

539.21

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. Вл. Гуревич, Р. Г. Минц

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	61
2. Нелинейные квазистационарные волны	63
а) Волны в однородной среде (63). б) Волны в неоднородной среде (качественный анализ) (65). в) Точно решаемая модель (73). г) Динамика локализованных волн (75).	
3. Локализованные статические волны (общий подход)	77
а) Статические распределения (78). б) Устойчивость к малым возмущениям (80).	
4. Примеры	81
а) Резистивные домены в сверхпроводниках (81). б) Оптический разряд в газах (84). в) Температурно-электрические домены в нормальных металлах (86). г) Волны химических реакций (88). д) Сверхпроводник под действием лазерного излучения (91). е) Фазовый переход диэлектрик — металл (92). ж) О диссипативных структурах в неоднородной среде (93).	
5. Заключение	95
Цитированная литература	95

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интенсивно изучаются свойства различного рода нелинейных волн. Такие волны обычно являются реакцией среды на достаточно сильное внешнее воздействие или возникают самопроизвольно в ре-

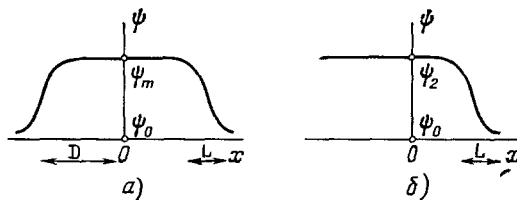


Рис. 1. Распределение $\psi(x)$ в домене (а) и «доменной стенке» (б).

зультате какой-либо неустойчивости как, например, в активных средах, далеких от состояния термодинамического равновесия¹⁻³. При некоторых условиях эта неустойчивость приводит к самоорганизации, т. е. к возникновению стационарных пространственно-неоднородных структур⁴⁻⁶.

В последние годы достигнут значительный прогресс в понимании свойств нелинейных волн в однородных средах, в частности, уединенных волн — доменов *) рис. 1, а, волн типа «доменная стенка» рис. 1, б и т. д. Разработаны весьма мощные математические методы, позволяющие в ряде случаев описать не только статические свойства нелинейных волн, но и динамику их взаимодействия друг с другом (см., например,^{9,10}).

*) Такие волны принято называть солитонами, если через достаточное время после взаимодействия друг с другом они сохраняют свою форму и скорость, отвечающие им до взаимодействия (см., например,^{7,8}).

Менее исследованным является вопрос о поведении нелинейных волн в неоднородной среде (см., например, ¹¹) — их локализации, устойчивости, а также зависимости свойств локализованной на неоднородности волны от параметров среды, внешних полей и т. д. Обычно представляется более или менее очевидным, что движущаяся нелинейная волна может захватываться достаточно сильной неоднородностью (см., например, ^{8,12}). Такая локализация (пиннинг) может существенно менять различные свойства среды. Это, например, относится к изменению вольтамперной характеристики (ВАХ) при пиннинге: вихрей в широких джозефсоновских контактах ¹³⁻¹⁶; медленных ганновских доменов, возникающих, в частности, при рекомбинационной неустойчивости в полупроводниках ^{17,18}; резистивных доменов в сверхпроводниках ¹⁹⁻²⁴; волн зарядовой плотности в квазиодномерных соединениях ^{25,26} и т. д.

Обычно самому факту локализации волны на неоднородности и условиям ее возникновения уделяется гораздо большее внимание, чем свойствам локализованной волны как таковой. С другой стороны, даже не очень сильная неоднородность может привести к существенному изменению характеристик локализованной на ней волны и, в частности, к стабилизации волны, которая в однородной среде неустойчива, а также к появлению качественно новых типов локализованных волн. Возможность локализации нелинейных волн на неоднородностях может приводить к самым разнообразным гистерезисным явлениям в сверхпроводниках ^{15,16,22-24,27,28}, в полупроводниках (см., например, ^{18,29}) и полупроводниковых структурах ³⁰, в низкотемпературной плазме ³¹, в ряде биологических систем ^{32,33}, к характерным аномалиям при фазовых переходах ^{34,35} и т. д. Изложению с единых позиций теории локализованных на неоднородностях нелинейных волн и посвящен данный обзор.

В настоящей работе мы будем рассматривать системы, в которых соответствующие волны можно описать одним нелинейным уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial \psi}{\partial x} - q \frac{\partial \psi}{\partial x} - f(\psi), \quad (1.1)$$

