*1984 г. Январь* *Том 142, вып. 1*

*УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК*

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.3

# ЗАРЯДОВАЯ И ТОКОВАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА, НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ИСТОЧНИКИ СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

*М. А. Миллер*

СОДЕРЖАНИЕ



1. Квалификация заметок как методических, до некоторой степени вынужденная за отсутствием более адекватной их содержанию рубрики. Чисто методические заметки возникают тогда, когда что-то, даже заведомо известное, удается понять в каком-то смысле по-новому. Здесь же скорее всего речь идет о построении экзотических электромагнитных устройств с не очень привычными свойствами, а не о новом толковании известного. Впрочем, всякое посягательство на новизну в давно и хорошо пройденной области настораживает. И при написании этих заметок автора сопровождало чувство, что где-то на заре максвелловской электродинамики нечто подобное должно было быть достоверно продумано.

Любое общее утверждение на начальной, зародышевой, стадии может быть подготовлено простой в постановке (но не обязательно простой в решении) задачей, которую уместно было бы поэтому назвать *производящей*. В качестве таковой мы возьмем одно из обязательных упражнений из курса электродинамики.

2. Обратная задача электростатики заключается в отыскании источников по заданному полю. Пусть в однородной среде (вакуум) по известному всюду электростатическому полю $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ требуется найти распределение неподвижных электрических зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Решение задачи однозначно и сводится к простому дифференцированию

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

А вот если источники сосредоточены внутри некоторой области (например, внутри сферки радиуса $a$) и поле (например, дипольное) задано лишь вне ее, то решение будет уже «слегка» неоднозначным, но все-таки оно составит класс взаимно сводящихся распределений $\rho(\mathbf{r})$ внутри $r < a$ или на поверхности $r = a$, обладающих только дипольным моментом $\mathbf{p}^e$ и никакими другими; поэтому если не проникать в тонкую структуру источника, неоднозначность окажется несущественной.

Электростатику, описываемую уравнениями (1), можно было бы назвать обычной *зарядовой электростатикой*, если было бы допустимо противопоставить ей какую-либо иную.

3. Вихревое электростатическое поле может быть создано с помощью переменных по времени замкнутых токов, удовлетворяющих условию соленоидальности

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^e = 0. \tag{2}$$

Наиболее простой и известный вариант получения таких полей связан с использованием токов, растущих или убывающих линейно пропорционально времени $t$:

$$\mathbf{j}^e = \mathbf{j}_1^e \frac{t}{\tau}; \tag{3}$$

здесь $\mathbf{j}^e$ — объемная плотность токов, $\tau$ — некоторое характерное время процесса, $\mathbf{j}_1^e$ — значение тока при $t = \tau$, нижний индекс указывает на степень зависимости от $t$. В этом случае магнитное поле $\mathbf{H}$ будет иметь магнитостатическую структуру

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e, \tag{4}$$

изменяясь во времени в такт с (3),—

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{t}{\tau}. \tag{5}$$

А электрическое поле $\mathbf{E}$ оказывается строго статическим ($\partial\mathbf{E}/\partial t = 0$), подчиняющимся уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c\tau} \mathbf{H}_1 = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0^m, \tag{6}$$

где роль источников вихрей играет не зависящая от времени производная от заданного извне (а не самосогласованного с $\mathbf{E}$) магнитного поля (5); поэтому эти источники можно идентифицировать с некоторым постоянным магнитным током

$$\mathbf{j}_0^m = \frac{1}{4\pi\tau} \mathbf{H}_1. \tag{7}$$

Термин «магнитный ток» часто сопровождают эпитетами «эффективный», «эквивалентный», «фиктивный», стремясь подчеркнуть, что этот источник поля не есть продукт усреднения *микро*источников, обладающих какими-то магнитными зарядами (одиночными полюсами), а возникает лишь как результат переопределения электрических *макро*токов. Такой магнитный макроток, конечно, ничуть не хуже электрического, поскольку он алгоритмически однозначно через него же определен и своим магнитным наименованием обязан лишь тем функциям, которые возложены на него в уравнениях (6).

Система источников и полей (2)—(6) принципиально *магнитоэлектрическая*; мы прибегли именно к такому порядку слов, чтоб отстроиться от обычного сочетания «электромагнитная», в котором стереотипно подразумевается взаимная связанность $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, тогда как здесь одна из обратных связей прервана тождественным отсутствием тока смещения; это вырожденное решение — единственный вариант переменного поля, *строго описываемого домаксвелловской электродинамикой*. И хотя из него в принципе нельзя исключить магнитное поле, последнее можно, однако, сосредоточить внутри некоторой ограниченной области пространства, сохранив в дополняющих областях полностью очищенное от **H** статическое поле **E**.

