathbf{D}]. \quad (2.46)$$

Множители упорядочены здесь таким образом, что тождество имеет место независимо от вида коммутаторов  $\mathbf{D}$  с  $\mathbf{r}$ . Рассмотрим по отдельности каждый из двух членов в этом выражении.

Так как  $A_r = 0$ , то

$$(\mathbf{r}\mathbf{D}) = (\mathbf{r}\nabla) = \frac{r\partial}{\partial r}. \quad (2.47)$$

В силу (2.29)

$$(\mathbf{D}\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\mathbf{D}) + 3. \quad (2.48)$$

Таким образом,

$$(\mathbf{D}\mathbf{r}) \frac{1}{r^2} (\mathbf{r}\mathbf{D}) = \left( \frac{r\partial}{\partial r} + 3 \right) r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r^{-1} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.49)$$

Легко видеть, что оператор  $[\mathbf{r}\mathbf{D}] = -[\mathbf{D}\mathbf{r}]$  коммутирует с  $r^2$ . Поэтому

$$-[\mathbf{D}\mathbf{r}] \frac{1}{r^2} [\mathbf{r}\mathbf{D}] = \frac{1}{r^2} [\mathbf{r}\mathbf{D}]^2. \quad (2.50)$$

Возводя в квадрат выражение для углового момента (2.36), получим

$$\mathbf{L}\mathbf{L} = -[\mathbf{r}\mathbf{D}]^2 + e^2 g^2. \quad (2.51)$$

Итак, собирая все члены, получаем выражение для гамильтониана в подпространстве с заданным полным угловым моментом

$$H_l = -\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l(l+1) - e^2 g^2}{2mr^2} + V, \quad (2.52)$$

где, как обычно,  $l(l+1)$  — собственное значение оператора  $\mathbf{L}\mathbf{L}$ . Так как компоненты  $\mathbf{L}$  удовлетворяют обычной для углового момента алгебре коммутационных соотношений, то  $l$  должно быть целым или полуцелым числом, но, для того чтобы определить, какие значения действительно возникают, необходим дополнительный анализ.

Известно решение задачи при  $eg = 0$ . Допустимы представления с  $l = 0, 1, 2, \dots$ , и при фиксированном  $r$  каждое из них входит не более, чем один раз. В стандартных учебниках этот результат выводится путем рассмотрения решений угловой части волнового уравнения. Конечно, этот метод можно распространить на случай  $eg \neq 0$ , но это довольно неприятно: надо заботиться о сингулярностях на струне или же о сшивании решений, относящихся к двум разным областям. Поэтому я предлагаю здесь несколько более абстрактный метод, в котором можно обойти эти трудности.

Общая постановка задачи выглядит так. Дано пространство состояний, преобразующихся определенным образом при вращениях; найти систему базисных векторов, которые преобразуются по неприводимым представлениям группы вращений. Вспомним некоторые стандартные формулы теории представлений группы вращений. Если вращение задано, как обычно, с помощью трех углов Эйлера  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , то состояния, которые мы ищем, преобразуются по формуле

$$e^{-iL_z\alpha} e^{-iL_y\beta} e^{-iL_z\gamma} |l, m\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) |l, m'\rangle, \quad (2.53)$$

где

$$D_{m'm}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\alpha} d_{m'm}^{(l)}(\beta) e^{-im\gamma}, \quad (2.54)$$

а функцию  $d_{m'm}^{(l)}$  можно найти в соответствующих книгах, нам не понадобится ее явный вид.

Потренируемся вначале на случае, ответ для которого уже известен:  $eg = 0$ . При фиксированном  $r$  полную систему базисных векторов образуют собственные векторы угловых координат частиц, т. е. сферических углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Любое из этих состояний можно получить, действуя соответствующим вращением на состояние, в котором частица находится в Северном полюсе:

$$|\theta, \varphi\rangle = e^{-iL_z\varphi} e^{-iL_y\theta} |\theta = 0\rangle \quad (2.55)$$

(При  $\theta = 0$  нет надобности задавать  $\varphi$ .) Состояния, которые мы ищем, известны, если мы знаем их волновые функции в координатном представлении  $\langle\theta, \varphi | l, m\rangle$ . Из приведенных выше формул получаем

$$\langle\theta, \varphi | l, m\rangle = \langle\theta = 0 | e^{iL_y\theta} e^{iL_z\varphi} | l, m\rangle = \sum_{m'} e^{im\varphi} d_{m'm}^{(l)}(\theta) \langle\theta = 0 | l, m'\rangle. \quad (2.56)$$

Таким образом, задача будет решена, если мы найдем  $\langle\theta = 0 | l, m\rangle$ . Эти коэффициенты удовлетворяют важному условию, которое следует из

$$e^{-iL_z\alpha} |\theta = 0\rangle = |\theta = 0\rangle. \quad (2.57)$$

Таким образом,

$$\langle\theta = 0 | l, m'\rangle = 0, \quad m' \neq 0, \quad (2.58)$$

и мы можем построить функции  $\langle\theta, \varphi | l, m\rangle$  только при  $l = 0, 1, 2, \dots$ . При каждом из этих значений решение единственно, с точностью до несущественной нормировки. После того как эти функции построены, нетрудно проверить, используя формулы умножения для  $D$ -матриц, что они преобразуются так, как нужно.

Теперь перейдем к интересующему нас случаю  $eg \neq 0$ . Коммутаторы  $L$  и  $r$  — те же, что и раньше, поэтому

$$|\theta, \varphi\rangle = e^{-iL_z\varphi} e^{-iL_y\theta} |\theta = 0\rangle \cdot (\text{фазовый множитель}). \quad (2.59)$$

Этот фазовый множитель зависит от выбранной калибровки. К счастью, нам не нужно знать его явный вид, он не влияет на основной вывод приведенного выше анализа: все состояния можно найти, если известно  $\langle\theta = 0 | l, m'\rangle$ . Теперь, однако, условие (2.58) следует изменить:

$$L_z |\theta = 0\rangle = \left(-i[rD] - \frac{egr}{r}\right)_z |\theta = 0\rangle = -eg |\theta = 0\rangle. \quad (2.60)$$

Таким образом,

$$\langle\theta = 0 | l, m'\rangle = 0, \quad m' \neq -eg, \quad (2.61)$$

и допустимы следующие значения углового момента:

$$l = |eg|, \quad |eg| + 1, \quad |eg| + 2, \dots \quad (2.62)$$

Как и прежде, каждое из них входит не более одного раза.

На этом наша работа закончена.

**З а м е ч а н и я:**

1) Эффект монополя на удивление прост: несколько меняется центробежный потенциал в радиальном уравнении Шрёдингера. Если мы умеем решать уравнение Шрёдингера с данным центральным потенциалом без монополя, то мы сможем решить его и в присутствии монополя.

2) Так как  $l$  всегда больше или равно  $|eg|$ , то центробежный потенциал всегда положителен, и монополь сам по себе не может связать заряженную бесспиновую частицу. Естественно ожидать, и мы увидим это в одном специальном случае, что положение существенно меняется, если у частицы есть спин.

3) Условие квантования Дирака допускает полуцелое и целое значения для произведения *eg*. Поэтому возможна такая ситуация, когда две бесспиновые частицы, из которых одна обладает электрическим, а другая — магнитным зарядом, образуют связанное состояние, дайон, с полуцелым угловым моментом. С точки зрения теоремы о связи спина со статистикой — это парадокс. Сейчас мы посмотрим, как этот парадокс разрешается.

д) Разрешение парадокса, связанного со спином и статистикой

Можно было бы подумать, что в рамках нерелятивистской квантовой механики отсутствует какое-либо утверждение относительно связи спина со статистикой. Однако это не так: хотя, действительно, чтобы утверждать, что бесспиновые частицы должны быть бозонами, необходима релятивистская теория поля; достаточно нерелятивистской теории, чтобы найти статистику связанных состояний, сделанных из этих бозонов. Сейчас будет показано, что дайон, состоящий из бесспиновой электрически заряженной частицы («электрона») и бесспиновой магнитно заряженной частицы («монополя») подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна, если *eg* — целое, и статистике Ферми — Дирака, если *eg* — полуцелое \*).

Гамильтониан электрона в поле монополя уже известен,

$$H = \frac{1}{2m_e} [\mathbf{p}_e - eg\mathbf{A}_D(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_m)]^2 + \dots \quad (2.63)$$

Многозначием обозначено здесь возможное неэлектромагнитное взаимодействие, и  $\mathbf{A}_D$  — обычный дираковский потенциал со струной

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (1 - \cos \theta) d\varphi. \quad (2.64)$$

С помощью дуального вращения можно получить гамильтониан монополя в поле электрона

$$H = \frac{1}{2m_m} [\mathbf{p}_m + eg\mathbf{A}'_D(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_e)]^2 + \dots \quad (2.65)$$

Изменение знака здесь связано с дуальным вращением, при котором *e* переходит в *g*, а *g* — в  $(-e)$ ;  $\mathbf{A}'_D$  — некоторый потенциал, связанный с  $\mathbf{A}_D$  калибровочным преобразованием.

Чтобы найти  $\mathbf{A}'_D$ , рассмотрим систему, состоящую из одного монополя и одного электрона. При любом выборе  $\mathbf{A}'_D$ ,  $\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_m$  — константа движения, так как гамильтониан трансляционно инвариантен. Однако в силу соотношений

$$m_e \mathbf{v}_e = \mathbf{p}_e + eg\mathbf{A}_D(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_m), \quad (2.66a)$$

$$m_m \mathbf{v}_m = \mathbf{p}_m - eg\mathbf{A}'_D(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_e), \quad (2.66b)$$

сумма  $m_e \mathbf{v}_e + m_m \mathbf{v}_m$  является константой движения (в соответствии с классическими уравнениями движения), только если

$$\mathbf{A}'_D(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_D(-\mathbf{x}). \quad (2.67)$$

Как показано в п. б) гл. 2, эти потенциалы действительно связаны калибровочным преобразованием.

Итак, правильный гамильтониан для монополя в поле электрона равен

$$H = \frac{1}{2m_m} [\mathbf{p}_m + eg\mathbf{A}_D(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_m)]^2 + \dots \quad (2.68)$$

Перестановка монополей и электронов меняет знак вектор-потенциала, но не порядок сомножителей в нем.

\*) Мы следуем здесь Голдхаберу<sup>12</sup>. Работа Голдхабера была стимулирована исследованиями Джаквива и Ребби<sup>13</sup> и Хассенфраца и Хоффа<sup>14</sup>.

Рассмотрим теперь интересующую нас систему, состоящую из двух дайонов, каждый из которых сделан из бесспинового монополя и бесспинового электрона. Как и при описании системы, состоящей из двух атомов, состояние системы задается прёдингеровской волновой функцией,  $\psi_{A_1 A_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Здесь  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  — координаты дайонов, а индексы  $A_1, A_2$  указывают на внутренние состояния дайонов, например, спины или энергии возбуждения. Так как наши электроны и монополи — бозоны, то стандартное рассуждение приводит к выводу, что

$$\psi_{A_1 A_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{A_2 A_1}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (2.69)$$

Можно было бы сказать, что это равенство означает, что дайоны — бозоны. Рассмотрим, однако, гамильтониан двухдайонной системы более внимательно:

$$H = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_1 - eg\mathbf{A}_D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + eg\mathbf{A}_D(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]^2 + \\ + \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_2 - eg\mathbf{A}_D(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + eg\mathbf{A}_D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]^2 + \dots, \quad (2.70)$$

где многоточием обозначено кулоновское взаимодействие, а также возможные неэлектромагнитные силы. Происхождение выписанных членов вполне очевидно: электрон из первого дайона взаимодействует с монополем из второго дайона, монополь из первого дайона взаимодействует с электроном из второго дайона и т. д.

Гамильтониан в (2.70) выглядит так, как будто он описывает «безобразные» силы, зависящие от скорости, но между двумя тождественными дайонами не может быть таких сил, так как существует дуальное вращение, одновременно обращающее в нуль оба магнитных заряда. Действительно, из формулы (2.16) следует

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_D(-\mathbf{x}) = 2\nabla\varphi. \quad (2.71)$$

Таким образом, если мы совершим калибровочное преобразование

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{2ieg\varphi_{12}}\psi, \quad (2.72)$$

то «неприятные» члены выпадают, и гамильтониан принимает вид

$$H \rightarrow H' = \frac{1}{2m} \mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m} \mathbf{p}_2^2 + \dots \quad (2.73)$$

Но при этом может измениться симметрия волновой функции, так как при перестановке  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  угол  $\varphi_{12}$  переходит в  $\varphi_{12} + \pi$ . Поэтому

$$\psi'_{A_1 A_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{2\pi ieg}\psi'_{A_2 A_1}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1).$$

Иными словами, волновая функция  $\psi'$  симметрична относительно перестановки дайонов, если произведение  $eg$  — целое число, и антисимметрична, если  $eg$  — полуцелое.

В результате мы получили два описания для одной и той же системы. В первом варианте, с волновой функцией  $\psi$  и гамильтонианом  $H$ , дайоны считаются бозонами независимо от их спинов, но между ними действуют необычайные дальнедействующие силы. Во втором варианте, с  $\psi'$  и  $H'$ , эти силы отсутствуют, но дайоны подчиняются статистике в соответствии со своими спинами. Эти способы описания получаются друг из друга калибровочным преобразованием и потому приводят к одинаковым предсказаниям для наблюдаемых величин. Тем не менее, здесь нет никакой неоднозначности: было бы странно использовать первый способ при наличии второго. (В конце концов, с помощью этого же калибровочного преобразования можно сделать так, что любая пара фермионов будет выглядеть как пара бозонов, независимо от их электрических или магнитных зарядов.) Дайоны с необходимостью подчиняются теореме о связи спина со статистикой.

## 3. МОНОПОЛИ В НЕАБЕЛЕВОЙ ТЕОРИИ, ВИД С БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЙ

а) Калибровочная теория поля:  
молниеносный обзор

В этом разделе мы дадим сводку определений и формул, относящихся к классической теории калибровочных полей, добавив некоторые замечания. Этот материал включен здесь, чтобы условиться об обозначениях и напомнить некоторые черты теории, которые будут существенны для дальнейшего. Изложение здесь слишком сжато, чтобы иметь какую-нибудь педагогическую ценность; тот, кто не знаком еще с основами теории калибровочных полей, едва ли сможет выучить этот предмет по предлагаемому тексту.

## 1) Калибровочные преобразования

В теориях калибровочных полей динамические переменные распадаются на два типа: калибровочные поля и поля материи. Начнем с полей материи, которые мы соберем в один большой вектор  $\Phi$ . Калибровочное преобразование задается функцией  $g(x)$ , отображающей пространство-время в некоторую компактную связную группу Ли  $G$ . При этом поля материи преобразуются по какому-то разумному унитарному представлению группы  $G$ :

$$g(x) \in G: \Phi(x) \rightarrow D(g(x)) \Phi(x). \quad (3.1)$$

Нам будет удобно считать, что элемент абстрактной группы  $g$  совпадает с матрицей  $D(g)$ , и писать эту формулу в виде

$$g(x) \in G: \Phi(x) \rightarrow g(x) \Phi(x). \quad (3.2)$$

В окрестности единичного элемента группы  $G$  любой элемент представляется в виде ряда

$$g = 1 + \sum_{a=1}^{\dim G} \varepsilon^a T^a + O(\varepsilon^2), \quad (3.3)$$

где  $\dim G$  — размерность группы. Здесь  $\varepsilon^a$  — некоторые координаты на группе,  $T^a$  — матрицы, называемые инфинитезимальными генераторами группы. Эти генераторы образуют базис в линейном пространстве, которое называется алгеброй Ли группы  $G$ . Если  $g$  — унитарная матрица, то матрицы  $T$  — антиэрмитовы,

$$T^a = -(T^a)^+. \quad (3.4)$$

Мы следуем здесь обозначениям, принятым в математической литературе; физики часто вставляют множитель  $i$  в определение генераторов, чтобы сделать их эрмитовыми.

Для произвольного элемента  $g$  имеет место равенство

$$g T^a g^+ = D_{ba}^{(\text{ad}_1)}(g) T^b, \quad (3.5)$$

где  $D^{(\text{ad}_1)}$  — так называемое присоединенное представление группы; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Коммутатор любых двух генераторов является линейной комбинацией генераторов:

$$[T^a, T^b] = c^{ab c} T^c, \quad (3.6)$$

где  $c$  — вещественные коэффициенты, называемые структурными постоянными. Они зависят только от самой абстрактной группы  $G$ , а не от конкретного представления, используемого нами для ее реализации. Мы будем всегда выбирать генераторы таким образом, что

$$\text{Sp}(T^a T^b) = -N \delta^{ab}, \quad (3.7)$$

где  $N$  — нормировочная постоянная. Соответственно,

$$c^{abc} = -N^{-1} \text{Sp} ([T^a, T^b] T^c), \quad (3.8)$$

откуда следует, что  $c^{abc}$  не меняется при четной перестановке индексов и меняет знак при нечетной перестановке.

Например, если  $G = \text{SU}(2)$ , группа унитарных матриц второго порядка, обычно выбирают  $T^a = -i \frac{1}{2} \sigma^a$ , где  $\sigma^a$  — спинорные матрицы Паули. В этом случае присоединенное представление является векторным,  $N = 1/2$ , и  $c^{abc} = \varepsilon^{abc}$ .

## 2) Калибровочные поля

Калибровочные поля — это набор векторных полей  $A_\mu^a$ ,  $a = 1, \dots, \dim G$ . Нам будет удобно собрать их в единое матричное векторное поле:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a. \quad (3.9)$$

По определению, при калибровочных преобразованиях эти поля ведут себя следующим образом:

$$g(x): A_\mu \rightarrow g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}. \quad (3.10)$$

Если мы определим ковариантную производную поля материи:

$$D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + A_\mu) \Phi, \quad (3.11)$$

то при калибровочном преобразовании

$$g(x): D_\mu \Phi \rightarrow g D_\mu \Phi. \quad (3.12)$$

Тензор напряженностей поля  $F_{\mu\nu}$  — это тензор, каждая компонента которого является матрицей; по определению,

$$[D_\mu, D_\nu] \Phi = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) \Phi \equiv F_{\mu\nu} \Phi. \quad (3.13)$$

При калибровочных преобразованиях напряженности поля преобразуются по присоединенному представлению группы  $G$ :

$$g(x): F_{\mu\nu} \rightarrow g F_{\mu\nu} g^{-1}. \quad (3.14)$$

Ковариантная производная напряженности имеет вид

$$D_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + [A_\lambda, F_{\mu\nu}]. \quad (3.15)$$

При калибровочных преобразованиях эта величина ведет себя так же, как  $F$ . Как и вектор-потенциал в формуле (3.9), напряженность можно разложить по матричному базису:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a, \quad (3.16)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + c^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.17)$$

## 3) Динамика

Плотность лагранжиана записывается в виде

$$\mathcal{L} = (4Nf^2)^{-1} \text{Sp} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \mathcal{L}_m(\Phi, D_\mu \Phi), \quad (3.18)$$

где  $\mathcal{L}_m$  — некоторая инвариантная функция,

$$\mathcal{L}_m(g\Phi, gD_\mu \Phi) = \mathcal{L}_m(\Phi, D_\mu \Phi), \quad (3.19)$$

а  $f$  — вещественное число, называемое константой связи. Первый член в лагранжиане можно также записать в виде

$$\frac{1}{4Nf^2} \text{Sp} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4f^2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \quad (3.20)$$

Если в теории нет полей материи, то калибровочные поля удовлетворяют уравнениям

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.21)$$

которые называются уравнениями Янга — Миллса без источников.

Константу связи можно включить в нормировку полей, вводя обозначения

$$и \quad A'_\mu{}^a = f^{-1} A_\mu{}^a, \quad (3.22)$$

$$F'^a_{\mu\nu} = f^{-1} F_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu A'_\nu{}^a - \partial_\nu A'_\mu{}^a + f c^{abc} A'_\mu{}^b A'_\nu{}^c. \quad (3.23)$$

При этом

$$-\frac{1}{4f^2} F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu a} = -\frac{1}{4} F'^a_{\mu\nu} F'^{\mu\nu a}, \quad (3.24)$$

и

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + f A'_\mu{}^a T^a \Phi. \quad (3.25)$$

Отсюда и в самом деле видно, что  $f$  играет роль константы связи: она отсутствует в квадратичных членах лагранжиана и входит в члены более высокого порядка.

Если калибровочная группа представляется в виде прямого произведения множителей, являющимися простыми группами или группами  $U(1)$ , то для каждого множителя можно ввести независимую константу связи. Зависящая от калибровочных полей часть лагранжиана принимает вид

$$-\frac{1}{4} \sum_a f_a^2 F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu a}, \quad (3.26)$$

где константа связи  $f_a$  одинакова для всех калибровочных полей, относящихся к одной и той же фактор-группе. Соответственно, вместо (3.25), получаем

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + \sum_a f_a A'_\mu{}^a T^a \Phi. \quad (3.27)$$

#### 4) Временная калибровка

Временная калибровка задается условием  $A_0 = 0$ . Чтобы привести заданную конфигурацию калибровочных полей к временной калибровке, надо найти функцию  $g(x)$ , удовлетворяющую уравнению

$$g A_0 g^{-1} + g \partial_0 g^{-1} = 0. \quad (3.28)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде упорядоченной по времени экспоненты:

$$g^{-1}(x, t) = T \exp \left[ - \int_0^t dt' A_0(x, t') \right]. \quad (3.29)$$

Временная калибровка полезна, так как производные калибровочных полей по времени входят только в член  $-\partial_0 A_i^a \partial^0 A^{ia}/2f^2$ . Поэтому постановка задачи с начальными данными совпадает со случаем теории скалярного поля, в котором взаимодействие не зависит от производных, как должно быть для построения гамильтоновых уравнений.

Переход к временной калибровке не устраняет произвол полностью, так как остается еще возможность производить калибровочные преобразования, не зависящие от времени.

## 5) Элементы группы, соответствующие путям

Путь в пространстве-времени описывается функцией  $x(s)$ , где  $s$  пробегает значения от 0 до 1. Каждому такому пути поставим в соответствие элемент группы, заданный экспонентой, упорядоченной вдоль пути,

$$g = P \exp \left( - \int_0^1 ds A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \right). \quad (3.30)$$

Этот элемент можно также определить как решение  $g(s)$  дифференциального уравнения

$$\frac{Dg}{Ds} \equiv \frac{dg}{ds} + A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} g = 0, \quad (3.31)$$

с начальным условием  $g(0) = 1$ , взятое при  $s = 1$ . (Отметим сходство этих двух формул с (3.28) и (3.29).)

