

537.874

**ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
И МАГНИТНЫХ МУЛЬТИПОЛЕЙ****И. М. Франк****СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	251
1. Основные формулы электродинамики для электрического заряда, движущегося в среде	253
2. Сила, действующая на движущийся электрический мультиполь	255
3. Излучение электрического мультиполя	261
4. Излучение Вавилова — Черенкова для элементарного электрического и магнитного диполей	264
5. Излучение магнитного заряда, а также диполей и мультиполей, образованных магнитными зарядами	270
6. Приложение. Уравнения Максвелла для магнитных зарядов и токов	274
Цитированная литература	275

ВВЕДЕНИЕ

Материал, включенный в этот обзор, — результат работ автора, выполненных на протяжении сорока лет: в 1942 г., 1952 г. и 1982 г.

После появления в 1937 г. теории излучения Вавилова — Черенкова¹ (далее будем называть его ИВЧ) и более детального обсуждения ряда теоретических вопросов в 1939 г.² была дана и квантовая трактовка явления^{3, 4}. Теория была обобщена и на анизотропные среды⁵. Естественно, что возник вопрос об общих особенностях излучения при равномерном движении различных источников света, как обладающих собственной частотой, так и не имеющих ее. Шаг в этом направлении был сделан в опубликованной в 1942 г. статье, посвященной эффекту Доплера в преломляющей среде⁶. Помимо особенностей излучения движущегося в преломляющей среде гармонического осциллятора, получивших название сложного и аномального эффекта Доплера, была в той или иной степени заложена основа для последующего рассмотрения ряда других вопросов, таких, как пороговые явления, характерная длина, в дальнейшем названная когерентной длиной, сделан первый шаг, приведший к развитию теории переходного излучения. Все эти перечисленные вопросы лежат вне рамок настоящего обзора.

Однако один из результатов работы⁶ имеет непосредственное значение для его содержания. Если с 1937 г. рассматривалась теория ИВЧ для электрического заряда, то, естественно, возникал вопрос об излучении более сложных систем и прежде всего диполей. По-видимому эта проблема впервые была затронута в связи с квантовой теорией ИВЧ⁴. В работе⁶ было рассмотрено ИВЧ для электрических и магнитных диполей, ориентированных параллельно скорости движения и перпендикулярно ей. Если для электрических и магнитных диполей, ориентированных параллельно скорости, полученные формулы сходны между собой, причем так же, как для заряда, энер-

гия излучения является функцией квадрата синуса характерного угла ИВЧ, т. е.

$$\sin^2 \theta_0 = 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)},$$

то при перпендикулярной ориентации относительно скорости картина иная. Для электрического диполя и в этом случае не происходит чего-либо необычного, но для магнитного диполя, ориентированного перпендикулярно скорости, энергия излучения — сложная функция n^2 и β^2 и не стремится к нулю при $\beta n \rightarrow 1$. Формула с самого начала представлялась неожиданной и даже аномальной. Вопрос об этой аномалии неоднократно обсуждался и продолжает обсуждаться и до сих пор, т. е. более сорока лет. Здесь рассмотрение его содержится главным образом в гл. 4.

В 1952 г. была опубликована статья, содержащая теорию ИВЧ для любых линейных электрических и магнитных мультиполей⁷. При этом магнитные мультиполи рассматривались как совокупность магнитных зарядов. Из этого следует, что ИВЧ должно возникать не только для движущегося заряда, но для любой частицы или системы частиц, несущих электромагнитное поле⁹, так как оно всегда может быть представлено как сумма поля зарядов и мультиполей.

Работа⁷, по-видимому, привлекла внимание и к вопросу об аномалии с излучением магнитного диполя, для выяснения которого потребовалось, однако, дальнейшее обсуждение.

Выбор в⁷ в качестве темы статьи излучения мультиполей не был случаен, она предназначалась для сборника в честь 60-летия С. И. Вавилова. Как известно, С. И. Вавилов занимался рассмотрением влияния природы элементарных излучателей на наблюдаемые свойства радиации⁸ и был доволен, что я взялся за рассмотрение этого вопроса применительно к ИВЧ. Получилось, однако, так, что мою статью, так же как и другие, предназначенные для сборника при жизни С. И. Вавилова, напечатать не успели, и она вышла уже посмертно в книге, посвященной его памяти.

Автор первоначально предполагал включить в обзор целиком работу⁷, поскольку полученные в ней результаты правильны и, видимо, не потеряли своего значения, а обобщение сделанного и новое их толкование дать в дополнительных параграфах статьи. Оказалось, однако, удобнее несколько переработать статью, с самого начала записав уравнения в более общем виде. В работе⁷ принималось, что магнитная проницаемость среды $\mu = 1$, однако рационально записать все уравнения в форме, пригодной для случая среды с $\mu \neq 1$. Это элементарное обобщение имеет некоторое самостоятельное значение; в этом случае видно, когда в уравнение входит показатель преломления n , который при $\mu = 1$ равен $n^2 \equiv \epsilon$, а когда ϵ . Особенно необходимо предположение $\mu \neq 1$ при сравнении формул для излучения электрических и магнитных мультиполей.

Гл. 1—3 статьи в основном повторяют содержание статьи⁷ с обобщением результатов на случай среды с $\mu \neq 1$. Следующие главы, по существу, написаны заново.

Величину энергии, излучаемой движущимся мультиполем, можно найти, если известна сила, тормозящая его движение. Нахождение силы, действующей на движущийся заряд, весьма простой способ определения энергии ИВЧ⁹. Сила, действующая на два заряда, движущиеся параллельно с одинаковой скоростью, была определена в работе¹⁰ для частного случая расположения двух зарядов в плоскости, перпендикулярной направлению движения. Аналогичный метод использован здесь для нахождения энергии излучения произвольно ориентированного линейного электрического мультиполя (гл. 2), который рассматривается как система движущихся жестко связанных зарядов. При этом показано, что кроме компоненты силы, тормозящей движение мультиполя, имеется и сила, направленная перпендикулярно скорости (гл. 2, 3).

Другой метод определения энергии излучения состоит в том, что волновое поле электрического мультиполя находится как результат интерференции волн, испускаемых входящими в его состав зарядами (гл. 3).

В гл. 4 в рамках классической электродинамики рассмотрена теория излучения элементарных электрических и магнитных диполей, являющаяся некоторым обобщением работ ^{6, 7}.

В следующих разделах (гл. 5, 6) обсуждаются уравнения поля и энергия излучения движущихся магнитных зарядов и магнитных мультиполей, составленных из магнитных зарядов. Приведенные там результаты, по существу, совпадают с результатами работы ⁷. Однако интерпретация их изменилась. В отличие от работы ⁷, показано, что диполь, состоящий из двух магнитных зарядов, по свойствам излучения не должен быть всегда эквивалентен обычному магнитному диполю, который создается элементарным круговым током. Различие становится особенно очевидным в среде с $\mu \neq 1$.

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СРЕДЕ

Для дальнейшего изложения необходимы основные формулы, используемые в теории эффекта Вавилова — Черенкова для движущегося заряда ^{1,2}, которые обобщим на случай среды с $\mu \neq 1$.

Компоненты Фурье векторного и скалярного потенциала можно записать так:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \varepsilon \mathbf{A}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}_\omega, \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \varphi_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \varepsilon \mathbf{A}_\omega = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_\omega, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_\omega + \frac{i\omega}{c} \mu \varepsilon \varphi_\omega = 0, \quad (1.3)$$

Пользуясь (1.3), вектор напряженности электрического поля можно выразить через $\mathbf{A}_\omega$. Тогда для $\mathbf{E}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, имеем

$$\mathbf{E}_\omega = -\frac{ic}{\omega \mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}_\omega; \quad (1.5)$$

здесь под ε и μ понимают их значения для частоты ω . Среду считаем прозрачной, так что величины ε и μ и $n^2 = \varepsilon \mu$ не содержат мнимой части.

Проследим взаимосвязь (1.1)–(1.5) с уравнениями Максвелла. Из уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_\omega}{\partial t}, \quad (1.6)$$

принимая во внимание (1.5), имеем

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E}_\omega + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_\omega}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.7)$$

и мы можем положить

$$-\operatorname{grad} \varphi_\omega = \mathbf{E}_\omega + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_\omega}{\partial t}. \quad (1.8)$$

В этом случае, учитывая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_\omega = 4\pi \rho, \quad (1.9)$$

имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_\omega = -\varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_\omega - \frac{\varepsilon}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}_\omega}{\partial t} = 4\pi \rho_\omega. \quad (1.10)$$

Используя соотношение Лоренца (1.3), из (1.10) в самом деле получаем (1.2). Наконец, из (1.8) и (1.3) имеем (1.4). Для контроля проверим, что (1.1) также записано правильно. Из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}_\omega}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\omega, \quad (1.11)$$

принимая во внимание (1.5) и то, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}_\omega = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}_\omega - \nabla^2 \mathbf{A}_\omega, \quad (1.12)$$

а также (1.4), в самом деле получаем (1.1).

Переходя к решению уравнения (1.1), повторим формулы, использованные при рассмотрении теории излучения Вавилова — Черенкова, и приведем их без детального пояснения *).

Плотность тока, создаваемую зарядом e , движущимся по оси z (координаты его $z = vt$, $x = y = 0$), можно положить равной

$$j_z = ev \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt). \quad (1.13)$$

Задачу удобно решать в цилиндрических координатах, приняв за $\rho = 0$ ось z , по которой движется заряд. Тогда для компоненты ω плотности тока получается

$$j_{\omega z} = \frac{e}{2\pi^2 \rho} e^{-(i\omega z/v)} \delta(\rho), \quad j_{\omega \rho} = j_{\omega \varphi} = 0. \quad (1.14)$$

Решение (1.1) при $j_{\omega z}$, равном (1.14), при $\mu \neq 1$ запишем так:

$$A_{\omega z} = \frac{e\mu}{2c} a(\rho, \omega) e^{-i\omega z/v}, \quad A_{\omega \rho} = A_{\omega \varphi} = 0. \quad (1.15)$$

Тогда уравнение для $a(\rho, \omega)$ имеет тот же вид, как и в случае $\mu = 1$:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho} + s^2 a = -\frac{4}{\pi \rho} \delta(\rho); \quad (1.16)$$

здесь

$$s^2 = \frac{|\omega|^2 n^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) = \frac{|\omega|^2}{v^2} (\beta^2 n^2 - 1), \quad (1.17)$$

причем, разумеется, $n^2 = \epsilon\mu$.

При $\rho > 0$ для функции $a(\omega)$ имеет место уравнение Бесселя

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho} + s^2 a = 0. \quad (1.18)$$

Решение уравнения (1.18) должно удовлетворять значению в полюсе $\rho = 0$ и соответствовать волне, уходящей от оси z .

Учет этих граничных условий приводит, как известно, к тому, что решение зависит от величины βn (1,2).