4. Поле идеального соленоида, по которому текут кольцевые чисто поперечные *сторонние* токи (3), показано на рис. 1. Это — простейший пример очистки внешней области от **H**. В самом деле, внутри

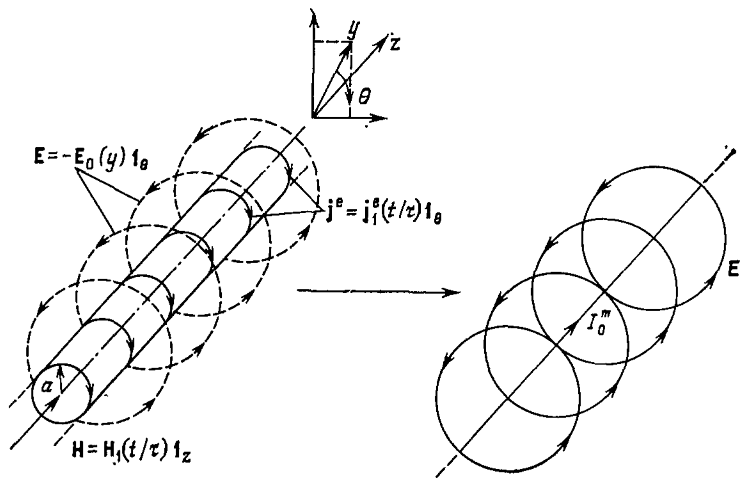



Рис. 1. Поле идеального соленоида, обтекаемого азимутальными сторонними электрическими токами, линейно изменяющимися со временем.

Во внешней области оно эквивалентно полю прямолинейного постоянного магнитного тока ($y \equiv r$).

соленоида ($r < a$) возбуждается магнитоэлектрическое поле: однородное продольное $\mathbf{H} = H\mathbf{1}_z$ ($\mathbf{1}_z$ — единичный вектор) и азимутальное поперечное (как в бетатроне) $\mathbf{E}_\theta$:

$$\mathbf{E}_\theta = -\frac{r}{2c\tau} H_1 \mathbf{1}_\theta,$$

а снаружи при $r > a$ остается только одно электрическое поле

$$E_\theta = -\frac{1}{2c\tau} H_1 \frac{a^2}{r}, \tag{8}$$

совпадающее формально с полем магнитного тока

$$I_0^{\mathrm{m}} = \int \mathbf{j}_0^{\mathrm{m}}\, d\mathbf{S} = \frac{a^2}{4\tau} H_1, \tag{9}$$

пущенного вдоль оси цилиндра. Теперь можно сжать соленоид в линию, оставляя неизменным произведение

$$H_1 \frac{a^2}{\tau} = \mathrm{const},$$

и получить безмагнитное вихревое электростатическое поле во всем пространстве $r > 0$, кроме области источника $r = 0$.

На языке «технического» соленоида *) это означает $j^e \Delta l a^2/\tau = \mathrm{const}$, где $\Delta l$ — толщина намотки, $j^e \Delta l = \overset{e}{j}_{\text{пов}}$ — поверхностный ток, текущий в ней и равный $nI^e$ ($I^e$ — полный ток в одном витке, $n$ — число витков на единицу длины по $z$). И, конечно, «намотка» должна быть двух- (туда и обратно) заходовой, чтобы исключить продольную компоненту электрического тока.

5. Описание с помощью потенциалов такого поля выглядит тоже предельно просто. При $\rho = 0$ скалярный потенциал можно без ограничений общности положить равным нулю (имея в виду только установившееся решение) и представить поля **E** и **H** через векторный потенциал **A**, удовлетворяющий неоднородному волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e \quad \left(\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\right). \tag{10}$$

В случае линейных по $t$ источников типа (2)

$$\Delta \mathbf{A}_1 \frac{t}{\tau} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_1^e \frac{t}{\tau}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c\tau}\mathbf{A}_1, \quad \mathbf{H} = \frac{t}{\tau}\operatorname{rot}\mathbf{A}_1. \tag{11}$$

Значит, поле **E** совпадает с точностью до постоянного множителя (размерность обратной длины) с полем $\mathbf{A}_1$, а последнее имеет структуру магнитостатического вектор-потенциала. Отсюда следует, между прочим, любопытная рекомендация по измерению магнитостатического вектор-потенциала **A** (**r**) в любой области пространства, даже там, где $\mathbf{H} = 0$, состоящая в замене постояннотоковых систем на систему токов с тем же пространственным распределением, но линейно изменяющихся во времени **).

6. Токовый электрический диполь получается свертыванием прямого соленоида (рис. 1) в тор (рис. 2) ***), т. е. с помощью коль-

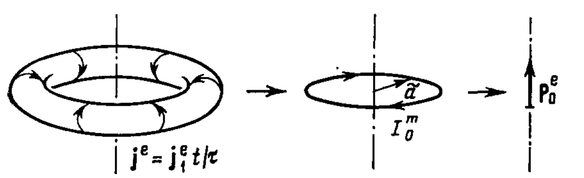



Рис. 2. Прямой соленоид с линейным током, свернутый в тор, эквивалентен кольцевому магнитному току, постоянному во времени, внешнее поле которого при стягивании кольца в точку совпадает с полем элементарного электрического диполя.