Пусть  $h(x)$  — некоторое калибровочное преобразование. Тогда элемент  $g$ , заданный формулой (3.30), преобразуется следующим образом:

$$h(x) \in G: g \rightarrow h(x(1)) g h(x(0))^{-1}. \quad (3.32)$$

Формула упрощается, если путь является замкнутым, т. е.  $x(0) = x(1)$ ,

$$h(x) \in G: g \rightarrow h(x(0)) g h(x(0))^{-1}. \quad (3.33)$$

При этом элемент  $g$  преобразуется как  $F_{\mu\nu}$ , локальное поле, несмотря на то, что он задается нелокальным интегралом.

Для замкнутого пути  $\text{Sp } g$  — это знаменитая вильсоновская петля. Эта величина калибровочно инвариантна и не зависит от того, в какой точке начинается и кончается путь. Она зависит от используемого матричного представления; говоря в терминах теории групп, различным представлениям соответствуют различные характеры.

Для обычного электромагнетизма элемент группы, соответствующий замкнутому контуру, равен

$$g = \exp(i e \Phi), \quad (3.34)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром. Таким образом, групповой элемент, соответствующий замкнутому контуру, можно рассматривать как обобщение магнитного потока на неабелеву теорию. (Тривиальное определение потока, как интеграла от магнитного поля по поверхности, не годится, так как при интегрировании пришлось бы складывать величины, по-разному ведущие себя при калибровочных преобразованиях, что характерно для магнитных полей в различных точках пространства в неабелевой теории.)

## б) Сущность классического предела

Уделим некоторое время исследованию свойств магнитных монополей в классических неабелевых калибровочных теориях. Возникает естественный вопрос: когда можно ожидать, что классическая физика описывает квантовую реальность?

Пусть  $S(\Phi)$  — функционал действия для классической теории поля; здесь  $\Phi$  — совокупность всех полей теории, включая калибровочные поля. Решение соответствующей квантовой задачи можно представить в виде функционального интеграла, фейнмановского интеграла по траекториям в евклидовой форме,

$$\int (d\Phi) \exp \left[ - \frac{S(\Phi)}{\hbar} \right]. \quad (3.35)$$

Вводя новые поля,  $\Phi' = \Phi/\sqrt{\hbar}$ , функциональный интеграл можно переписать, с точностью до несущественного нормировочного множителя, в виде

$$\int (d\Phi') \exp \left[ -\frac{S(\Phi' \sqrt{\hbar})}{\hbar} \right]. \quad (3.36)$$

Это тривиальное преобразование показывает, что  $\sqrt{\hbar}$  играет роль константы связи, которая отсутствует в квадратичных по полям членах, но стоит в виде множителя в членах высших порядков. Классический предел соответствует пределу слабой связи. Устремлять  $\hbar$  к нулю при фиксированных константах связи — это все равно, что устремлять к нулю константы связи (с надлежащими скоростями) при фиксированном  $\hbar$ .

Таким образом, классическая калибровочная теория (без нарушения симметрии), рассмотренная в разделе 3,а), должна дать правильное представление о квантовой калибровочной теории со слабой связью (также без нарушения симметрии). Мне известны два случая, когда такой подход применим. Первый был указан во Введении, это квантовая хромодинамика на расстояниях, меньших длины конфайнмента. Так как теория асимптотически свободна, то в этой ситуации имеет место слабая связь. Другой случай — это Вселенная на ранней стадии эволюции. Калибровочные поля со слабой связью, которые при современных энергиях имеют массы, вполне могли бы быть безмассовыми на ранней стадии, когда нарушение симметрии происходило по-другому.

Это рассуждение указывает, где надо искать классические неабелевы монополи: глубоко внутри адронов или в далеком прошлом. А теперь посмотрим, как они должны выглядеть, если мы найдем их.

#### в) Динамическая классификация монополей (Годдар, Ньюит и Олайв)

В начале гл. 2 были упомянуты стандартные разложения для стационарных электромагнитных полей, которые могут существовать вне «черного ящика», содержимое которого нам неизвестно. Поля электрического и магнитного монополей доминируют в этом разложении на больших расстояниях. Предложенную Годдаром, Ньюитом и Олайвом<sup>15</sup> динамическую классификацию монополей можно рассматривать как обобщение этого мультипольного анализа на неабелевы калибровочные теории. В настоящем разделе будет дан вывод этой классификации.

Как и в случае электромагнетизма, будут использованы только уравнения, справедливые вне «черного ящика», т. е. полевые уравнения без источников. Так как это сложные нелинейные уравнения, я не буду пытаться построить полную систему решений, а лишь найду неабелево обобщение поля магнитного монополя.

Исключим электрические поля с самого начала, выделяя решения, которые не просто не зависят от времени, но и инвариантны относительно обращения времени (в некоторой подходящей калибровке). Операция обращения времени следующим образом действует на калибровочное поле:

$$T: A_0(x, t) \rightarrow -A_0(x, -t), \quad \mathbf{A}(x, t) \rightarrow \mathbf{A}(x, -t). \quad (3.37)$$

(Другое определение, допустимое в абелевой теории и отличающееся от приведенного общим знаком, не подходит для неабелевой теории.) Таким образом,

$$A_0 = 0, \quad \partial_0 A_i = 0, \quad (3.38)$$

и электрическая напряженность  $F_{0i}$  равна нулю.

Условие (3.38) не исключает возможности калибровочных преобразований, не зависящих от времени. Используем эту возможность, чтобы уstra-

нить радиальную компоненту поля,

$$A_r = 0. \quad (3.39)$$

Так же как введение временной калибровки (3.29) производится с помощью калибровочного преобразования, получаемого путем интегрирования вдоль оси времени, требуемое здесь калибровочное преобразование строится интегрированием по радиальному направлению, начиная, например, от единичной сферы. При этом, конечно, могут возникнуть трудности вблизи начала координат, где радиусы пересекаются, но в данном случае это не важно, так как мы предполагаем, что начало координат находится внутри «черного ящика», а в этой области мы все равно не предполагали использовать полевые уравнения. Заметим, что у нас еще осталась возможность производить калибровочные преобразования, зависящие только от сферических углов  $\theta$  и  $\varphi$ , и мы этим вскоре воспользуемся.

Предположим теперь, что при больших  $r$  можно разложить  $A$  в ряд по  $1/r$ :

$$A = \frac{a(\theta, \varphi)}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (3.40)$$

Так как уравнения Янга — Миллса нелинейны, то в них, вообще говоря, могут присутствовать члены, зависящие от произведения главного члена на члены более высоких порядков. Однако в часть уравнения, пропорциональную  $1/r^3$ , входит только главный член. Поэтому в данном случае, когда мы интересуемся только главным членом, можно отбросить все члены более высоких порядков.

Как и в абелевом случае, удобно выразить вектор  $A$  через его ковариантные компоненты:

$$A dx = A_\theta(\theta, \varphi) d\theta + A_\varphi(\theta, \varphi) d\varphi. \quad (3.41)$$

Если поле не имеет сингулярностей в северном и южном полюсах, то величины  $A_\varphi(0, \varphi)$  и  $A_\varphi(\pi, \varphi)$  должны обратиться в нуль \*).

Сделаем теперь еще одно калибровочное преобразование, чтобы получить

$$A_\varphi = 0. \quad (3.42)$$

Это преобразование строится путем интегрирования вдоль линий с фиксированным  $\varphi$ , т. е. меридианов, начиная от северного полюса. Разумеется, этот выбор калибровки может привести к искусственной сингулярности в точке пересечения меридианов, т. е. в южном полюсе. В частности, может получиться ненулевая (и зависящая от  $\varphi$ ) величина  $A_\varphi(\pi, \varphi)$ , иными словами, сингулярность типа дираковской струны. Как и в абелевом случае, мы на время примиримся с этой сингулярностью. Когда уравнения будут решены, проверим, что сингулярность, о которой идет речь, связана с выбранной калибровкой, и струна не наблюдается.

---

\*) Я здесь довольно небрежно обращаюсь с сингулярностями. Имеется более аккуратное рассуждение. Определим конфигурацию калибровочных полей как несингулярную в некоторой области, если эта область является объединением открытых множеств, таких, что в каждом множестве калибровочное поле свободно от сингулярностей, и в пересечении любой пары множеств калибровочные поля, заданные в этих множествах, связаны несингулярным калибровочным преобразованием. Можно показать, что конфигурация калибровочных полей, локально несингулярная во всем пространстве, кроме начала координат, может быть приведена калибровочным преобразованием к конфигурации, которая несингулярна (в обычном смысле) всюду, кроме полусоси, проходящей через южный полюс. (Эта теорема доказана в другой работе автора <sup>3</sup>.) Иными словами, если все сингулярности, кроме тех, которые совпадают с началом координат, обусловлены выбором калибровки, то их можно сместить на дираковскую струну калибровочным преобразованием.

Теперь можно, наконец, использовать полевые уравнения. Тензор напряженности имеет лишь одну отличную от нуля компоненту,

$$F_{\theta\varphi} = \partial_\theta A_\varphi. \quad (3.43)$$

В криволинейных координатах уравнения Янга — Миллса без источников принимают вид

$$\partial_\mu \sqrt{g} F^{\mu\nu} + [A_\mu, \sqrt{g} F^{\mu\nu}] = 0. \quad (3.44)$$

В рассматриваемом случае

$$\sqrt{g} F^{\mu\nu} = (r^2 \sin \theta)^{-1} \partial_\theta A_\varphi. \quad (3.45)$$

Таким образом, мы имеем два нетривиальных полевых уравнения. Первое из них имеет вид

$$\partial_\theta \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta A_\varphi = 0. \quad (3.46)$$

Его общее решение, с граничным условием  $A_\varphi(0, \varphi) = 0$ , легко находится,

$$A_\varphi = Q(1 - \cos \theta), \quad (3.47)$$

где  $Q$  — произвольная матрица, зависящая от  $\varphi$ . Однако из второго уравнения,

$$\partial_\varphi \sqrt{g} F^{\varphi\theta} + [A_\varphi, \sqrt{g} F^{\varphi\theta}] = -\partial_\varphi Q = 0, \quad (3.48)$$

следует, что  $Q$  — постоянная матрица.

Итак, с точностью до калибровочного преобразования, поле неабелевого монополя равно полю абелева монополя, умноженному на произвольную матрицу. Тот факт, что таким образом можно найти поле неабелева монополя, — довольно очевиден; нетривиально однако, что так можно получить все решения.

Коль скоро неабелев монополь так просто связан с решением в абелевой теории, легко найти условие квантования. Достаточно лишь слегка изменить аргументацию, приведенную в разделе 2, б). Если направить струну на север, то потенциал принимает вид

$$A'_\varphi = -Q(1 + \cos \theta). \quad (3.49)$$

Потенциалы  $A$  и  $A'$  связаны калибровочным преобразованием

$$g = \exp(2Q\varphi), \quad (3.50)$$

которое однозначно, если

$$\exp(4\pi Q) = 1. \quad (3.51)$$

Это и есть условие квантования.

Проверим, что это условие действительно совпадает с правильным условием квантования в частном случае абелевой теории, рассмотренном в разделе 2. Надо несколько изменить обозначения: то, что мы теперь обозначаем  $A$ , прежде обозначалось —  $ieA$  (см. выражение для ковариантной производной в формуле (3.11)). Соответственно,  $Q$  надо заменить на  $-ieg$ , и формула (3.51) превращается в условие квантования Дирака, как и должно быть.

В физике элементарных частиц мы обычно интересуемся алгеброй Ли и не обращаем внимания на глобальную структуру группы Ли; например, обычно не отличают изотопическую группу  $SU(2)$  от  $SO(3)$ . Эта привычка особенно вредна в теории монополя, так как условие квантования чувствительно к глобальной структуре калибровочной группы  $G$ : множество монополей, дозволённых в теории с группой  $SU(2)$ , уже, чем для группы  $SO(3)$ .

Пусть, например, матрица  $Q$  пропорциональна  $I_3$ , генератору вращений вокруг третьей оси в изотопическом пространстве. Если  $G = SO(3)$ , то  $Q$  может отличаться от  $I_3$  любым целым или полуцелым множителем, так как поворот на  $2\pi$  совпадает с единичным элементом группы. Если же  $G = SU(2)$ , то множитель должен быть целым числом, потому что с единицей совпадают только вращения на угол, кратный  $4\pi$ .

Ничего особенно глубокого здесь нет: суть дела можно понять на элементарном уровне п. а) гл. 2. Если  $G = SO(3)$ , то это означает, что все частицы обладают целыми изоспинами, и соответственно, целыми значениями  $I_3$ . Если  $G = SU(2)$ , то возможны и полуцелые значения. Если в нашем распоряжении более богатый выбор частиц, то мы можем поставить больше экспериментов типа Боме — Ааронова и обнаружить такие солениды, которые раньше были ненаблюдаемы.

Рассмотрим явный вид  $Q$  для некоторых типичных групп, чтобы иметь в своем распоряжении примеры, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Если  $G = SU(n)$ , то  $Q$  — антиэрмитова матрица  $n$ -го порядка с нулевым следом. Такую матрицу можно всегда привести в диагональному виду унитарным преобразованием, т. е. применяя постоянное калибровочное преобразование. Таким образом,

$$Q = -\frac{i}{2} \text{diag} (q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (3.52)$$

Из равенства нулю следа вытекает, что сумма всех чисел  $q$  должна быть равна нулю, а из условия квантования следует, что все  $q$  — целые. Так как с помощью калибровочного преобразования можно переставить собственные числа  $q_m$  произвольным образом, их порядок — несуществен.

Особенно прост случай группы  $SU(2)$ :

$$Q = -\frac{i}{2} \text{diag} (q, -q) = -\frac{i}{2} q \sigma_3. \quad (3.53)$$

Так как собственные значения можно переставлять, то мы полагаем, что  $q$  — неотрицательное целое число,  $q = 0, 1, \dots$ .

Некоторые калибровочные теории, основанные на алгебре Ли группы  $SU(n)$ , обладают глобальной группой симметрии  $G = SU(n)/Z_n$ , а не  $SU(n)$ : ( $Z_n$  — конечная группа, состоящая из  $n$  элементов, которые можно представить как корни  $n$ -й степени из единицы, т. е. целые степени числа  $\exp(2\pi i/n)$ ). Примером такого рода является теория калибровочных полей без полей материи, т. е. глюоны без кварков. Калибровочные поля преобразуются по присоединенному представлению группы; соответственно, две матрицы из  $SU(n)$ , отличающиеся лишь множителем, принадлежащим к  $Z_n$ , представляются одной и той же матрицей в присоединенном представлении.

Введем некоторые подходящие обозначения, чтобы формулы для этого случая выглядели попроще. Обозначим через  $Q_{\text{fund}}$  матрицу, соответствующую данному абстрактному генератору группы в  $n$ -мерном фундаментальном представлении, а через  $Q_{\text{adj}}$  — матрицу, соответствующую тому же генератору в  $(n^2 - 1)$ -мерном присоединенном представлении. В рассматриваемом случае условие квантования имеет вид  $\exp(4\pi Q_{\text{adj}}) = 1$ . Оно выполняется в том и только том случае, когда

$$\exp(4\pi Q_{\text{fund}}) \in Z_n. \quad (3.54)$$

Таким образом, как и прежде,

$$Q_{\text{fund}} = -\frac{i}{2} \text{diag} (q_1, \dots, q_n), \quad (3.55)$$

но теперь

$$q_m = \frac{r}{n} + (\text{целое}), \quad m = 1, \dots, n, \quad (3.56)$$

где  $r$  — целое число, не зависящее от  $m$ . По-прежнему, сумма всех  $q$  должна быть равна нулю, и их порядок не существует.

Например, в простейшем случае  $SU(2)/Z_2 = SO(3)$  имеем  $Q_{\text{fund}} = -(i/2) q \sigma_3$ , как и в формуле (3.53). Теперь, однако,  $q$  может быть полу-целым числом.

### г) Топологическая классификация монополей (Л ю б к и н)

Топологическая классификация полей монополей была развита почти 20 лет назад Элигу Любкином<sup>16</sup> (см. особенно раздел XV) в важной и несправедливо оставленной без внимания работе. Мы предпримем исследование случая, когда «черный ящик» с неизвестным содержимым создает вокруг себя калибровочное поле, т. е. поставим задачу так же, как при построении динамической классификации. Однако

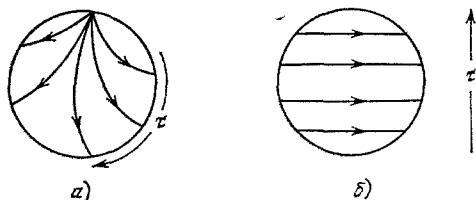


Рис. 2.

теперь мы не будем предполагать, что калибровочные поля являются стационарным решением уравнений Янга — Миллса без источников, или вообще динамических уравнений какого-либо вида. Вместо этого поставим в соответствие данной конфигурации калибровочных полей некоторый топологический заряд, величину, которая не меняется при произвольных непрерывных деформациях

полевой конфигурации и потому, в частности, не меняется при эволюции времени, задаваемой каким-нибудь разумным уравнением движения.

Вначале я опишу конструкцию Любкина и некоторые из ее наиболее существенных свойств. При этом придется пройти очень краткий курс (наиболее элементарных) основ гомотопической теории. Даже читателю, который нетерпимо относится к абстрактной математике, придется быть в этом месте внимательным, иначе дальнейшее не будет понятно. После этого будет рассмотрена связь топологической классификации с динамической.

На рис. 2, а показано семейство замкнутых контуров, лежащих на сфере, окружающей черный ящик. Каждый контур начинается и кончается в северном полюсе, возвращение к полюсу происходит по задней полусфере и потому не показано на рисунке. Каждому контуру ставится в соответствие определенное число  $\tau$ , принадлежащее к интервалу от 0 до 1; первый и последний пути в этом семействе, отвечающие значениям  $\tau = 0$  и 1, это тривиальные контуры, состоящие из одной точки на северном полюсе. При изменении параметра  $\tau$  контур заматывает поверхность вокруг черного ящика, как обруч иллюзиониста, которым он обводит вокруг парящей в воздухе девушки.

Для тех, кому трудно представить себе рассматриваемую конструкцию по рис. 2, а, я изобразил то же самое по-другому на рис. 2, б. Здесь показана сфера в проекции со стороны южного полюса, а северный полюс поставлен в соответствие периметру диска. Контуры изображены горизонтальными линиями.

Мы можем проинтегрировать калибровочное поле вдоль каждого контура, чтобы получить элемент группы, как показано в разделе 3.1. Таким образом, по данному семейству путей мы получаем контур в групповом пространстве,  $g(\tau)$ , начинающийся и кончающийся в единице. (Мы можем не беспокоиться о сингулярностях, зависящих от выбора калибровки, типа дираковских струн, при перемещении контура по сфере. Всегда можно сделать калибровочное преобразование, чтобы устранить с пути сингулярность такого рода; согласно формуле (3.33), это не изменит групповой элемент

$g(\tau)$ , если мы выберем это калибровочное преобразование так, чтобы оно было равно единице в северном полюсе.)

Контур  $g(\tau)$  в групповом пространстве зависит практически от всех деталей проблемы: от выбранной сферы, от того, как именно было построено семейство контуров на сфере, от момента времени, к которому относится вычисление (если наше калибровочное поле меняется со временем), от калибровки, в которой мы работаем. Однако результат зависит от всех этих факторов непрерывным образом, и потому соответствующий элемент первой гомотопической группы многообразия  $G$ ,  $\pi_1(G)$ , не меняется.

Чтобы объяснить, что означает последнее утверждение, придется остановиться, как было обещано, на гомотопической теории \*).

Для любого топологического пространства  $X$  контур  $x(t)$  определяется как непрерывная функция параметра, заданного на отрезке  $[0, 1]$ , принимающая значения в  $X$ . Пусть  $x(t)$  и  $x'(t)$  — два контура с одинаковыми начальной и конечной точками, т. е.  $x(0) = x'(0)$  и  $x(1) = x'(1)$ . Мы будем говорить, что эти контуры «гомотопичны» или «принадлежат одному гомотопическому классу», если можно один из них непрерывно перевести в другой, не сдвигая конечных точек. Формально говоря, можно утверждать, что  $x(t)$  и  $x'(t)$  — гомотопичны, если существует непрерывная функция двух переменных,  $F(s, t)$ ,  $0 \leq s, t \leq 1$ , такая, что

$$F(0, t) = x(t), \quad F(1, t) = x'(t),$$

и

$$F(s, 0) = x(0) = x'(0), \quad F(s, 1) = x(1) = x'(1). \quad (3.57)$$

Пример показан на рис. 3. Топологическое пространство  $X$  здесь — это часть плоскости с удаленным диском (заштрихованная область). Показаны четыре контура; каждый из них начинается и кончается в точке  $x_0$ . Контур  $C$  гомотопичен контуру  $D$ , а также тривиальному контуру,  $x(t) = x_0$  при всех  $t$ . Никакие другие два контура на рис. 3 не гомотопичны друг другу. (Надеюсь, что эти утверждения очевидны, их аналитическое доказательство довольно громоздко.)

Если даны два контура, такие, что начало одного совпадает с концом другого, то их произведением называется контур, описываемый, когда точка пробегает сначала первый контур, а затем — второй. Формально это выглядит так:

$$x \cdot x'(t) = \begin{cases} x(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x'(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3.58)$$

Очевидно, что произведения гомотопических контуров также гомотопичны.

Контур, обратный данному, определяется как тот же контур, который пробегается в обратном направлении, т. е.

$$x(t)^{-1} = x(1-t). \quad (3.59)$$

При этом произведение контура и обратного ему (взятое в произвольном порядке) гомотопично тривиальному контуру, состоящему из единственной точки. Это показано на рис. 3: контур  $A$  гомотопичен контуру, обратному  $B$ .

Если мы рассмотрим все гомотопические классы замкнутых контуров с фиксированной точкой  $x_0$ , то указанные операции умножения и взятия обратного элемента определяют групповую структуру. Построенная таким

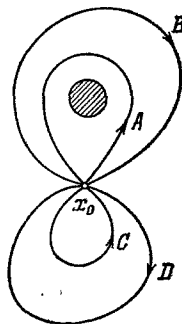


Рис. 3.