В случае $\beta n < 1$

$$a(\rho, \omega) = iH_0^{(1)}(i\sigma\rho), \quad \sigma = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2 n^2}. \quad (1.19)$$

Для дальнейшего существенно, что $a(\rho, \omega)$ в (1.19) не зависит от знака ω .

Если же скорость заряда больше фазовой скорости света, $v > c/n$, т. е. $\beta n > 1$, то

$$a(\rho, \omega) = -iH_0^{(2)}(s\rho) = -iJ_0(s\rho) - Y(s\rho) \quad \text{при } \omega > 0, \quad (1.20)$$

$$a(\rho, \omega) = +iH_0^{(1)}(s\rho) = iJ_0(s\rho) - Y(s\rho) \quad \text{при } \omega < 0. \quad (1.21)$$

*) Интересующихся их обоснованием отошлем к работе ¹ и особенно к статье И. Е. Тамма ², 1939 г.

Здесь $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ — функции Ханкеля нулевого порядка первого и второго рода. Они выражаются, как известно, через функцию Бесселя J_0 и функцию Вебера Y_0 нулевых порядков.

Для составляющих напряженности поля из (1.14), (1.4) и (1.5) получаем

$$H_{\omega\varphi} = -\frac{e}{2c} \frac{\partial a}{\partial \rho} e^{-i\omega z/v}, \quad (1.22)$$

$$E_{\omega\rho} = -\frac{e\mu}{2v n^2} \frac{\partial a}{\partial \rho} e^{-i\omega z/v}, \quad (1.23)$$

$$E_{\omega z} = -\frac{ie\omega\mu}{2c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) a e^{-i\omega z/v}. \quad (1.24)$$

Составляющая вектора Пойнтинга, направленная по ρ , равна

$$S = -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\omega z} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega'\varphi} e^{i\omega' t} d\omega'. \quad (1.25)$$

После умножения S на площадь боковой поверхности цилиндра $2\pi\rho d$ и интегрирования по времени от $-\infty$ до $+\infty$ можно, как это было сделано в теории ИВЧ, получить величину W для энергии, излучаемой зарядом e на пути d .

Здесь, в отличие от среды с $\mu = 1$, величина $E_{\omega z}$ (см. (1.24)) содержит дополнительный коэффициент μ . Отсюда, как видно из (1.25), величина W должна увеличиться в μ раз по сравнению с хорошо известным случаем $\mu = 1$.

Таким образом,

$$W = e^2 d \int W_{\omega} d\omega, \quad (1.26)$$

при этом

$$W_{\omega} = \frac{\mu}{c^2} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \quad (1.27)$$

есть энергия излучения единичного электрического заряда на единице пути, отнесенная к единичному интервалу частоты, для среды с $\mu \neq 1$ ^{11,12} (см. формулу (2.13)).

2. СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ДВИЖУЩИЙСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ МУЛЬТИПОЛЬ

Сила, действующая на заряд e_i и вызванная полем заряда e_k , равна

$$\mathbf{f}(e_i, k) = e_i \mathbf{E}(e_k) + \frac{e_i}{c} \mu [\mathbf{v} \mathbf{H}(e_k)]; \quad (2.1)$$

здесь $\mathbf{E}(e_k)$ и $\mathbf{H}(e_k)$ — напряженности поля, создаваемого зарядом e_k в точке, где находится заряд e_i , и v — скорость движения заряда e_i .

В дальнейшем будем рассматривать силу $\mathbf{f}_{\omega}(e_i, k)$, определяемую действием суммы составляющих поля частоты $+\omega$ и $-\omega$, таким образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\omega}(e_i, k) = & e_i [\mathbf{E}_{\omega}(e_k) e^{i\omega t} + \mathbf{E}_{-\omega}(e_k) e^{-i\omega t}] + \\ & + \frac{e_i}{c} \mu v [\mathbf{H}_{\omega}(e_k) e^{i\omega t} - \mathbf{H}_{-\omega}(e_k) e^{-i\omega t}]; \end{aligned} \quad (2.2)$$

при этом

$$\mathbf{f}(e_i, k) = \int_0^{\infty} \mathbf{f}_{\omega}(e_i, k) d\omega. \quad (2.3)$$

Мы будем полагать, что среда, в которой происходит движение, не поглощает света, т. е. что ее показатель преломления n есть действительная величина. Кроме того, в дальнейшем будут рассматриваться только жестко

связанные между собой заряды, движущиеся в одном направлении с одинаковыми скоростями ($v_i = v_k$). Считая, что движение происходит вдоль оси z , полагаем

$$z_i - z_k = \Delta_{ik} \quad (2.4)$$

и выбирая начало отсчета времени так, что $z_k = vt$, имеем

$$z_i = vt + \Delta_{ik}. \quad (2.5)$$

Отсюда, подставляя в (2.2) значения составляющих поля (1.22)–(1.24) при $e = e_k$, для точки z_i , определяемой (2.5), и $\rho = \rho_{ik}$, где ρ_{ik} — расстояние между траекториями зарядов e_i и e_k , получим

$$f_{\omega z}(e_{i,k}) = -\frac{i\omega\mu e_i e_k}{2c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) [a(\rho_{ik}, +\omega) e^{-i\omega\Delta_{ik}/v} - a(\rho_{ik}, -\omega) e^{+i\omega\Delta_{ik}/v}], \quad (2.6)$$

$$f_{\omega\rho}(e_{i,k}) = +\frac{v\mu e_i e_k}{2c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left[\frac{\partial}{\partial\rho} a(\rho, +\omega) e^{-i\omega\Delta_{ik}/v} + \frac{\partial}{\partial\rho} a(\rho, -\omega) e^{+i\omega\Delta_{ik}/v} \right]_{\rho=\rho_{ik}}; \quad (2.7)$$

здесь $f_{\omega z}$ — составляющая силы, действующей на e_i и направленной по оси z , а $f_{\omega\rho}$ — составляющая силы, перпендикулярной к ней и направленной от траектории k -го заряда к траектории i -го заряда (рис. 1).

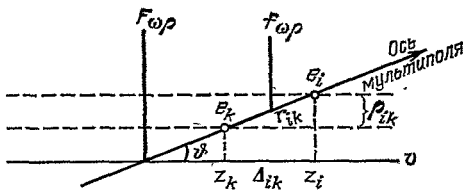


Рис. 1.

Для определения полной силы, действующей на систему, необходимо также знать действие поля частицы e_k на частицу e_i .

Легко убедиться, что для получения этой силы $f_{\omega}(e_k, i)$, действующей на частицу k , достаточно изменить (на обратный) знак при Δ_{ik} в (2.6) и (2.7). При этом положительной

величине компоненты силы $f_{\omega}(e_k, i)$ соответствует направление от траектории i -й частицы к k -й, т. е. направление, противоположное (2.7).

В результате, для суммы сил, действующих на обе частицы, получаем

$$f_{\omega z}(ik) = f_{\omega z}(e_i, k) + f_{\omega z}(e_k, i) = -\frac{i\omega\mu e_i e_k}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) [a(\rho_{ik}, +\omega) - a(\rho_{ik}, -\omega)] \cos \frac{\omega\Delta_{ik}}{v}, \quad (2.8)$$

$$f_{\omega\rho}(ik) = f_{\omega\rho}(e_i, k) - f_{\omega\rho}(e_k, i) = -\frac{v\mu e_i e_k}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left[\frac{\partial}{\partial\rho} a(\rho, +\omega) - \frac{\partial}{\partial\rho} a(\rho, -\omega) \right]_{\rho=\rho_{ik}} \sin \frac{\omega\Delta_{ik}}{v}. \quad (2.9)$$

Знак $f_{\omega\rho}(ik)$ выбран так, что при положительной величине $f_{\omega\rho}(ik)$ сила направлена от k -й траектории к i -й (см. рис. 1).

Действие на частицу собственного поля получим, если в (2.6) положить $e_i = e_k$, а Δ_{ik} и ρ_{ik} привести к предельному значению, равному нулю. Тогда *)

$$f_{\omega z}(e_i) = -\frac{i\omega\mu e_i^2}{2c^2} [a(0, +\omega) - a(0, -\omega)]. \quad (2.10)$$

*) Из (2.6) видно, что предельное значение $f_{\omega z}$, соответствующее $\Delta = 0$, не зависит от того, переходить ли к пределу со стороны положительных или отрицательных Δ . В отличие от этого, $f_{\omega\rho}$ по своему направлению всегда связана с ρ . Из соображений симметрии очевидно, что сила, действующая на частицу, должна быть одинаковой для всех направлений радиуса ρ . Таким образом, результирующую силу $f_{\omega\rho}$ для действия собственного поля частицы следует положить равной нулю.

Из (2.8)—(2.10) видно, что силы, действующие на систему из двух частиц, тождественно обращаются в нуль, если $a(\rho, +\omega) = a(\rho, -\omega)$. Согласно (1.19), это имеет место в случае, когда $\beta n < 1$.

Сила, действующая на систему точечных зарядов, равна сумме сил торможения каждой частицы собственным полем (2.10) и сил взаимодействия пар отдельных частиц (2.8), (2.9). Отсюда следует, что любая система из жестко связанных зарядов при равномерном и прямолинейном движении не испытывает ни тормозящих ее движение сил, ни сил, отклоняющих ее от прямолинейной траектории, если скорость движения $v < c/n$. Иная картина имеет место при скорости, большей фазовой скорости света ($\beta n > 1$). В этом случае, подставляя значения $a(\rho, \omega)$ из (1.20) и (1.21) в (2.8), (2.9), имеем

$$f_{\omega z}(ik) = -\frac{2\omega\mu e_i e_k}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) J_0(sp_{ik}) \cos \frac{\omega\Delta_{ik}}{v}, \quad (2.11)$$

$$f_{\omega p}(ik) = +\frac{2\omega\mu v n e_i e_k}{c^3} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^{3/2} J_1(sp_{ik}) \sin \frac{\omega\Delta_{ik}}{v}. \quad (2.12)$$

Для получения (2.12) дополнительно принято во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial \rho} J_0(s\rho) = -sJ_1(s\rho).$$

Для сил $f_{\omega z}(e_i)$ и $f_{\omega z}(e_k)$, тормозящих движущиеся заряды e_i и e_k , из (1.20) и (2.10) имеем (поскольку $J_0(s\rho)$ при $\rho = 0$ равно единице)

$$f_{\omega z}(e_i) = -\frac{e_i^2 \mu \omega}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) = -e_i^2 W_\omega, \quad (2.13)$$

$$f_{\omega z}(e_k) = -e_k^2 W_\omega.$$

Знак минус означает, что сила направлена против направления движения, т. е. что при движении совершается работа. При этом величина силы (2.13) численно равна энергии, излучаемой зарядом на единице пути (1.27)*).