цевого магнитного тока ($\operatorname{div}\mathbf{j}^m = 0$), как это и должно подсказываться принципом перестановочной двойственности (дуальности), в силу которого уравнения Максвелла инвариантны относительно замены $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$, $\mathbf{j}^e \to \mathbf{j}^m$, $\mathbf{j}^m \to -\mathbf{j}^e$, $\rho^e \to \rho^m$, $\rho^m \to -\rho^e$ (все по-прежнему относится к вакууму). При этом электрический дипольный момент тора $\mathbf{p}^e$ выражается через его радиусы $a$ и $\tilde{a}$ и через плотность поверхностного тока $\overset{e}{j}_{\text{пов}_1}$, теку-

*) Речь идет о неком модельном соленоиде, образованном *сторонними* токами, текущими отнюдь не по проводящим обмоткам. Иначе в силу непрерывности $E_{\text{тан}}$ поле вне соленоида не будет полностью избавлено от линейно растущей во времени компоненты. Заметим, кстати, что хотя приводимые здесь «конструкции» в известном смысле умозрительны, в принципе они допускают и прямые лабораторные демонстрации: ферритовые стержни с большой проницаемостью на участках линейного роста $B$ ($t$) или ускоренно вращающиеся заряженные цилиндры с компенсированным радиальным полем ведут себя как линейные постоянные магнитные токи.

**) Не следует, однако, воспринимать это как выпад в адрес градиентной неоднозначности потенциала. В описании (10) вектор **A** уже отнормирован и является величиной вполне определенной. Указываемый в тексте рецепт позволяет свести отыскание поля **A**, создаваемого постоянными токами, к решению уравнения (11), т. е. к некоторой аналоговой системе, где это поле может быть непосредственно измерено.

***) При этом внешняя область остается по-прежнему очищенной от поля **H**. Можно показать, что экранирующие «потоководы», т. е. устройства, канализирующие потоки векторов **E** (или **H**), допускают произвольные деформации без нарушения эффекта экранирования.

щего по обмотке, следующим образом:

$$p_0^e = \frac{1}{\tau} j^e_{\text{пов}_1} \left(\frac{\pi a \tilde{a}}{c}\right)^2. \tag{12}$$

Из (12) понятно, как нужно стягивать этот тор в точку, чтобы сохранить неизменным $p_0^e$.

Итак, наша отправная, можно сказать, «учебниковая» обратная задача об отыскании источников дипольного электростатического поля имеет по крайней мере два независимых набора решений: это — либо распределения неподвижных зарядов ($j^e = 0$, $\rho^e \neq 0$), либо распределение вихревых токов ($\rho = 0$, $j^e \neq 0$), линейно изменяющихся по $t$. И похоже, что никакими наружными измерениями без вторжения в недра источников нельзя разгадать их природу. Исходная задача действительно оказалась «производящей».

7. Токовая электростатика — так можно назвать систему полей, создаваемых различными распределениями токовых источников. В отличие от обычной зарядовой электростатики (теперь уже использование этого термина вполне мотивировано) в ней, как и в магнитостатике,

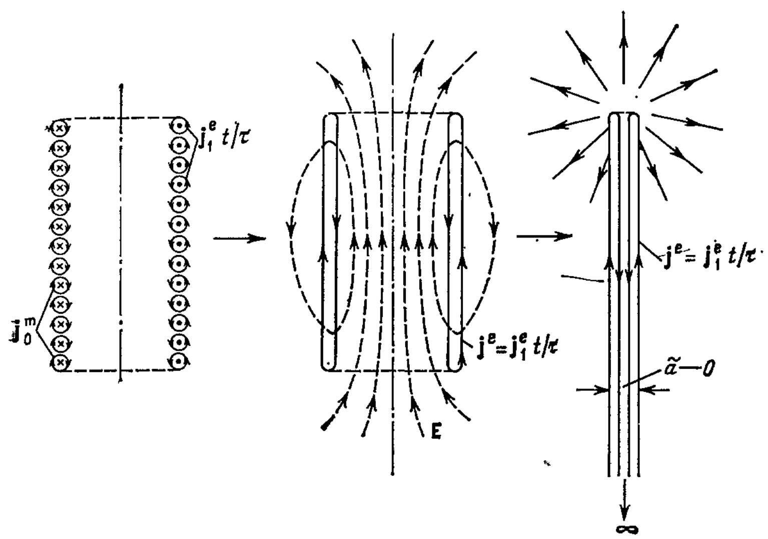



Рис. 3. Схематическое построение одиночного электрического полюса (заряда) в токовой электростатике: набор торов, нанизанных на общую ось, эквивалентен единому тору. Если один из торцов оттянуть в бесконечность, а сечение сжать в цилиндр нулевого сечения, то поле вблизи другого торца совпадает с полем точечного электрического заряда ($\tilde{a} \to 0$).

отсутствует свободный монополь; ну, и конечно, ее источники принципиально нестационарны — их время жизни всегда ограничено. Однако первое несоответствие довольно просто обходится,— во всяком случае, при чисто теоретических построениях — путем выстраивания (тоже как и в магнитостатике) набора диполей в полуограниченную цепочку и удаления тем самым одного из полюсов на бесконечность. Фактически получается набор торов, плотно нанизанных на общую ось (рис. 3), который в результате амперовой компенсации токов сводится в единый тор с удлиненным овальным сечением (у токамаков такие конфигурации называются перстеньковыми) *). Значит, токовый электрический монополь, в отличие от зарядового, не

*) Подобные устройства находят применение в качестве ЛИУ (линейных индукционных ускорителей), где основное внимание сосредоточено на создании ускоряющего поля нужной структуры в приаксиальной области удлиненного тора, причем для получения постоянного во времени поля E работа ЛИУ обычно происходит именно на участке линейно растущих $H(t)$ или $B(t)$ [4].