\*) Несколько более длинное (хотя все же безнадежно упрощенное) изложение можно найти в другой работе автора <sup>5</sup>; там же даны ссылки на математическую литературу.

образом группа называется первой гомотопической группой пространства  $X$  и обозначается  $\pi_1(X)$ . Нет необходимости указывать точку  $x_0$ , так как группа  $\pi_1(X)$  не зависит от  $x_0$ , если пространство  $X$  связно. Доказательство: пусть  $y$  — какой-либо контур, соединяющий  $x_0$  с другой точкой  $x_1$ ; тогда отображение  $x \rightarrow yx y^{-1}$  ставит в соответствие каждому замкнутому контуру с началом и концом в точке  $x_1$  контур с началом и концом в точке  $x_0$ , так что групповые операции сохраняются.

Для примера, показанного на рис. 3, гомотопические классы нумеруются целым числом (число обходов), показывающим, сколько всего раз контур наматывается на заштрихованный диск. Например, контур  $A$  отвечает числу обходов, равному 1, контур  $B$  — равному  $-1$ , для контуров  $C$  и  $D$  число обходов равно 0. Для произведения контуров число обходов равно сумме чисел обходов сомножителей. Таким образом,  $\pi_1$  является аддитивной группой целых чисел, которую иногда обозначают  $\mathbb{Z}$ .

Если пространство  $X$  связно, и группа  $\pi_1(X)$  тривиальна, то говорят, что пространство  $X$  односвязно. Легко показать, что в этом случае любые два контура, соединяющие заданную пару точек, гомотопичны друг другу.

На этом кончается первая часть нашего краткого курса гомотопической теории. Будет еще вторая часть, посвященная вычислению  $\pi_1$  для компактных групп Ли. Однако уже на этом этапе мы можем сделать некоторые утверждения относительно монополей.

1. Теперь ясен смысл утверждения, сделанного несколько выше, что конструкция Любкина ставит в соответствие калибровочному полю вне черного ящика элемент гомотопической группы  $\pi_1(G)$ . Этот элемент и есть топологический заряд, о котором упоминалось в начале этой главы.

2. Мы можем убедиться, что топологический заряд калибровочно инвариантен. Если сделать калибровочное преобразование, равное элементу  $h$  в северном полюсе, то  $g(\tau)$  преобразуется в  $hg(\tau)h^{-1}$ . Так как группа  $G$  связна, то элемент  $h$  можно непрерывно перевести в единицу, и преобразованный контур гомотопичен исходному.

3. Рассмотрим мир, в котором имеется два черных ящика. Можно вычислить топологический заряд для каждого из них, окружая его сферой, не захватывающей второго источника поля. Можно также найти топологический заряд всей системы, помещая оба источника внутрь одной сферы. В последнем случае можно непрерывной деформацией превратить сферу в поверхность типа песочных часов, состоящую из двух сфер, внутри каждой из которых содержится черный ящик, соединенный трубкой, сжатой в одну точку посередине. Выберем эту точку в качестве «северного полюса» деформированной сферы. Теперь, если мы наматываем петли на эту поверхность, то контур обходит сначала первую сферу, а потом — вторую сферу; соответственно, контур в групповом пространстве является произведением контуров для каждой сферы в отдельности. Таким образом, топологический заряд системы является произведением (в групповом смысле) топологических зарядов ее подсистем. Между прочим, мы получили косвенное указание на то, что группа  $\pi_1(G)$  — абелева, так как очевидно, что не существенно, в каком порядке производятся указанные действия. Ниже этот результат будет получен более непосредственным образом.

4. Мы видим, что запрещенная область пространства, «черный ящик», существенна, если нам надо получить нетривиальную структуру. Действительно, если бы черного ящика не было вовсе, мы могли бы стянуть всю сферу в одну точку. В этом пределе соответствующий элемент  $\pi_1$  был бы равен единице, так как все контуры в пространстве стали бы тривиальными. Но если этот элемент не меняется при непрерывных преобразованиях и равен единице в пределе, то он должен быть равен единице с самого начала.

Если нам надо получить нетривиальный топологический заряд, то внутри ящика должно быть что-то, помимо несингулярных калибровочных полей. В разделе 4 мы увидим, что там есть на самом деле.

А теперь вернемся к математике. Как я и обещал, будет вычислена группа  $\pi_1$  для любой компактной связной группы Ли. Лучше всего подойти к этой задаче не прямо; я начну с классификации всех групп Ли, соответствующих данной алгебре Ли. Когда это будет сделано, вычисление  $\pi_1$  станет тривиальным.

Как известно, для любой компактной группы Ли ее алгебра Ли является прямой суммой некоторых основных алгебр Ли. Это алгебры Ли для группы  $U(1)$ , для трех бесконечных семейств классических групп  $SO(n)$ ,  $SU(n)$  и  $Sp(n)$  и для пяти исключительных групп Ли. В каждом из этих случаев существует односвязная группа, соответствующая данной алгебре Ли. Для группы  $U(1)$  это  $R$ , аддитивная группа вещественных чисел. Для алгебр, соответствующих группам  $SU(n)$  и  $Sp(n)$ , это сами эти группы. Для алгебры группы  $SO(n)$  это дважды покрывающая ее группа, которую иногда обозначают  $Spin(n)$ . Что касается исключительных групп, то мы не будем заниматься ими в настоящей работе.

Таким образом, составляя прямые произведения этих групп, мы можем построить односвязную группу, для которой алгебра Ли изоморфна алгебре Ли данной компактной связной группы Ли. Эта группа обозначается  $\bar{G}$ , ее называют универсальной покрывающей группы  $G$ . Причина такого названия в том, что она покрывает группу  $G$  так же, как  $SU(2)$  покрывает группу  $SO(3) = SU(2)/Z_2$ . Точнее говоря, можно показать, что группа  $G$  изоморфна фактор-группе  $\bar{G}/K$ , где  $K$  — некоторая дискретная подгруппа центра группы  $\bar{G}$ . (Напомню, что центром группы называется подгруппа, состоящая из всех элементов, которые коммутируют со всеми элементами группы. Это стандартная теорема теории групп Ли, и я прошу принять ее на веру.)

Итак, чтобы перечислить все группы, соответствующие данной алгебре Ли, нам нужно найти все дискретные подгруппы центра универсальной покрывающей  $\bar{G}$ . Во всех случаях, с которыми мы встретимся, будет легко найти подгруппы, если известен центр.

Центр группы  $\bar{G}$  изоморфен произведению центров множителей, в прямое произведение которых она разлагается. Для простых групп центр найти несложно. Группа  $U(1)$  — абелева, и она совпадает со своим центром. Центр группы  $SU(n)$  изоморфен  $Z_n$ . Центр группы  $Sp(n)$  состоит из двух элементов;  $+1$  и  $-1$ . Центр группы  $Spin(n)$  для четных  $n$  содержит два элемента, отображаемые в  $1$  в группе  $SO(n)$ , и двух элементов, отображаемых в  $-1$  в группе  $SO(n)$ . Для нечетных  $n$  группа  $SO(n)$  не содержит  $-1$ , поэтому центр  $Spin(n)$  состоит из двух элементов, отображаемых в  $1$  в группе  $SO(n)$ .

В качестве примера давайте посмотрим, как работает этот аппарат на примере  $\bar{G} = SU(2) \otimes SU(2)$ , и найдем все группы, обладающие соответствующей алгеброй Ли. Чтобы подчеркнуть различие между этими группами, я укажу также их неприводимые представления. Пусть элементы  $\bar{G}$  описаны, как обычно, парами матриц второго порядка,  $(g_1, g_2)$ , тогда центр состоит из четырех элементов,  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  и  $(-1, -1)$ . Центр имеет пять подгрупп; соответственно, существует пять различных групп с данной алгеброй Ли. Перечислим все случаи.

а)  $K$  состоит из одного элемента  $(1, 1)$ , тогда  $G = SU(2) \otimes SU(2)$ . Представления группы  $G$  имеют вид  $D(s_1)(g_1) \otimes D(s_2)(g_2)$ , где  $D(s)$  — представления группы  $SU(2)$ , а  $s_1$  и  $s_2$  — любые целые или полуцелые числа.

б)  $K$  состоит из двух элементов:  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ ,  $G = SU(2) \otimes SO(3)$ . Представления имеют тот же вид, что и в первом случае, но  $s_2$  может быть только целым.

в)  $K$  состоит из элементов  $(1, 1)$  и  $(-1, 1)$ . Этот случай отличается от предыдущего лишь перестановкой сомножителей.

г)  $K$  совпадает с центром и содержит все четыре элемента, при этом  $G = SO(3) \otimes SO(3)$ . Числа  $s_1$  и  $s_2$  — целые.

д)  $K$  состоит из двух элементов  $(1, 1)$  и  $(-1, -1)$ . Это наиболее интересный случай с разных точек зрения. Группа  $G$  не является прямым произведением простых групп,  $s_1$  и  $s_2$  — либо оба целые, либо оба полуцелые. Это похоже на структуру того типа, который встречается в реалистических теориях, где ненарушенная калибровочная группа обладает алгеброй Ли  $SU(3)$  (цвет)  $\otimes U(1)$  (электромагнетизм), однако не является прямым произведением, так как только частицы с ненулевой тривильностью имеют дробный заряд.

Теперь, когда в нашем распоряжении классификация всех групп Ли, легко вычислить для каждой из них первую гомотопическую группу. Можно рассуждать следующим образом. Вообще говоря, отображение  $\bar{G}$  в  $G$  не является взаимно-однозначным; возможно, что несколько элементов  $\bar{G}$  отображаются в один элемент  $G$ . Однако, так как  $K$  — дискретная подгруппа, для любого непрерывного контура в  $G$ , исходящего из единицы, существует единственный *непрерывный* контур в  $\bar{G}$ , также исходящий из единицы. Если контур в  $G$  замкнут, иными словами, если он заканчивается в единице, то контур в  $\bar{G}$  должен заканчиваться в каком-либо элементе, который отображается в единицу, т. е. в элементе подгруппы  $K$ . Рассмотрим два замкнутых контура в группе  $G$ , таких, что соответствующие контуры в группе  $\bar{G}$  заканчиваются в одном и том же элементе  $K$ . Так как группа  $\bar{G}$  — односвязна, то контуры в ней могут быть переведены один в другой непрерывной деформацией; соответственно, то же справедливо для контуров в группе  $G$ . Следовательно, гомотопические классы для замкнутых контуров в группе  $G$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами  $K$ . Легко показать, что произведение двух замкнутых контуров соответствует произведению двух групповых элементов, т. е. группа  $\pi_1(G)$  изоморфна  $K$ .

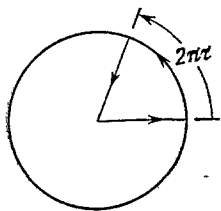


Рис. 4.

На этом мы заканчиваем ознакомление с гомотопической теорией и возвращаемся к магнитным монополям.

Конструкция Любкина полностью калибровочно инвариантна, но ее буквальное построение довольно утомительно, так как нужно для каждого значения  $\tau$  решать независимое дифференциальное уравнение (или, что то же самое, вычислять независимый интеграл от упорядоченной экспоненты). Процедуру можно существенно упростить, переходя к специальной калибровке, «струнной калибровке».

Эта калибровка очень похожа на ту, которую мы использовали при динамической классификации монополей. На каждой сфере радиуса  $r$  мы начинаем от северного полюса и с помощью калибровочного преобразования, зависящего от расстояния по меридиану, зануляем компоненту  $A_\theta$  ( $\theta, \varphi$ ). При этом в южном полюсе может возникнуть отличное от нуля значение  $A_\varphi$  ( $\pi, \varphi$ ), сингулярность типа дираковской струны, идущей от центра на юг. Когда мы делали это преобразование в разделе 2, в), предполагалось, что вектор-потенциал пропорционален  $1/r$ , поэтому было достаточно проделать калибровочное преобразование на какой-либо одной сфере. Здесь мы не делали такого предположения, так что теперь надо проделать то же самое при всех  $r$ . При этом может возникнуть ненулевое  $A_r$ , но это не относится к делу, так как в конструкцию, предложенную Любкиным,  $A_r$  никогда не входит.

Выберем теперь наше семейство замкнутых контуров, как показано на рис. 4. Это проекция сферы со стороны северного полюса, южный полюс отображен в периметр диска, соответствующий  $\theta = \pi$ . Контур, отвечающий некоторому значению  $\tau$ , идет из северного полюса к южному вдоль меридиана  $\varphi = 0$  и возвращается по меридиану  $\varphi = 2\pi\tau$ . Так как компонента  $A_\theta$

равна нулю, то

$$g(\tau) = P \exp \left[ - \int_0^{2\pi\tau} A_\varphi(\pi, \varphi) d\varphi \right]. \quad (3.60)$$

Таким образом, нужно вычислить интеграл только для одного контура, бесконечно малой петли, навитой на дираковскую струну. Это выражение становится особенно простым для одного из решений Годдара — Ньюита — Олайва, формула (3.47):

$$g(\tau) = \exp(-4\pi\tau Q). \quad (3.61)$$

Обладая этим выражением, мы можем немедленно вычислить топологический класс, к которому относится поле данного монополя. Начнем с обычного электромагнетизма, где  $G = U(1)$  и  $Q = -ieg$ . При  $eg = n/2$  имеем

$$g(\tau) = \exp(i2\pi n\tau). \quad (3.62)$$

При изменении  $\tau$  от 0 до 1 этот контур наматывается  $n$  раз на группу  $U(1)$ . Таким образом, каждому элементу группы  $\pi_1$  соответствует один и только один монополи. Топологический заряд здесь совпадает с магнитным зарядом. Совсем по-иному обстоит дело для других групп. Например, для  $SU(n)$  мы нашли бесконечно много полей типа Годдара — Ньюита — Олайва, хотя группа  $SU(n)$  односвязна,  $\pi_1$  состоит из единственного элемента. В случае группы  $SU(n)/Z_n$  также имеется бесконечно много динамических решений, в то время как гомотопическая группа  $\pi_1 = Z_n$  содержит только  $n$  элементов. (В качестве упражнения читатель может выяснить, какой элемент группы  $\pi_1$  соответствует каждому из полей.)

Таким образом, топологическая классификация, вообще говоря, грубее динамической. Этого и следовало ожидать: топологическая классификация основана на меньшем числе предположений и потому должна содержать меньше информации, чем динамическая.

На самом деле, я ввел аудиторию в заблуждение. Неправды в сказанном мною нет, но я утаил существенную часть информации: большинство полей монополей типа Годдара — Ньюита — Олайва нестабильны.

#### д) Крах динамической классификации

Для абелева монополя исследование на устойчивость тривиально, так как полевые уравнения линейны. В неабелевом случае уравнения существенно нелинейны. Полевые уравнения не линеаризуются даже на больших расстояниях от источника; если калибровочные поля спадают как  $1/r$ , то их производные и коммутаторы — одного порядка  $O(1/r^2)$ .

Рассмотрим малые колебания вокруг произвольного поля монополя в теории с группой  $SO(3)$ . (Это исследование на устойчивость было проведено впервые в работе Брандта и Нери<sup>17</sup>.) При этом будут, конечно, исследованы и монополи в теории с  $SU(2)$ , которые являются подмножеством монополей в группе  $SO(3)$ . Выполнив вычисление, мы обсудим обобщение этого анализа на произвольное поле монополя для любой калибровочной группы. Выкладки довольно длинные, я приведу их только схематически, а тот, кому это интересно, сможет без труда восполнить пробелы моего изложения.

Будем работать во временной калибровке  $A_0 = 0$  и запишем калибровочное поле как монополи в теории с группой  $SO(3)$  плюс малое возмущение

$$A = -\frac{i}{2} q \sigma_3 A_D + \delta A,$$

где, как указывалось в разделе 3, в),  $q = 0, 1/2, \dots$  и  $A_D$  — потенциал, содержащий дираковскую струну (см. формулу (2.64)). Как было показано,

$\pi_1(SO(3)) = Z_2$ , так что имеется только два топологических класса. Легко проверить, что все монополи с целыми  $q$  принадлежат к одному классу, а монополи с полужелыми  $q$  составляют другой класс. Запишем возмущение явно, в виде матрицы второго порядка,

$$\delta A = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \psi^* & -\varphi \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

где  $\varphi$  — вещественное векторное поле, а  $\psi$  — комплексное векторное поле. Если линеаризовать полевые уравнения по возмущению, то, как показывает простое вычисление, поле  $\varphi$  удовлетворяет свободному волновому уравнению

$$-\partial_0^2 \varphi = [\nabla [\nabla \varphi]], \quad (3.65)$$

а  $\psi$  удовлетворяет более сложному уравнению

$$-\partial_0^2 \psi = [D [D\psi]] + iqr^{-3} [r\psi] \equiv H\psi, \quad (3.66)$$

где

$$D = \nabla - iqA_D. \quad (3.67)$$

(Напомним, что  $q$  здесь играет роль произведения  $eg$  в обозначениях раздела 2.)

Устойчивость системы относительно малых возмущений определяется спектром собственных значений дифференциального оператора  $H$ . Если у оператора  $H$  имеется отрицательное собственное значение, то соответствующая мода характеризуется экспоненциальным ростом во времени, и поле — неустойчиво.

Оператор  $H$  обладает большим числом нулевых собственных значений. Этот факт является следствием инвариантности уравнений, записанных во временной калибровке, относительно не зависящих от времени калибровочных преобразований. Запишем такое преобразование в виде

$$g(x) = 1 - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \lambda(x) & \chi(x) \\ \chi^*(x) & -\lambda(x) \end{pmatrix} + \dots, \quad (3.68)$$

где многоточием обозначены члены второго и более высоких порядков по  $\lambda$  и  $\chi$ . Легко видеть, что при таком преобразовании

$$\psi \rightarrow \psi + D\chi. \quad (3.69)$$

Так как  $\psi = 0$  — решение уравнения (3.66), то ему удовлетворяет и преобразованное поле  $\psi = D\chi$ . Таким образом,

$$HD\chi = 0 \quad (3.70)$$

для произвольного  $\chi$ .

Назовем эти тривиальные собственные моды калибровочными. С физической точки зрения интересны моды, ортогональные к калибровочным. Для этих «физических» мод имеем

$$\int d^3x (\psi^* D\chi) = 0 \quad (3.71)$$

для любого  $\chi$ . Отсюда следует, что

$$(D\psi) = 0. \quad (3.72)$$

Как всегда, задача упрощается при учете ротационной инвариантности. Оператор  $H$  коммутирует с оператором

$$J = L + S, \quad (3.73)$$

где, как и в разделе г) гл. 2,

$$\mathbf{L} = -i [\mathbf{rD}] - q\mathbf{r} r^{-1}, \quad (3.74)$$

а  $\mathbf{S}$  — обычный оператор спина для векторного поля, который определяется равенством

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{b} = i [\mathbf{ab}] \quad (3.75)$$

для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Как было показано в разделе г) гл. 2, орбитальный угловой момент принимает значения

$$l = q, q + 1, q + 2, \dots \quad (3.76)$$

Поэтому, согласно обычным правилам сложения угловых моментов, полный момент принимает значения

$$\begin{aligned} j &= q - 1, q, q + 1, \dots, \quad q \geq 1, \\ j &= q, q + 1, \dots, \quad q = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

(Здесь не указано, сколько раз входит каждое значение  $j$ .)

Формулу (3.75) можно использовать, чтобы исключить из оператора  $H$  векторные произведения, в результате

$$H = -(\mathbf{SD})^2 + q (\mathbf{Sr}) r^{-2}. \quad (3.78)$$

Теперь можно воспользоваться непосредственно методами раздела г) гл. 2, чтобы получить выражение для оператора  $H$  на функциях с заданным  $j$ :

$$H\psi = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{j(j+1) - q^2}{r^2} \right] \psi + \mathbf{X}(\mathbf{D}\psi) + \mathbf{D}(\mathbf{Y} \mathbf{X}). \quad (3.79)$$

Здесь векторы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  заданы довольно громоздкими выражениями, явный вид которых для нас не существен, так как соответствующие члены не дают вклада в матричные элементы оператора  $H$  между физическими состояниями. (Член с  $\mathbf{X}$  обращает в нуль состояние справа, а член с  $\mathbf{Y}$  обращает в нуль состояние слева.)

Теперь все ясно. При  $q \geq 1$  допустимо состояние с  $j = q - 1$ , и

$$j(j+1) - q^2 = -q, \quad (3.80)$$

т. е. центробежный потенциал оказывается притягивающим, и это плохо. Насколько это плохо, видно, если мы вычислим среднее значение оператора  $H$  по состоянию, заданному радиальной функцией

$$\psi = \begin{cases} 0, & r < R, \\ r^{-1} (V\bar{r} - V\bar{R}) \exp\left(-\frac{r}{a}\right), & r \geq R, \end{cases} \quad (3.81)$$

где  $R$  и  $a$  — положительные числа. Среднее значение равно

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \psi^* \left( -\frac{d^2}{dr^2} - 2r^{-1} \frac{d}{dr} - \frac{q}{r^2} \right) \psi = \\ &= \int_0^\infty dr \left[ r^2 \left( \frac{d\psi}{dr} \right)^2 - q\psi^2 \right] = \left( \frac{1}{4} - q \right) \ln a + \dots; \end{aligned} \quad (3.82)$$

где многоточием обозначены члены, конечные в пределе  $a \rightarrow \infty$ . Для любого фиксированного  $R$  это выражение становится отрицательным при достаточно большом  $a$ .

Таким образом, дело не только в том, что оператор  $H$  имеет отрицательные собственные значения; существование этих собственных значений совершенно не чувствительно к конфигурации калибровочного поля на малых

расстояниях (в действительности, на любых конечных расстояниях). Это очень хорошо, так как мы не можем доверять своим формулам на малых расстояниях, внутри черного ящика. Все поля монополей с  $q \geq 1$  неустойчивы относительно произвольных малых возмущений на сколь угодно больших расстояниях; следовательно, они распадаются, испуская неабелево излучение.

(Отметим, что речь идет именно о физических модах. Вычисление ковариантной производной — операция, инвариантная относительно вращений. Поэтому, если поле  $\psi$  имеет  $j = q - 1$ , то такой же полный момент у  $D\psi$ . Однако, как было показано в разделе 2, г), у всякой ненулевой скалярной функции  $j \geq q$ , поэтому  $D\psi = 0$ .)