где μ , ν , κ , q и f — функции переменной ψ (а для неоднородной среды и координаты x). Это уравнение при соответствующем выборе функций μ , ν , κ , q и f описывает нелинейные волны во многих физических системах: ганновские домены в полупроводниках ^{17,18} (ψ — электрическое поле); различного рода тепловые волны (ψ — температура) в сверхпроводниках ³⁶⁻³⁸, в нормальных металлах ³⁹⁻⁴³, в полупроводниках ^{17, 18, 29, 64}, в жидком гелии ⁴⁴, в низкотемпературной плазме ^{31, 45-48}, при горении газовых смесей ^{49, 50} и химических реакциях, протекающих на поверхности твердого катализатора ^{51, 52}; концентрационные волны (ψ — концентрация атомов или активных центров) в сплавах ⁵³ и автокаталитических химических реакциях ^{49, 50, 54}; вихри в джозефсоновских контактах ¹³, антифазные домены в квазиодномерных соединениях ²⁶ и системах с электрон-дырочным спариванием ^{55, 56} (ψ — фаза параметра порядка); локальные колебания вблизи дефектов кристаллической решетки ⁵⁷⁻⁵⁹, а также система взаимодействующих атомов на периодической подложке ^{60, 61} (ψ — смещения атомов); нелинейные волны, возникающие в неравновесных сверхпроводниках ⁶² (ψ — модуль параметра порядка или концентрации квазичастиц), и при переходе металл — диэлектрик ⁶³ и т. д.

Таким образом, речь идет о довольно широком круге физических явлений, описывающихся уравнением одного и того же вида. Такое сходство в описании приводит к ряду специфических особенностей, присущих локализованным на неоднородностях волнам вне зависимости от их конкретной природы. В данном обзоре мы будем уделять основное внимание этим общим особенностям, рассматривая локализацию доменов (рис. 1, а) и доменных стенок (рис. 1, б) на изолированных неоднородностях и интересуясь в первую очередь теми физическими следствиями, которые из этого вытекают. По этой

причине наиболее существенные соотношения будут иллюстрироваться различного рода примерами и аналогиями на «физическом уровне строгости», обоснование таким аналогиям можно найти в цитируемой по ходу изложения литературе.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

а) Волны в однородной среде

В этом разделе мы приведем необходимые для дальнейшего результаты теории стационарных автомодельных волн $\psi = \psi(x - vt)$, распространяющихся в однородной среде с постоянной скоростью v . Ограничимся для простоты нелинейным уравнением диффузии ($\mu = 0$), тогда в системе координат, движущейся вместе с волной, уравнение (1.1) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dx} \kappa \frac{d\psi}{dx} + (vv - q) \frac{d\psi}{dx} - f(\psi) = 0. \quad (2.1)$$

В большинстве случаев, упоминавшихся во введении, зависимость от ψ имеет N -образный характер, как это изображено на рис. 2 (полупроводники с отрицательной дифференциальной проводимостью^{17,18}, сверхпроводники с транспортным током^{19,20,37,38}, цепные химические реакции «холодного» горения^{49,50}, плазма^{31,45-48} и т. д.).

Функция $f(\psi)$ зависит от внешних параметров. Такими параметрами могут быть, например, сила тока, интенсивность освещения, начальные концентрации химических реагентов, скорость пластической деформации и т. д. В данной работе мы ограничимся простейшим случаем, когда вся совокупность внешних условий может быть описана введением одного параметра β , характеризующего, таким образом, силу внешнего воздействия на систему. Типичный вид зависимости $f = f(\psi, \beta)$ показан на рис. 2. В этом случае при $\beta < \beta_1$ уравнение $f(\psi, \beta) = 0$ имеет один корень $\psi = \psi_0$, а при $\beta > \beta_1$ — три корня: $\psi = \psi_0$, $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$. Следовательно, при $\beta > \beta_1$ система может находиться в одном из трех однородных состояний. В случае $\kappa > 0$, $v > 0$ состояния, для которых $\partial f / \partial \psi > 0$ (рис. 2), устойчивы к малым возмущениям $\delta\psi \sim \exp(\lambda t + ikx)$, причем максимум инкремента $\delta = \text{Re } \lambda(k)$ достигается при $k = 0$ (см., например, ¹⁷). Таким образом, при $\beta > \beta_1$ состояния $\psi = \psi_0$ и $\psi = \psi_2$ устойчивы и, в принципе, могут сосуществовать в виде двух фаз, границы между которыми (доменные стенки) могут как покоиться, так и двигаться.

Для описания неоднородных распределений $\psi = \psi(x, t)$, отвечающих двухфазной области (см. рис. 1), необходимо провести исследование соответствующих решений уравнения 2.1. Эта задача решалась во многих работах, применительно к различным физическим, химическим и биологическим системам^{17, 18, 49, 50, 65-68}. Мы воспользуемся здесь наглядным качественным способом классификации неоднородных решений $\psi = \psi(x)$, основанном на формальной аналогии уравнения (2.1) с уравнением движения частицы с массой κ , зависящей, вообще говоря, от координаты ψ , при наличии потенциальной энергии $U = -S(\psi)$ и силы трения $(vv - q) d\psi/dx$, где величина x играет роль времени. Выражение для $S(\psi)$ нетрудно получить, умножая (2.1) на $\kappa d\psi/dx$ и интегрируя по x , что дает

$$S(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \kappa f d\psi. \quad (2.2)$$

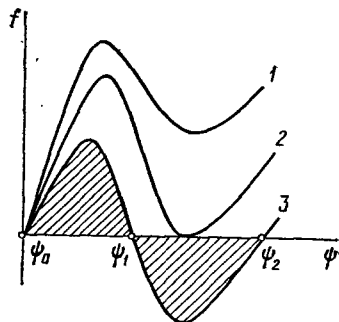


Рис. 2. Зависимость $f = f(\psi)$ при различных значениях параметра β .