относится к числу электрически автономных, изолированных истоков или стоков поля $\mathbf{E}$: к нему обязательно должен быть подсоединен «потоковод», по которому подается или отводится $\int \mathbf{E}\, d\mathbf{S}$.

Что же касается конечности времени жизни источников, так ведь это неизбежное физическое свойство любых стационарных состояний и процессов,— разница только в масштабах. В зарядовой электростатике тоже надо сначала выждать, пока не высветятся возмущения, обусловленные начальными переходными процессами, и затем иметь дело лишь с интервалами, меньшими максвелловского времени релаксации зарядов, обусловленной проводящими свойствами среды.

При понимании этих ограничений и с соблюдением некоторой разумной осторожности можно высказать следующее общее утверждение: любое электростатическое поле, создаваемое какой-либо системой неподвижных зарядов и описываемое в рамках феноменологической электродинамики, может быть точно воспроизведено с применением только токовых источников.

В принципе даже позволительно вообразить бесконечный набор вложенных одна в другую (по типу матрешки) электродинамик: неподвижные заряды → движущиеся заряды → токи → неподвижные токовые заряды → движущиеся токовые заряды → снова токи и т. д. Причем эта последовательность обладает «иерархически-ретрансляционной» симметрией: первичность источников может быть постулирована на любом ее этапе. Но эти электродинамики уже относятся к категории, так сказать, выдуманной физики, т. е. к наукам, изучающим явления, дозволенные законами природы, но отвлеченные от их проявлений в естественных условиях.

8. Т о к о в ы е  д и п о л и  п р о и з в о л ь н о г о  р а н г а  это источники с произвольным изменением токов во времени:

$$\mathbf{j}^e = \mathbf{j}^e_n \frac{t^n}{\tau^n}, \tag{13}$$

которые благодаря надлежащим образом устроенному распределению в пространстве обладают только статическими дипольными моментами. Сама процедура построения этих распределений настолько примечательна, что из нее можно извлечь даже эстетические выгоды. Поэтому мы постараемся поделиться ею последовательно.

Сначала о терминологии; как известно, порядок источника характеризует число представленных в нем полюсов — монополь, диполь ... мультиполь. Теперь же оказывается, что любой мультиполь $m$-го порядка может быть осуществлен с помощью токов, изменяющихся как $n$-я степень $t$; термин «порядок» уже занят, ближайшее по смыслу незанятое слово «ранг». Так и получается «мультиполь $m$-го порядка $n$-го ранга».

Начнем с источников нулевого ранга, т. е. с неизменных во времени замкнутых токов. Они создают магнитостатическое поле, описываемое уравнением (4). Мы перепишем его в более удобном для дальнейших рекуррентных манипуляций виде

$$\text{in}] \rightarrow \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{j}^e_0 = \operatorname{rot} \mathbf{H}_0] \rightarrow \text{out}. \tag{14}$$

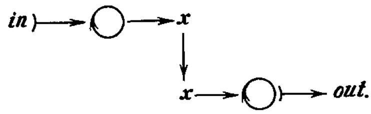
Стрелки указывают порядок действия: на входе (in) задается ток $\mathbf{j}^e_0$, на выходе (out) получается поле $\mathbf{H}_0$. Простейшим двумерным источником является прямой ток, трехмерным — виток с постоянным током, в пределе — элементарный магнитный диполь *).

*) Наверное, около 1/3 всех физических эффектов должно сохраняться и в одномерных моделях. Все рассматриваемые здесь системы принадлежат к этой одной трети. Распределение плоско-параллельных токов в источниках любого ранга, описанных далее, совпадают с распределением в сечениях цилиндрического соленоида, проходящих через ось.

Далее идут источники первого ранга, с которыми мы имели дело до сих пор. Для целостности общего представления повторим (2) — (6), переписав в форме, уже принятой в (14):

$$\begin{array}{l} \mathrm{in)}\!\rightarrow \dfrac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_1^e\,\dfrac{t}{\tau} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}_1\,\dfrac{t}{\tau} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad -\dfrac{1}{c\tau}\,\mathbf{H}_1 = \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_0)\!\rightarrow \mathrm{out}, \end{array} \tag{15}$$

здесь стрелки тоже поясняют ход (и аналитический, и топологический) построения решения: горизонтальные (прямоугольные) сохраняют степени $t$, а вертикальные редуцируют их на 1. В пространственных картинках иначе: вертикальные операции не изменяют направлений векторов поля, а горизонтальные поворачивают их: например, в двумерном случае аксиально поляризованное поле преобразуется в азимутально поляризованное, и наоборот. Поэтому цепочку операции (15) можно снабдить такой символической схемой:

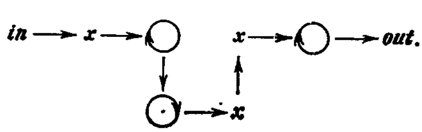



(16)

Кружками со стрелками обозначены азимутально, а крестиками ($x$) — аксиально поляризованные поля. Эта схема подсказывает общий рецепт построения элементарных источников любого ранга: поскольку на выходе удобно (для последующего формирования диполя) выделять замкнутые кольцевые «очищенные» (несмешанные) поля, то источники четного ранга образуются из аксиальных токов и приводят к магнитостатическим полям (четное число вертикальных операций), источники нечетного ранга образуются из кольцевых токов и приводят к электростатическим полям (нечетное число вертикальных операций).