Для группы  $SO(3)$  существуют только два стабильных монополя,  $q = 0$  (т. е. монополю отсутствует вовсе) и  $q = 1/2$ , и каждый из них соответствует одному из топологических классов. Вполне естественно, что в каждом топологическом классе должен существовать хотя бы один устойчивый монополю: топологический заряд не может быть унесен излучением, так как перенос излучения сквозь сферу Любкина может быть представлен как один из видов непрерывной деформации. Удивительным является то, что для каждого топологического класса существует всего один устойчивый монополю. Это справедливо и для группы  $SU(2)$ . Эта группа односвязна, т. е. имеется единственный топологический класс, и единственное устойчивое решение для  $SU(2)$  отвечает  $q = 0$ .

Продолав нелегкую работу по исследованию устойчивости для группы  $SO(3)$ , мы можем обойтись без исследования дифференциальных уравнений для более сложных групп. Рассмотрим, например, случай группы  $SU(n)/Z_n$ .

Запишем калибровочное поле в виде матрицы  $n$ -го порядка, связанной с фундаментальным представлением (см. формулу (3.55)). Элементы матрицы имеют вид

$$A_{ij} = -\frac{i}{2} [q_i \delta_{ij} A_D(x) + \delta A_{ij}], \quad (3.83)$$

(здесь нет суммы по  $i$ ). В этой формуле

$$q_i = \frac{r}{n} + \text{целое число}, \quad (3.56')$$

и сумма всех  $q$  равна нулю. Легко проверить, что число  $r = 0, 1, \dots, n-1$  нумерует топологический класс монополя. Легко видеть, что  $\delta A_{ij}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению того же вида, которому удовлетворяет  $\psi$  (см. формулу (3.66)), с подстановкой

$$q \rightarrow q_i - q_j. \quad (3.84)$$

Соответственно, условие инфинитезимальной стабильности имеет вид

$$q_i - q_j = 0, \pm 1 \quad (3.85)$$

для всех  $i, j$ . Это условие может быть выполнено, только если  $q_i$  могут принимать одно из двух значений. Так как сумма всех  $q$  должна быть равна нулю, то одно из этих значений обязательно неотрицательно. Расставим  $q_i$  в таком порядке, что первые  $s$  из них неотрицательны и равны друг другу, причем

$$q_i = q_1 \geq 0, \quad 1 \leq i \leq s. \quad (3.86a)$$

Следовательно, по формуле (3.85)

$$q_i = q_1 - 1, \quad s + 1 \leq i \leq n. \quad (3.86b)$$

Сумма всех  $q$  равна нулю, только если

$$q_1 = \frac{n-s}{n}. \quad (3.87)$$

Таким образом,  $r = n - s$ ; в этом случае также на каждый топологический класс имеется по одному стабильному монополю.

Этот подход непосредственно распространяется на все классические группы, а также на исключительные группы Ли. С другой стороны, задачу можно решить сразу в общем виде, используя структурную теорию групп Ли, если вы умеете обращаться с такими понятиями, как корни и веса<sup>18</sup>. Здесь не будет изложен ни тот, ни другой подход; отметим только, что независимо от способа получается один ответ: в каждом топологическом классе имеется один и только один устойчивый монополю типа Годдара — Ньюита — Олайва; лишь топология обеспечивает устойчивость решения.

Вероятно, полезно рассмотреть в связи с этим одну простую механическую задачу, обладающую тем же свойством. Пусть петля на эластичной нити натянута на сферическую поверхность. Будем считать, что потенциальная энергия нити пропорциональна ее длине. Тогда все независимые от времени решения уравнений движения, — это замкнутые геодезические на сфере. Эти геодезические легко перечислить: тривиальное решение, когда петля стянулась в одну точку, один обход по большому кругу сферы, два обхода по большому кругу и т. д. Так как сфера — односвязна, то имеется единственный (тривиальный) топологический класс. Очевидно, что здесь стабильность может быть обеспечена только топологией. Если петля натянута на сферу, надо лишь чуть-чуть сдвинуть ее, и она тут же стянется в одну точку.

#### е) Одно приложение

Топология — сила! Если мы можем описать динамическую систему на топологическом языке, то это часто позволяет выяснить качественные особенности ее поведения, не погрязая в детальных количественных вычислениях. Обсудим в качестве примера силу, действующую между неабелевыми монополями, находящимися на некотором расстоянии друг от друга. (Мы предполагаем, что расстояние это достаточно велико только потому, что нам пока неизвестно, как устроены сами монополи на малых расстояниях.)

Для абелевых монополей сила может быть притяжением или отталкиванием, в зависимости от того, одинаковы или противоположны знаки магнитных зарядов. Для неабелевых монополей дело обстоит по-другому: если группа  $G$  — полупростая, то всегда возникает притяжение. («Полупростая» означает, что группа  $G$  не содержит множителей  $U(1)$ , которые могли бы привести к появлению отталкивания, которое пересилило бы притяжение, обусловленное другими множителями.)

Начнем с  $SO(3)$ , а затем обобщим результат. Как было показано в предыдущем разделе, в этом случае имеется единственный устойчивый монополю

$$A = -\frac{i}{4} \sigma_3 A_D(x). \quad (3.88)$$

Разумеется, есть много калибровочно эквивалентных способов записать это поле; в частности, выражение с обратным знаком описывает тот же монополю в другой калибровке. Соответственно, поле двух монополей можно записать двумя способами

$$A = -\frac{i}{4} \sigma_3 [A_D(x-r_1) \pm A_D(x-r_2)]. \quad (3.89)$$

Эта суперпозиция двух решений является решением, так как оба члена принадлежат к одной и той же абелевой подалгебре, и нелинейные коммутаторные члены в уравнениях Янга — Миллса обращаются в нуль. Если бы мы попытались сложить поле монополя со струной, направленной вдоль оси 3, с полем со струной, направленной, например, вдоль оси 2, то возникли

бы трудности, связанные с появлением нелинейных членов. Может быть, есть и другие, менее тривиальные, способы сложить вместе два монополя, но мне не удалось их найти. В задаче, которая будет сейчас рассмотрена, я буду считать, что есть только два указанных варианта.

В абелевом случае выражение вида (3.89) можно рассматривать либо как суперпозицию двух монополей (для знака плюс), либо как монополь и антимонополь (для знака минус). Еще раз напомним, что в данном случае это не так. Знак можно изменить с помощью калибровочного преобразования; оба знака соответствуют двум различным способам соединить вместе одну и ту же пару монополей. Здесь дело обстоит так же, как при соединении двух объектов со спином  $1/2$ : может получиться система со спином 0 или 1.

Несмотря на различие в интерпретации, вычисление энергии взаимодействия, содержащейся в магнитном поле, проводится так же, как в абелевой калибровочной теории:

$$E_{\text{int}} \propto \pm |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{-1}, \quad (3.90)$$

причем получаем отталкивание, если знак — плюс, и притяжение, если знак — минус. Отличие от абелева случая появится при исследовании поля на больших расстояниях

$$\mathbf{A} = -\frac{i}{4} \sigma_3 \mathbf{A}_D(\mathbf{x}) [1 \pm 1] + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (3.91)$$

Оба поля относятся к типу, рассмотренному в разделе в) гл. 3; иначе и быть не может, так как мы имеем дело с не зависящими от времени решениями уравнения Янга — Миллса. Оба решения принадлежат к одному и тому же топологическому классу, так как топологический заряд системы, состоящей из двух монополей, всегда равен произведению топологических зарядов отдельных монополей, независимо от того, как распределились поля. Но только одна из полевых конфигураций устойчива, так как в каждом топологическом классе может быть только одно устойчивое решение; и устойчивым является поле со знаком минус.

Таким образом, даже если бы нам удалось соединить два монополя так, чтобы возникло отталкивание, то они не задержались бы в этом состоянии: испустив неабелево излучение, система перешла бы в состояние, в котором поле описывается формулой со знаком минус, и монополи притягиваются друг к другу. Ситуация здесь аналогична системе, состоящей из двух магнитных стержней, каждый из которых может вращаться вокруг своего центра масс. При любой начальной ориентации магнитов они выстроятся так, чтобы притяжение между ними было максимальным (т. е. антипараллельно). В нашем случае выстраивание происходит не в геометрическом, а во внутреннем пространстве, но физика — в основном та же самая.

Перейдем теперь к случаю группы  $SU(n)/Z_n$ . Здесь мы имеем  $n$  устойчивых полей монополей, так что два ненулевых поля могут быть не эквивалентны друг другу. Тем не менее, как будет показано, всегда возникает притяжение. Запишем поле двух монополей в виде

$$\mathbf{A} = Q_1 \mathbf{A}_D(\mathbf{x} - \mathbf{r}_1) + Q_2 \mathbf{A}_D(\mathbf{x} - \mathbf{r}_2). \quad (3.92)$$

Обозначения здесь нуждаются в некотором пояснении.  $Q_1$  и  $Q_2$  — матрицы  $n$ -го порядка, присутствующие в выражении для поля одного монополя. Как и прежде, мы хотим избежать появления нелинейных членов в уравнениях Янга — Миллса, и потому выберем коммутирующие матрицы  $Q_1$  и  $Q_2$ , а это значит, что они могут быть одновременно диагонализированы. При этом остается еще свобода в перестановке собственных значений матрицы  $Q_2$  при фиксированном их порядке в  $Q_1$ . Всего имеется  $n!$  перестановок собственных значений, и через  $P$  обозначается одна из перестановок, при этом получается матрица  $Q_2^P$ . Различные способы соединения двух монополей

отличаются выбором перестановки  $P$ , но, как и в случае  $SO(3)$ , полный топологический заряд не зависит от  $P$ .

Так как в каждом топологическом классе есть лишь одно устойчивое решение, то почти при всех выборах  $P$  возникает поле, неустойчивое на больших расстояниях. Нам нужно найти энергию в единственной стабильной конфигурации. Как и прежде, при любом  $P$  имеем

$$E_{\text{int}} \propto - \frac{\text{Sp}(Q_1 Q_2)}{|r_1 - r_2|}. \quad (3.93)$$

(Знак минус здесь обусловлен антиэрмитовостью  $Q$ .) Если просуммировать по всем перестановкам, то

$$\sum_P Q_2^P = (n-1)! \text{Sp}(Q_2) = 0. \quad (3.94)$$

Итак, энергия, усредненная по всем конфигурациям, равна нулю, и потому энергия единственной устойчивой конфигурации, в которой энергия минимальна, должна быть отрицательной. Таким образом, и в этом случае возникает притяжение.

Читатель, знакомый с общей теорией групп Ли, может заметить, что этот довод тривиально обобщается на любую группу. Единственное, что нам было нужно, это обращение в нуль следа матрицы  $Q$ , что справедливо для произвольной полупростой группы. (Отмечу для специалистов, что необходимое здесь точное утверждение состоит в том, что лишь нулевой элемент картановской подалгебры инвариантен относительно группы Вейля.) Таким образом, два монополя притягиваются и в этом случае.

#### 4. ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ МОНОПОЛЯ

##### а) Спонтанное нарушение симметрии: молниеносный обзор

До сих пор мы не подходили к монополю близко. Теперь пришло время вскрыть черный ящик и посмотреть, можно ли продолжить до  $r = 0$  структуры, найденные нами на больших расстояниях.

Будем работать в рамках калибровочной теории со спонтанным нарушением симметрии. Теории такого рода — насущный хлеб современной физики высоких энергий; тем не менее я попытаюсь дать молниеносный обзор этого предмета, подобно тому, как это было сделано в п. а) гл. 3, но еще более сжато. Как и в том случае, моя цель — объяснить общие обозначения и подчеркнуть наиболее важные пункты.

В п. а) гл. 3 мы различали два вида полей в теории: калибровочные поля и поля материи. Теперь нам будет удобно разделить поля материи на две группы: скалярные поля (будем считать для простоты, что все они вещественны) и все остальные (как правило, спинорные) поля. Мы слегка изменим обозначения и включим в вектор  $\Phi$  только скалярные поля.

Ограничимся теориями, в которых плотность лагранжиана материи имеет вид

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} D_\mu \Phi D^\mu \Phi - U(\Phi) + \dots, \quad (4.1)$$

где  $U$  — некоторая функция, инвариантная относительно группы  $G$ , и многоточечные обозначены члены, зависящие от остальных полей.

С точностью до калибровочных преобразований, основные состояния в теории — это те, в которых все нескаларные поля равны нулю, а скалярные поля не зависят от времени и пространственных координат и доставляют абсолютный минимум функции  $U$ . Будем использовать в этой классической ситуации квантовый язык и назовем указанные основные состояния «вакуумами», а соответствующие значения полей  $\Phi$  — «вакуумными средними полями  $\Phi$ ». Будем считать также, что к функции  $U$  добавлена константа, так что энергия основного состояния равна нулю.

Пусть  $\langle \Phi \rangle$  — некоторый (произвольно выбранный) минимум, тогда  $g \langle \Phi \rangle$  — также минимум для любого элемента  $g$  группы  $G$ . Предположим, что все минимумы функции  $U$  имеют такой вид. Тогда все основные состояния физически эквивалентны, и, не теряя общности, мы можем ограничиться случаем, когда вакуумное среднее поля  $\Phi$  равно данному  $\langle \Phi \rangle$ . (При таком предположении исключаются такие интересные явления, как случайное вырождение, когда основные состояния не могут быть получены одно из другого преобразованием симметрии, и голдстоуновские бозоны, когда эти состояния связаны симметрией, не являющейся калибровочной. Указанное предположение сделано только для того, чтобы по возможности упростить аргументацию; нетрудно распространить анализ на более общий случай.)

Рассмотрим подгруппу  $H$  в группе  $G$ , как множество преобразований, оставляющих вакуумное среднее  $\langle \Phi \rangle$  инвариантным,

$$h \in H: h \langle \Phi \rangle = \langle \Phi \rangle. \quad (4.2)$$

Говорят, что группа  $G$  спонтанно нарушена до подгруппы  $H$ . Калибровочные поля, соответствующие подгруппе  $H$ , остаются безмассовыми, остальные калибровочные поля комбинируются со скалярными полями, и в результате образуются массивные векторные поля. (Это и есть знаменитый механизм Хиггса.) Массовая матрица для векторных полей имеет вид

$$\mu_{ab}^2 = f_a T_a \langle \Phi \rangle f_b T_b \langle \Phi \rangle \quad (4.3)$$

(здесь не имеется в виду суммирования по повторяющимся индексам). Скалярные поля, поглощенные массивными векторными полями, соответствуют возмущениям вакуума вида  $\delta\Phi = T_a \langle \Phi \rangle$ .

При другом выборе  $\langle \Phi \rangle$  мы получили бы другую подгруппу  $H$ , изоморфную исходной. Иногда нам придется работать в такой калибровке, когда вакуумное среднее от  $\Phi$  меняется в пространстве; необходимо помнить, что в этом случае меняется и подгруппа  $H$ .

В качестве примера рассмотрим случай  $G = SO(n)$ , пусть  $\Phi$  —  $n$ -компонентный вектор, и

$$U = \frac{1}{4} \lambda (\Phi\Phi - c^2)^2, \quad (4.4)$$

где  $\lambda$  и  $c$  — положительные числа. Если мы выберем такой вакуум, что

$$\langle \Phi^a \rangle = c \delta^{an}, \quad a = 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

то  $H$  — подгруппа вращений  $(n-1)$ -мерного подпространства, натянутого на первые  $(n-1)$  осей координат, т. е.  $H = SO(n-1)$ . Из исходных  $n(n-1)/2$  калибровочных полей  $(n-1)(n-2)/2$  остаются безмассовыми, а остальные  $n-1$  комбинируются с  $n-1$  скалярных полей и приобретают массу; одно скалярное поле остается нетронутым.

В дальнейшем мы будем использовать эту модель при  $n=3$ . Этот случай отчасти напоминает реальную ситуацию тем, что здесь имеется единственный безмассовый калибровочный мезон, который можно отождествить с фотоном. По этой причине такая теория была использована Джорджи и Глэшоу<sup>19</sup> в остроумной, но неправильной, альтернативе модели Вайнберга — Салама, которую иногда называют моделью Джорджи — Глэшоу.

#### б) Как делаются монополи \*)

Теперь будет дано объяснение, как возникают магнитные монополи в теориях калибровочных полей со спонтанным нарушением. Это явление было впервые открыто 'т Хоофтом<sup>2</sup> и Поляковым<sup>3</sup>, рассмотревшими

\*) Изложенная здесь теория почерпнута из многих источников, ссылки можно найти в лекциях автора<sup>5</sup>.

только что описанную модель с группой  $SO(3)$ . Это один из самых великолепных эффектов в теории поля: магнитные монополи чудесным образом появляются в теориях, вообще не содержащих фундаментальных полей с магнитным зарядом.

Оказалось, что нескалярные поля материи не играют никакой роли в образовании монополей, поэтому для простоты я буду предполагать, что их просто нет в теории. Мы будем исследовать несингулярные полевые конфигурации с конечной энергией в некоторый фиксированный момент времени. Позднее будет рассмотрена эволюция этих конфигураций во времени.

Плотность энергии поля равна

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} D\Phi D\Phi + U(\Phi) + \text{другие положительные члены.} \quad (4.6)$$

Для того чтобы определяющий энергию интеграл сходил, необходимо, чтобы каждый из указанных двух членов обращался в нуль при больших  $r$ . Чтобы упростить вывод, предположим, что они строго равны нулю вне сферы радиуса  $R$ :

$$U = D\Phi = 0, \quad r \geq R. \quad (4.7)$$

Следует подчеркнуть, что это совершенно произвольное предположение. Оно не следует из конечности энергии и вовсе не выполняется ни в одном из известных решений полевых уравнений с конечной энергией. Сделано оно здесь только из педагогических соображений, чтобы можно было проследить за выводом, не усложненным анализом того, насколько быстро и однородно достигаются предельные значения. Пусть читатель, искушенный в соответствующей математике, сделает рассуждение более общим, используя более слабые и менее уязвимые предположения.

Формула (4.7) означает, что поле  $\Phi$  соответствует минимуму функции  $U$  при  $r \geq R$ , но оно может оказаться в различных минимумах для различных точек пространства. Всегда можно, однако, совершить такое калибровочное преобразование, что

$$\Phi = \langle \Phi \rangle, \quad r \geq R. \quad (4.8)$$

Сделаем это в два этапа. Произведем сначала калибровочное преобразование, зависящее только от  $r$ , так, чтобы поле  $\Phi$  было приведено к  $\langle \Phi \rangle$  вдоль полуоси, направленной к северному полюсу при  $r \geq R$ . Затем при каждом фиксированном  $r$  мы произведем калибровочные преобразования вдоль меридианов, начиная от северного полюса, и превратим  $\Phi$  в  $\langle \Phi \rangle$  всюду вне сферы. На втором этапе может возникнуть сингулярность типа дираковской струны вдоль полуоси, направленной к южному полюсу, т. е. там, где все меридианы вновь пересекаются.

Из формул (4.7) и (4.8) следует, что

$$D\Phi = A\langle \Phi \rangle = 0, \quad r \geq R. \quad (4.9)$$

Итак, после проделанных калибровочных преобразований в области пространства  $r \geq R$  остаются лишь калибровочные поля, соответствующие ненарушенной группе  $H$ . Разумеется, именно этого и следовало ожидать: только безмассовое поле может тянуться до больших расстояний.

Таким образом, мы пришли к той же структуре, что в гл. 3: вне черного ящика, находящегося внутри сферы радиуса  $R$ , нет ничего, кроме безмассовых калибровочных полей. Единственное изменение состоит в переобозначении: группа, обозначавшаяся  $G$  в гл. 3, теперь обозначена  $H$ . В результате вне сферы мы можем воспользоваться обычной классификацией полевых конфигураций в терминах топологических зарядов, элементов группы  $\pi_1(H)$ .

Если бы внутри сферы были только калибровочные поля, связанные с группой  $H$ , то несингулярное поле могло бы иметь только тривиальный топологический заряд. Об этом уже шла речь в п. г) гл. 3. Рассмотрим эту

аргументацию еще раз. Каждой сфере сопоставляется контур в групповом пространстве. Если взять сферу вокруг монополя и стянуть ее в точку, то этот контур будет стремиться к определенному пределу. Таким образом, существуют две возможности. Либо контур меняется непрерывно, и тогда он с самого начала принадлежит к тривиальному топологическому классу, либо непрерывного изменения нет, и тогда мы имеем дело с сингулярностью. (Отметим, что топологический заряд калибровочно инвариантен, так что те сингулярности, которые связаны с выбором калибровки, как дираковские струны, не играют роли: существенны только настоящие калибровочно инвариантные сингулярности.)

Посмотрим теперь, чем же отличается рассматриваемый здесь случай. Внутри черного ящика есть не только калибровочные поля группы  $H$ , но и поля, связанные с другими генераторами группы  $G$ , и контур может выйти из подмногообразия  $H$  в более широкую группу  $G$ . Вполне возможно, что контур, гомотопически нетривиальный в пространстве  $H$ , является гомотопически тривиальным в  $G$ : топологический узел, который нельзя развязать в более узком пространстве, сразу распадается в более широком. Благодаря этому мы можем получить нетривиальный топологический заряд без сингулярности.

То же самое можно выразить на несколько более абстрактном языке. Так как  $H$  — подгруппа  $G$ , то всякий контур в  $H$  является контуром в  $G$ . Таким образом, осуществляется отображение  $\pi_1(H)$  в  $\pi_1(G)$ . Ядро этого отображения определяется, как всегда, как подгруппа, отображаемая в единицу. Таким образом, наш результат можно сформулировать следующим образом:

*Несингулярный монополю появляется, если топологический заряд принадлежит ядру отображения  $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G)$ .*

Мы убедились, что это условие необходимо. Теперь будет показано, что оно достаточно: будет построена несингулярная и обладающая конечной энергией полевая конфигурация для любого топологического заряда, принадлежащего ядру указанного отображения.

Для любого топологического заряда существует тянущееся до больших расстояний поле, соответствующее полю типа Годдара — Ньюта — Олайва,

$$A_{GNO} dx = Q (1 - \cos \theta) d\varphi; \quad (4.10)$$

здесь  $Q$  — элемент алгебры Ли группы  $H$ :

$$Q \langle \Phi \rangle = 0, \quad (4.11)$$

а контур

$$g(\tau) = \exp(4\pi Q \tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (4.12)$$

принадлежит указанному гомотопическому классу.