1 — $\beta < \beta_1$, 2 — $\beta = \beta_1$, 3 — $\beta > \beta_1$.

На рис. 3 изображена потенциальная «энергия» $U = U(\psi)$, соответствующая «силе» $f(\psi)$, показанной на рис. 2. Ограниченным решениям $\psi(x)$ отвечают финитные траектории частицы в «яме» потенциала $U = U(\psi)$. Такие траектории, очевидно, возникают лишь при $\beta > \beta_1$, соответствующие решения $\psi = \psi(x)$ описывают автомоделные волны конечной амплитуды. Возможны следующие типы таких волн:

1) Доменная стенка (рис. 1, б). Данному решению отвечает «траектория» $\psi = \psi(x)$, когда частица выходит из одного максимума потенциала $U = U(\psi)$ с нулевой начальной скоростью и затем попадает в другой максимум $U = U(\psi)$ также с нулевой скоростью. Для существования таких решений необходимо, чтобы разность энергий $\Delta U = S(\psi_0) - S(\psi_2)$ компенсировалась работой силы трения $(\nu v - q) d\psi/dx$, что и определяет скорость движения доменной стенки v :

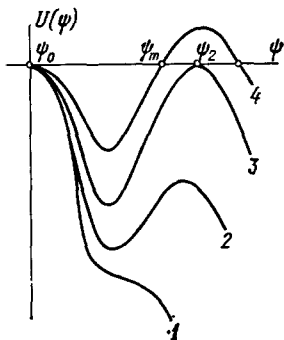


Рис. 3. Зависимость «потенциальной энергии» $U = U(\psi)$ при различных β .
1 — $\beta < \beta_1$, 2 — $\beta_1 < \beta < \beta_p$,
3 — $\beta = \beta_p$, 4 — $\beta > \beta_p$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\nu v - q) \kappa \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx = S[\psi(\infty)] - S[\psi(-\infty)], \quad (2.3)$$

где мы (здесь и всюду ниже) для определенности будем считать $\psi(-\infty) = \psi_2$, а $\psi(\infty) = \psi_0$ (см. рис. 1, б).

Существует большое число систем, где величина q мала ($qL \ll \kappa$, $L \sim [\kappa^{-1} \partial f / \partial \psi]_{\psi_0}^{-1/2}$ — характерный пространственный масштаб изменения $\psi(x)$ (см. рис. 1)); в частности, к ним относится и подавляющее большинство примеров, перечисленных во Введении. Малость q , как правило, не меняя качественной стороны рассматриваемых явлений, позволяет существенно упростить изложение. По этой причине всюду в настоящем обзоре, где конечность q не приводит к качественно новым эффектам, мы будем полагать $q = 0$.

Как видно из рис. 3 и формулы (2.3) ($q = 0$), скорость $v > 0$ при $\beta > \beta_p$ и $v < 0$ при $\beta < \beta_p$. Величина β_p определяется из уравнений, составляющих содержание так называемой «теоремы равных площадей» (см., например, 17, 18, 37, 48)

$$f(\beta_p, \psi_2) = 0, \quad S(\beta_p, \psi_2) = 0 \quad (2.4)$$

(для $\kappa = \text{const}$ речь идет о равенстве двух заштрихованных площадей на рис. 2).

В области $|\beta - \beta_p| \ll \beta_p$, где скорость v мала, производную $\frac{d\psi}{dx}$ в (2.3) можно вычислить, используя решение $\psi = \psi(x)$, описывающее статическую доменную стенку. В этом случае 17, 18, 37

$$v = -S(\psi_2) \left(\sqrt{2} \int_{\psi_0}^{\psi_2} \nu \sqrt{S} d\psi \right)^{-1} \sim v_0 \frac{\beta - \beta_p}{\beta_p}, \quad (2.5)$$

где

$$S(\psi_2) \approx (\beta - \beta_p) \frac{\partial}{\partial \beta} S(\beta, \psi_2) |_{\beta_p}, \quad \text{а} \quad v_0 \sim \frac{L}{\tau}$$

— величина с размерностью скорости, составленная из характерных для данной задачи масштабов длины L и времени $\tau \sim \nu L^2 / \kappa$.

Таким образом, доменная стенка является волной переключения, переводящей систему из одного устойчивого состояния $\psi = \psi_0$ в другое $\psi = \psi_2$, или наоборот (в зависимости от величины параметра β). Смена знака у ско-

рости такой волны при $\beta = \beta_p$ указывает на метастабильность однородных состояний с $\psi = \psi_2$ при $\beta_1 < \beta < \beta_p$ и с $\psi = \psi_0$ при $\beta > \beta_p$. В самом деле, если сильное внешнее возмущение создаст в образце достаточно большой участок, где $\psi \approx \psi_2$, то в соответствии со сказанным выше он будет расширяться при $\beta > \beta_p$ и схлопываться при $\beta < \beta_p$. Аналогичным образом достаточно большой участок с $\psi \approx \psi_0$, находящийся в «фазе» $\psi = \psi_2$, будет расширяться при $\beta_1 < \beta < \beta_p$ и схлопываться при $\beta > \beta_p$.