Применим эти соображения к источникам сначала второго, а потом и третьего ранга:

$$\begin{array}{l} \mathrm{in)}\!\rightarrow \dfrac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_2^e\,\dfrac{t^2}{\tau^2} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}_2\,\dfrac{t^2}{\tau^2} - \dfrac{1}{c\tau}\,E_1 + \mathrm{rot}\,\mathbf{H}_0)\!\rightarrow \mathrm{out}, \\ \qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad -\dfrac{2}{c\tau}\,\mathbf{H}_2\,\dfrac{t}{\tau} = \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_1\,\dfrac{t}{\tau}, \end{array} \tag{17}$$




(18)

Соответствующая система токов вместе с распределениями полей показана на рис. 4—7. Ток $\mathbf{j}_2^e$ течет вдоль цилиндра $r = a$, а противоположный ему ток $-\mathbf{j}_2^e$ вдоль $r = b$. (Компенсирующие продольные токи необходимы для избавления от переменных полей во внешних областях.) Поле $\mathbf{H}_2$ азимутальное, отличное от нуля только внутри области $b > r > a$; но такой азимутально закручивающийся поток $\mathbf{H}_2$ образует соленоид, обтекаемый магнитными токами. Следовательно, дальнейшая процедура сводится к (16) с точностью до двойственной перестановки полей ($\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$); в результате при $r > b$ возникает чисто магнитостатическое поле $\mathbf{H}_0$, ничем не отличающееся от поля постоянного во времени аксиального электрического тока. А оно,

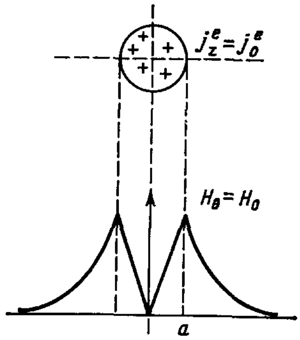



Рис. 4. Токовый статический источник нулевого ранга: аксиальный продольный) постоянный ток создает зимутальное магнитостатическое поле.

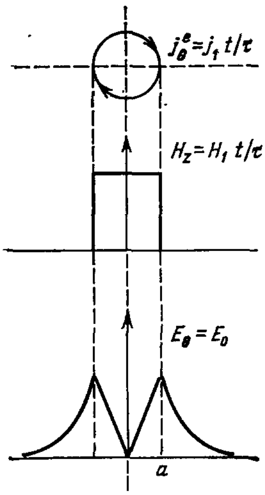



Рис. 5. Токовый статический источник первого ранга: азимутальный линейный по $t$ ток создает во внешней области чисто электростатическое азимутальное поле.

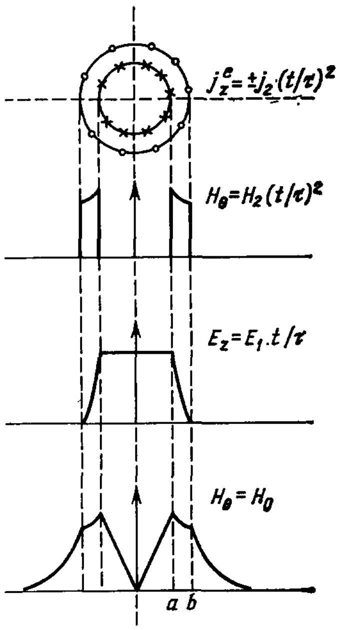



Рис. 6. Токовый статический источник второго ранга: два продольных коаксиальных тока, квадратично изменяющихся во времени, создают во внешней области азимутальное чисто магнитостатическое поле.

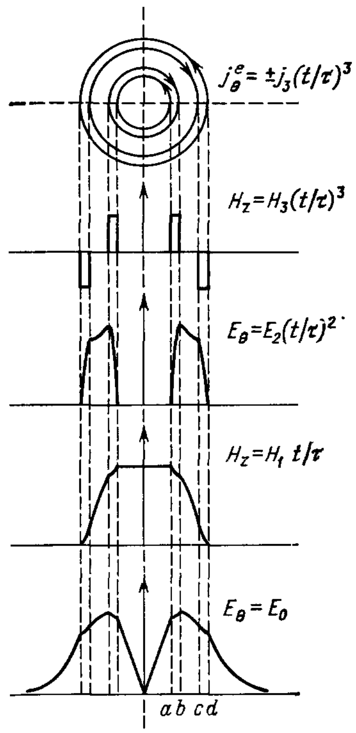



Рис. 7. Токовый статический источник третьего ранга: четыре коаксиальных соленоида с азимутальными кубическими по $t$ токами создают во внешней области азимутальное чисто электростатическое поле.