Величина силы $f_{\omega z}(ik)$, как видно из (2.11), может быть и положительной и отрицательной. Поскольку, однако, $J_0(sp_{ik})$ и $\cos(\omega\Delta_{ik}/v)$ по абсолютной величине меньше или равны единице, то суммарная сила, действующая на два движущихся жестко связанных заряда:

$$[f_{\omega z}(e_i) + f_{\omega z}(ik) + f_{\omega z}(e_k)] \leq 0.$$

Эта сумма, следовательно, заведомо не может быть положительной. Если бы это было не так, то происходило бы самоускорение зарядов, т. е. нарушался бы закон сохранения энергии. Более того, легко убедиться, что при $\beta n > 1$ равенство этой суммы нулю возможно лишь для отдельных ω , но не для интеграла по частоте**. Поэтому при $\beta n > 1$ суммарная сила всегда отрицательна, т. е. происходит торможение зарядов и, следовательно, имеет место излучение. Этот вывод правилен и для системы из любого числа жестко связанных зарядов, движущихся со скоростью $v > c/n$.

Сила, тормозящая движение системы из n зарядов, равна

$$F_{z\omega} = \sum_{i=1}^n f_{\omega z}(e_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n f_{\omega z}(ik); \quad (2.14)$$

здесь $\sum_{i=1}^n f_{\omega z}(e_i)$ — сумма сил (2.13), которые тормозили бы каждый из зарядов

*) Так же, как и для движущегося заряда, этот вывод правилен только в случае, когда величина n действительна, что правильно, если среда, в которой происходит движение, не поглощает света.

**) За исключением тривиального случая полной нейтрализации зарядов $e_i = -e_k$, $\Delta_{ik} = \rho_{ik} = 0$.

в отдельности при отсутствии других, а $f_{\omega z}(ik)$ — сила (2.11), вызванная взаимодействием зарядов, которая суммируется по всем различным парам зарядов.

В дальнейшем для простоты ограничимся только рассмотрением совокупности зарядов, расположенных на одной прямой и эквивалентных, следовательно, одному или нескольким линейным мультиполям с осями, совпадающими с этой прямой. За положительное ее направление будем считать то, которое образует острый угол с осью z ($0 \leq \vartheta \leq \pi/2$). Примем, что положительное направление компоненты силы, действующей перпендикулярно v (сила $F_{\omega\rho}$), лежит в плоскости, образуемой направлением скорости и осью мультиполей, и образует с осью мультиполей острый угол *) (см. рис. 1).

Очевидно, что проекция на ось v и на ось $F_{\omega\rho}$ любого отрезка оси мультиполя, имеющего положительное направление, будет положительной (так как $\cos \vartheta \geq 0$ и $\sin \vartheta \geq 0$). Следовательно, если направление от k -го заряда к i -му совпадает с положительным направлением оси, то $r_{ik} \cos \vartheta > 0$, причем

$$\Delta_{ik} = z_i - z_k = r_{ik} \cos \vartheta.$$

В этом случае положительное направление силы $f_{\omega\rho}(ik)$ (направленное от k -й траектории к i -й) совпадает с положительным направлением $F_{\omega\rho}$ (см. рис. 1). Если же r_{ik} отрицательно, то и $\Delta_{ik} < 0$, а положительные направления $f_{\omega\rho}$ и $F_{\omega\rho}$ противоположны. Сила $f_{\omega\rho}$, согласно формуле (2.12), пропорциональна $\sin(\omega\Delta_{ik}/v)$, т. е. меняет свой знак при изменении знака Δ_{ik} . Поэтому для обеспечения правильного знака сил достаточно при суммировании сил, действующих на различные пары зарядов, заменить Δ_{ik} в (2.12) на $|\Delta_{ik}| = \Delta'_{ik}$. Таким образом, сила $F_{\omega\rho}$ равна

$$F_{\omega\rho} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n f'_{\omega\rho}(ik), \quad (2.15)$$

где $f'_{\omega\rho}(ik)$ отличается от $f_{\omega\rho}(ik)$ в (2.12) заменой Δ_{ik} на Δ'_{ik} .

Если также заменить Δ_{ik} на Δ'_{ik} и в $f_{\omega z}(ik)$ формулы (2.11) (что не меняет ее величины, зависящей от $\cos(\omega\Delta_{ik}/v)$), то аргументами функций $f_{\omega z}$ и $f'_{\omega z}$ будут sr_{ik} и $\omega\Delta'_{ik}/v$. Нетрудно их выразить через абсолютные величины расстояний между зарядами, так как

$$\Delta'_{ik} = |r_{ik}| \cos \vartheta, \quad \rho_{ik} = |r_{ik}| \sin \vartheta. \quad (2.16)$$

Полагая

$$\alpha = \frac{\omega}{v} \cos \vartheta, \quad \delta = \frac{\omega}{v} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \sin \vartheta, \quad (2.17)$$

имеем

$$|r_{ik}| \alpha = \frac{\omega \Delta'_{ik}}{v}, \quad |r_{ik}| \delta = sr_{ik}. \quad (2.18)$$

Для определения величины силы $F_{z\omega}$, тормозящей движение системы зарядов, разложим (2.11) в двойной ряд по степеням $|r_{ik}| \alpha$ и $|r_{ik}| \delta$. Тогда, после подстановки в (2.14), получим **)

$$F_{z\omega} = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots, \quad (2.19)$$

*) Выбор положительного направления оси мультиполей, а, следовательно, и $F_{\omega\rho}$ становится неопределенным при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2$. Это, однако, несущественно, поскольку, как будет видно из дальнейшего, в обоих случаях сила $F_{\omega\rho} = 0$.

**) Напомним, что $J_0(x)$ равно сумме ряда

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(1)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

где

$$f_0 = -W_\omega \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n e_i e_k \right) = -W \left(\sum_{i=1}^n e_i \right)^2, \quad (2.20)$$

$$f_1 = + \frac{W_\omega}{2} (2\alpha^2 + \delta^2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n e_i e_k r_{ik}^2, \quad (2.24)$$

$$f_2 = - \frac{W_\omega}{4} \left(\frac{1}{3} \alpha^4 + \alpha^2 \delta^2 + \frac{1}{8} \delta^4 \right) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n e_i e_k r_{ik}^4, \quad (2.22)$$

$$f_3 = + \frac{W_\omega}{8} \left(\frac{1}{45} \alpha^6 + \frac{1}{6} \alpha^4 \delta^2 + \frac{1}{8} \alpha^2 \delta^4 + \frac{1}{144} \delta^6 \right) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n e_i e_k r_{ik}^6. \quad (2.23)$$

Таким образом, первый член разложения f_0 (2.20) есть не что иное, как сила, определяемая излучением Вавилова — Черенкова для суммарного заряда системы (см. (1.18) и (1.19)).

Величины f_1 , f_2 и т. д. зависят от мультипольных моментов системы зарядов. Для нахождения какого-либо из f_l необходимо знать величину двойной суммы

$$S_l = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n e_i e_k r_{ik}^{2l}. \quad (2.24)$$

Если при вычислении S_l суммирование по обоим индексам i и k провести от 1 до n , то каждая пара зарядов будет сосчитана не один раз, как в (2.24), а два раза, т. е. сумма получится равной $2S_l$ (наличие членов с $i = k$ при $l > 0$ не меняет суммы, так как r_{ik}^{2l} равно нулю при $i = k$). Таким образом,

$$S_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n e_i e_k r_{ik}^{2l} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n e_i e_k (r_i - r_k)^{2l}; \quad (2.25)$$

здесь r_i и r_k — координаты i -го и k -го зарядов, отсчитанные вдоль оси расположения зарядов от некоторой точки этой оси, принятой за центр системы зарядов.

Принимая во внимание, что для данной совокупности зарядов и при выбранном нами центре

$$p_a = \sum_{i=1}^n e_i r_i^a \quad (2.26)$$

есть измеренный в лабораторной системе электрический мультипольный момент порядка a (и пользуясь биномом Ньютона), из (2.25) получим

$$S_l = \sum_{m=0}^{m=l-1} \frac{(2l)! (-1)^m}{(2l-m)! m!} p_{2l-m} p_m + \frac{1}{2} \frac{(2l)!}{(l!)^2} (-1)^l p_l^2. \quad (2.27)$$

Например, для частного случая $l = 1$ имеем

$$S_1 = p_2 p_0 - p_1^2, \quad (2.28)$$

где p_2 и p_1 — квадрупольный и дипольный моменты системы, а моментом нулевого порядка p_0 обозначена алгебраическая сумма величин зарядов

$$p_0 = \sum_{i=0}^n e_i.$$

Если система зарядов обладает только мультипольным моментом порядка l , то S_l будет содержать единственный член, пропорциональный p_l^2 . Тогда f_l пропорционально p_l^2 , а все остальные члены ряда (2.19) равны нулю, так что $F_{\omega z} = f_l$. Так, в случае, когда отлично от нуля только или p_1 , или p_2 , или p_3 , т. е. для диполя, квадруполья и октуполья, из (2.27) получаем

$$S_1 = -p_1^2, \quad S_2 = 3p_2^2, \quad S_3 = -10p_3^2.$$

Подставляя величины этих сумм соответственно в f_1 , f_2 и f_3 в уравнениях (2.21) — (2.23) и используя (2.17) и (1.19), получим силу, тормозящую движение мультиполя.

Для диполя

$$F_{\omega z}(p_1) = -\frac{\omega^3 \mu p_1^2}{2c^2 v^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left[2 \cos^2 \vartheta + \beta^2 n^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \sin^2 \vartheta\right]. \quad (2.29)$$

Для квадруполья

$$F_{\omega z}(p_2) = -\frac{3}{4} \frac{\omega^5 \mu p_2^2}{c^2 v^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \times \\ \times \left[\frac{1}{3} \cos^4 \vartheta + (\beta^2 n^2 - 1) \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \frac{1}{8} (\beta^2 n^2 - 1)^2 \sin^4 \vartheta\right]. \quad (2.30)$$

Для октуполья

$$F_{\omega z}(p_3) = -\frac{5}{4} \frac{\omega^7 \mu p_3^2}{c^2 v^6} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left[\frac{1}{45} \cos^6 \vartheta + \frac{1}{6} (\beta^2 n^2 - 1) \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} (\beta^2 n^2 - 1)^2 \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta + \frac{1}{144} (\beta^2 n^2 - 1)^3 \sin^6 \vartheta\right]. \quad (2.31)$$

При $\mu = 1$ формулы (2.29) — (2.31) совпадают с ранее полученными в 7.

Если система обладает не одним, а несколькими мультипольными моментами, то в излучении могут возникать интерференционные члены, пропорциональные произведению этих моментов *) (см. (2.27)). Так, например, если отличен от нуля суммарный заряд и квадрупольный момент, то, кроме членов f_0 и f_2 , соответствующих этим моментам, будет отличен от нуля член f_1 , в котором роль дипольного момента играет произведение $p_2 p_0$ (см. (2.28)). При этом, в отличие от истинного диполя, величина f_1 в этом случае может оказаться как отрицательной, так и положительной, т. е. может или увеличивать, или уменьшать общую энергию излучения.