2) **У единенная волна — домен** (рис. 1, а). Это решение можно рассматривать как две доменные стенки, расположенные на расстоянии $2D$ друг от друга (см. рис. 1, а). Домену отвечает такая траектория $\psi = \psi(x)$ в потенциале $U(\psi)$ (см. рис. 3), когда частица выходит из точки $\psi = \psi_0$ с нулевой начальной скоростью, доходит до точки $\psi = \psi_m$, поворачивает и затем возвращается обратно также с нулевой скоростью. Такое решение описывает домен «сильного поля» (термин заимствован из теории полупроводников с отрицательной дифференциальной проводимостью^{17,18}, так как всюду внутри домена $\psi(x) > \psi_0$), оно существует лишь при $\beta > \beta_p$. Если же $\beta_1 < \beta < \beta_p$, то возможно существование домена «слабого поля», когда $\psi(x) < \psi_2$, $\psi(\pm\infty) = \psi_2$. Это соответствует ситуации, когда частица начинает и кончает свое движение в точке $\psi = \psi_2$ с нулевой скоростью. Условием существования доменных решений является также равенство нулю работы силы трения на соответствующей траектории $\psi = \psi(x)$. В результате, при $q = 0$ домен покоится, если же $q \neq 0$, то домен движется со скоростью $v \propto q/v$ ^{17,18}.

Длина домена $2D$ (рис. 1, а) в области $\beta > \beta_p$, вообще говоря, порядка L . Исключение составляет случай, когда $\beta \rightarrow \beta_p$. Нетрудно показать, что если функцию $S(\psi)$ при $\psi \simeq \psi_2$ можно записать в виде $S(\psi) = S(\psi_2) + b(\psi - \psi_2)^2$, то $D(\beta) \propto -L \ln[(\beta - \beta_p)/\beta_p]$, т. е. при $\beta \rightarrow \beta_p$ домен можно представить как две доменные стенки, слабо взаимодействующие друг с другом.

3) **Периодическая структура**. Этому решению, которое можно рассматривать как последовательность доменов «сильного поля», соответствует колебание частицы в яме потенциала $U = U(\psi)$ (см. рис. 3).

Устойчивость рассмотренных выше типов волн, естественно, не связана с устойчивостью траекторий движения частицы в потенциале $U = U(\psi)$. Она, очевидно, должна исследоваться отдельно с помощью динамического уравнения (1.1). Соответствующий анализ (см., например,^{17,18,65-68}) показывает, что в режиме, когда параметр β фиксирован, устойчива только доменная стенка.

б) Волны в неоднородной среде (качественный анализ)

Рассмотрим теперь, как изменяются результаты предыдущего параграфа при наличии в среде неоднородностей. Для того, чтобы придать последующему изложению большую наглядность, мы остановимся здесь на анализе решений нелинейного уравнения теплопроводности

$$v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} - f(T), \quad (2.6)$$

где v — теплоемкость, κ — теплопроводность, $f = W - Q$, $Q(T)$ — удельная мощность тепловыделения, $W = h(T)(T - T_0)/d$ — мощность теплоотвода в охладитель с температурой T_0 , $h(T)$ — коэффициент теплоотдачи, $d = A/P$, A — площадь, P — периметр поперечного сечения образца.

К исследованию уравнения (2.6) сводится широкий класс неравновесных явлений, возникающих при разогреве среды электрическим полем,

за счет химических реакций, пластической деформации и т. д. При малом поперечном сечении образца или плохом теплоотводе в охладитель ($dh \ll \kappa$) уравнение (2.6) описывает усредненную по поперечному сечению (плоскость y, z) температуру $T(x, t)$. В уравнении (2.6) может присутствовать также и слагаемое $-q \partial T / \partial x$, обусловленное, например, малым по сравнению с величиной Q теплом Томсона⁶⁹.

Для существования интересующих нас волн в однородной среде необходимо, чтобы условие баланса тепла $Q(T) = W(T)$ выполнялось при нескольких температурах. Такая ситуация часто имеет место при наличии в системе фазовых превращений в относительно узких температурных интервалах, N или S — образных зависимостях $Q(T)$ или $W(T)$ и т. д. На рис. 4

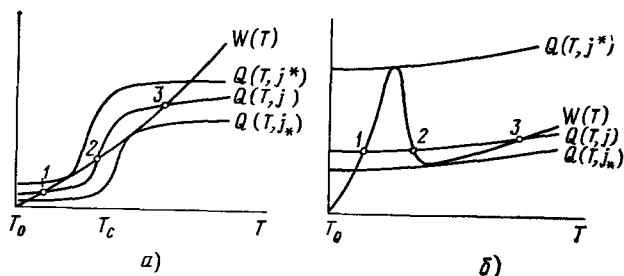


Рис. 4. Характерные зависимости $Q(T)$ и $W(T)$ при фазовом переходе (а) и кризисе кипения охладителя (б) в случае джоулева разогрева проводника током с плотностью j , когда $j_* < j < j^*$.