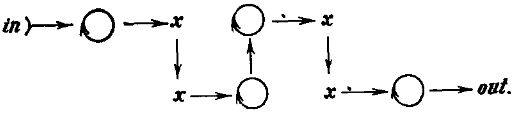
напомним, фактически создано переменными — квадратичными по $t$ — токами. Последняя операция — свертывание в тор — для источников любого ранга осуществляется стереотипно.

И последний пример — источники третьего ранга. Для разнообразия аналитическую процедуру редуцирования в этом случае мы поясним на вектор-потенциалах

$$\mathrm{in)} \to -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_3^e\,\frac{t^3}{\tau^3} = \Delta\mathbf{A}_3\,\frac{t^3}{\tau^3} - \frac{6}{c\tau^2}\,\mathbf{A}_3\,\frac{t}{\tau} + \Delta\mathbf{A}_1\,\frac{t}{\tau}\Big) \to \mathrm{out},$$

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_3\,\frac{t^3}{\tau^3} + \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_1\,\frac{t}{\tau}, \qquad (19)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{3}{c\tau}\,\mathbf{A}_3\,\frac{t^2}{\tau^2} - \frac{1}{c\tau}\,\mathbf{A}_1, \qquad (20)$$




(21)

Азимутальные входные токи обтекают две пары коаксиальных соленоидов (рис. 7): $\mathbf{j}_3^e\,(r = a)$, $-\mathbf{j}_3^e\,(r = b)$, $-\mathbf{j}_3^e\,(r = c)$, $\mathbf{j}_3^e\,(r = d)$. Поэтому сечение $a < r < b$ пронизывается продольным магнитным током в одном направлении, а сечение $c < r < d$ — в противоположном. Степень изменения этого тока по $t$ уже редуцирована на единицу — он квадратичен. Образуя коаксиал с противоположными магнитными токами, т. е. с точностью до двойственной перестановки полей ($\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$), мы получаем входную систему источника второго ранга. Значит, теперь во внешней области будет снова чисто электростатическое поле..

Можно не сомневаться, что это правило рекуррирования источников $n$-го ранга к источникам $(n-1)$-го ранга с применением операции дуализации или к источникам $(n-2)$-го ранга без таковой справедливо для любых $n$.

Выходит, что решение любой обратной задачи в токовом исполнении источников еще и бесконечнозначно, и это относится как к электро-, так и к магнитостатике *). Мы отнюдь не призываем тем самым к усложнению способов создания (или описания) статических полей, а обращаем внимание на принципиальную неограниченность таких возможностей. Напомним, что всюду здесь мы рассматриваем только установившиеся процессы, считая начальные условия соответствующим образом подогнанными под них. В противном случае время установления будет зависеть от ранга источника из-за частичного пленения начального излучения в паутине распределения токов, усложняющейся с ростом ранга.

9. Взаимодействие токовых источников высших рангов обладает некоторыми необычными проявлениями, что вполне может составить содержание ряда озадачивающих, но педагогически доброкачественных парадоксов.

Рассмотрим простейший пример. Предположим, что внутри $r < a$ имеется источник, создающий в наружной области $r > a$ центрально симметричное электростатическое поле. В рамках изучаемой здесь альтернативы это могут быть либо зарядовый, либо токовый монополи, характеризуемые одинаковыми электрическими зарядами $q_\alpha^e$ (не очень удачная, но вынужденная встреча слов). Во внешнем поле $\mathbf{E}$ на заряд должна действовать сила

$$\mathbf{F} = q_\alpha^e\,\mathbf{E}. \qquad (22)$$

*) Так что наши заметки допускали бы и такое заглавие: «О возможности создания электро- и магнитостатических полей с помощью только токов, изменяющихся во времени довольно-таки произвольным образом». Формулировка общей теоремы, по-видимому, возможна, но не проста: как видно из описанных выше построений, временные и пространственные зависимости токов функционально связаны между собой для источников каждого ранга по-разному.

Если $\mathbf{E}$ создано другим зарядом $q_\beta^e$, получится кулоновский закон взаимодействия

$$F_{\alpha \rightleftarrows \beta} = \frac{q_\alpha^e q_\beta^e}{r_{\alpha\beta}^2}. \qquad (23)$$

И он правилен, он обязан быть таковым независимо от способа задания, создания, поддержания фактических, фиктивно-эффективных и т. п. зарядов $q_\alpha^e$, $q_\beta^e$. Однако получение (23) для токовых источников невозможно без преодоления кое-каких недоразумений. Действительно, в этом случае электрический монополь образуется с помощью вихревых нестационарных токов

$$\mathbf{j}^e = \mathbf{j}_{2n+1}^e \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2n+1}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ \operatorname{div}\mathbf{j}^e = 0$$

при полностью компенсированных зарядах $\rho^e = 0$. Это означает, что лоренцева сила, действующая в электростатическом ($\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} = 0$) поле на чисто токовое распределение ($\rho^e = 0$, $\mathbf{j}^e \neq 0$), будет тождественно равняться нулю:

$$\mathbf{f} = \rho^e \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{j}^e,\ \mathbf{H}] = 0. \qquad (24)$$

Можно, разумеется, заподозрить подвох со стороны тонкого соленоида, подпитывающего токовый заряд полем $\mathbf{E}$, но ведь аналогичные рассуждения дозволительно было бы провести и на диполях ($\mathbf{F} = (\mathbf{p}^e\nabla)\,\mathbf{E}$), а там все «обеспечение $p^e$» размещено в ограниченной области пространства.