Как уже отмечалось, сила $F_{\omega z}$, тормозящая движение мультиполя, отлична от нуля только для частот, удовлетворяющих условию $\beta n(\omega) > 1$. Полную силу, тормозящую движение системы, получим интегрированием по этим частотам. Отсюда излучаемая мультиполем на единице пути энергия равна

$$W(p_l) = - \int_{\beta n(\omega) > 1} F_{\omega z}(p_l) d\omega. \quad (2.32)$$

Таким образом, например, из (2.29) для энергии излучения диполя с моментом p , ориентированного по скорости ($\vartheta = 0$) и перпендикулярно к ней ($\vartheta = \pi/2$), получаем

$$W = \int_{\beta n(\omega) > 1} \frac{\omega^3 \mu}{c^2 v^2} p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) d\omega, \quad p \parallel v, \quad (2.33)$$

$$W = \int_{\beta n(\omega) > 1} \frac{\omega^3 \mu n^2}{2c^4} p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^2 d\omega, \quad p \perp v. \quad (2.34)$$

*) Из (2.27) видно, что произведение моментов p_a и p_b скажется в излучении при условии, что $|a - b|$ четно. В этом случае оно с точностью до численного (положительного или отрицательного) коэффициента эквивалентно

$$p_l^2 \equiv p_a p_b, \quad \text{где } l = \frac{a+b}{2}.$$

Эти формулы отличаются от ранее полученных^{5-7 *} коэффициентом μ .

Сила $F_{\omega\rho}$, направленная перпендикулярно скорости, может быть найдена совершенно аналогично тому, как это было сделано для $F_{\omega z}$, а именно, разложением $f'_{\omega\rho}$, т. е. (2.12), с заменой Δ_{ih} на Δ'_{ih} в ряд по степеням $|r_{ih}| \propto$ и $|r_{ih}| \propto \delta$ подстановкой в (2.15). В частности, для случая диполя при этом получается

$$F_{\omega\rho}(p) = \frac{\omega^2 \mu n^2}{c^4} p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^2 \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (2.35)$$

Таким образом, кроме силы, тормозящей движение системы, имеется сила, не совершающая работы при прямолинейном движении, но стремящаяся отклонить диполь от его направления движения. Эта сила для диполя, а также и для мультиполя обращается в нуль только при ориентации оси системы по скорости или перпендикулярно к ней. Как будет показано в следующей главе, она непосредственно связана с асимметрией углового распределения излучения.

Необходимо иметь в виду, что во всех приведенных выше формулах как электрический мультипольный момент p , так и угол ϑ есть величины, измеренные в неподвижной системе координат. Если принять во внимание сжатие масштаба длины по оси z в $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$ раз, то для угла ϑ' с осью мультиполей и расстояния r'_i заряда e_i от центра мультиполя, измеренных в системе координат, связанной с зарядами, имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \vartheta', \quad z_i = r'_i \sqrt{1 - (1 - \alpha^2) \cos^2 \vartheta'}.$$

Отсюда в силу инвариантности величины электрического заряда получаем, что электрические мультипольные моменты p'_i , излучение которых и рассматривается, связаны с p_i соотношением

$$p_i = p'_i [1 - (1 - \alpha^2) \cos^2 \vartheta']^{1/2}. \quad (2.36)$$

В лабораторной системе координат движущаяся система зарядов эквивалентна совокупности не только электрических мультиполей p_i , но также и магнитных. Таким образом, p_i не являются полными моментами системы, хотя энергия излучения, как это и сделано выше, может быть выражена через их величину. Если бы вместо движущейся системы зарядов сразу рассмотреть излучение мультиполей p_i , то результат отличался бы от полученного выше **).

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МУЛЬТИПОЛЯ

К тем же соотношениям, что и в гл. 2, можно прийти из рассмотрения величины энергии, излучаемой системой движущихся зарядов. Известно, что излучение Вавилова — Черенкова, создаваемое движущимся зарядом, распространяется в направлениях, образующих с направлением скорости (ось z) острый угол θ , причем

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}}. \quad (3.1)$$

Фаза излучаемой волны задается поверхностью конуса, вершина которого совпадает с движущимся зарядом, а образующие направлены к оси z под углом $(\pi/2) + \theta$ (рис. 2, а). Если движутся два заряда, то вершины обоих конусов сдвинуты друг относительно друга и, следовательно, фазы волн,

*) В формуле для $p \perp v$, полученной в ⁶, а также приведенной в ⁹, пропущен множитель β^2 .

**) Частный случай, а именно, преобразование дипольных моментов, подробнее рассмотрен в гл. 4.

соответствующие обоим зарядам, будут различны (рис. 2, б). Допустим, что движется диполь, т. е. что заряды e_1 и e_2 разноименны и равны по величине e . Расстояние r_{12} считаем малым по сравнению с любыми длинами волн, которые могут излучаться (т. е. для частот, удовлетворяющих условию $\beta n(\omega) > 1$). В этом случае, если фазы волн от обоих зарядов окажутся одинаковыми, то волны будут полностью гасить друг друга, а при возрастании разности фаз, $\Delta\omega \ll \pi/2$, суммарная амплитуда будет возрастать. Поэтому в случае, представленном на рис. 2, б, интенсивность излучения, направленного вверх от

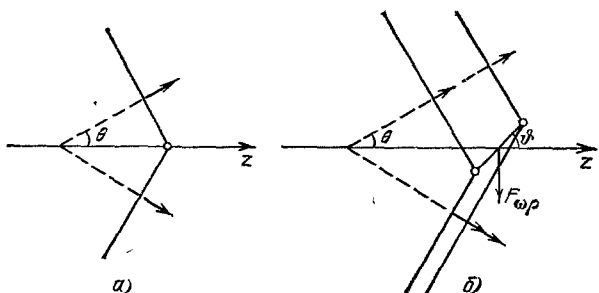


Рис. 2.

оси z , будет больше, чем для излучения, направленного вниз. Следовательно, импульс, уносимый излучением, будет вызывать силу отдачи, стремящуюся отклонить диполь вниз. Нетрудно убедиться, что знак такой силы $F_{\omega\rho}$ согласуется с (2.35)*).

Рассмотрение интерференции позволяет найти как угловое распределение излучения линейного мультиполя, так и величину действующей на него сил.

Будем определять напряженность поля в некоторой точке, весьма удаленной от траектории мультиполя. Допустим, что составляющая частоты ω напряженности поля, которая наблюдалась бы в момент t при условии, что мультиполь заменен единичным зарядом, сосредоточенным в его центре, равна

$$Ae^{i\omega t}. \quad (3.2)$$

Тогда поле, определяемое совокупностью зарядов, образующих мультиполь, получится как сумма волн с амплитудами, пропорциональными

$$Ae^{i\omega t} \sum_{i=1}^n e_i e^{-(i\omega n/c)r_i \cos(p_l R)}, \quad (3.3)$$

где r_i — по-прежнему величина смещения заряда e_i от центра мультиполя (см. гл. 2), а $\cos(p_l R)$ — косинус угла между направлениями оси мультиполя и направлением луча, для которого определяется сложение волн.

Обозначим через φ двугранный угол, образуемый следующими плоскостями: плоскостью, проходящей через ось z и ось мультиполя, и плоскостью, определяемой осью z и направлением луча. Принимая во внимание, что направление луча образует с осью z угол θ (см. (3.1)) и угол между осью мультиполя с осью z равен ϑ , для величины $\cos(p_l R)$ имеем

$$\cos(p_l R) = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{1}{\beta n} \cos \vartheta. \quad (3.4)$$

Разложим величину $e^{-(i\omega n/c)r_i \cos(p_l R)}$, стоящую в (3.3) под знаком суммы, в степенной ряд. Принимая во внимание, что для мультиполя l -го порядка величина

$$\sum_{i=1}^n e_i r_i^s = 0, \quad s < l,$$

так как моментами ниже l -го порядка он не обладает, и что, по определению

$$\sum_{i=1}^n e_i r_i^l = p_l,$$

*) Очевидно, что для зарядов, имеющих одинаковые знаки, направление силы $F_{\omega\rho}$ противоположно тому, какое имеет место для диполей (см. рис. 2).

и считая r_i настолько малыми, что суммами произведений, содержащих r_i в степенях, больших l , можно пренебречь, из (3.3) для мультиполя порядка l получим

$$A e^{i\omega t} \left[(-i)^l p_l \frac{\omega^{l+1} \cos^l(p_l R)}{l! c^l} \right]. \quad (3.5)$$

Таким образом, поле излучения мультиполя отличается от поля движущегося единичного заряда множителем, равным величине, стоящей в квадратных скобках. Поэтому энергия излучения мультиполя отличается от энергии излучения заряда квадратом модуля этой величины. Так как угловое распределение излучения заряда (2.27) равномерно по всем образующим конуса, то для интервала углов $d\varphi$ в случае единичного заряда имеем

$$\frac{1}{2\pi} W_\omega d\varphi = \frac{\mu}{2\pi c^2} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) d\varphi. \quad (3.6)$$

Отсюда для электрического мультиполя, принимая во внимание (3.4), получаем

$$W(p_l) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\beta n > 1} \frac{\omega^{2l+1} \mu n^{2l} p_l^2}{2\pi (l!)^2 c^{2l+2}} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \times \\ \times \left[\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{1}{\beta n} \cos \vartheta \right]^{2l} d\omega. \quad (3.7)$$

Формула (3.7) дает спектральное распределение, а также угловое распределение излучения по различным образующим конуса.

Энергия излучения мультиполя может быть найдена из (3.7), если выполнить интегрирование по φ .

Принимая во внимание, что величина, определяемая в (3.7) квадратной скобкой, если раскрыть ее по биному Ньютона, равна

$$\sum_{k=0}^{2l} \frac{(2l)!}{(2l-k)! k!} \frac{1}{(\beta n)^{2l-k}} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right)^{k/2} \cos^{2l-k} \vartheta \cos^k \varphi \sin^k \vartheta, \quad (3.8)$$

и что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \varphi d\varphi = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2m+1} \varphi d\varphi = 0, \quad (3.9)$$

получим (полагая $k = 2m$)

$$W(p_l) = \sum_{m=0}^{l_1} \frac{(2l)!}{(l!)^2 (2l-2m)! (m!)^2 2^{2m}} \times \\ \times \int_{\beta n > 1} \frac{\omega^{2l+1} \mu n^{2m} p_l^2}{c^{2m+2} \nu^{2l-2m}} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right)^{m+1} \cos^{2l-2m} \vartheta \sin^{2m} \vartheta d\omega. \quad (3.10)$$

Для частных случаев электрических мультиполей порядка l , ориентированных параллельно скорости ($\sin \vartheta = 0$) и перпендикулярно к ней ($\cos \vartheta = 0$), соответственно имеем

$$W(p_l) = \frac{1}{(l!)^2} \int_{\beta n > 1} \frac{\omega^{2l+1} \mu p_l^2}{c^{2\nu^{2l}}} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) d\omega, \quad p_l \parallel \mathbf{v}, \quad (3.11)$$

$$W(p_l) = \frac{(2l)!}{(l!)^4 2^{2l}} \int_{\beta n > 1} \frac{\omega^{2l+1} n^{2l} \mu}{c^{2l+2}} p_l^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right)^{l+1} d\omega, \quad p_l \perp \mathbf{v}. \quad (3.12)$$

Для диполя ($l = 1$), квадруполь ($l = 2$) и октуполя ($l = 3$) формулы (3.10) — (3.12) совпадают с полученными в гл. 2 формулами (2.29) — (2.34),

а также (2.33), (2.34). Эти данные можно сопоставить с результатами работы Широбокова¹³, который дал квантовое рассмотрение излучения Вавилова — Черенкова для частицы со спином 2. Отдельные члены полученного им выражения интерпретированы как излучение квадруполь и октуполь, а остальные — как интерференционные члены. Действительно, они отличаются от (3.12) для $l = 1, 2, 3$ только численным коэффициентом, т. е. в классическом рассмотрении соответствуют поперечному диполю, квадруполь и октуполь. Формула (3.7) дает также возможность найти величину сил, действующих на мультиполь.