изображены некоторые характерные случаи: рис. 4, а, например, соответствует фазовому переходу при $T = T_c$ из высокопроводящего в низкопроводящее состояние в присутствии греющего транспортного тока, на рис. 4, б появление трех точек пересечения $Q(T)$ и $W(T)$ связано с N -образной зависимостью $W(T)$, возникающей в ряде случаев при больших тепловых потоках из образца в охладитель^{70,71}; S -образная зависимость $Q(T)$ часто имеет место в газовой или полупроводниковой плазме в сильном электрическом поле⁷²⁻⁷⁴. Наличие трех точек пересечения $Q(T)$ и $W(T)$ может иметь место также и при фазовых переходах II рода, например антиферромагнитных переходах в металлах, приводящих к аномалиям в удельном электросопротивлении $\rho(T)$ ^{39,43}.

В рассматриваемой здесь тепловой задаче неоднородность среды имеет простой физический смысл — она обусловлена наличием области с повышенным (пониженным) тепловыделением или теплоотводом. Перейдем теперь к изучению локализованных ($\partial T / \partial t = 0$) на неоднородность волн (доменов и доменных стенок). Найти аналитические решения уравнения (2.6) при $\partial T / \partial t = 0$ и произвольных зависимостях f и κ от T и x невозможно. Ограничимся поэтому рассмотрением двух предельных случаев: точечной ($\varepsilon \gg 1$) и плавной ($\varepsilon \ll 1$) неоднородностей. Параметр

$$\varepsilon = \frac{L}{l} \quad (2.7)$$

является отношением характерного пространственного масштаба $L \propto \sqrt{dk/\hbar}$ изменения температуры $T(x)$ к размеру неоднородности l .

Начнем со случая $\varepsilon \gg 1$, когда неоднородность можно рассматривать как точечный источник (сток) тепла²². Уравнение (2.6) принимает тогда вид

$$\frac{d}{dx} \kappa \frac{dT}{dx} - f(T) + F(T) \delta(x) = 0, \quad (2.8)$$

где $F \sim \Delta f l$, Δf — характерная величина, на которую меняется $f(T, x)$ внутри неоднородности (конкретный вид $F(T)$ в данном случае несущественен)*. Уравнение (2.8) допускает простую механическую интерпретацию — оно описывает потенциальное движение частицы, которая в момент «време-

* Если поперечный размер неоднородности меньше характерного поперечного размера образца d , то выражение для F следует усреднить по сечению образца.

ни» $x = 0$ испытывает удар, сообщаящий ей дополнительный импульс, равный $-F(T_m)$ в точке $T_m \equiv T(0)$. Для дальнейшего качественного анализа существенно, что величина T_m однозначно определяет траектории частицы⁷⁵, т. е. интересующие нас решения $T = T(x)$.

1) Домен ($\epsilon \gg 1$). Для домена в силу симметрии имеем $T(x) = T(-x)$. Это эквивалентно упругому отражению частицы при $x = 0$ в точке $T = T_m$. Применяя закон сохранения импульса для такого отражения, получаем, что

$$\kappa \frac{dT}{dx} \Big|_{+0} - \kappa \frac{dT}{dx} \Big|_{-0} = -F(T_m).$$

С помощью этого соотношения и закона сохранения «энергии»

$$\frac{1}{2} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)^2 = S(T) \quad (2.9)$$

нетрудно получить уравнение для определения T_m в виде^{22,23}

$$S(T_m) = \frac{1}{8} F^2(T_m). \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) удобно исследовать графически. На рис. 5 такой анализ проведен для случая, когда $F(T) = \text{const}$. Сплошной линией нанесена функция $-S(T)$, а штриховой — $F^2/8$. Наличие нескольких точек пересечения соответствует нескольким типам доменов, которые могут локализоваться на неоднородности

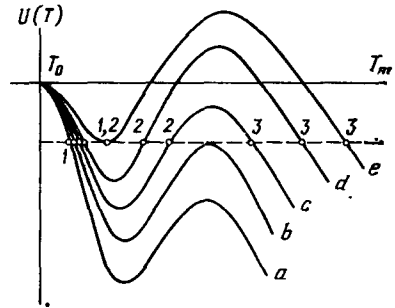
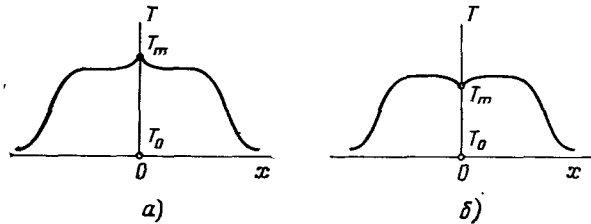


Рис. 5. Графическое решение уравнения (2.10) в разных случаях. $a - \beta < \beta_r$, $b - \beta = \beta_r$, $c - \beta_r < \beta < \beta_p$, $d - \beta_p < \beta < \beta_k$, $e - \beta = \beta_k$.