В группе  $G$  контур  $g(\tau)$  гомотопичен тривиальному контуру. Поэтому существует непрерывная функция двух переменных,  $g(\theta, \varphi) \in G$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , такая, что

$$g(0, \varphi) = g(\theta, 0) = g(\theta, 2\pi) = 1, \quad (4.13a)$$

и

$$g(\pi, \varphi) = \exp(2Q\varphi). \quad (4.13b)$$

Используем эту функцию, чтобы определить наши векторные и скалярные поля при  $r \geq R$ :

$$\Phi = g \langle \Phi \rangle, \quad (4.14a)$$

$$A = g A_{GNO} g^{-1} + g \nabla g^{-1}. \quad (4.14b)$$

Это просто калибровочное преобразование поля (4.10), и потому система обладает конечной энергией. Однако дираковская струна исчезла совершенно: все наши поля явно не имеют сингулярностей для всех углов. Цена, которую пришлось уплатить за это — угловая зависимость вакуумного ожидания скалярного поля  $\Phi$ .

Теперь нетрудно продолжить поля в область  $r \leq R$ :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \Phi(R, \theta, \varphi), \quad (4.15a)$$

$$A(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 A(R, \theta, \varphi). \quad (4.15b)$$

Эти поля обладают конечной энергией и явно не сингулярны вплоть до  $r = 0$ . Отметим, что такое продолжение во внутреннюю область было бы невозможно, если бы мы сначала не устранили струну: при простом масштабном преобразовании поля Годдара — Нюита — Олайва условие квантования нарушается. На этом заканчивается доказательство достаточности.

То обстоятельство, что указанное выше условие существования несингулярного монополя является необходимым и достаточным, делает его жемчужиной теории монополей, и не удивительно, что мы постарались выделить его жирно. С помощью этого условия можно сразу сказать, не решая дифференциальных уравнений, допускает ли данная теория несингулярные монополи, и если допускает, то какого рода. Приведу три примера:

1)  $G = SO(3)$  и  $H = SO(2)$ . Эта теория описана в конце раздела а) гл. 4, она называется моделью Джорджи — Глэшоу. Если отождествить ненарушенную группу с электромагнитной калибровочной симметрией, то, рассматривая поле на больших расстояниях, легко видеть, что допустимы значения  $eg = 0, \pm 1/2, \pm 1$  и т. д. С точки зрения топологии, такие монополи отвечают контурам, число обходов которых вокруг группы  $SO(2)$  равно  $2eg$ . Только контуры, обходящие вокруг  $SO(2)$  четное число раз, можно деформировать в тривиальный контур в группе  $SO(3)$ ; следовательно,  $eg$  может принимать только целые значения,  $eg = 0, \pm 1$ , и т. д.

2)  $G = U(2)$  и  $H = U(1)$ , причем  $H$  погружается в  $G$  так, что ее преобразования не затрагивают первого базисного вектора в комплексном двумерном пространстве, в котором действуют унитарные преобразования. Это модель Вайнберга — Салама. Группа  $U(2)$  локально изоморфна  $U(1) \times SU(2)$ , и любой контур, обходящий вокруг  $H$ , обходит также вокруг фактора  $U(1)$  в этом прямом произведении. Таким образом, решение не сингулярно только при тривиальном топологическом заряде, и  $eg = 0$ .

3)  $G$  — любая полупростая группа, и  $H$  — любая ее подгруппа, содержащая множитель  $U(1)$ . Такой вид имеют модели Великого объединения, упоминавшиеся в гл. 1. Гомотопическая группа  $\pi_1(G)$  конечна, а группа  $\pi_1(H)$  — бесконечна, так что ядро отображения должно быть бесконечно, и теория обязательно содержит монополи, как и утверждалось в гл. 1. Разумеется, не зная детального устройства модели, нельзя точно сказать, какие магнитные заряды разрешены.

Мы рассмотрели здесь несингулярные полевые конфигурации, обладающие конечной энергией в фиксированный момент времени. Если задача с начальным условием хорошо поставлена, то любая такая конфигурация эволюционирует с течением времени согласно уравнениям движения и вовсе не обязана быть не зависящей от времени. Поэтому проведенный нами анализ не указывает на возможность построения монополей, не зависящих от времени. Это не важно. Мы, теоретики, любим решения, не зависящие от времени, потому что их легко изучать, а мы ленивы. Если же экспериментатор найдет черный ящик, окруженный полем монополя, то интересно будет выяснить, постоянны ли содержащиеся в ящике поля или они осциллируют, вращаются, меняются эргодически.

Одно нам известно о развитии во времени полевых конфигураций с нетривиальным топологическим зарядом. Как бы то ни было, они не могут совершенно рассосаться, ускользнув из нашего ящика в виде обычного излучения, массивного или безмассового. Причина этого в том, что излучение не уносит топологического заряда, и топологический заряд сохраняется. Топология — сила!

## в) Монополю 'т Хоофта — Полякова

Несмотря на сделанное выше грустное высказывание о решениях, не зависящих от времени, я все же уделю некоторое время обсуждению знаменитого, не зависящего от времени, решения, найденного 'т Хоофтом<sup>2\*</sup> и Поляковым<sup>3</sup> в модели Джорджи — Глашоу, формула (4.4). Тяжело искать не зависящие от времени решения в общем виде, при этом приходится иметь дело с несколькими функциями трех переменных. Фокус состоит в том, чтобы упростить задачу и искать решения, которые были бы симметричны относительно остроумно выбранной подгруппы общей группы симметрии теории.

Оказалось, что к успеху приводит использование группы  $SO(3)$ , состоящей из одновременных пространственных и внутренних поворотов. Скалярные поля, инвариантные относительно таких преобразований, непременно имеют вид

$$\Phi^a = \frac{f(r^2) r^a}{r}, \quad (4.16)$$

где изотопический индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3. Чтобы интеграл, определяющий энергию, не расходился, необходимо наличие конечного предела у функции  $f(r^2)$  при  $r \rightarrow \infty$ . Отсутствие сингулярности при  $r = 0$  приводит к условию  $f(0) = 0$ .

Такое решение инвариантно не только относительно преобразований, принадлежащих к указанной группе  $SO(3)$ , но и относительно отражений пространства, если считать поле  $\Phi$  псевдоскалярным. Калибровочное поле, инвариантное относительно обеих симметрий, находится однозначно, оно имеет вид

$$A^{ia} = h(r^2) \varepsilon^{iak} r_k. \quad (4.17)$$

Конечность энергии накладывает ограничения на поведение функции  $h$  при больших  $r$ , но мы не будем теперь останавливаться на этом.

Итак, определение решения, не зависящего от времени, стало простой задачей вариационного исчисления: нужно минимизировать энергию, записанную в виде функционала от двух функций одного переменного. Эта задача вполне доступна как для функционального, так и для численного анализа. Думаю, нетрудно поверить, что можно доказать существование решения, а также найти его с хорошей точностью с помощью карманного калькулятора.

У нас есть решение, не зависящее от времени, но монополю ли это? Проще всего ответить на этот вопрос, преобразуя решение к струнной калибровке. Из формулы (4.16) следует

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) \Phi(r, \theta = 0), \quad (4.18)$$

где

$$g(\theta, \varphi) = \exp(T_3 \varphi) \exp(T_2 \theta) \exp(-T_3 \varphi), \quad (4.19)$$

а  $T_a$  — генераторы группы  $SO(3)$ . Формула (4.18) справедлива, даже если отбросить третий множитель в формуле (4.19), он включен здесь для того, чтобы преобразование  $g$  было определено при  $\theta = 0$ .

Произведем теперь калибровочное преобразование, используя элемент  $g^{-1}$ :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) \rightarrow g^{-1} \Phi = \Phi(r, \theta = 0). \quad (4.20)$$

При этом вакуумное ожидание поля  $\Phi$  оказывается параллельным во всем пространстве, и ненарушенная подгруппа  $H = SO(2)$  генерируется оператором  $T_3$ . Это же калибровочное преобразование действует на векторное поле

$$A \rightarrow g^{-1} A g + g^{-1} \nabla g. \quad (4.21)$$

Только второй член в этом выражении приводит к появлению сингулярности типа дираковской струны, направленной к южному полюсу. На этом луче

$$g(\pi, \varphi) = \exp(T_2 \pi) \exp(-2T_3 \varphi), \quad (4.22)$$

и

$$A_\varphi(\pi, \varphi) \rightarrow -2T_3. \quad (4.23)$$

Интегрируя по контуру, мы видим, что группа  $SO(2)$  обходится дважды при однократном обходе вокруг струны. Таким образом, мы получили монополю с  $eg = 1$ , минимальное значение, допустимое согласно топологическим рассуждениям, приведенным в п. б) гл. 4.

### г) Почему монополи тяжелы?

Во введении было сказано, что монополи, как правило, очень массивны. Теперь, когда мы понимаем их топологическую структуру, можно выяснить причину этого.

Начнем с теории, в которой все тяжелые калибровочные бозоны имеют близкие массы, порядка некоторой характерной массы  $\mu$ , а все калибровочные константы связи порядка некоторой характерной константы  $e$ . В любой неизлучающей конфигурации тяжелые калибровочные поля спадают с расстоянием как  $\exp(-\mu r)$ . Поэтому следует ожидать, что сердцевина монополя, т. е. область, в которой тяжелые поля существенны, имеет размер порядка  $1/\mu$ . Вне этой сердцевины распространяются только безмассовые поля, и монополю должен выглядеть как кулоновское магнитное поле (в абелевом случае) или как поле типа Годдара — Нюита — Олайва (в общем случае).

Нетрудно оценить энергию, заключенную в пространстве вне сердцевины. Для определенности выполним эту оценку для монополя с зарядом  $g$  в абелевой теории:

$$E_{\text{магн}} = \frac{1}{2} \int_{r > O(1/\mu)} d^3x |\mathbf{B}|^2 = 2\pi g^2 \int_{O(1/\mu)}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = 2\pi g^2 O(\mu). \quad (4.24)$$

Так как плотность энергии в теории положительна, то энергия, сконцентрированная в сердцевине, может только увеличить эту оценку. Таким образом,

$$m \geq O\left(\frac{\mu}{e^2}\right). \quad (4.25)$$

В таком виде, как оценка по порядку величины, эта граница явно применима также к неабелевым монополям. Монополи тяжелы, потому что интеграл для электромагнитной энергии кулоновского поля расходится на малых расстояниях.

Принимая некоторые довольно правдоподобные предположения, это неравенство можно превратить в равенство. Если радиус сердцевины растет, то магнитная энергия падает. Так как монополю находится в равновесии, то это уменьшение должно компенсироваться увеличением внутренней энергии. (Если поле монополя зависит от времени, это рассуждение останется в силе при усреднении по времени.) Поэтому разумно считать, что энергия сердцевины — того же порядка, что и энергия магнитного поля.

Теперь обратимся к теории, в которой имеется несколько массовых параметров. Так обычно бывает, когда модель характеризуется иерархией нарушений симметрии

$$H \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3, \dots, \quad (4.26)$$

и соответствующей иерархией масштабов масс,

$$\mu_1 \ll \mu_2 \ll \mu_3 \dots, \quad (4.27)$$

где  $\mu_i$  — характерная масса калибровочного поля для группы  $G_i$  (но не  $G_{i-1}$ ). Например, в модели Великого Объединения Джорджи и Глэшоу<sup>19</sup>

группа  $SU(5)$  нарушается до  $SU(3)$  (цвет)  $\otimes U(2)$  (электрослабое взаимодействие); у калибровочных полей, связанных с этим нарушением, массы порядка  $10^{14}$  ГэВ. В свою очередь, группа  $U(2)$  нарушается до  $U(1)$ , как в модели Вайнберга — Салама, массы соответствующих калибровочных полей порядка  $10^2$  ГэВ.

Последовательность, указанная в (4.26), порождает последовательность отображений

$$\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G_1) \rightarrow \pi_1(G_2) \rightarrow \dots \quad (4.28)$$

Можно построить монополь с любым топологическим зарядом, который в конце концов отображается в единицу. Предположим, что это происходит впервые для группы  $G_i$ . Тогда поле монополя остается кулоновским вплоть до расстояний порядка  $1/\mu_i$ , и масса монополя удовлетворяет неравенству

$$m \geq O\left(\frac{\mu_i}{e^2}\right). \quad (4.29)$$

Как и прежде, при определенных правдоподобных предположениях это неравенство можно заменить равенством.

Например, в теории объединения Джорджи — Глэшоу нужно идти до группы  $SU(5)$ , как было показано в п. в) гл. 4; соответственно, масса монополя должна быть порядка  $10^{16}$  ГэВ, т. е.  $10^{-8}$  г.

Возможно, конечно, что различные элементы гомотопической группы  $\pi_1(H)$  отображаются в единицу на различных ступенях иерархии, тогда появляется возможность варьирования массы монополя в широких пределах. Рассмотрим, например, теорию, в которой группа  $SU(3)$  нарушается до своей вещественной подгруппы  $SO(3)$  при некоторых высоких массах. При гораздо более низких массах группа  $SO(3)$  обычным образом нарушается до  $SO(2)$ . При этом могут существовать монополи как с целыми, так и с полуполными *eg*, и последние намного тяжелее первых.

#### д) Граница Богомольного и предел Прасада — Соммерфилда

Мы получили грубые оценки масс монополей. Для некоторых теорий можно указать точную нижнюю границу, границу Богомольного<sup>20, 21</sup>. Здесь будет дан вывод для модели Джорджи и Глэшоу, однако его легко распространить на любую теорию, в которой скалярное поле преобразуется по присоединенному представлению калибровочной группы.

Запишем энергию в виде

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \mathbf{E}^a \mathbf{E}^a + \mathbf{B}^a \mathbf{B}^a + (D_0 \Phi^a)^2 + \mathbf{D} \Phi^a \mathbf{D} \Phi^a + \frac{1}{2} \lambda (\Phi^a \Phi^a - c^2)^2 \right]. \quad (4.30)$$

Здесь векторы понимаются в обычном пространственном смысле, а индексы связаны с внутренней симметрией. Поля  $\mathbf{E}^a$  и  $\mathbf{B}^a$  определяются, как в электромагнетизме:

$$E_i^a = F_{0i}^a, \quad B_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a, \quad (4.31)$$

и мы изменили нормировку полей, как в формуле (3.23), так что в выражении для энергии нет константы связи в явном виде.

Чтобы установить интересующую нас границу, потребуются два свойства магнитного поля. Во-первых,

$$(\mathbf{D} \mathbf{B}^a) = 0. \quad (4.32)$$

Эта формула следует из тождества Якоби для ковариантного дифференцирования. Во-вторых,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int d^2S (\mathbf{n} \mathbf{B}^a) \Phi^a = 4\pi g c, \quad (4.33)$$

где  $d^2S$  — обычный элемент площади поверхности,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали. В этой формуле легче всего убедиться, переходя к калибровке, введенной в разделе б) гл. 4, где на больших расстояниях имеем

$$\Phi^a = \langle \Phi^a \rangle = \delta^{a3}c, \quad (4.34)$$

и на больших расстояниях выживает только компонента  $V^3$ , т.е. поле магнитного монополя.

Теперь можно написать, используя эти свойства и интегрируя по частям,

$$E \geq \frac{1}{2} \int d^3x (V^a V^a + D\Phi^a D\Phi^a) = \frac{1}{2} \int d^3x (V^a \pm D\Phi^a) \mp 4\pi g c. \quad (4.35)$$

Таким образом, мы пришли к желаемому результату:

$$E \geq |4\pi g c|. \quad (4.36)$$

Так как  $g$  — порядка  $1/e$ , а  $\mu$  — порядка  $se$ , то в правой части этой формулы стоит величина порядка  $\mu/e^2$ , в соответствии с соображениями, изложенными в п. г) гл. 4. В действительности, это совпадение свидетельствует лишь о правильности подхода, основанного на размерном анализе: если отбросить константу самодействия скалярного поля  $\lambda$ , то единственная величина размерности энергии, которую мы можем построить, это  $\mu/e^2$ .

Найденное граничное значение достигается в некотором пределе, который был изучен Прасада и Соммерфилдом<sup>22</sup>. При выводе этой границы мы отбросили три из пяти членов в формуле (4.30). Два из них,  $E^2$  и  $(D_0\Phi)^2$ , автоматически равны нулю, если мы предполагаем обратимость во времени. Третий член, скалярный потенциал, можно устранить в пределе  $\lambda \rightarrow 0$ . Говоря несколько менее формально, мы выбрасываем из уравнений движения все члены, содержащие  $\lambda$ , но сохраняем граничное условие  $\Phi^a \Phi^a = c^2$  на больших расстояниях.

В этом пределе формула (4.35) превращается в тождество, и граничное значение достигается, если можно решить уравнение

$$V^a \pm D\Phi^a = 0, \quad (4.37)$$

где знак в уравнении зависит от знака  $g$ . Кстати, любое решение уравнения (4.36) является также не зависящим от времени решением уравнений движения: минимум функционала энергии непременно является стационарной точкой.

Формула (4.37) содержит дифференциальное уравнение первого порядка, и его гораздо легче исследовать, чем уравнения второго порядка, каковыми являются уравнения движения. У меня нет сейчас времени, чтобы воспроизвести здесь этот анализ, или хотя бы приводить его результаты более или менее подробно. Как выяснилось, уравнение это имеет решения и, к счастью, содержащие не только простой монополю, но и решения, описывающие системы из многих монополей. Это не так уже невероятно, как могло бы показаться. В пределе Прасада — Соммерфилда скалярное поле становится безмассовым, и потому много монополей могут существовать в статическом равновесии, так как их скалярное притяжение уравновешивает магнитное отталкивание.

## 5. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

### а) К в а н т о в ы е м о н о п о л и и и з о в р а щ а т е л ь н ы е в о з б у ж д е н и я \*)

В п. б) гл. 3 приводились доводы в пользу того, что квантовая теория поля приближается к соответствующей классической теории в пределе слабой связи. В настоящем разделе, основываясь на этом наблюдении, будем

\*) Ссылки на многочисленные оригинальные статьи можно найти в лекциях автора<sup>5</sup>.

построена количественная приближенная схема для теорий, в которых классический предел характеризуется наличием решений типа магнитных монополей \*).

Для определенности мы будем работать в рамках модели Джорджи — Глэшоу,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4f^2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu \Phi^a D^\mu \Phi^a - \frac{1}{4} \lambda (\Phi^a \Phi^a - c^2)^2. \quad (5.1)$$

Введем новые переменные  $\Phi' = \Phi f$ ,  $c' = cf$  и  $\lambda' = \lambda/f^2$ ; при этом лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{f^2} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu \Phi'^a D^\mu \Phi'^a - \frac{1}{4} \lambda' (\Phi'^a \cdot \Phi'^a - c'^2)^2 \right]. \quad (5.2)$$

Будем изучать эту теорию в пределе малых  $f$  при фиксированных  $e'$  и  $\lambda'$ . Как было указано в п. б) гл. 3, это классический предел; основная величина в квантовой теории — это  $\mathcal{L}/\hbar$ , так что предел малых  $f$  при фиксированном  $\hbar$  совпадает с пределом малых  $\hbar$  при фиксированном  $f$ . При такой записи решение, содержащее классический монополю, не зависит от  $f$ , множитель перед лагранжианом выпадает из уравнений движения. (В дальнейшем мы будем пользоваться в этом разделе новыми параметрами, и я буду опускать штрихи.)

Особенно удобна временная калибровка  $A_0 = 0$ ,

$$\mathcal{L} = f^{-2} \left[ \frac{1}{2} \partial_0 A^a \partial_0 A^a + \frac{1}{2} \partial_0 \Phi^a \partial_0 \Phi^a + \right. \\ \left. + \text{члены, не содержащие производных по времени} \right]. \quad (5.3)$$

Импульсы, канонически сопряженные полям  $\Phi^a$  и  $A^a$ , равны соответственно

$$\pi^a = f^{-2} \partial_0 \Phi^a, \quad (5.4)$$

и

$$\pi^a = f^{-2} \partial_0 A^a. \quad (5.5)$$

Гамильтониан системы имеет вид

$$f^2 H = \frac{1}{2} f^4 \int [(\pi^a \pi^a) + \pi^a \pi^a] d^3x + V, \quad (5.6)$$

где  $V$  — интеграл от не содержащих производных по времени членов в лагранжиане (5.3), взятый со знаком минус. Решение, описывающее классический монополю, является стационарной точкой функционала  $V$ ; действительно, если монополю стабилен (мы будем это предполагать), то он отвечает локальному минимуму потенциала  $V$ . Следует подчеркнуть, что все степени константы  $f$  указаны в формуле (5.6) явно:  $V$  не зависит от  $f$ .

Формула (5.6) определяет гамильтониан, необычный с точки зрения стандартной теории возмущений. Во-первых, в левой части стоит  $f^2$ . Конечно, эта особенность тривиальна: если мы сможем найти разложение для собственных функций и собственных значений оператора  $f^2 H$ , то легко будет найти это разложение и для  $H$ . Во-вторых, малый параметр входит как множитель при кинетической энергии в члене, квадратичном по каноническим импульсам, а не в потенциальной энергии, не зависящей от импульсов. Это довольно странно: встречались ли мы с такой ситуацией прежде?

Да встречались. Например, для двухатомной молекулы,

$$H = \frac{p^2}{2M} + V, \quad (5.7)$$

\*) Большая часть материала, изложенного в этом разделе, беззастенчиво заимствована из лекций автора <sup>5</sup>.

где  $M$  — приведенная масса ядра. Стандартное разложение в теории спектра двухатомной молекулы рассматривает, как малый параметр  $1/M$ , коэффициент при кинетической энергии. Конечно, наша система не очень похожа на двухатомную молекулу. Это скорее многоатомная молекула:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2M_i} + V(r_1, \dots, r_N). \quad (5.8)$$

Точнее говоря, это молекула, состоящая из бесконечно большого числа атомов, все ядра которых имеют массу  $1/f^4$ . Таким образом, задача построения квантовых монополей аналогична той, которая была полностью решена пятьдесят лет назад.

Сейчас это решение будет объяснено. Сначала я напомним вам известные результаты, относящиеся к двухатомной молекуле, затем будет показано, как их распространить на многоатомную молекулу, и, наконец, будет сделан довольно тривиальный перевод этих результатов на язык теории поля.

Предположим, что межатомный потенциал двухатомной молекулы имеет вид, показанный на рис. 5. Потенциал  $V$  имеет минимум при  $r = r_0$ , и  $V(r_0) = E_0$ . Первые три члена разложения для состояний с наименьшими энергиями приведены в табл. I.