Обозначим через $W_{\omega\varphi}$ величину, стоящую под интегралом (3.7), т. е. энергию, излучаемую на единице пути для угла φ и частоты ω . Уносимый излучением импульс в среде равен⁴

$$P_{\omega\varphi} = \frac{n}{c} \varepsilon_{\omega\varphi}, \quad (3.13)$$

где $\varepsilon_{\omega\varphi} = \nu W_{\omega\varphi}$ — энергия, излучаемая ежесекундно. Таким образом, на мультиполь должна действовать сила отдачи

$$F_{\omega\varphi} = -p_{\omega\varphi} = -\beta n W_{\omega\varphi}. \quad (3.14)$$

Величина проекции силы на любую ось получается, если умножить (3.14) на косинус угла между направлением луча и этой осью и выполнить интегрирование по φ . Косинус угла между направлением излучения и осью z равен $1/\beta n$. Следовательно, сила, тормозящая мультиполь, равна

$$F_z(p_l) = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\beta n > 1} W_{\omega\varphi} d\omega = -W(p_l). \quad (3.15)$$

Обратно, правильность (3.15) может служить простым доказательством того, что в преломляющей среде соотношение между импульсом и энергией излучения равно (3.13).

Косинус угла между направлением луча и направлением, выбранным за положительное направление силы $F_{\omega\rho}$, равен

$$\cos(\varphi, \rho) = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}} \cos \varphi. \quad (3.16)$$

Отсюда из (3.14), принимая во внимание (3.8) и (3.9), получим

$$F_\rho(p_l) = - \sum_{m=1}^l \frac{(2l)! m}{(l!)^2 (2l-2m+1)! (m!)^2 2^{2m-1}} \int_{\beta n > 1} \frac{\omega^{2l+1} n^{2m} p_l^2 \mu}{c^{2m+2} \nu^{2l-m}} \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^{m+1} \cos(2l-2m+1)\varphi \sin^{2m-1}\varphi d\omega. \quad (3.17)$$

Как и следовало ожидать, в частном случае $l = 1$, т. е. для диполя, (3.17) совпадает с (2.35).

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЕЙ

Для рассмотрения поля магнитного диполя и мультиполя можно воспользоваться методами, аналогичными примененным в предшествующих главах статьи для электрического мультиполя. С этой целью необходимо написать уравнение для движущегося магнитного полюса и далее рассматривать магнитный мультиполь как совокупность магнитных полюсов (см. гл. 5). Так было сделано в статье⁷, в которой, помимо решения задачи об излучении Вавилова — Черенкова для магнитных мультиполей, ставилась цель

выяснить аномалию с излучением магнитного диполя, найденную еще в 1942 г., т. е. за десять лет до этого ⁶. Выяснилось, что результаты работ ⁶ и ⁷ возможно согласовать, если принять иную, чем это было сделано в 1942 г., связь между магнитным диполем и индуцированным при его движении электрическим дипольным моментом. В действительности вопрос сложнее, чем тогда предполагалось, и, мне кажется, в нем и до сих пор не имеется полной ясности. Главное, однако, становится очевидным, если, как это сделано здесь (в отличие от ⁷), провести рассмотрение для среды с $\mu \neq 1$. Магнитный диполь — это элементарный круговой ток. В работе ⁷ содержится допущение, что имеется полное тождество между магнитным моментом, создаваемым круговым током (мы будем называть его просто магнитным моментом или обычным магнитным моментом, так как иных в природе пока не обнаружено), и гипотетическим диполем, образованным двумя магнитными полюсами (условно его можно называть истинным магнитным диполем).

Известно, однако, что оба вида магнитных диполей при движении должны неодинаково взаимодействовать с магнитным полем в средах с $\mu \neq 1$. Это, в частности, позволило доказать, что магнитный момент нейтрона не связан с магнитными зарядами, а имеет обычную природу (об этом см., например, в книге ¹⁴).

Поэтому заранее не очевидно, будут ли одинаковы свойства ИВЧ магнитных диполей разной природы. Из сопоставления результатов этой главы статьи со следующей гл. 5 видно, что в общем случае это в самом деле не так. Вместе с тем здесь имеются весьма глубокие аналогии, заложенные в симметрии уравнений Максвелла относительно электрических и магнитных зарядов, которые обсуждаются в гл. 5. Если эти аналогии были выяснены уже в работе ⁷ 1952 г., то различия не были, как это ни странно, замечены и обсуждены ни тогда, ни в последующие 30 лет *).

Рассмотрение этих вопросов содержится, главным образом, в следующей, гл. 5 статьи. Здесь (гл. 4) будет показано, что для электрического диполя получаются одинаковые результаты независимо от того, рассматривается ли движение в среде двух параллельно движущихся разноименных электрических зарядов или же сразу движение элементарного электрического диполя. Этот вопрос заранее нельзя было считать очевидным, так как при применении разных методов мог оказаться не одинаковым учет поляризации среды. Второй рассмотренный вопрос — различия излучений электрического и магнитного диполей. Для дальнейшего необходимо вкратце воспроизвести результаты, полученные для ИВЧ электрического и магнитного диполей в работе ⁶, обобщив их на случай среды с $\mu \neq 1$. Исходными послужили уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{P}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathbf{P}_\omega = -4\pi \mathbf{p}_\omega, \quad (4.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{M}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathbf{M}_\omega = -4\pi \mathbf{m}_\omega, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{P}_\omega$ — составляющая частоты ω вектора Герца, $\mathbf{M}_\omega$ — соответствующий ему магнитный вектор, а $\mathbf{p}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$ — компоненты плотности электрических и магнитных дипольных моментов.

Если при этом $\mathbf{p}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$ получаются разложением в интеграл Фурье плотности движущихся диполей, то надо иметь в виду, что используются их величины, измеренные в неподвижной системе координат, которые связаны с собственными моментами уравнением (2.36).

Здесь под $\mathbf{m}_\omega$ будем пока понимать плотность обычных (токовых) магнитных моментов. Более последовательной была бы запись этих уравнений, содержащая в знаменателе правой части соответственно ϵ и μ и, следовательно

*) В. Л. Гинзбург и В. Н. Цытович сообщили мне, что они также обратили на них внимание в процессе работы над рукописью книги «Переходное излучение и переходное рассеяние» ¹⁵. Формулы, ранее известные, были ими подтверждены, и независимо получены некоторые из результатов, которые я привожу в этой статье.

но, $\mathbf{P}_\omega$ и $\mathbf{M}_\omega$ иначе нормированные. Для нас, однако, удобнее форма уравнений (4.1) и (4.2), в силу их симметрии относительно $\mathbf{p}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$, поскольку в этом случае связи $\mathbf{p}_\omega$ с $\mathbf{P}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$ с $\mathbf{M}_\omega$ одинаковы. Для перехода от уравнений поля, содержащих $\mathbf{A}_\omega$, к записи через $\mathbf{P}_\omega$ и $\mathbf{M}_\omega$ используются уравнения

$$i\omega \mathbf{p}_\omega + c \operatorname{rot} \mathbf{m}_\omega = \mathbf{j}_\omega, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{p}_\omega = -\rho_\omega. \quad (4.4)$$

Сопоставляя (4.1) и (4.2) с (4.3), получим ⁷

$$\mathbf{A}_\omega = \mu \left(\frac{i\omega}{c} \mathbf{P}_\omega + \operatorname{rot} \mathbf{M}_\omega \right); \quad (4.5)$$

аналогично с помощью (4.4) имеем

$$\varphi_\omega = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{P}_\omega. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.5) в (1.4) и (1.5), получаем:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{\mu}{n^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \mathbf{P}_\omega - \frac{i\omega\mu}{c} \operatorname{rot} \mathbf{M}_\omega, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{H}_\omega = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{M}_\omega + \frac{i\omega}{c} \operatorname{rot} \mathbf{P}_\omega. \quad (4.8)$$

В дальнейшем будет рассматриваться поле в волновой зоне в области, где $\mathbf{p}_\omega = 0$ и $\mathbf{m}_\omega = 0$.

Используя формулу векторной алгебры (1.12), а также (4.1) при $p_\omega = 0$, можно (4.7) записать так:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{\mu}{n^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P}_\omega - \frac{i\omega\mu}{c} \operatorname{rot} \mathbf{M}_\omega. \quad (4.9)$$

Сравнивая эти уравнения для $\mathbf{H}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$, нетрудно убедиться, что они не получаются одно из другого при замене ε на μ , $\mathbf{P}_\omega$ — на $\mathbf{M}_\omega$. В дальнейшем для нас существенны магнитные моменты, индуцированные движущимся электрическим диполем, и электрические моменты, индуцированные движущимся магнитным моментом. Если формулы, связывающие движущийся диполь с индуцированным, в обоих случаях аналогичны, то неравноправие $\mathbf{P}_\omega$ и $\mathbf{M}_\omega$ в уравнениях (4.8) и (4.9) с необходимостью приведет к тому, что для ИВЧ, создаваемого $\mathbf{p}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$, получатся разные результаты.