Рис. 6. Распределение температуры в локализованном домене в случаях $F > 0$ (а) и $F < 0$ (б).



Рассмотрим более подробно локализованные домены «сильного поля» (горячие области в холодной фазе). В этом случае при $F > 0$ (повышенное тепловыделение на неоднородности)

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{+0} < 0, \quad T_m = \max T(x)$$

(рис. 6, а). Из графического анализа рис. 5 видно, что при $\beta < \beta_r$ на неоднородности возможна локализация трех различных типов доменов, а при $\beta > \beta_r$ — двух. Последнее обстоятельство связано с тем, что попадание частицы в точку пересечения 3 запрещено законом сохранения энергии.

При $F < 0$ (пониженное тепловыделение на неоднородности) $dT/dx|_{+0} > 0$ и характер интересующих нас траекторий $T(x)$ меняется, поскольку теперь величина T_m не является максимальной температурой в домене (рис. 6, б). В этом случае частица начинает движение в точке $T = T_0$, доходит до точки пересечения кривой $S(T)$ с осью абсцисс и затем, двигаясь обратно, отражается в одной из точек 1 или 2 на рис. 5. Такие траектории, очевидно, могут существовать лишь при $\beta > \beta_r$.

Таким образом, неоднородность может приводить к локализации нескольких типов доменов как при $\beta > \beta_r$, так и (что наиболее интересно) при $\beta < \beta_r$, когда домен «сильного поля» в однородной среде существовать не может.

Обсудим теперь устойчивость локализованных на неоднородности доменов. Точки $\beta = \beta_r$ и $\beta = \beta_k$ (см. рис. 5), где возникают (исчезают) одновременно два типа доменов, сливающихся при $\beta = \beta_r$ и $\beta = \beta_k$ соответственно, являются точками бифуркации ^{7a} уравнения (2.8). Как будет показано ниже, в окрестности таких точек бифуркации инкремент нарастания наиболее «опасных» возмущений мал, а в самих точках бифуркации обращается в нуль. Таким образом, устойчивость стационарных локализованных доменов вблизи $\beta = \beta_r$ и $\beta = \beta_k$ нарушается бесконечно медленными возмущениями. Это позволяет получить интересующий нас критерий устойчивости с помощью следующих простых качественных соображений.

Пусть в результате слабого внешнего воздействия возникла флуктуация температуры и, следовательно, флуктуация величины T_m . Домен, очевидно, будет устойчив, если увеличение T_m приведет к превышению суммарного теплоотвода во всем домене $\tilde{W}$ над суммарным тепловыделением $\tilde{Q}$, т. е. к тому, что $\delta\tilde{f} > 0$, где $\tilde{f} = \tilde{W} - \tilde{Q}$. Флуктуацию $\delta\tilde{f}$ можно записать как

$$\delta\tilde{f} = \delta T_m \frac{\partial}{\partial T_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (W - Q) dx - F(T_m) \right],$$

тогда условие устойчивости локализованного домена приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial T_m} \int_{-\infty}^{\infty} f dx > \frac{\partial F}{\partial T} \Big|_{T_m}. \quad (2.11)$$

Воспользовавшись законом сохранения энергии (2.9), уравнением (2.10) и соотношением $\kappa f \equiv \partial S / \partial T$, можно записать левую часть неравенства (2.11) как

$$\frac{\partial}{\partial T_m} \int_{-\infty}^{\infty} f dx = \frac{\partial}{\partial T_m} \int_{T_0}^{T_m} \kappa f \sqrt{\frac{2}{S}} dT = \left(\kappa f \sqrt{\frac{2}{S}} \right)_{T_m} = \frac{4}{F(T_m)} \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_{T_m}.$$

В результате, получаем условие устойчивости локализованного на неоднородности домена (при заданном значении параметра β) в виде ²³

$$F \frac{\partial}{\partial T} \left(S - \frac{F^2}{8} \right) \Big|_{T_m} > 0. \quad (2.12)$$

Из критерия (2.12) следует, в частности, что если решение устойчиво, то должно выполняться неравенство $\partial T_m / \partial \beta > 0$, т. е. температура на неоднородности растет по мере роста параметра β , характеризующего внешнее воздействие. Физически это условие представляется довольно очевидным.

Соотношение (2.12) означает, что если домен устойчив, то в точке $T = T_m$ угол наклона касательной к графику $S(T)$ больше угла наклона касательной к графику $F^2(T)/8$. В нашем конкретном примере (см. рис. 5) устойчивым доменам соответствуют точки пересечения 1 и 3. Неустойчивому домену соответствует точка пересечения 2 (см. рис. 5). Этот домен при $F \rightarrow 0$ переходит в рассмотренный в предыдущем параграфе домен в однородной среде.