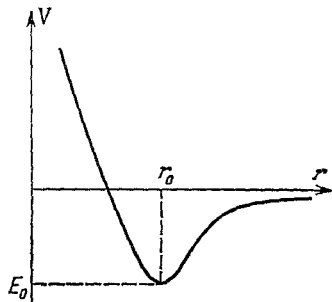


Рис. 5.

Таблица I

Двухатомная молекула

Порядок приближения	Стационарное состояние	Значение энергии
0	$ r_0, \theta, \varphi\rangle$	$E_0$
1	$ n, \theta, \varphi\rangle$	$+\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{V''(r_0)/M}$
2	$ n, l, m\rangle$	$+l(l+1)/2Mr_0^2 + \dots$

Как видно из таблицы, собственные значения энергии разлагаются по параметру  $1/\sqrt{M}$ , которому соответствует  $f^2$  в теории поля. (В правом столбце таблицы указаны поправки к энергии, так что для получения результата во втором порядке надо сложить все три выражения.) Поясним, как получены приведенные результаты.

В нулевом порядке мы просто пренебрегаем кинетической энергией. Частица сидит на дне потенциальной ямы, в собственном состоянии оператора координаты  $r$ . Расстояние между атомами фиксировано,  $r = r_0$ , а угловые координаты не определены. Это не очень похоже на реальный спектр, наблюдаемый в молекулярной спектроскопии; в частности, в этом приближении имеет место совершенно фиктивное бесконечное вырождение по угловым переменным. Как мы увидим, это вырождение снимается во втором порядке.

В первом порядке начинают проявляться эффекты колебаний частицы вокруг положения равновесия. Так как масса  $M$  очень велика, колебания происходят с небольшой амплитудой, и в первом приближении потенциал вблизи положения равновесия заменяется потенциалом гармонического осциллятора

$$V(r) = E_0 + \frac{1}{2} V''(r_0) (r - r_0)^2. \quad (5.9)$$

В этом приближении собственные функции совпадают с волновыми функциями одномерного гармонического осциллятора (по переменной  $r$ ), но дельта-функции по угловым переменным сохраняются. Состояния нумеруются числом  $n$ , указывающим уровень возбуждения осциллятора, и обладают энергиями, обычными для осциллятора. В молекулярной спектроскопии эти состояния известны как колебательные уровни.

Эффекты, связанные с вращением молекулы, появляются только во втором приближении, так как момент инерции в нулевом приближении равен  $Mr_0^2$ . Угловое вырождение устраняется, и собственные состояния угловых переменных заменяются собственными состояниями углового момента,

$$|n, l, m\rangle = \int d^2\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi) |n, \theta, \varphi\rangle. \quad (5.10)$$

К энергии добавляется член, отвечающий энергии жесткого ротатора. В молекулярной спектроскопии эти уровни называются вращательными. Отметим, что вращательная структура не связана с какими-либо свойствами потенциала  $V$ , которые не вошли бы уже в более низкие приближения. Кроме того, в том же приближении начинают сказываться эффекты, связанные с ангармоничностью. Эти члены (колебательно-колебательная связь) обозначены многоточием в таблице. Они зависят от деталей строения потенциала, в частности, от его третьей и четвертой производной в точке  $r_0$ . В отличие от вращательного члена, эти поправки не влияют на качественные особенности задачи, как и более высокие члены разложения.

Обобщение указанной процедуры на многоатомную молекулу тривиально. Равновесное положение молекулы, как и положение в пространстве твердого тела, задается тремя углами Эйлера, а не двумя сферическими углами, если только в равновесной конфигурации все атомы не лежат на одной прямой. Вследствие этого вращательный спектр, который появляется во втором порядке, совпадает со спектром твердого тела, а не со спектром жесткого ротатора. Кроме того, колебания относительно положения равновесия могут происходить по многим направлениям, и потому одно целое число  $n$  заменяется набором чисел  $n_i$ , по одному на каждую нормальную моду.

Все это непосредственно распространяется на теорию поля, надо только понять, чем заменить вращательный спектр. В нулевом приближении собственные состояния оператора энергии молекулы были вырождены относительно вращений, потому что классическое положение равновесия не инвариантно при вращениях. Аналогичное явление имеет место в теории поля, поскольку монополь, классическое равновесное состояние, не инвариантен относительно ненарушенной группы симметрии теории. Насколько богат «вращательный спектр» в нашей задаче, зависит от того, какова асимметрия монополя, сколько решений можно построить, применяя операторы симметрии.

В самом минимуме описывающее монополь решение не обладает трансляционной инвариантностью, поэтому имеется, по меньшей мере, трехпараметрическое семейство не зависящих от времени решений, соответствующее координатам центра монополя  $\mathbf{r}$ . Табл. II составлена, исходя из того, что это единственное вырождение.

В основном мы пользовались аналогией с табл. I. Малый параметр  $1/M$ , коэффициент при кинетической энергии в формуле (5.7), заменен на  $f^4$ , коэффициент при кинетической энергии в формуле (5.7) заменен на  $f^2$ , коэффициент при кинетической энергии в формуле (5.6) и все собственные значения разделены на  $f^2$ , так как этот множитель стоит в левой части формулы (5.6), но в остальных правых колонки в обеих таблицах почти совпадают.

Обсудим теперь таблицу более подробно.

В нулевом приближении собственные состояния оператора энергии являются собственными состояниями полевых операторов с собственными значениями, равными классическим решениям полевых уравнений. Иными

Таблица II

## Квантовый монополю

Порядок приближения	Стационарное состояние	Значение энергии
0	$ r\rangle$	$V_0/f^2$
1	$ n_1, n_2, \dots, r\rangle$	$+ \sum_i \omega_i \left( n_i + \frac{1}{2} \right)$
2	$ n_1, n_2, \dots, P\rangle$	$+ \frac{1}{2} f^2 P^2 / V_0 + \dots$

словами,

$$\varphi_{op}^a(\mathbf{x}) |r\rangle = \varphi_{cl}^a(\mathbf{x} - \mathbf{r}) |r\rangle, \quad (5.14)$$

где индекс  $op$  обозначает оператор, а  $cl$  — классическое решение. Разумеется, такая же формула выполняется для поля  $A^a$ .  $V_0$  — значение функционала  $V$  на решении типа монополя. Мы видим, что главный вклад в массу монополя — порядка  $1/f^2$ , как уже было установлено из других соображений.

В первом порядке получается сумма по нормальным модам, связанным с собственными колебаниями классической системы вокруг монополюного решения. Конечно, так как мы имеем дело с системой с бесконечным числом степеней свободы, возможно существование непрерывных мод наряду с дискретными; в этом случае сумму надо дополнить интегралом. Как обычно, переходя от механики частиц к теории поля, мы интерпретируем уровень возбуждения гармонического осциллятора как число заполнения нормальной мезонной моды. Состояние, в котором все  $n$  равны нулю, — это изолированный монополю. Состояния с ненулевыми  $n$  описывают один или несколько мезонов, связанных с монополюм (дискретные моды) или рассеивающихся на нем (непрерывные моды). В этом порядке энергия не содержит вклада мезон-мезонных взаимодействий, так как они порядка  $f^2$ . Их эффект аналогичен колебательно-колебательной связи в молекулах, и подобно последней он скрывается за многоточием в энергии второго порядка.

Поправка первого порядка к массе монополя имеет вид  $\sum_i (1/2)\omega_i$ . Эта сумма расходится, но, по крайней мере в перенормируемой теории, разность между этой суммой для вакуумного состояния конечна и определяет истинную поправку к массе классического монополя.

Во втором порядке снимается вырождение. Так как оно связано с трансляционной инвариантностью, а не с инвариантностью относительно вращений, то стационарные состояния являются собственными не для оператора углового момента, а для оператора импульса, поэтому вместо (5.10) имеем

$$|n_1, \dots, P\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{P}\mathbf{r}) |n_1, \dots, \mathbf{r}\rangle. \quad (5.12)$$

К счастью, вторую поправку к энергии можно найти без вычислений; приведенное в таблице выражение получено из формулы

$$\sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2} = M + \frac{f^2 \mathbf{P}^2}{2V_0} + O(f^4). \quad (5.13)$$

Откажемся теперь от предположения, что вырождение связано только с трансляционной инвариантностью. Дополнительное вырождение может быть связано либо с пространственной, либо с внутренней симметрией. Вырождение, связанное с пространственной симметрией, приводит к спектру, напоминающему то, что мы видели в молекулярной физике. Если монополюное решение не обладает сферической симметрией, но аксиально симметрично, классические решения задаются двумя углами  $\theta$ ,  $\phi$ , и во втором порядке

система приобретает спектр, характерный для жесткого ротатора, как двухатомная молекула. Если у системы вообще нет оси симметрии, нужны три угла Эйлера, и возникает спектр твердого тела, как у многоатомной молекулы. Интересные эффекты могут возникнуть, если классическая система инвариантна относительно какой-либо дискретной подгруппы  $O(3)$ . Например, если решение обладает симметрией относительно оси вращения и ортогональной ей плоскости, то в спектре ротатора отсутствуют состояния с нечетным угловым моментом.

Вырождение, связанное с внутренней симметрией, возникает, если классическое решение не инвариантно относительно  $H$ , ненарушенной подгруппы  $G$ . Как всегда, во втором порядке стационарные состояния являются линейными комбинациями собственных состояний полевых операторов. Однако теперь эти линейные комбинации преобразуются по неприводимым представлениям группы  $H$ , а не группы вращений или трансляций. Возникающий «вращательный спектр» лежит в пространстве внутренней симметрии, и «вращательные уровни» характеризуются квантовыми числами группы  $H$ . Эти состояния мы будем называть «изовращательными уровнями». (Спин относится к изоспину, как вращение — к изовращению.)

Чтобы вычислить энергии изовращательных уровней, надо знать вид оператора кинетической энергии, действующего на волновые функции, сконцентрированные на поверхности минимумов потенциала  $V$ . Это обобщение наиболее непосредственного способа решения задачи о жестком ротаторе путем анализа угловой части оператора Лапласа. Нет необходимости производить вычисления, чтобы установить, что синглетное по группе  $H$  состояние всегда отвечает наименьшему уровню. Волновая функция этого состояния — константа, и она всегда обращается в нуль под действием обобщенного оператора Лапласа, каков бы ни был его детальный вид \*).

Рассмотрим, например, монополь 'т Хоофта — Полякова. Чтобы избежать путаницы, связанной с пространственной зависимостью группы  $H$ , мы будем использовать струнную калибровку (см. формулы (4.19) — (4.21)). В этом случае поле  $\Phi$  всюду направлено вдоль оси  $3$ , так что во всем пространстве группа  $H$  — это группа  $SO(2)$ , содержащая повороты вокруг этой оси. Как обычно, мы отождествляем ее с калибровочной группой электромагнетизма. Наша теория содержит скалярное нейтральное поле, векторное нейтральное безмассовое поле (фотон), и положительно и отрицательно заряженные массивные векторные поля. Монопольное решение инвариантно относительно группы  $H$ , только если заряженные поля всюду обращаются в нуль. Но этого не может быть; если бы все заряженные поля были равны нулю, электромагнитное поле подчинялось бы уравнениям Максвелла, и наличие поля монополя на больших расстояниях указывало бы на независимость от калибровки сингулярность в начале координат. Отметим, что этот довод не зависит от деталей модели; он справедлив для любого магнитного монополя в любой спонтанно нарушенной калибровочной теории поля \*\*).

\*) В действительности, можно избежать этого вычислительного кошмара с помощью теоретико-групповых приемов, как это было сделано для оператора Лапласа в гл. 2.

\*\*) Это замечание предназначено только для специалистов. Приведенное в тексте рассуждение может создать впечатление, что подробное вычисление изовращательного спектра проще, чем на самом деле. Существуют некоторые технические трудности, связанные с калибровочной инвариантностью. Можно справиться с ними, но вычисление становится более длинным, чем в том случае, если бы их не было. Например, во временной калибровке существует много преобразований, не меняющих гамильтониан, но не оставляющих инвариантным монопольное решение, а именно, не зависящие от времени калибровочные преобразования. Неразумно ожидать, что они приведут к появлению изовращательных уровней. Однако, чтобы убедиться в этом, чтобы отделить ложные возбуждения от настоящих, необходимо применить дополнительное условие, которое всегда портит дело при квантовании во временной калибровке. Можно обойтись без дополнительных условий, если работать, например, в кулоновской калибровке; там они не нужны, но при этом усложняется вид гамильтониана, и ситуация становится не столь чистой. (Аккуратное обсуждение подхода, основанного на кулоновской калибровке применительно к дайонам, речь о которых пойдет ниже, см. в работе Томбулиса и Ву <sup>23</sup>.)

Итак, в нулевом порядке собственные состояния зависят не только от положения центра монополя,  $\mathbf{r}$ , но также от некоторого комплексного числа, равного по модулю единице,  $\exp(i\alpha)$ , которое определяет значение заряженного поля в некоторой стандартной точке. При вращениях вокруг оси  $z$  эти состояния меняются следующим образом:

$$\exp(-iQ_{\text{op}}\lambda) |e^{i\alpha}, \mathbf{r}\rangle = |e^{i(\alpha+\epsilon\lambda)}, \mathbf{r}\rangle, \quad (5.14)$$

где оператор электрического заряда  $Q_{\text{op}}$  нормирован так, чтобы заряженное поле обладало зарядом  $e$ . Изовращательные уровни имеют вид

$$|m, \mathbf{P}\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-im\alpha) \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-i\mathbf{P}\mathbf{r}) |e^{i\alpha}, \mathbf{r}\rangle, \quad (5.15)$$

где  $m$  — целое число, а квантовые числа колебательных уровней опущены. Эти состояния являются собственными для оператора заряда, а также для оператора углового момента,

$$Q_{\text{op}} |m, \mathbf{P}\rangle = me |m, \mathbf{P}\rangle. \quad (5.16)$$

Наш монополю породил дайоны \*).

Следует подчеркнуть, что это не фундаментальные дайоны; появление их неизбежно, и свойства их вычисляются, а не являются объектом подгонки. Их нельзя также рассматривать как связанные состояния монополя и заряженного мезона: их энергии возбуждения пропорциональны  $f^2$ , в то время как масса мезона — порядка единицы. По той же причине дайоны стабильны, по крайней мере до очень высоких  $m$ : они не могут распасться, испустив заряженный мезон.

Только последнее из приведенных утверждений не остается справедливым в общем случае. В теории с иерархией нарушений симметрии и соответствующих массовых шкал большая масса, умноженная на  $f^2$ , может все-таки превосходить массы легких частиц, присутствующих в той же теории. Если эти легкие частицы обладают подходящими квантовыми числами, то все дайоны могут распасться, опустившись до монополя в основном состоянии.

### б) Эффект Виттена

Известен нарушающий  $CP$ -симметрию член, который можно добавить к лагранжиану калибровочной теории поля, так называемый  $\theta$ -член:

$$\mathcal{L}' = \frac{\theta}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\sigma}^a, \quad (5.17)$$

где  $\theta$  — вещественное число, а поля нормированы, как в п. а) гл. 3. Этот член представляет собой полную производную, поэтому он не меняет уравнений движения; тем не менее вызываемые им физические эффекты весьма существенны. Этот вопрос относится к теории инстантонов, и я не собираюсь освещать его здесь. Однако один результат мне понадобится: параметр  $\theta$  входит как угол; иными словами, все физические явления зависят от  $\theta$  периодически, и период равен  $2\pi$ .

Виттен<sup>25</sup> показал, что для абелевых монополей  $\theta$ -член оказывает поразительное влияние на спектр дайонов. Здесь будет приведен вывод эффекта Виттена, который показывает, что результат не зависит от динамики тяжелых полей, заключенных внутри монополя. Тяжелые поля существенны только в том отношении, что они обеспечивают само существование монополя, а все, что происходит потом, зависит лишь от полей, находящихся вне монополя,

\*) Эти дайоны были обнаружены в работе Жюлиа и Зи<sup>24</sup>, которые использовали совершенно другие методы.

т. е. от обычных электромагнитных полей. В принципе, эффект Виттена можно было бы обсудить еще в гл. 2.

Запишем  $\theta$ -член, полностью пренебрегая тяжелыми полями. Иными словами, заменим<sup>1</sup> мультиплет  $F_{\mu\nu}^a$  одним полем  $F_{\mu\nu}$ , причем

$$F_{0i} = eE_i, \quad F_{ij} = e\varepsilon_{ijk}B_k, \quad (5.18)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — нормированные обычным образом электрическое и магнитное поля. В этих обозначениях

$$\mathcal{L}' = \frac{\theta e^2}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (5.19)$$

Запишем теперь эти поля, как обыкновенные электромагнитные напряженности (предполагая для простоты, что они статические) на фоне, обусловленном монополем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \nabla\varphi, \\ \mathbf{B} &= [\nabla \times \mathbf{A}] + \frac{g\mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  — обычные потенциалы, векторный и скалярный. (Вскоре мы обобщим это рассуждение, включив фон, созданный дайоном.) С помощью интегрирования по частям получаем

$$L' = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}' = \frac{1}{\pi} e^2 g \theta \int d^3\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (5.21)$$

Этот член имеет вид энергии электрического заряда величины  $e^2 g \theta / \pi$ , локализованного в точке, где находится монополь, в скалярном электростатическом потенциале. В присутствии  $\theta$ -члена магнитный заряд индуцирует электрический заряд.

Можно понять это явление в общих чертах таким образом. Если бы мы добавили к плотности лагранжиана член  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$ , то это можно было бы рассматривать как поправку к диэлектрической проницаемости, т. е. член, благодаря которому заданный электрический заряд индуцирует дополнительное распределение заряда (как правило, экранирующее исходный заряд). Аналогичный эффект для магнитного заряда индуцируется членом  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$ . Неудивительно, что в присутствии члена  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$  магнитный заряд индуцирует электрический.

Этот довод не вполне убедителен, так как эффект не является обратимым: если бы мы добавили фон от электрического монополя, то его вклад в  $L'$  можно было бы устранить интегрированием по частям. Нетрудно, однако, распространить рассуждение, проведенное выше, на дайоны. В присутствии  $\theta$ -члена заряд дайона примет вид

$$Q = e \left( m + \frac{eg\theta}{\pi} \right), \quad (5.22)$$

где  $m$  — целое число. При этом нарушается  $CP$ -симметрия, но не условие квантования. (См. обсуждение после формулы (2.22).)

Так как произведение  $eg$  всегда целое или полуцелое число, то при изменении  $\theta$  на  $2\pi$  исходная совокупность зарядов восстанавливается, причем каждый член сдвигается на  $2eg$ . Описанным здесь методом нельзя выяснить, какова зависимость энергии дайонов от  $\theta$ , но Виттену удалось рассмотреть внутренность монополя, и согласно его утверждению, при перемещении дайона на новое место его энергия принимает соответствующее значение. Одним словом,  $\theta$  имеет смысл угла; физические явления зависят от  $\theta$  периодически с периодом  $2\pi$ . Это красивый результат, особенно если принять во внимание, что инстантоны в нашем рассуждении не появлялись.

в) Несколько слов о монополях в теории с группой SU(5)

Выше уже упоминались монополи, возникающие в модели Джорджи и Глэшоу, основанной на SU(5)-симметрии. Рассмотрим теперь этот вопрос несколько более подробно <sup>26</sup>. Для этого есть две причины. Во-первых, теория с группой SU(5) интересна сама по себе. Это простейшая теория Великого Объединения, а не исключено, что одна из таких теорий хорошо описывает реальный мир, по крайней мере, до энергий порядка массы Планка. Во-вторых, указанная модель обладает достаточно богатой структурой и может служить хорошим примером взаимодействия многих фундаментальных концепций теории монополей.

Начнем с краткого обзора некоторых существенных черт теории. Это теория калибровочных полей с группой SU(5). Группа эта проста, так что в модели присутствует единственная константа связи  $f$ , порядка  $e$ , обыкновенной электромагнитной константы связи. (Константа  $f$  отличается от  $e$ , во-первых, из-за наличия коэффициентов Клебша — Гордана; во-вторых, из-за эффектов перенормировок при переходе от больших расстояний, на которых определена константа  $e$ , к расстояниям порядка  $10^{-28}$  см, характерных для структуры монополей.)

Единственное, что нам нужно знать о скалярных полях в теории, это что их взаимодействия устроены таким образом, что возникают две шкалы масс и, соответственно, две шкалы вакуумных средних значений.

Большее значение нарушает SU(5)-симметрию до  $[SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)]/Z_6$ . Если элементы группы SU(5) реализованы в виде матриц 5-го порядка, то подгруппа SU(3) включает преобразования первых трех координат, SU(2) — преобразования последних двух координат, а элементы U(1) — диагональные матрицы вида

$$\text{diag} (e^{2i\theta}, e^{2i\theta}, e^{2i\theta}, e^{-3i\theta}, e^{-3i\theta}). \quad (5.23)$$

Если  $\exp(6i\theta) = 1$ , то эта матрица принадлежит группе  $SU(3) \otimes SU(2)$ , поэтому в результате нарушения симметрии остается фактор-группа прямого произведения по циклической группе  $Z_6$ . Подгруппа SU(3) отождествляется с калибровочной группой цветовой симметрии, подгруппа SU(2)  $\otimes$  U(1) относится к модели Вайнберга — Салама. В результате нарушения симметрии двенадцать калибровочных полей из исходных двадцати четырех приобретают массы порядка  $10^{14}$  ГэВ. (Лишь при столь больших энергиях константа связи хромодинамики становится сравнимой с электрослабой.) Эти сверхтяжелые бозоны преобразуются как мультиплеты  $(3, \bar{2}) \oplus (\bar{3}, 2)$  относительно группы  $SU(3) \otimes SU(2)$ .

Меньшее вакуумное среднее вызывает дальнейшее нарушение симметрии до SU(3) (цвет)  $\otimes$  U(1) (электромагнетизм). В результате этого нарушения симметрии три калибровочных поля приобретают массы порядка 100 ГэВ. Генератор электромагнитной калибровочной группы, нормированный таким образом чтобы заряд протона был равен единице, имеет вид

$$Q_{em} = -i \text{diag} \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0 \right). \quad (5.24)$$

Присутствующие здесь элементы  $1/3$  указывают, что теория содержит дробно заряженные частицы; это, конечно, кварки, а также сверхтяжелые векторные бозоны. Из-за этого

$$\exp(2\pi Q_{em}) \neq 1, \quad (5.25)$$

и чтобы попасть в единицу, нужно сделать три оборота,

$$\exp(6\pi Q_{em}) = 1. \quad (5.26)$$

Хотя матрица  $\exp(2\pi Q_{\text{em}})$  принадлежит подгруппе  $SU(3)$ , на самом деле подгруппой  $H$  является не  $SU(3) \otimes U(1)$ , а  $SU(3) \otimes U(1)/Z_3$ . Это всего лишь формальное выражение того факта, что только частицы с ненулевой триальностью обладают дробными зарядами (см. пример д) в конце п. г) гл. 3).