Этот «парадокс обессиливания» можно усугубить, прибегнув к максвелловскому тензору напряжений $T$. Поскольку в электростатике

$$\operatorname{div} T = \mathbf{f}, \qquad (25)$$

а входящие в $T$ поля вне источников — и зарядовых, и токовых монополей — одинаковы, то интегрирование (25) по любому объему, их содержащему, должно дать одинаковый результат:

$$\int \operatorname{div} T\, dV = \oint T\, d\mathbf{S} = \int \mathbf{f}\, dV = \mathbf{F}, \qquad (26)$$

не зависящий от природы источника, т. е. от способа его претворения.

Как почти все корректные парадоксы, этот тоже обусловлен распространением правильного утверждения в область его неприменимости. Токовые источники электростатического поля нестационарны: поле $\mathbf{H}$ внутри них линейно (у источников первого ранга) изменяется со временем, и поэтому укороченную статическую ($\partial/\partial t = 0$) формулу (25) следует заменить на полный динамический закон сохранения импульса в магнито-электрической системе

$$\operatorname{div} T = \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, \qquad (27)$$

где

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{t}{4\pi c\tau}\,[\mathbf{E}_0\mathbf{H}_1]$$

— электромагнитный импульс (его объемная плотность), накапливаемый или растрачиваемый источником. Следовательно, взамен (25) нужно написать

$$\oint T\, d\mathbf{S} = \int \mathbf{f}\, dV + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{g}\, dV. \qquad (28)$$

Таким образом, одинаковость левых частей (27) или (28) для монополей обоих типов (в предположении, конечно, что поверхность интегрирования охватывает область источника, не пересекая ее), обеспечивается разными членами: в случае зарядового монополя $\mathbf{g} = 0$, и сила принимает вид (22); в случае токового монополя $\mathbf{f} = 0$, но внутри происходит рост или уменьшение электромагнитного импульса $\partial \mathbf{g}/\partial t \gtrless 0$ *).

Парадокс еще не исчерпан. Нужно восстановить в правах закон Кулона (23) для токовых монополей. На первый взгляд может показаться, что токовые электростатические монополи (и мультиполи тоже, разумеется) вообще не взаимодействуют друг с другом, потому что сила $\mathbf{f}$ в этом случае, согласно (24), исчезает. Еще удивительнее выглядит случай взаимодействия обычного зарядового монополя $\overset{e}{q}_\alpha$ с токовым $\overset{e}{q}_\beta$, когда силы, входящие в (27) и (28), оказываются невзаимными: $\mathbf{F}_{\alpha\to\beta} \neq \mathbf{F}_{\beta\to\alpha}$, что противоречит закону сохранения импульса. Но ведь этот закон справедлив только для замкнутых систем, к которым, вообще говоря, не относится сторонний электрический ток $\mathbf{j}^e$, текущий в поле $\mathbf{E}$ — все равно в каком — чужом или собственном. «Система обеспечения» тока $\mathbf{j}^e_\beta$, т. е. устройства любой природы (в том числе, возможно, и электромагнитной тоже), с помощью которого значения $\mathbf{j}^e$ поддерживаются заданным (не зависящими от полей) образом, должна поставлять в эти поля определенные дозы энергии (мощности) $\int \mathbf{j}^e\, \mathbf{E}\, dV$ и импульса $\mathbf{G} = \int \mathbf{g}\, dV$, и, следовательно, это устройство будет испытывать соответствующую «отдачу». Замкнутой, автономной, является система поле + + источник с его обеспечением, поэтому полный поток импульса (пропорциональный *потоку потока* энергии) должен быть в точности равен изменению импульса отдачи; источник ведет себя лишь как преобразователь. В результате равенство (28) можно продолжить:

$$\oint T\, d\mathbf{S} = \int \mathbf{f}\, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{g}\, dV = \frac{d\mathbf{G}_\Sigma}{dt} = F_\Sigma. \tag{29}$$

Таким образом, взаимодействие источников, обладающих любым внутренним устройством, в конечном счете определяется их мультипольными моментами (в случае монополей — их зарядами). Но если средства измерения позволяют разрешить отдельный от силы Лоренца вклад изменения накапливаемого (расходуемого) импульса, то это может быть учтено введением некоторой дополнительной силы:

$$\mathbf{f}_{\text{доп}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{c} [\overset{e}{\mathbf{j}}_{\text{смещ}} \mathbf{H}] - \frac{1}{c} [\mathbf{j}^m, \mathbf{E}], \tag{30}$$

где $\overset{e}{\mathbf{j}}_{\text{смещ}} = (1/4\pi)\, \partial \mathbf{E}/\partial t$ — максвелловский ток смещения, $\mathbf{j}^m = (1/4\pi) \times \times \partial \mathbf{H}/\partial t$ — эффективный магнитный ток внутри источника. Выражение (30) инвариантно относительно перестановочной двойственности. Оно фигурировало еще в максвелловском «Трактате об электричестве и магнетизме» [1]. Его следовало бы назвать силой Абрагама для стороннего источника по аналогии с силой Абрагама для среды, т. е. по аналогии с силой, фактически действующей на самосогласованные поляризационные токи.