Домен с температурой T_m , соответствующей точке 1 на рис. 5, возникает в связи с локальным нагревом неоднородностью ($F > 0$) исходного устойчивого однородного состояния $T = T_0$. Что касается домена, у которого величина T_m соответствует точке 3 на рис. 5, то его появление связано со стабилизацией неоднородностью области горячей фазы с $T = T_2$. Такой домен, как видно из рис. 5, существует в интервале $\beta_r < \beta < \beta_k$, где β_r

определяется системой уравнений ^{22,23}

$$\begin{cases} S(T_m, \beta_r) = \frac{F^2}{8}(T_m, \beta_r), \\ \frac{\partial}{\partial T} \left[S(T, \beta_r) - \frac{F^2}{8}(T, \beta_r) \right]_{T_m} = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

При $\beta \rightarrow \beta_r$ решения уравнения (2.8), соответствующие точкам 2 и 3 на рис. 5, сливаются в одно, исчезающее скачком при $\beta < \beta_r$. При этом величина $\delta\beta \equiv \beta_p - \beta_r \sim F^2/(\partial S/\partial\beta)$, или

$$\frac{\delta\beta}{\beta_p} \sim \frac{F^2}{(T_m - T_0) \kappa Q} \sim \left(\frac{F}{LQ} \right)^2 \equiv \Gamma^2 \sim \left(\frac{l}{L} \right)^2 \left(\frac{\Delta f}{f} \right)^2, \quad (2.14)$$

где мы учли, что $Q \sim W$. Величину $\delta\beta/\beta_p$ можно рассматривать как меру влияния неоднородности на свойства домена, она, как видно из (2.14), определяется соотношением между тепловыделением на неоднородности F и тепловыделением во всем домене LQ . Соответственно можно различать случай сильной $\Gamma \sim 1$ и слабой $\Gamma \ll 1$ связи домена с неоднородностью. Как показывает оценка (2.14), для реализации сильной связи необходима сильная ($\Delta f/f \sim \epsilon \gg 1$) неоднородность. Применительно, например, к среде, разогреваемой током, такая ситуация может возникать только при большой локальной концентрации тока ($A/A_0 \sim \sqrt{\epsilon}$, A_0 — площадь поперечного сечения на неоднородности), либо при сильном изменении проводимости внутри неоднородности ($\sigma/\sigma_0 \sim \epsilon$).

Как видно из рис. 5, при увеличении величины β ($\beta \rightarrow \beta_k$) точки 1 и 2 сливаются в одну, а при $\beta > \beta_k$ статические доменные решения вообще пропадают. Оба критических параметра β_r и β_k ($\beta_k > \beta_r$) являются, очевидно, различными корнями одной и той же системы уравнений (2.13) (см. рис. 5).

Если $\beta > \beta_k$, то наличие неоднородности приводит к такому локальному разогреву исходного метастабильного состояния с $T = T_0$, что сосуществование фаз становится невозможным и система переходит в состояние с $T = T_2$, другими словами, фаза с $T = T_0$ при $\beta > \beta_k$ абсолютно неустойчива. Критерий $\beta > \beta_k$ аналогичен по смыслу известному в теории горения критерию поджига горючей смеси накаливаемой поверхностью (см., например, ^{49,50}).

Таким образом, в отличие от однородной среды, где сосуществование фаз с $T = T_0$ и $T = T_2$ возможно лишь при строгом равенстве $\beta = \beta_p$, в неоднородной среде возможно существование нескольких типов устойчивых локализованных доменов, возникающих в интервале $\beta_r < \beta < \beta_k$.

Аналогичным образом можно рассмотреть и локализацию домена «слабого поля».

2) Доменная стенка ($\epsilon \gg 1$). Траектория $T = T(x)$, отвечающая локализованной доменной стенке, начинается в точке $T = T_0$ (см. рис. 5) и кончается в точке $T = T_2$, причем дополнительный импульс — F сообщается частице так, чтобы она изменила свою энергию на величину $\Delta U = S(T_2) - S(T_0)$ и пришла в точку $T = T_2$ с нулевой скоростью. Величина $\Delta U = S_2 \equiv S(T_2) \propto \text{sign}(\beta_p - \beta)$, поэтому при $\beta < \beta_p$ частицу при «ударе» необходимо затормозить, а при $\beta > \beta_p$ ускорить (см. рис. 5). Отсюда следует, что локализованная доменная стенка в случае $\beta < \beta_p$ может существовать лишь если $F > 0$, а в случае $\beta > \beta_p$ — лишь если $F < 0$.

Остановимся здесь подробно на ситуации, когда $F > 0$ ($\beta < \beta_p$). При малых F (см. ниже) частица в результате «удара» несколько тормозится, но не меняет направления своего движения. Такие траектории $T = T(x)$ изображены на рис. 7, а, «удар» здесь, очевидно, может происходить лишь при $T_m < T_2$. Воспользовавшись законом сохранения энергии и импульса,

легко получить уравнение для определения температуры T_m :

$$\sqrt{2S(T_m)} - \sqrt{2(S(T_m) - S_2)} = F(T_m). \quad (2.15)$$

Нетрудно убедиться, что (2.15) может иметь решения, если $F^2 < 2 |S_2|$. При увеличении F частица в результате удара может испытать «неупругое отражение», т. е. изменить направление движения на противоположное.