Помимо указанных калибровочных симметрий, теория обладает непрерывной внутренней глобальной симметрией, которая после всех спонтанных нарушений приводит к сохранению разности барионного и лептонного зарядов  $B - L$ . (Порознь  $B$  и  $L$  не сохраняются: как известно, теория предсказывает распад протона.)

Кое-что об этой теории уже было сказано. Мы знаем, что она содержит монополи (см. п. б) гл. 4), что массы этих монополей порядка  $10^{16}$  ГэВ, а их размеры — порядка  $10^{-28}$  (см. п. г) гл. 4). Известно также, что они обладают спектром изовращательных возбуждений, дайонов, расстояния между уровнями в котором порядка  $10^{12}$  ГэВ (см. п. а) гл. 5.)

Рассмотрим теперь эти монополи более детально. На больших расстояниях поле монополя имеет обычный вид

$$A = QA_D, \quad (5.27)$$

где  $Q$  — генератор преобразований, принадлежащих группе  $SU(3) \otimes U(1)$ . Сразу возникает мысль, что так как теория содержит дробно заряженные частицы, то условие  $g = (1/2) e^{-1}$  надо заменить на  $g = (3/2) e^{-1}$ . Действительно, генератор  $Q = (1/2) Q_{\text{em}}$  не удовлетворяет условию квантования, надо использовать

$$Q \approx \frac{3}{2} Q_{\text{em}}, \quad (5.28a)$$

как следует из формул (5.25) и (5.26).

(Давайте рассмотрим и опровергнем одно возражение. Все дробно заряженные частицы связаны; к примеру, мы не можем развести компоненты пары кварк—антикварк на расстояние, превосходящее  $10^{-13}$  см. Не совершаем ли мы ошибки, используя дробно заряженные частицы для вывода условия квантования? Нет, все правильно. Дираковская струна бесконечно тонка и бесконечно длинна. Можно представить себе, что мы поднесли пару на расстояние порядка  $10^{-14}$  см от струны, и на тысячу световых лет от монополя. При этом можно рассмотреть дифракцию кварка на струне, в то время как антикварк зафиксирован. Конфайнмент не мешает нашему выводу.)

Есть, однако, и вторая возможность \*)

$$Q = \frac{Q_{\text{em}} + Q_Y}{2}, \quad (5.28b)$$

где  $Q_Y$  — генератор цветового гиперзаряда,

$$Q_Y = -i \operatorname{diag} \left( \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0 \right). \quad (5.29)$$

Таким образом,

$$Q = -i \operatorname{diag} \left( 1, 0, 0, -1, 0 \right) \cdot \frac{1}{2}, \quad (5.30)$$

и условие квантования выполнено.

Такой объект представляет собой комбинацию электромагнитного и хромомангнитного монополей. Бесцветные частицы, такие, как лептоны и адроны, реагируют только на электромагнитное поле, соответственно  $g = e^{-1}/2$ . Однако, так как все дробно заряженные частицы являются цветными, они реагируют и на электромагнитное, и на цветовое поля, и струна не наблюдаема благодаря совместному эффекту обоих полей.

Разумеется, формулы (5.28a) и (5.28b) дают не все возможные монополи. С точностью до калибровочного преобразования, решение условия кванто-

\*) Это было обнаружено в работах <sup>27,28</sup>.

вания и условия устойчивости в неабелевом случае имеют вид

$$Q = -i \operatorname{diag} (r, s, s, -r-2s, 0) \cdot \frac{1}{2}, \quad (5.31)$$

где  $r$  и  $s$  — целые числа, такие, что

$$r - s = 0, \pm 1. \quad (5.32)$$

Так как группа  $SU(3)$  односвязна, есть только один топологический заряд, это абелев магнитный заряд.

Можно оценить энергии таких конфигураций с помощью метода, изложенного в разделе г) гл. 4. Энергия, заключенная в поле вне сердцевинны монополя, пропорциональна

$$-\operatorname{Sp} Q^2 = s^2 + \frac{1}{2} (r + s)^2. \quad (5.33)$$

Нетривиальный монополю с наиминшей энергией соответствует  $r = 1, s = 0$ , т. е. это комбинированный монополю, отвечающий случаю (5.28б). Если мы будем использовать формулу (5.33) для оценки энергии вполне серьезно, то легко показать, что всякий другой нетривиальный монополю обладает более чем достаточной энергией, чтобы распасться на соответствующее число комбинированных монополей. Например, чисто электромагнитный монополю вида (5.28а), с  $r = s = 1$ , обладает энергией, превосходящей энергию комбинированного монополю в 6 раз и потому должен быть нестабильным относительно распада на 3 таких объекта; это минимальное число, следующее из сохранения топологического заряда.

Еще одно мнимое возражение: при оценке энергии мы пренебрегли изменением констант связи, которые входят как множители. Не сделали ли мы ошибки, считая, что цветовая константа связи совпадает с электромагнитной? Нет, ошибки здесь нет. Действительно, эти константы связи сильно различаются на больших расстояниях, но они одинаковы вблизи сердцевинны монополю, на расстояниях порядка  $10^{-28}$  см, а именно эта область доминирует в интеграле, определяющем энергию.

Докос и Томарас <sup>26</sup> построили комбинированный монополю как не зависящее от времени решение полевых уравнений. Их метод является переносом конструкции 'т Хоофта — Полякова на соответствующую подгруппу  $SU(3)$  в группе  $SU(5)$ . Единственное, что нужно нам знать об этом решении, это степень его вырожденности, так как этого достаточно для определения спектра изовращательных уровней. Оказалось, что одно из сверхтяжелых векторных полей  $X^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) отлично от нуля в решении Докоса и Томараса. Это поле с цветовым индексом 3, электрическим зарядом  $-4/3$  и  $B = -L = -2/3$ . Решение определяется однозначно, если известно значение этого поля в некоторой фиксированной точке.

Так как с помощью элемента группы  $SU(3)$  можно перевести любой комплексный трехмерный вектор в любой другой вектор такой же длины, то множество решений находится во взаимно-однозначном соответствии с многообразием всех трехмерных комплексных единичных векторов,

$$X^a \bar{X}_a = 1, \quad (5.34)$$

и задача построения изовращательных уровней сводится к построению функций от этих векторов, которые преобразуются по неприводимым представлениям группы симметрии.

Сделать это нетрудно. Полная система функций на многообразии состоит из всех одночленов, составленных из компонент  $X$  и  $\bar{X}$ . Каждый такой одночлен можно записать как тензор,

$$X_{b_1}^{a_1} \dots X_{b_m}^{a_m} = X^{a_1} \dots X^{a_m} \bar{X}_{b_1} \dots \bar{X}_{b_m}. \quad (5.35)$$

Из этих тензоров строится базис в пространстве неприводимых представлений группы  $SU(3)$ , которые обозначаются  $(n, m)$ . Надо только добавить, что неприводимые тензоры обладают нулевым следом. Вычесть след из выраже-

ния вида (5.35) совсем нетрудно. В силу условия (5.34), тензоры более низкого ранга, которые получаются при вычислении следов от указанных одночленов, являются элементами той же системы. Электрический заряд и  $B - L$  для этих тензоров находятся тривиально: надо взять соответствующее число для одного  $X$  и умножить на  $(n - m)$ .

Итак, изовращательные уровни преобразуются как представление  $(n, m)$  группы  $SU(3)$  (цвет), причем каждое представление входит один и только один раз. Эти уровни обладают электрическим зарядом  $(4/3)(m - n)$  и  $B - L = (2/3)(m - n)$ . Отметим, что здесь мы имеем одновременное возбуждение заряда и цвета, полученные состояния можно назвать хромодайонами.

Обсудим физику хромодайонов более подробно. Вначале будем считать, что теория не содержит фермионов.

Если имеются два уровня с одинаковым значением  $(m - n)$ , то верхний всегда может распасться на нижний, испустив безмассовые цветные глюоны. (Неважно, что эти глюоны не вылетают. Они связаны на расстояниях порядка  $10^{-13}$  см, а распад происходит на расстояниях порядка  $10^{-28}$  см. Думать о влиянии конфайнмента на распад хромодайона — то же самое, что думать о влиянии стен лаборатории на распад радиоактивного ядра.) Поэтому естественно ожидать, что при заданном  $(m - n)$  есть только один стабильный уровень. Такие уровни не могут распадаться, испуская сверхтяжелые векторные бозоны, так как их энергии возбуждения недостаточно велики; они не могут распадаться, испуская цветные глюоны, так как глюоны не несут электрического заряда; наконец, они не могут испускать калибровочные бозоны теории Вайнберга — Салама, так как они бесцветны. Следовательно, они стабильны.

Хромодайоны стабильны, но это цветные частицы (кроме основного состояния монополя). Поэтому пара хромодайонов  $(n, m)$  и  $(m, n)$  будет образовывать связанное состояние, в котором действует присущая конфайнменту сила. Судьба этой пары зависит от взаимодействия ее составляющих на малых расстояниях (хотя и не настолько малых, чтобы сердцевинки монополей перекрывались). В этой области доминирует магнитное взаимодействие. Если хромодайоны имеют противоположные абелевы магнитные заряды, т. е. являются возбуждениями монополя и антимонполя, то магнитная сила вызывает притяжение, и пара аннигилирует.

Если абелевы заряды частицы одного знака, то нужно короткое вычисление, чтобы выяснить, что преобладает — абелево отталкивание или неабелево притяжение (см. п. е) гл. 3). Если поле одного монополя определяется матрицей  $Q_1$ , а поле другого — матрицей  $Q_2$ , то энергия магнитного взаимодействия пропорциональна  $-\text{Sp}(Q_1 Q_2)/r_{12}$ . Всегда можно так выбрать калибровку, что

$$Q_1 = -i \text{diag}(1, 0, 0, -1, 0) \cdot \frac{1}{2}, \quad (5.36)$$

причем  $Q_2$  может быть любой матрицей, которая получается из  $Q_1$  перестановкой трех первых элементов (которые относятся к цвету). Энергия взаимодействия минимальна при

$$Q_2 = -i \text{diag}(0, 1, 0, -1, 0) \cdot \frac{1}{2}, \quad (5.37)$$

но даже в минимуме энергия положительна. Абелево отталкивание — сильнее, чем неабелево притяжение.

Таким образом, речь идет о системе, состоящей из двух частиц, которые притягиваются на больших расстояниях и отталкиваются на малых расстояниях. Это система типа двухатомной молекулы, но на этот раз речь идет не об аналогии, а о полном сходстве. Спектр состоит из колебательных и вращательных уровней, только масштаб энергий несколько крупнее, чем в молекулярной физике.

Однако все это — лишь фантазия. Реальный мир содержит легкие фермионы, кварки и лептоны, и все хромодайоны могут распадаться на монополи в основном состоянии, испуская кварк-лептонные пары. А жаль!

#### г) Перенормировка абелева магнитного заряда

В 1966 г., в знаменитой серии статей <sup>29</sup> Джулиан Швингер обобщил квантовую электродинамику, включив в нее фундаментальные магнитные монополи. В ходе этой работы он рассмотрел перенормировку магнитного заряда. Хотя фундаментальные монополи не представляют первостепенного интереса, здесь будет дан обзор результатов Швингера, чтобы впоследствии сравнить их с тем, что нас интересует.

Швингер нашел, что необходимое условие непротиворечивого квантования в этой теории имеет вид

$$e_0 g_0 = n_0 / 2, \quad (5.38)$$

где  $e_0$  и  $g_0$  — затравочные константы связи, т. е. параметры, которые входят в лагранжиан, а  $n_0$  — целое число. (На самом деле, вначале Швингер полагал, что  $n_0$  должно быть четным, но это для нас сейчас несущественно.) Обычный вывод дираковского условия квантования не зависит от того, является монополи фундаментальным или составным объектом, и условие это имеет вид

$$eg = n/2, \quad (5.39)$$

где  $e$  и  $g$  — физические константы связи, а  $n$  — целое число.

Исследование перенормировки электрического заряда в основном не отличается от того, которое проводится в обычной электродинамике. Так как в теории присутствуют и электрические, и магнитные токи, то пропагатор перенормированного электромагнитного поля имеет вид интеграла от трех спектральных весовых функций, а не от одной; однако по-прежнему есть только один фотон, и единственный полюс, соответствующий однофотонному состоянию. Поэтому работает обычный метод, и  $Z_3$  определяется как коэффициент при этом члене, причем оказывается, что

$$e = Z_3^{1/2} e_0. \quad (5.40)$$

Как обычно, спектральное представление указывает, что если теория — нетривиальна, то  $Z_3$  — строго меньше единицы.

Исследование перенормировки магнитного заряда тривиально проводится путем дуального вращения, которое переставляет  $E$  и  $B$ . Спектральные весовые функции переставляются, но фотон остается фотоном. Поэтому  $Z_3$  не меняется, и

$$g = Z_3^{1/2} g_0. \quad (5.41)$$

Отсюда следует, что

$$eg = Z_3 e_0 g_0. \quad (5.42)$$

На этом равенстве основано утверждение Швингера, что  $Z_3$  — рациональное число.

Этот вывод относился к фундаментальным монополям. Однако нас интересуют составные объекты, типа монополя 'т Хоофта — Полякова. Справедлива ли формула (5.42) и в этом случае? Ясно, что нет; нельзя, однако, утверждать, что она неправильна, она просто лишена смысла. В теории составных монополей  $e_0$  по-прежнему присутствует в лагранжиане, но для  $g_0$  там нет места.

Тем не менее, не все еще потеряно. Если определить  $e_\lambda$  как величину, которая задает силу взаимодействия между электроном и мельчайшим пробным зарядом на расстоянии  $\lambda$ , то  $e_0$  — это предел  $e_\lambda$  при стремлении  $\lambda$  к нулю. Это указывает, что  $g_\lambda$  можно определить таким же образом, как

параметр, задающий силу взаимодействия между монополем и пробным токовым контуром на расстоянии  $\lambda$ . Однако в этом случае  $\lambda$  нельзя устремить к нулю: если  $\lambda$  станет меньше размера сердцевинки монополя, то не будет возможности однозначно отделить электромагнетизм от неабелевой структуры, в которую он погружен, и нельзя будет однозначно определить токовый контур. Однако пока мы не дошли до сердцевинки, никакого вопроса нет. Поэтому можно попытаться выяснить, как связаны  $e_\lambda$  и  $g_\lambda$  при значениях  $\lambda$ , превосходящих размеры монополя, со своими значениями при больших расстояниях. Это не та проблема, которую решал Швингер, но и она интересна: между областью больших расстояний и сердцевинкой монополя достаточно места для больших эффектов перенормировки.

Однако виртуальные монополи в перенормировке не участвуют. При слабой связи комптоновские длины волн монополей много меньше, чем геометрические размеры монополей. (Иными словами, монополи намного тяжелее, чем массивные векторные бозоны.) Поэтому на тех расстояниях, о которых идет здесь речь, между  $\lambda$  и бесконечностью, эффектами виртуальных монополей можно пренебречь. (Отметим, что «слабая связь» здесь означает, что рассматриваются низшие порядки по  $e$ . Если представить наше рассуждение в терминах разложения по степеням  $\hbar$ , то связанные с виртуальными монополями эффекты можно представить как туннелирование, и эти эффекты экспоненциально подавлены.) Поэтому, с нашей точки зрения, вполне законно заменить полную теорию упрощенным вариантом, в котором единственным динамическими переменными являются электромагнитное поле и поля обычных заряженных частиц.

Чтобы упростить обозначения, ограничимся случаем, когда единственная заряженная частица — это дираковский электрон; включение других частиц тривиально. Плотность лагранжиана в рассматриваемой теории имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\lambda A^\lambda)^2 + \bar{\psi} (i\hat{\partial} - e_\lambda \hat{A} - e_\lambda g_\lambda \hat{A}_D - m_0) \psi + e_\lambda J_\mu (A^\mu + g_\lambda A_D^\mu). \quad (5.43)$$

Это выражение требует некоторых пояснений. Во-первых, обозначения. Все поля не перенормированы,  $\alpha$  — обычный параметр, фиксирующий калибровку,  $A_D^\mu = (0, A_D)$  — дираковский потенциал монополя и  $J^\mu$  — внешний (неоператорный) сохраняющийся ток,

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (5.44)$$

который будет использован для построения пробных зарядов и токовых контуров. Во-вторых, физические предположения. Мы рассматриваем только те степени свободы, которые существенны при расстояниях, больших  $\lambda$ . Поэтому, хотя это и не указано в явном виде, предполагается, что теория содержит некоторое калибровочно инвариантное обрезание (например, с помощью регуляторных полей) на расстоянии  $\lambda$ . Именно по этой причине вместо голых констант связи стоят  $e_\lambda$  и  $g_\lambda$ , а монополь представлен внешним дираковским потенциалом.

Следует подчеркнуть, что лагранжиан в формуле (5.43) не должен рассматриваться как попытка точного описания теории на расстояниях, больших  $\lambda$ . Конечно, можно построить эффективный лагранжиан, который послужил бы основой такого описания, но он был бы намного более сложным и включал бы в себя нелокальные и неполиномиальные взаимодействия. Мы используем указанный в (5.43) лагранжиан лишь как простую модель для рассмотрения интересующих нас физических явлений.

На основании уже знакомых нам доводов можно заключить, что связанная со струной особенность монопольного потенциала не наблюдаема, только если  $e_\lambda g_\lambda$  — целое или полуцелое число, и мы будем считать, что это спра-

ведливо. На данном этапе совсем не ясно, выполняется ли это для произведения  $eg$ , но сейчас в нашем распоряжении хорошо определенный лагранжиан; давайте же вычислим и посмотрим.

Убедимся для начала, что наши измерительные приборы правильно откалиброваны, вычислив эффекты внешнего тока вдали от монополя, или, что то же самое, при  $g_\lambda$ , равном нулю. В этом случае матричный элемент перехода вакуума в вакуум равен

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = 1 - \frac{1}{2} e_\lambda^2 \int d^4x d^4y J^\mu(x) J^\nu(y) T \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle + O(J^4). \quad (5.45)$$

Отметим, что это выражение получено не (незаконным) путем разложения по степеням  $e_\lambda$ , а как разложение по степеням  $J^\mu$ . Здесь все правильно: взаимодействие с током  $J^\mu$  калибровочно инвариантно, и потому дираковскую струну нельзя обнаружить ни при какой величине тока  $J^\mu$ , коль скоро он сохраняется. (Здесь мы вновь встречаемся с выражением того факта, что рассмотрение классических заряженных частиц не приводит к условию квантования.)

В формуле (5.45) нас интересует пропагатор неперенормированного поля:

$$T \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = Z_3^\lambda D_{\mu\nu}^0(x-y) + \dots, \quad (5.46)$$

где  $D_{\mu\nu}^0$  — свободный пропагатор, и многоточием обозначены члены, спадающие на больших расстояниях медленнее, чем указанный пропагатор. Индекс  $\lambda$  у константы перенормировки  $Z_3^\lambda$  напоминает о ее зависимости от обрезания. Таким образом, два пространственно-разделенных элемента тока взаимодействуют как в свободной электромагнитной теории, причем сила взаимодействия определяется константой

$$e_\lambda^2 Z_3^\lambda = e^2. \quad (5.47)$$

Это явно правильный результат.

Пусть теперь  $g_\lambda$  отлично от нуля. Тогда в матричном элементе возникает линейный член

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = 1 - ie_\lambda \int d^4x J^\mu(x) [g_\lambda A_\mu^D(x) + \langle 0 | A_\mu(x) | 0 \rangle] + O(J^2). \quad (5.48)$$

Напомним, что теперь  $|0\rangle$  — основное состояние в теории, найденное в нулевом порядке по  $J^\mu$ , но во всех порядках по внешнему полю монополя. Мы будем вычислять  $eg$  таким же способом, как вычислялось  $e^2$  в предыдущем абзаце. Это можно сделать, если полный интеграл в формуле (5.48) имеет тот же вид, что и его первый член, когда ток сосредоточен вдали от монополя. Тогда коэффициент перед всем выражением можно отождествить с  $eg$ . Итак

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = 1 \xrightarrow[\text{на больших расстояниях}]{} -ieg \int d^4x J^\mu(x) A_\mu^D(x) + O(J^2). \quad (5.49)$$

Здесь поставлен вопросительный знак, потому что мы еще не знаем, что в пределе получается правильное выражение. (Будем надеяться, что это именно так, иначе дело действительно плохо.)

Из уравнения движения для поля  $A_\mu$  следует, что

$$\langle 0 | A_\mu(x) | 0 \rangle = -ie_\lambda \int d^4y D_{\mu\nu}^0(x-y) \langle 0 | J^\nu(y) | 0 \rangle. \quad (5.50)$$

Величина в правой части — это матричный элемент калибровочно инвариантного оператора, поэтому несмотря на дираковскую струну, он обладает инвариантностью относительно вращений и  $CP$ -отражений. (Заметим, что этого бы не было, если бы мы неразумно попытались использовать разложения по степеням поля монополя.) Из инвариантности относительно вращений следует, что

$$\langle 0 | \bar{\psi} \gamma^0 \psi | 0 \rangle = f(r^2), \quad (5.51)$$

и

$$\langle 0 | \bar{\psi} \gamma^i \psi | 0 \rangle = r^i g(r^2), \quad (5.52)$$

с некоторыми функциями  $f$  и  $g$ . Из  $CP$ -инвариантности следует, что  $f = 0$ . Сохранение тока,

$$\partial_\mu \langle 0 | \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | 0 \rangle = 0, \quad (5.53)$$

указывает, что  $g = 0$ . Следовательно, формула (5.49) выполняется тривиальным образом, и

$$eg = e_\lambda g_\lambda. \quad (5.54)$$

Это совсем не похоже на соотношение (5.42), но, как уже указывалось, противоречие — только кажущееся: несмотря на использование схожих символов, приведенные соотношения дают ответы на совершенно различные вопросы в рамках разных теорий.

Формула (5.54) вызывает полное удовлетворение. Теория монополя утверждает, что  $eg$  должно быть целым или полуцелым, а в современной теории поля возникает вопрос: «На каком расстоянии определено  $eg$ ?». Ответ звучит так: «На всех расстояниях от бесконечности до сердцевины монополя. Это безразлично».