Мы будем предполагать, что вдоль оси z движется со скоростью v точечный электрический диполь p ($z = vt$), направление которого совпадает с произвольно ориентированным единичным вектором $\mathbf{p}_1$ (величина и направление $\mathbf{p}$ измерены в неподвижной системе координат). Аналогично тому, как это было сделано для нахождения плотности тока (см. (1.13)), компоненте $\mathbf{p}_\omega$ плотности дипольного момента следует приписать значение ⁸

$$\mathbf{p}_\omega(z) e^{i\omega t} = \frac{\mathbf{p}_1}{2\pi v} p e^{i\omega \left(t - \frac{z}{v}\right)} \delta(x) \delta(y). \quad (4.10)$$

Далее будем полагать, что диполь пробегает ограниченный путь от $-z_0$ до z_0 , тогда

$$\mathbf{P}_\omega e^{i\omega t} = \frac{\mathbf{p}_1}{R} C' p e^{i\omega \left(t - \frac{Rn(\omega)}{c}\right)}, \quad (4.11)$$

где R — расстояние от начала координат $z = 0$ до точки наблюдения, причем полагаем, что $R \gg z_0$, т. е. что излучение рассматривается в волновой зоне. Тогда

$$C' = \frac{1}{2\pi v} \int_{-z_0}^{+z_0} e^{-i\omega(z/v)(1-\beta n \cos \theta)} dz = \frac{1}{\pi\omega} q(\omega, \theta), \quad (4.12)$$

где, как это было сделано Таммом², через $q(\omega, \theta)$ обозначено

$$q(\omega, \theta) = \frac{\sin \omega(z_0/v)(1 - \beta n \cos \theta)}{(1 - \beta n \cos \theta)}. \quad (4.13)$$

Таким образом, вектор Герца в волновой зоне имеет такой же вид, как для некоторого неподвижного осциллятора с амплитудой, зависящей от угла $q(\omega, \theta)p/\pi\omega$. Аналогично, если движется магнитный диполь, совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{m}_1$, то

$$\mathbf{M}_\omega e^{i\omega t} = \frac{\mathbf{m}_1}{2\pi\omega R} m q(\omega, \theta) e^{i\omega(t - Rn/c)}. \quad (4.14)$$

Для электрического и магнитного векторов в волновой зоне из (4.8) и (4.9) следует ($\mathbf{r}_1$ — единичный вектор по лучу R)

$$\mathbf{E}_\omega = -\frac{\omega^2 \mu}{c^2} [\mathbf{r}_1 [\mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1]] P_\omega - \frac{\omega^2 n \mu}{c^2} [\mathbf{r}_1 \mathbf{m}_1] M_\omega, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} [\mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1] P_\omega - \frac{\omega^2 n^2}{c^2} [\mathbf{r}_1 [\mathbf{r}_1 \mathbf{m}_1]] M_\omega; \quad (4.16)$$

здесь, как и должно быть,

$$\mathbf{H}_\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\mathbf{r}_1 [\mathbf{r}_1 \mathbf{E}_\omega]]. \quad (4.17)$$

Если рассматривается движение электрического диполя, то кроме $\mathbf{p}_\omega$, ответственного за вектор Герца $\mathbf{P}_\omega$, как уже отмечалось, возникает токовый магнитный момент $\mathbf{m}_\omega$. При этом, за исключением случая, когда $\mathbf{p}_1$ параллельно $\mathbf{z}$, величина $\mathbf{m}_\omega$ не равна нулю.

Связь между $\mathbf{p}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$ однозначно следует из релятивистских преобразований тока^{6,7}. Если поляризация среды не влияет на эти преобразования, то $\mathbf{p}_\omega$ индуцирует магнитный момент

$$\mathbf{m}_\omega = -\beta [\mathbf{z}_1 \mathbf{p}_\omega] \quad (4.18)$$

(где $\mathbf{z}_1$ — единичный вектор, направленный по скорости, — ось z). Аналогично для движущегося магнитного момента должно иметь место соотношение

$$\mathbf{p}_\omega = +\beta [\mathbf{z}_1 \mathbf{m}_\omega]. \quad (4.19)$$

Эти формулы в самом деле симметричны относительно $\mathbf{p}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$. Отсюда, учитывая уравнения (4.1) и (4.2), получим, что при движении электрического диполя можно в уравнении (4.15) произвести замену

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{m}_1] M_\omega = -[\mathbf{r}_1 [\mathbf{z}_1 \mathbf{p}_1]] \beta P_\omega. \quad (4.20)$$

Тогда, вместо (4.15), имеем

$$\mathbf{E}_\omega = -\frac{\omega^2 \mu}{c^2} P_\omega \{[\mathbf{r}_1 [\mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1]] - \beta n [\mathbf{r}_1 [\mathbf{z}_1 \mathbf{p}_1]]\}, \quad (4.21)$$

а для вектора $\mathbf{H}_\omega$, разумеется, остается правильным (4.17). Отметим, и это будет показано в дальнейшем тексте, что для предельных значений $\mathbf{P}_\omega$ отсюда получается величина ИВЧ электрического диполя, совпадающая с (2.33) и (2.34). Предположим, что движется магнитный диполь. Используя преобразование (4.19), аналогичным образом получим

$$\mathbf{H}_\omega = -\frac{\omega^2 n^2}{c^2} M_\omega \left\{ [\mathbf{r}_1 [\mathbf{r}_1 \mathbf{m}_1]] - \frac{1}{n} \beta [\mathbf{r}_1 [\mathbf{z}_1 \mathbf{m}_1]] \right\} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{E}_\omega = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\mathbf{r}_1 \mathbf{H}_\omega]. \quad (4.23)$$

Для того чтобы величина в фигурной скобке (4.22) стала аналогом (4.21), необходимо заменить преобразование (4.19) на

$$\mathbf{p}_\omega = +\beta n^2 [\mathbf{z}_1 \mathbf{m}_\omega]. \quad (4.24)$$

Это означало бы существенное различие между преобразованиями $\mathbf{p}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$. Предположение, что следует использовать (4.24), и было высказано в работе ⁷ (формула (4.29) работы ⁷). Поскольку тогда рассматривалась среда с $\mu = 1$ и $\varepsilon \equiv n^2 \neq 1$, то возникло предположение (см. замечание к формуле (4.29) работы ⁷), что различие преобразований $\mathbf{p}_\omega$ и $\mathbf{m}_\omega$ можно объяснить этим обстоятельством. Из дальнейшего текста будет видно, что это не так. Доводом в пользу (4.24) в ⁷ было и то, что для диполей, составленных из магнитных зарядов, в самом деле, как и должно быть, имеется аналогия с электрическим диполем. Обобщение результатов на среду с $\mu \neq 1$ показывает, что и этот довод не обоснован.

В. Л. Гинзбург ¹⁶ в своем дополнении к моей статье ⁷ приводит соображения в правильности (4.24) *). Однако, независимо от того, принять или не принять это преобразование, электрический и магнитный моменты ведут себя в среде не эквивалентно: если правильно (4.19), то для излучения Вавилова — Черенкова получается формула, совсем не похожая на излучение электрического диполя; если же допустить правильность (4.24), то связь между собой движущихся электрических и магнитных диполей в среде оказывается неодинаковой.

Рассмотрим следствия формул (4.21) и (4.22) более подробно. Сначала доведем до конца рассмотрение поля движущегося электрического диполя. Пользуясь известной формулой векторной алгебры

$$[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = (\mathbf{a} \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \mathbf{b}) \mathbf{c}, \quad (4.25)$$

из (4.21), учитывая (4.10)—(4.13), имеем

$$\mathbf{E}_\omega^\Lambda = -\frac{\omega^2 \mu}{c^2} q(\omega, \theta) \frac{pe^{i\omega n R/c}}{\pi \omega R} [\cos(r_1 p_1) (\mathbf{r}_1 - \beta n \mathbf{z}_1) - (1 - \beta n \cos \theta) \mathbf{p}_1]. \quad (4.26)$$

Можно показать, что проинтегрированный по времени поток энергии, входящий на частоту ω , равен

$$\begin{aligned} S_\omega &= c \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_\omega|^2 = \\ &= \frac{\omega^2 \mu^2}{\pi^2 R^2 c^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} q^2(\omega, \theta) p^2 |\cos(r_1 p_1) (\mathbf{r}_1 - \beta n \mathbf{z}_1) - (1 - \beta n \cos \theta) \mathbf{p}_1|^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_\omega &= \frac{\omega^2 \mu n}{\pi^2 c^3 R^2} q^2 p^2 \{(1 - \beta n \cos \theta)^2 + \\ &+ 2\beta n \cos(r_1 p_1) \cos(p_1 z_1) (1 - \beta n \cos \theta) - (1 - \beta^2 n^2) \cos^2(r_1 p_1)\}; \end{aligned} \quad (4.28)$$

здесь $\cos(p_1 z_1) = \cos \theta$ (см. гл. 3), а величина $\cos(r_1 p_1) = \cos(pR)$ приведена в формуле (3.4).

Для вычисления полной величины потока энергии следует умножить S_ω в (4.28) на элемент телесного угла $d\Omega = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ и выполнить интегрирование. Приведем сначала интегрирование по θ . Для этого необходимо знать интеграл от $q^2(\omega, \theta) \sin \theta$. В предельном случае больших z_0 для ИВЧ электрического заряда этот интеграл был обсужден Таммом ². Мы также рас-

*) Как любезно сообщил мне В. Л. Гинзбург, он вновь рассмотрел этот вопрос. Его замечание о применимости (4.24) относится к частному случаю, когда объем внутри кольцевого тока, создающего магнитный момент, заполнен средой с тем же n , как пространство вне его, а для элементарного дипольного момента правильны следствия (4.19). Работа публикуется в «Изв. вузов. Сер. «Радиофизика»».

смотрим предельный случай интеграла *)

$$\int_0^\pi q^2(\omega, \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{\sin^2(\omega z/v) (1 - \beta n \cos \theta)}{(1 - \beta n \cos \theta)^2} \sin \theta d\theta. \quad (4.29)$$

Делая замену переменных и полагая

$$u = \frac{\omega z}{v} (1 - \beta n \cos \theta), \quad (4.30)$$

приводим (4.29) к виду

$$\frac{c\omega z_0}{v^2 n} \int_{-\frac{\omega z_0}{v}(\beta n - 1)}^{+\frac{\omega z_0}{v}(\beta n + 1)} \frac{\sin^2 u}{u^2} du. \quad (4.31)$$

Как известно, величина интеграла стремится к π , если пределы интегрирования стремятся к бесконечности. Поэтому необходимым условием перехода к предельному случаю является требование, чтобы величины пределов интегрирования были велики. Это даже при больших z_0 исключает из рассмотрения область, близкую к порогу ИВЧ, где $\beta n - 1$ мало. Подынтегральная функция в предельном случае может быть записана как $u = z_0 x$, тогда

$$\left(\frac{\sin^2 z_0 x}{z_0 x^2} \right)_{z_0 \rightarrow \infty} \rightarrow \pi \delta(x).$$

В данном случае $x = 0$ соответствует $\cos \theta = 1/\beta n$. Таким образом, в предельном случае имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q^2(\omega, \theta) \sin \theta f(\omega, \cos \theta) d\theta = \frac{c\pi\omega z_0}{v^2 n} f\left(\omega, \frac{1}{\beta n}\right). \quad (4.32)$$

Применяя это соотношение к (4.28), принимая во внимание (3.4) и относя энергию к единице пути делением результата на $2z_0$, получим

$$W(p, \omega) = \frac{\omega^3 \mu n^2}{2\pi c^4} p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \sin \vartheta \cos \varphi} + \frac{1}{\beta n} \cos \vartheta \right). \quad (4.33)$$

Эта формула совпадает с (3.7) при $l = 1$, а после интегрирования по φ с (2.29). В частном случае p , параллельного и перпендикулярного скорости, получаем (2.33) и (2.34). Отсюда, в частности, видно, что преобразование (4.18) для электрического диполя пригодно не только для среды с $\mu = 1$, но и для произвольных ε и μ . Таким образом, вопреки предположению, сделанному в ⁷, нельзя объяснить различие (4.18) и (4.24) тем, что $\mu = 1$; более того, обоснованность (4.18) является доводом в пользу того, что (4.19) должно быть применимо для элементарного магнитного диполя.