**10.** Заключительные замечания должны, вероятно, содержать оценку значимости описанных решений. По-видимому, они не только привлекательны своей необычностью, но и могут служить хорошей педагогической демонстрацией того, что даже в хорошо освоенной «макроклассике» законы сохранения срабатывают надежнее тех частных динамик, которые обеспечивают их конкретное соблюдение, в том числе динамик, скрытых он измерений, надуманных или, правильнее сказать, выдуманных

*) В отсутствие внешнего поля линейно растущий замкнутый ток (например, обтекающий соленоид, показанный на рис. 1) излучает энергию внутрь цилиндра так, что суммарный импульс, поставляемый им в поле, равен нулю. Такая система может служить — с понятными оговорками — макромоделью кольцевых пучков равномерно ускоренных заряженных частиц. Хотя процесс излучения обычно ассоциируется с уносом энергии *волнами*, однако в малых по сравнению с длиной волны окрестностях источника это может проявиться только через квазистационарные потоки.

на законном основании. Кроме того, все пояснения проводились на простейших моделях (иногда такую физику называют «стерильной»); в более реальных ситуациях допустимы, однако, и более сложные композиции из зарядов, токов и циркулирующих внутри источников импульсов, где выяснение «соотношения сил» требует индивидуального подхода с оглядкой на (29) и (30).

Наконец, некоторые из предложенных выше распределений полей и токов могут исполнять обязанности эталонных решений, справедливых — в кратковременных эпизодах — для произвольно переменных во времени процессов.

В связи с этим интересно отметить, что тороидальные токи всегда оказываются выделенными в ряду других распределений. На это обстоятельство обратил внимание в свое время Я. Б. Зельдович, назвавший (по предложению А. С. Компанейца) такие источники анапольными (полюсоподобными) [2]. Их свойства подробно изучены по запросам квантовой электродинамики [3]. С ними же приходится сталкиваться и в макромасштабах при исследовании полей, создаваемых тороидальными антеннами. Как известно, за поле излучения ответственна только вихревая ($\mathrm{div}\, \mathbf{j}_{\text{в}}^{e} = 0$), а не потенциальная ($\mathrm{rot}\, \mathbf{j}_{\text{п}}^{e} = 0$) часть тока $\mathbf{j}^{e}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\text{п}}^{e} + \mathbf{j}_{\text{в}}^{e}$. Следовательно, истинными, так сказать, «чистыми» источниками излучения должны считаться именно кольцевые, замкнутые, беззарядовые токи, что возвеличивает тор в ранг элитарных геометрических фигур в теории излучателей, ибо с помощью чисто вихревых токов, его обтекающих, можно воссоздать любое поле излучения: продольные азимутальные токи, коаксиально текущие по большим окружностям тора, излучают подобно элементарному (при $a\tilde{a}/\lambda^2 \to 0$) магнитному диполю; поперечные, полоидальные токи, текущие по малым окружностям, излучают, как электрический диполь ... и т. д. Так что в определенном смысле анаполь представляется более элементарным электродипольным источником, чем даже сам вибратор Герца. С этих позиций к токовой электростатике можно было бы подойти не «построенчески», как это сделано выше, а строго формализованно — путем предельного перехода от произвольно переменных полей к полям нулевой частоты $\omega$, что, как известно, приводит к двум решениям — постоянному и линейно растущему:

$$(\mathbf{j}_c^e \cos \omega t + \mathbf{j}_s^e \sin \omega t)_{\omega \to 0} \to \mathbf{j}_c^e + (\mathbf{j}_s^e \omega)\, t.$$

С таким вырожденным поведением приходится встречаться довольно часто в разных задачах: поля около каустик, критические режимы в волноводах, предельный случай туннельного эффекта ... и т. п.

Автор благодарен многим своим товарищам по работе за воодушевляющее понимание. Статья написана в такой манере по дружескому настоянию Л. С. Долина. Замечания М. Л. Левина, Г. В. Пермитина, Е. И. Якубовича позволили избежать некоторых неточностей, а В. Б. Гильденбурга — еще и вольностей толкования. Работа была рассказана на семинаре В. Л. Гинзбурга 30.06.82 г.; и автор обязан его участникам, обратившим внимание на связь токовой статики с анапольными представлениями.

Институт прикладной физики
АН СССР, Горький

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. C.— A Treatise on Electricity and Magnetism in two volumes.— 3rd ed.— 1891.
2. Зельдович Я. Б.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 1531.
3. Дубовик В. М., Чешков А. А.— Физ. ЭЧАЯ, 1974, т. 5, с. 791; Мультипольное разложение тока в классической электродинамике: Препринт ОИЯИ.— Дубна, 1970. Излучение тороидальными токами в классической электродинамике: Препринт ОИЯИ.— Дубна, 1970.
4. Вахрушев Ю. П., Анацкий А. И. Линейные индукционные ускорители.— М.: Атомиздат, 1978.