#### д) Влияние конфайнмента на неабелев магнитный заряд

Мы рассмотрели перенормировку абелева магнитного заряда, вычислив поле электромагнитного монополя на больших расстояниях через его поле вблизи сердцевины монополя. Чтобы завершить рассмотрение этого вопроса, обобщим наш метод на неабелев магнитный заряд и вычислим, например, поле хромомангнитного монополя на большом расстоянии от монополя, возникающего в теории Великого Объединения (см. п. в) гл. 5). Но такое вычисление было бы неразумно. Мы очень хорошо знаем, что на больших расстояниях поля хромомангнитного монополя не существует: никакое хромодинамическое поле не может падать как (отрицательная) степень расстояния. Из-за конфайнмента все хромодинамические взаимодействия спадают экспоненциально, и показатель экспоненты определяется массой самого легкого адрона. (Если исключить из рассмотрения фермионы, как мы сейчас делаем, то это масса глюония.)

Возникает кажущийся парадокс. Для монополей в теории Великого Объединения одновременное существование хромомангнитного и электромагнитного монополей было необходимо, чтобы дираковская струна была не наблюдаема. При рассеянии дробно заряженных частиц на струне фазовые сдвиги, обусловленные хромомангнитным и электромагнитным полями, должны погасить друг друга. (Как было показано в п. в) гл. 5, тот факт, что дробно заряженные частицы всегда находятся в связанном состоянии, в данном случае несуществен.) Однако на больших расстояниях поле хромомангнитного монополя исчезает, а электромагнитное остается. Значит ли это, что дираковская струна становится наблюдаемой на больших расстояниях?

Вопрос этот чисто риторический. Разумеется, струна не может стать наблюдаемой; конфайнмент не портит калибровочной инвариантности. Тем не менее надо посмотреть, как экспоненциально спадающие с расстоянием эффекты приводят к фазовому множителю, не зависящему от расстояния. Оставшаяся часть этого раздела будет посвящена указанной проблеме.

Хотя не нарушенной группой в рассматриваемой теории является  $SU(3) \otimes U(1)/Z_3$ , для простоты я буду рассматривать  $SO(3)$ , минимальную неабелеву группу. Обобщение на более сложные группы производится тривиально. Сначала я приведу общие соображения, а затем они будут подтверждены явными вычислениями в сильно упрощенной, но точно решаемой двумерной модели.

Метод Любкина позволяет поставить в соответствие контур в групповом пространстве  $g(\tau)$  любой сфере в обычном пространстве; гомотопический класс этого контура укажет нам, есть ли монополяр внутри сферы. Хотя гомотопический класс калибровочно инвариантен, это не относится к контуру, как таковому. А при выяснении нетривиальных вопросов в теории калибровочных полей разумно по возможности воздерживаться от нарушения калибровочной инвариантности. Будем поэтому рассматривать вильсоновскую петлю

$$W(\tau) = \frac{1}{2} \text{Sp } [g(\tau)]. \quad (5.55)$$

Хотя эта величина не зависит от калибровки, она зависит от конкретного матричного представления, которое использовано для реализации групповых элементов. Как будет видно, в рассматриваемом случае удобно выбрать представление группы  $SO(3)$ , соответствующее спину  $1/2$ , т. е. записывать  $g$  как элемент группы  $SU(2)$ . Это двузначное представление, и потому при вычислении вильсоновской петли возникает необходимость выбора между двумя возможностями. Мы устраняем этот произвол, накладывая условие  $g(0) = 1$ , так что  $W(0) = 1$ . Конечно, можно было бы выбрать другой вариант  $g(0) = -1$ , тогда нужно было бы всюду заменить  $W(\tau)$  на  $-W(\tau)$ .

Поведение  $W$  показывает, содержит ли наша сфера монополяр. Если  $g(\tau)$  принадлежит к тривиальному гомотопическому классу, то  $W(1) = W(0) = 1$ . На рис. 6, а показано поведение  $W$  для типичного поля такого типа, поля, просто равного нулю повсюду. Если же  $g(\tau)$  принадлежит к нетривиальному гомотопическому классу, то  $W(1) = -W(0) = -1$ . На рис. 6, б показано поведение  $W$  для типичного для этого случая поля монополя Годдара — Ньюта — Олайва. С этой точки зрения, задача состоит в том, чтобы понять, как экспоненциально спадающие с расстоянием эффекты могут, тем не менее, повлиять на не зависящее от расстояния поведение функции  $W$ .

Такой подход, однако, не вполне корректен. Конфайнмент — явление квантовое, а в квантовой теории  $W$  — оператор. Если выйти за рамки главного квазиклассического приближения (в котором конфайнмент не виден), состояние, содержащее один монополяр, не является собственным для оператора  $W$ . Мы должны рассматривать  $\langle W \rangle$ , среднее значение оператора  $W$ .

Конечно, если сфера столь мала, что ее радиус — много меньше длины конфайнмента, то квазиклассическое приближение применимо, и рис. 6 дает правильную картину поведения  $\langle W \rangle$  для вакуума и для одномонополярного состояний. Но для большой сферы, радиус которой много больше длины конфайнмента, даже изображенный для вакуума график на рис. 6, а неправилен. Когда наш контур скользит по большой сфере, он обязательно проходит через такое положение, в котором он охватывает большую площадь, и потому среднее значение становится очень малым в силу закона Вильсона, согласно которому под знаком экспоненты возникает площадь. Это изображено на рис. 7, а, хотя и сильно не в масштабе. При  $\tau = 1/2$ , когда контур проходит по меридиану,  $\langle W(1/2) \rangle$  — порядка  $\exp(-\pi K \tau^2)$ , где  $K$  — натяжение струны. Эта величина столь мала, что если бы мы попытались соблюсти масштаб, на графике нельзя было бы заметить, что  $\langle W(1/2) \rangle$  отлично от нуля.

Вот и решилась наша проблема. Наличие монополя вовсе не обязательно приводит к не зависящему от расстояния изменению  $\langle W \rangle$ . Из-за закона площадей Вильсона  $\langle W \rangle$  падает от единицы до очень малой положительной величины. Полю монополя достаточно лишь слегка изменить  $\langle W \rangle$ , чтобы его величина стала отрицательной. А затем закон площадей доводит  $\langle W \rangle$  до  $-1$ . Это изображено схематически на рис. 7, б. Следует подчеркнуть, что поведение этого графика в правой половине определяется той же физикой, что и его поведение в левой половине: эволюция  $\langle W \rangle$  в отрицательной области

может быть выведена из эволюции в положительной области простым изменением выбора ветви двузначного представления.

Примечательно, что если бы мы определили  $W$ , используя представление группы  $SO(3)$  с целым спином, то мы не могли бы использовать закон площадей, но у нас не было бы и способа обнаружить монополи.

На этом общие соображения завершаются. А теперь, как я и обещал, будут проведены некоторые явные вычисления в двумерной евклидовой калибровочной теории.

Двумерные калибровочные теории обладают двумя существенными достоинствами. Во-первых, с ними легко работать. Причина этого состоит

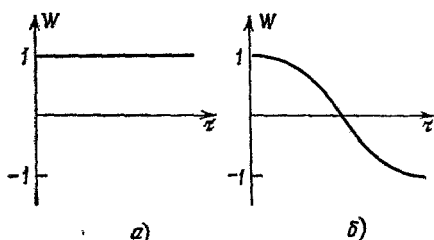


Рис. 6.

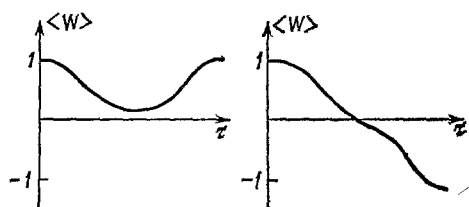


Рис. 7.

главным образом в том, что уменьшается число степеней свободы: для псевдо-евклидова случая отсутствует поле излучения, есть лишь кулоновское поле. Во-вторых, конфайнмент здесь очевиден. При одном пространственном измерении даже в обычной абелевой электродинамике возникает линейно растущий потенциал. Но эти теории обладают и большим недостатком — они не содержат монополей. Это можно исправить, рассматривая калибровочную теорию с группой  $SO(3)$  не в плоском двумерном пространстве, а на двумерной сфере. Можно считать, что обычная двумерная евклидова теория поля получается из четырехмерной при фиксировании  $z$  и  $t$ , а настоящими переменными остаются только  $x$  и  $y$ . Подобно этому, двумерная теория на сфере получается, если зафиксированы  $r$  и  $t$ , а меняются углы  $\theta$  и  $\varphi$ . Монополь остается в той части пространства, которую мы выкинули, вблизи  $r = 0$ , но связанные с ним эффекты все же ощущаются на рассматриваемой нами сфере.

Теперь перейдем к конкретным вычислениям и рассмотрим калибровочную теорию с группой  $SO(3)$  на сфере. Как и в гл. 3, будем использовать струнную калибровку, так что  $A_\theta$  всюду равно нулю. При этом, вообще говоря, возникает особенность типа дираковской струны в южном полюсе, т. е. ненулевое значение  $A_\varphi(\pi, \varphi)$ . Определим  $g(\varphi)$ , элемент группы  $SU(2)$ , с помощью уравнения

$$\frac{dg}{d\varphi} = -A_\varphi(\pi, \varphi) g(\varphi) \quad (5.56)$$

при условии

$$g(0) = 1. \quad (5.57)$$

Тогда из того, что струнная сингулярность обусловлена выбором калибровки, следует, что

$$g(2\pi) = \pm 1. \quad (5.58)$$

Если внутри сферы нет монополя, то здесь стоит знак плюс, если же монополь имеется, то  $g(2\pi) = -1$ . Двигая петлю Любкина, как показано на рис. 4, получаем

$$W(\tau) = \frac{1}{2} \text{Sp} [g(2\pi\tau)]. \quad (5.59)$$

Действие для евклидовой теории, суженной на сферу, имеет обычный вид

$$S_E = -f^{-2} \int \text{Sp} (F_{\theta\varphi} F^{\theta\varphi}) \sqrt{g} d\theta d\varphi = -r^{-2} f^{-2} \int \text{Sp} (\partial_\theta A_\varphi)^2 (\sin \theta)^{-1} d\theta d\varphi \quad (5.60)$$

(см. формулы (3.43) и (3.45)).

Как всегда, среднее значение калибровочно инвариантной величины  $O$  определяется как отношение двух функциональных интегралов,

$$\langle O \rangle = \frac{\int (dA_\varphi) O \exp(-S_E)}{\int (dA_\varphi) \exp(-S_E)}. \quad (5.61)$$

Будем вычислять это среднее значение при отсутствии или наличии монополя, интегрируя по всем полевым конфигурациям при условии  $g(2\pi) = +1$  или, соответственно,  $-1$ . При этом с самого начала можно быть уверенным в соответствующем поведении  $\langle W \rangle$ ,  $\langle W(1) \rangle = \pm 1$ .

Начнем со знаменателя в формуле (5.61); числитель вычисляется аналогично. Запишем  $A_\varphi$  в виде суммы:

$$A_\varphi = \hat{A}_\varphi + \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) A_\varphi(\pi, \varphi), \quad (5.62)$$

так что

$$\hat{A}_\varphi(0, \varphi) = \hat{A}_\varphi(\pi, \varphi) = 0. \quad (5.63)$$

При этом действие диагонализуется,

$$S_E = \hat{S} + S_1, \quad (5.64)$$

где

$$\hat{S} = r^{-2} f^{-2} \int \text{Sp} (\partial_\theta \hat{A}_\varphi)^2 (\sin \theta)^{-1} d\theta d\varphi \quad (5.65)$$

и

$$S_1 = -\frac{1}{2} r^{-2} f^{-2} \int_0^{2\pi} \text{Sp} [A_\varphi(\pi, \varphi)^2] d\varphi = -\frac{1}{2} r^{-2} f^{-2} \int_0^{2\pi} \text{Sp} \left( g^{-1} \frac{dg}{d\varphi} \right)^2 d\varphi. \quad (5.66)$$

Так наша теория оказалась представленной в виде суммы двух независимых систем. Одна описывается действием  $\hat{S}$ , это двумерная теория поля, но она тривиальна: динамические переменные удовлетворяют линейным граничным условиям, а действие квадратично по этим переменным. Другая система описывается действием  $S_1$ , она нетривиальна, но одномерна. Иными словами, это вовсе не евклидова теория поля, а обычная механическая система, для которой угол  $\varphi$  играет роль мнимого времени.

Фактически, эта механическая система хорошо изучена. Ее состояния отвечают элементам группы вращений, т. е. в качестве координат можно выбрать, например, три угла Эйлера. Эта система представляет собой твердое тело, закрепленное в одной точке; точнее говоря, так как  $g$  — элемент группы  $SU(2)$ , а не  $SO(3)$ , это — двойное накрытие твердого тела, так что допустимы как целые, так и полуцелые угловые моменты.

Рассматривая движение вблизи точки  $g = 1$ , получаем

$$g = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon \varepsilon^a \sigma^a + O(\varepsilon^2) \quad (5.67)$$

и, соответственно,

$$S_1 = \frac{1}{4} r^{-2} f^{-2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varepsilon^a}{d\varphi} \frac{d\varepsilon^a}{d\varphi} d\varphi + O(\varepsilon^3), \quad (5.68)$$

откуда видно, что это твердое тело изотропно. Все моменты инерции одинаковы и равны

$$I_1 = I_2 = I_3 \equiv I = \frac{1}{2} r^2 f^{-2}. \quad (5.69)$$

Это позволяет нам полностью проанализировать систему при всех  $r$ . Однако ответ особенно прост в предельных случаях очень больших и очень малых  $r$ , этими двумя случаями мы теперь и ограничимся.

Для очень малых  $r$ ,  $r^2 f^2 \ll 1$ , функциональный интеграл определяется главным образом стационарными точками действия, т. е. решениями классических уравнений движения. Для твердого тела существуют устойчивые состояния, когда оно вращается вокруг фиксированной оси, например положительной оси  $z$ :

$$g = \exp \left( -\frac{i}{2} \omega \sigma_3 \varphi \right), \quad (5.70)$$

где  $\omega$  — произвольная неотрицательная константа, угловая скорость. (К счастью, все моменты инерции оказались одинаковыми, иначе пришлось бы учитывать свободную прецессию.) Среди этих движений главный вклад вносит то, которое отвечает минимальному действию, т. е. минимальному  $\omega$ , допустимому граничным условием. В отсутствие монополя граничные условия имеют вид  $g(0) = g(2\pi) = 1$ . Доминирует движение с  $\omega = 0$ , а соответствующий вектор-потенциал также равен нулю,  $A_\varphi = 0$ . В присутствии монополя граничные условия имеют вид  $g(0) = 1$ ,  $g(2\pi) = -1$ . Доминирует движение с  $\omega = 1$ , и соответствующий вектор-потенциал равен

$$A_\varphi = -\frac{i}{4} \sigma_3 (1 - \cos \theta). \quad (5.71)$$

Это поле монополя типа Годдара — Ньюта — Олайва. На малых расстояниях квантовая теория, как и положено, выглядит как классическая.

Для исследования области больших  $r$  нам нужно знать собственные состояния и собственные значения оператора энергии для системы, представляющей собой двойное накрытие твердого тела. Эта задача обсуждается в стандартных учебниках \*), поэтому я просто приведу здесь результаты. Собственные состояния имеют вид  $|j, m, m'\rangle$ , где  $j = 0, 1/2, 1, \dots$ , а  $m$  и  $m'$  независимо друг от друга пробегают  $(2j + 1)$  значений от  $-j$  до  $+j$ . Собственные значения  $E_j$

$$H |j, m, m'\rangle = E_j |j, m, m'\rangle, \quad (5.72)$$

где  $E_j = j(j + 1)/2I$ ,  $I$  — момент инерции. Для каждого из этих состояний амплитуда вероятности найти систему в точке, отвечающей групповому элементу  $g$ , имеет вид

$$\langle g | j, m, m'\rangle = \sqrt{2j + 1} D_{mm'}^{(j)}(g), \quad (5.73)$$

где  $D^{(j)}$  — обычная матрица неприводимого представления группы.

Теперь у нас все готово. Вклад твердого тела в функциональный интеграл равен

$$\int (dg) \exp(-S_1) = \langle g = \pm 1 | \exp(-2\pi H_1) | g = 1 \rangle, \quad (5.74)$$

согласно определению фейнмановского интеграла по траекториям. Вставляя полную систему стационарных состояний, получаем

$$\begin{aligned} \langle g = \pm 1 | \exp(-2\pi H_1) | g = 1 \rangle &= \\ &= \sum_{j, m, m'} (2j + 1) D_{mm'}^{(j)}(\pm 1) D_{mm'}^{(j)*}(1) \exp(-2\pi E_j) = \\ &= \sum_j (2j + 1)^2 (\pm 1)^{2j} \exp[-\pi j(j + 1)/I]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

\*) См., например, «Квантовую механику» Ландау и Лифшица <sup>30</sup>.

Это точный ответ. При больших  $r$ ,  $r^2 f^2 \gg 1$ , это выражение определяется первым членом ряда,  $j = 0$ , который совершенно не чувствителен к наличию или отсутствию монополя. Чтобы обнаружить монополю надо удерживать также второй член,  $j = 1/2$ . В результате,

$$\int (dg) \exp(-S_1) = 1 \pm 4 \exp\left(-\frac{3}{2} \pi f^2 r^2\right). \quad (5.76)$$

Эффект этот ничтожно мал.

Конечно, мы рассмотрели только знаменатель выражения для среднего значения оператора в формуле (5.64), но аналогичный вывод применим и ко всему выражению в целом. Особенно легко найти среднее значение для самого действия:

$$\begin{aligned} \langle S_E \rangle &= \langle \hat{S} \rangle + \langle S_1 \rangle = \langle \hat{S} \rangle - f^2 \frac{d}{df^2} \ln \left[ \int (dg) \exp(-S_1) \right] = \\ &= \langle \hat{S} \rangle \mp 6 \pi f^2 r^2 \exp\left(-\frac{3}{2} \pi f^2 r^2\right), \end{aligned} \quad (5.77)$$

где как и прежде, отброшены члены, экспоненциально малые по сравнению с удержанными. Несложное вычисление приводит к интересующему нас результату:

$$\langle W(\tau) \rangle = \exp\left(-\frac{3}{2} \pi f^2 r^2 \tau\right) \pm \exp\left(-\frac{3}{2} \pi f^2 r^2 (1-\tau)\right), \quad (5.78)$$

где также удержаны лишь ведущие члены. (Детали этого вычисления не приводятся, они оставлены читателю в качестве упражнения.) Это выражение имеет простую физическую интерпретацию: это сумма вильсоновских членов, содержащих площади областей, на которые рассматриваемый контур делит сферу.

Все это находится в полном согласии с приведенным выше общим рассуждением. На малых расстояниях адекватное описание дается классической физикой, а на больших расстояниях все эффекты, связанные с монополями, ничтожно малы, но именно наличие монополя ответственно за изменение  $\langle W \rangle$  от  $+1$  до  $-1$ .

Люди, занимающиеся теорией гравитации, говорят: «У черной дыры не бывает волос». Это значит, что волосы у черной дыры коротко подстрижены, из нее могут выходить только безмассовые калибровочные поля, связанные со строго сохраняющимися величинами, т. е. гравитационные поля, связанные с полной энергией и угловым моментом, и электромагнитные поля, связанные с полным электрическим и магнитным зарядами.

Из-за эффекта конфинмента хромодинамические силы являются короткодействующими. Тем не менее топологический заряд строго сохраняется, и его можно найти по хромодинамическим эффектам на произвольно больших расстояниях. Эти два утверждения противоречили бы друг другу в рамках классической физики, но в квантовой теории, как было показано, они вполне совместимы. Задача для читателя: «Может ли черная дыра иметь цветные волосы?»

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1931, v. 133, p. 60.— (Перевод в сб. «Монополю Дирака»/Под ред. Б. М. Болотовского, Ю. Д. Усачева.— М.: Мир, 1970.— Перег.)
2. 't Hooft G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 79, p. 276.
3. Поляков А. М.— Письма ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430.
4. Preskill J.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 1365.
5. Coleman S.— In: New Phenomena in Subnuclear Physics/Ed. by A. Zichichi.— Lond.: Plenum Press, 1977.
6. Goddard P., Olive D.— Rept. Progr. Phys., 1978, v. 41, p. 1357.
7. 't Hooft G., Veltman A.— In: Aspects of Quantum Theory/ Ed. by A. Salam, E. Wigner.— Cambridge: Cambridge University Press, 1972.
8. Aharonov Y., Bohm D.— Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 485.

9. Wu T. T., Yang C. N.—Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 107, p. 365.
10. Tamm I.—Zs. Phys., 1931, Bd. 71, S. 141.
11. Lipkin H. J., Weisberger W. I., Peshkin M.—Ann. Phys. (N. Y.), 1969, v. 53, p. 203.
12. Goldhaber A.—Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1122.
13. Jackiw R., Rebbi C.—Ibid., p. 1116.
14. Hassenfratz P., 't Hooft G.—Ibid., p. 1119.
15. Goddard P., Nuyts J., Olive D.—Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 125, p. 1.
16. Lubkin E.—Ann. Phys. (N. Y.), 1963, v. 23, p. 233.
17. Brandt R., Neri F.—Nucl. Phys. Ser. B, 1979, v. 161, p. 253.
18. Nahm W., Olive D. Частное сообщение, лето 1979 г.
19. Georgi H., Glashow S. L.—Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 438.
20. Богомолов Е. Б.—ЯФ, 1976, т. 24, с. 861.
21. Coleman S., Parke S., Neveu A., Sommerfield C.—Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 544.
22. Prasad M., Sommerfield C.—Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 760.
23. Tomboulis E., Woo G.—Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 107, p. 221.
24. Julia B., Zee A.—Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 11, p. 2227.
25. Witten E.—Phys. Lett. Ser. B, 1979, v. 86, p. 283.
26. Dokos C., Tomaras T.—Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2940.
27. 't Hooft G.—Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 105, p. 538.
28. Corrigan E., Olive D., Fairlie D., Nuyts J.—Ibid., v. 106, p. 475.
29. Schwinger J.—Phys. Rev., 1966, v. 144, p. 1087 (перевод как в <sup>1</sup>, —Перев.); v. 151, p. 1048, 1055.
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Изд. 3-е—М.: Наука, 1974.—С. 471.