Сопоставляя (4.21) и (4.22) для магнитного диполя, учитывая (4.23) аналогичным образом, вместо (4.27) получим

$$S_\omega = \frac{\omega^2 n^4 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\pi^2 R^2 c^3} q^2(\omega, \theta) m^2 \left| \cos(r_1, m_1) \left(r_1 - \frac{\beta}{n} z_1\right) - \left(1 - \frac{\beta}{n} \cos \theta\right) m_1 \right|^2.$$

Отсюда следует, что в формуле, аналогичной (4.28), надо заменить p^2 на m^2 , перед фигурной скобкой ввести дополнительный коэффициент n^2 , а в фигурной скобке заменить p_1 и βn на m_1 и β/n . В результате, применяя

*) Этот интеграл, хотя и элементарен, но за исключением предельного случая довольно громоздок (см. формулы (14) и (15) работы ¹⁷).

(4.32), получим

$$W(m, \omega) = \frac{\omega^3 \mu n^2}{2\pi c^2 v^2} m^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 + \right. \\ \left. + 2\frac{\beta}{n} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{1}{\beta n} \cos \vartheta \right) \cos \vartheta \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{\beta^2}{n^2}\right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{1}{\beta n} \cos \vartheta \right)^2 \right]. \quad (4.34)$$

Эта довольно сложная формула дает угловое распределение излучения магнитного диполя.

Нетрудно убедиться, что для магнитного диполя, ориентированного по скорости ($\cos \vartheta = 1$), поток энергии не зависит от угла φ , т. е. излучение одинаково по всем образующим конуса. Суммарная его величина равна

$$W(m, \omega) = \frac{m^2}{v^2 c^2} \omega^3 n^2 \mu \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right), \quad m \parallel v. \quad (4.35)$$

Формула сходна с тем, что имеет место для электрического диполя (см. (2.33)). Более того, при $\mu = 1$ ее можно считать магнитным аналогом (2.33), так как $n^2 \equiv \epsilon$ (см. формулу (5.18)). Поэтому формула (4.35), полученная для $\mu = 1$ в ⁴, ⁶ и повторенная в ⁷, не вызывала сомнений. Иное положение имеет место для магнитного диполя, направленного перпендикулярно скорости ($\sin \vartheta = 1$).

Угловое распределение, как видно из (4.34), — в этом случае сложная функция угла φ , и после интегрирования получается

$$W(m, \omega) = \frac{m^2}{2v^2 c^2} \omega^3 n^2 \mu \left[2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{\beta^2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \right], \quad m \perp v. \quad (4.36)$$

Если же для связи между движущимся магнитным диполем и индуцированным им электрическим диполем использовать не (4.19), а (4.24), то получится

$$W(m, \omega) = \frac{m^2}{2c^4} \omega^3 n^4 \mu \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)^2, \quad m \perp v. \quad (4.37)$$

В работе ⁷ было несколько доводов для предпочтения (4.37) при $\mu = 1$ и признания формулы (4.36) ошибочной. Действительно, формула (4.37) сходна с формулой (2.34) для электрического диполя. Более того, при $\mu = 1$ она может считаться ее магнитным аналогом, так как лишнее n^2 в данном случае равно ϵ . Наконец, $W(\omega)$ в формуле (4.36), в отличие от всего, что мы знаем для других случаев ИВЧ, не стремится к нулю при $\beta n \rightarrow 1$ *. Правда, вопреки сказанному в ⁷, господствовало мнение, что формула (4.36) все же правильна и что (4.37) соответствует другому случаю поляризации среды ¹⁸. Приведенное здесь обобщение на случай $\mu \neq 1$ разрушает довод об аналогии (4.35) и (4.37) с диполем, состоящим из магнитных зарядов, для которого μ должно замениться на ϵ (см. следующую гл. 5 статьи). При этом появилось понимание, что аналогия здесь не обязательна. Таким образом, нет оснований считать формулу (4.36) ошибочной.

5. ИЗЛУЧЕНИЕ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА, А ТАКЖЕ ДИПОЛЕЙ И МУЛЬТИПОЛЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ МАГНИТНЫМИ ЗАРЯДАМИ

Рассмотрение поля магнитного заряда или системы магнитных зарядов может быть проведено элементарно, если исходить из симметрии уравнений Максвелла относительно электрических зарядов e и магнитных g . Все уравнения предшествующих гл. 1—3 пригодны для магнитных зарядов при замене E_ω на H_ω , H_ω на $-E_\omega$, если при этом поменять местами ϵ и μ .

*) Следует, однако, отметить, что вывод всех приведенных здесь формул для диполей, как уже указывалось, неприменим к области, близкой к порогу ($\beta n = 1$), так как в этом случае нельзя пользоваться предельным значением интеграла (4.31).

Однако при использовании такой симметрии неявно предполагается, что рассматриваются либо только электрические заряды e , либо только магнитные g . Вопрос о возможности сосуществования таких зарядов представляется неясным и не будет обсуждаться в статье. Однако, поскольку среда характеризуется только макроскопическими величинами ϵ и μ , то безразлично, является ли она обычной или построена из магнитных зарядов.

Для получения поля магнитных зарядов воспользуемся методом, использованным в работе ⁷. По аналогии с (4.3) мы можем написать

$$i\omega m_\omega = j_{g\omega}; \quad (5.1)$$

здесь $m_\omega = m_{g\omega}$ — магнитный момент, образованный магнитными зарядами, так что $j_\omega = j_{g\omega}$ — ток магнитных зарядов. Формально, однако, мы можем написать (5.1) для обычного магнитного момента m_ω и тогда j_ω — это некоторая вспомогательная величина, которую можно называть псевдоток.

Введем магнитный вектор-потенциал

$$\mathbf{K}_\omega = \frac{i\omega\epsilon}{c} \mathbf{M}_\omega. \quad (5.2)$$

Он отличается только нормировкой (добавочный коэффициент ϵ) от использованного в ⁷ и является аналогом связи между $\mathbf{A}_\omega$ и $\mathbf{P}_\omega$ (см. уравнение (4.5)). Тогда из (4.2) сразу получим уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{K}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathbf{K}_\omega = -\frac{4\pi\epsilon}{c} \mathbf{j}_{g\omega}, \quad (5.3)$$

являющееся магнитным аналогом уравнения (1.4). Мы можем также написать уравнение для статического магнитного потенциала χ_ω . Для этого положим

$$\operatorname{div} \mathbf{m}_{g\omega} = -\rho_{g\omega} \quad (5.4)$$

и далее примем, что

$$-\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{M}_\omega = \chi_\omega. \quad (5.5)$$

Тогда из (4.2) следует

$$\nabla^2 \chi_\omega + \frac{\omega^2 \mu\epsilon}{c^2} \chi_\omega = -\frac{4\pi}{\mu} \rho_{g\omega}. \quad (5.6)$$

Следствием (5.2) и (5.5) является выполнение соотношения Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{K}_\omega + \frac{i\omega}{c} n^2 \chi_\omega = 0. \quad (5.7)$$

Вернемся теперь к предположению, что m_ω — обычный магнитный момент. В этом случае $\mathbf{M}_\omega$ однозначно связано с $\mathbf{A}_\omega$. Если $\mu = 1$, то $\mathbf{A}_\omega = \operatorname{rot} \mathbf{M}_\omega$ (см. (4.5)). Воспользовавшись уравнением (5.2), получаем

$$\mathbf{A}_\omega = -\frac{ic}{\omega\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{K}_\omega. \quad (5.8)$$

При этом, как уже отмечалось, допустимо считать $\mathbf{K}_\omega$ удовлетворяющим (5.3), если под $\mathbf{j}_{g\omega}$ понимать $i\omega \mathbf{m}_\omega$. Если подставить это значение $\mathbf{K}_\omega$ в (1.4), получим

$$\mathbf{E}_{g\omega} = -\frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{K}_\omega, \quad (5.9)$$

что в самом деле является магнитным аналогом (1.5). Подстановка такого $\mathbf{K}_\omega$ в (1.5) дает

$$\mathbf{H}_\omega = -\frac{ic}{\omega\epsilon\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{K}_\omega. \quad (5.10)$$

Это уравнение с помощью (1.12) и (5.3) в области, где $m_\omega = 0$, можно записать так

$$\mathbf{H}_\omega = -\frac{ic}{\omega\epsilon\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{K}_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{K}_\omega. \quad (5.11)$$

Уравнения (5.9), (5.11) могут быть написаны сразу как магнитная аналогия (1.1), (1.4) и (1.5). Здесь они получены из представлений об обычном магнитном моменте, и это очевидное следствие того, что электромагнитные поля обоих видов магнитных моментов в среде с $\mu = 1$ имеют далеко идущее сходство. Поэтому в работе ⁷, в которой содержалось предположение о тождестве этих полей, не возникло сомнений в его правильности, хотя пришлось произвольным образом заменить преобразование (4.19) на (4.24), которые совпадают между собой только в вакууме.

В действительности, однако, в среде различия поля обоих видов диполей имеются, и это сразу видно, если допустить, что $\mu \neq 1$.

В самом деле тогда, как следует из (4.5), $A_\omega = \mu \operatorname{rot} M_\omega$ и, следовательно, вместо (5.8) получится

$$A_\omega = -\frac{ic}{\omega} \frac{\mu}{\varepsilon} \operatorname{rot} K_\omega.$$

Подставляя эту величину в (1.4), получим для E_ω значение, в μ раз большее (5.9) и, следовательно, не являющееся магнитным аналогом (1.5).

Как уже отмечалось в гл. 4, в уравнения (4.8) и (4.9) величины P_ω и M_ω входят не симметрично, и это приводит к существенно различным результатам для излучения электрического и магнитного диполей.

Для получения аналога электрического диполя следует с самого начала положить магнитный диполь состоящим из двух магнитных зарядов, используя аналогию уравнений для электрических и магнитных зарядов. Таким образом, следует считать

$$i\omega m_{g\omega} + c \operatorname{rot} p_{g\omega} = j_{g\omega}, \quad (5.12)$$

$$K_\omega = \varepsilon \left(\frac{i\omega}{c} M_{g\omega} + \operatorname{rot} P_{g\omega} \right). \quad (5.13)$$

Не повторяя всего сказанного в гл. 4, сразу напишем аналог (4.15) и (4.16):

$$H_\omega = -\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} [r_1 [r_1 m_1]] M_{g\omega} - \frac{\omega^2 n \varepsilon}{c^2} [r_1 p_1] P_{g\omega}, \quad (5.14)$$

$$E_\omega = -\frac{\omega^2 n}{c^2} [r_1 m_1] M_{g\omega} + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} [r_1 [r_1 p_1]] P_{g\omega}, \quad (5.15)$$

$$E_\omega = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [r_1 H_{g\omega}]. \quad (5.16)$$

Используя (4.19) вместо (4.21), получим

$$H_\omega = -\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} M_{g\omega} \{ [r_1 [r_1 m_1]] - \beta n [r_1 [z_1 m_1]] \}, \quad (5.17)$$

являющееся ее аналогом с заменой E_ω на H_ω , P_ω на M_ω .

Отсюда для ИВЧ диполя, образованного двумя магнитными полюсами, должны получаться формулы, аналогичные (2.33) и (2.34), а именно,

$$W = \int_{\beta n(\omega) > 1}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3 \varepsilon}{c^2 v^2} m^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) d\omega, \quad m \parallel v, \quad (5.18)$$

$$W = \int_{\beta n(\omega) > 1} \frac{\omega^3 n^2 \varepsilon}{2c^4} m^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right)^2 d\omega, \quad m \perp v. \quad (5.19)$$

Эти формулы следует сравнить с тем, что имеет место для обычного магнитного момента. Как уже отмечалось при обсуждении формулы (4.35), т. е. для диполя, направленного параллельно скорости при $\mu = 1$ и $n^2 \equiv \varepsilon$, она совпадает с (5.18).

Что касается магнитного диполя, ориентированного перпендикулярно скорости, то предположение правильности преобразования (4.24) при $\mu = 1$ в самом деле согласует (4.37) с (5.19), так как в этом случае $n^4 \equiv n^2 \varepsilon$.

При $\mu \neq 1$ достичь согласия не удастся даже таким допущением, как (4.24).

Система уравнений (5.3), (5.6), (5.7), (5.8) и (5.11), как уже отмечалось, является магнитным аналогом (1.1) — (1.5). При этом, если рассматривать (5.11) как аналог (1.4), то нет необходимости ограничивать ее применение областью, где $j_{g\omega}$ равно нулю. Согласие этих уравнений с уравнениями Максвелла для магнитных зарядов и магнитных токов содержится в гл. 6.

Пользуясь ими, можно получить уравнения для ИВЧ магнитного заряда и любого мультиполя, аналогично рассмотрению гл. 1 и 2 для электрического заряда и мультиполя.

Будем рассматривать движение точечного магнитного заряда g со скоростью v , как это сделано в формуле (1.13) для электрического заряда e . Сравнивая (1.1) и (5.3) по аналогии с (1.15), можно положить

$$K_{\omega z} = \frac{g\varepsilon}{2c} a(\rho, \omega) e^{-i\omega z/v}, \quad K_{\omega\rho} = K_{\omega\varphi} = 0; \quad (5.20)$$

для $a(\omega, \rho)$ в этом случае имеет место уравнение (1.16). Отсюда из (1.20), (5.10) и (5.11) аналогично тому, как это сделано в гл. 1, получим

$$E_{\omega\varphi} = \frac{g}{2c} \frac{\partial a}{\partial \rho} e^{-i\omega z/v}, \quad (5.21)$$

$$H_{\omega\rho} = -\frac{g\varepsilon}{2v n^2} \frac{\partial a}{\partial \rho} e^{-i\omega z/v}, \quad (5.22)$$

$$H_{\omega z} = -\frac{ig\omega\varepsilon}{2c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) a e^{-i\omega z/v}. \quad (5.23)$$

Эти формулы можно, разумеется, написать сразу как магнитный аналог (1.22) — (1.24). Таким же образом, в силу очевидной аналогии с (1.26) — (1.27) для ИВЧ магнитного заряда g получим ⁷

$$W = g^2 \int_{\beta n(\omega) > 1} \frac{\varepsilon\omega}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) d\omega. \quad (5.24)$$

Как было показано выше (гл. 3), зная излучение заряженной частицы, нетрудно определить излучение любого линейного мультиполя с помощью рассмотрения интерференции волн, испускаемых отдельными частицами. Очевидно, что при одинаковом расположении магнитных полюсов и электрических зарядов результат интерференции должен быть одинаков. Отсюда следует, что все формулы для энергии излучения и величины сил, действующих на электрический мультиполь (3.7), (3.10) — (3.12), (3.17), правильны и для магнитного мультиполя, если заменить в них μ на ε и мультипольный момент p_l на магнитный мультипольный момент m_l (в работе ⁷, как уже неоднократно отмечалось, принималось $\mu = 1$, и поэтому для магнитных мультиполей, по сравнению с электрическими, появился дополнительный коэффициент $n^2 \equiv \varepsilon$).

Далее, в той же гл. 3 было показано, что содержащиеся в ней формулы совпадают с результатами гл. 2, где рассматривалась сила, тормозящая систему зарядов. Для определения этой силы необходимо знать действие электрического и магнитного полей на каждый из зарядов. В случае двух электрических зарядов эта сила равна (2.1). В случае магнитных зарядов формулы (3.14), (3.12) и (3.17), при условии выполнения (3.13), должны быть правильны и для магнитного заряда при замене p_l на m_l и μ на ε . Отсюда элементарным образом следует, что вместо (2.1) (в случае магнитных зарядов) сила, действующая на заряд, равна

$$\mathbf{F}_\omega(g) = g\mathbf{H}_\omega - \frac{g\varepsilon}{c^2} [v\mathbf{E}_\omega]. \quad (5.25)$$

Эта формула — в самом деле магнитный аналог (2.1), причем второй ее член — аналог силы Лоренца для магнитных зарядов.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ МАГНИТНЫХ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ

Из симметрии приведенных в предыдущей главе формул для магнитных зарядов ρ_g и токов j_g относительно привычных уравнений, определяющих поле электрических зарядов ρ и токов j , следует, что должны удовлетворяться уравнения Максвелла для отличных от нуля ρ_g и j_g .

Убедимся в этом, повторив в основном рассуждения, приведенные в начале гл. 1. Если плотность электрического тока $j = 0$ и плотность электрических зарядов $\rho = 0$, но существуют магнитные заряды g и магнитные токи j_g , то уравнения Максвелла, очевидно, имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}_\omega}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$-\operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{g\omega} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_\omega}{\partial t}, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_\omega = 4\pi \rho_{g\omega}, \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_\omega = 0. \quad (6.4)$$

Для удобства рассмотрения повторим формулы, приведенные в предшествующей главе и покажем, что они эквивалентны (6.1) — (6.4):

$$\mathbf{E}_\omega = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{K}_\omega, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{H}_\omega = -\frac{ic}{\omega} \frac{1}{\mu\varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{K}_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{K}_\omega, \quad (6.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{K}_\omega + \frac{i\omega}{c} \varepsilon \mu \chi_\omega = 0, \quad (6.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{K}_\omega + \frac{\omega^2 \mu\varepsilon}{c^2} \mathbf{K}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \varepsilon \mathbf{j}_{g\omega}, \quad (6.8)$$

$$\nabla^2 \chi_\omega + \frac{\omega^2 \mu\varepsilon}{c^2} \chi_\omega = -\frac{4\pi}{c} \rho_{g\omega}. \quad (6.9)$$

Прежде всего, очевидно, что допущение (6.5) означает выполнение (6.4). Далее из (6.1) с учетом (6.5) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}_\omega}{\partial t} = \operatorname{rot} \left(\mathbf{H}_\omega + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{K}_\omega}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) удовлетворяется, если величина под знаком ротора является градиентом скалярной функции. Как обычно, делается допущение, правильность которого следует из дальнейшего, что

$$-\operatorname{grad} \chi_\omega = \mathbf{H}_\omega + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{K}_\omega}{\partial t}. \quad (6.11)$$

Из (6.11) и (6.7) следует уравнение поля (6.6) для $\mathbf{H}_\omega$. Видно, что здесь не накладывается ограничение на уравнение (6.6) областью, где $j_{g\omega} = 0$, как это отмечалось при переходе от (5.10) к (5.11). Таким образом, с помощью вектор-потенциала $\mathbf{K}_\omega$ можно удовлетворить уравнениям поля для $\mathbf{E}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$ и уравнениям Максвелла (6.1) и (6.4), если принять условие Лоренца (6.7) и правильность (6.11). Теперь требуется доказать, что уравнения Максвелла (6.2) и (6.3) при тех же условиях приводят к волновым уравнениям (6.8) и (6.9) для $\mathbf{K}_\omega$ и χ_ω . Из уравнения (6.3) и (6.11) получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_\omega = -\mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \chi_\omega - \frac{\mu}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{K}_\omega}{\partial t} = -4\pi \rho_{g\omega}. \quad (6.12)$$

Выражая $\operatorname{div} \partial \mathbf{K}_\omega / \partial t$ через χ с помощью (6.7), в самом деле получаем уравнение (6.9) для скалярного потенциала. Далее из уравнения (6.2) и (6.5) имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{K}_\omega = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{K}_\omega - \nabla^2 \mathbf{K}_\omega = \frac{4\pi\varepsilon}{c} \mathbf{j}_{g\omega} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Используя величину $\text{grad div } \mathbf{K}_\omega$ из (6.6), приходим к уравнению (6.8). Таким образом, система уравнений (6.5) — (6.9) в самом деле эквивалентна уравнениям Максвелла (6.1) — (6.4).

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу за замечания, которые были приняты во внимание при редактировании обзора.

Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна (Московская обл.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. Е., Франк И. М.— ДАН СССР, 1937, т. 14, с. 107.
2. Тамм И.— J. Phys. USSR, 1939, v. 1, s. 439; также: Тамм И. Е. Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1975.— Т. 1, с. 77.
3. Гинзбург В. Л.— ДАН СССР, 1939, т. 24, с. 131.
4. Гинзбург В. Л.— ЖЭТФ, 1940, т. 10, с. 589.
5. Гинзбург В. Л.— Ibid., с. 608.
6. Франк И. М.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, с. 3.
7. Франк И. М.— В кн. Памяти Сергея Ивановича Вавилова.— М.: Изд-во АН СССР, 1952, — С. 172.
8. Вавилов С. И.— ДАН СССР, 1937, т. 17, с. 459.
9. Франк И. М.— УФН, 1946, т. 30, с. 149.
10. Левин М. Л.— ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. с. 381.
11. Ситенко А. Г.— ДАН СССР, 1954, т. 118, с. 337.
12. Watson K., Jauch J. M.— Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1954.
13. Ширококов М. Я.— ЖЭТФ, 1949, т. 19, с. 480.
14. Гуревич И. И., Тарасов Л. В. Физика нейтронов низких энергий.— М.: Наука, 1965,— С. 268.
15. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние.— М.: Наука, 1984.
16. Гинзбург В. Л.— В кн.: Памяти Сергея Ивановича Вавилова.— М.: Изд-во АН СССР, 1952.— С. 193.
17. Кобзев А. П., Франк И. М.— ЯФ, 1981, т. 34, с. 125.
18. Гинзбург В. Л., Эйрман В. Я.— ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 1508.