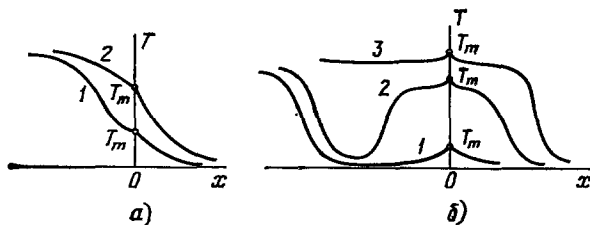


Рис. 7. Распределение температуры в локализованных доменных стенках различных типов при $F > 0$.

a) $\beta_2 < \beta < \beta_3$, б) $\beta_3 < \beta < \beta_p$.

Такие траектории $T = T(x)$ изображены на рис. 7, б. Отметим, что удар теперь может происходить как при $T_m > T_2$, так и при $T_m < T_2$. Аналогично предыдущему, нетрудно получить уравнение для определения температуры T_m в виде

$$\sqrt{2S(T_m)} + \sqrt{2(S(T_m) - S_2)} = F(T_m). \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) может иметь решения, если $F^2 > 2 |S_2|$.

Оба соотношения (2.15) и (2.16) удобно переписать в форме

$$S(T_m) = R(T_m) \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{F(T_m)}{2} + \frac{S_2}{F(T_m)} \right]^2. \quad (2.17)$$

Графический анализ решений уравнения (2.17) приведен на рис. 8, где мы для простоты положили $F(T) = \text{const}$. В интервале значений параметров, где $F^2 < 2 |S_2|$, интересующим нас решениям соответствуют точки 1 и 2 (эти «траектории» изображены на рис. 7, а), там же, где $2 |S_2| < F^2$ точки 1, 2, 3 (эти «траектории» изображены на рис. 7, б).

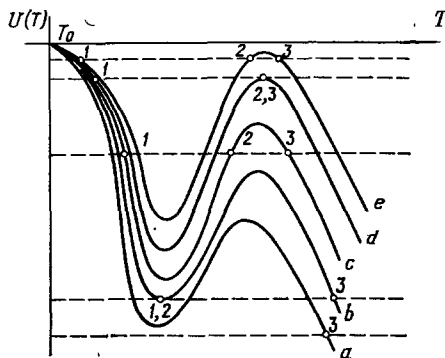


Рис. 8. Графическое решение уравнения (2.17) при $F > 0$ и различных значениях параметра β .

a — $\beta < \beta_2$, б — $\beta = \beta_2$, в — $\beta_2 < \beta < \beta_3$, д — $\beta = \beta_3$, е — $\beta_3 < \beta < \beta_p$.

Таким образом, если $\beta_2 < \beta < \beta_3$, то существует два типа локализованных на неоднородности доменных стенок; если $\beta_3 < \beta < \beta_p$, то таких доменных стенок три. Здесь β_2 — минимальное значение параметра β , при котором появляется нетривиальное решение уравнения (2.17), а β_3 определяется из соотношения $2 |S_2(\beta_3)| = F^2(\beta_3)$.

В окрестности точки бифуркации $\beta = \beta_2$ оба типа локализованных доменных стенок мало различаются, а при $\beta = \beta_2$ они переходят друг в друга.

Такое поведение интересующих нас решений означает (см., например, ⁷⁸), что их устойчивость обусловлена характером развития медленных возмущений. Следовательно, критерий устойчивости локализованных доменных стенок при $\beta_2 < \beta < \beta_3$ может быть исследован из простых качественных соображений, аналогичных приведенным выше при рассмотрении локализованных доменов. С учетом закона сохранения «энергии» и соотношения (2.15), условие устойчивости имеет в результате вид

$$F \frac{\partial}{\partial T} (R - S) |_{T_m} > 0. \quad (2.18)$$

Неравенство (2.18) означает, что при $F > 0$ локализованная доменная стенка устойчива, если в точке $T = T_m$ угол наклона касательной к графику $R = R(T)$ больше угла наклона касательной к графику $S = S(T)$. Отсюда, в частности, следует что в нашем примере ($F = \text{const}$) устойчивой доменной стенке соответствует точка 2 (см. рис. 8), а неустойчивой доменной стенке — точка 1.

При $\beta_3 < \beta < \beta_p$ появляется еще одно (новое) решение $T(x)$, отсутствовавшее при $\beta < \beta_3$. На рис. 7, б ему соответствует кривая, обозначенная цифрой 2. Критерий устойчивости для этого решения не может быть получен из приведенных выше качественных соображений, так как наиболее «опасные» возмущения имеют теперь отличный от нуля инкремент даже в точке $\beta = \beta_3$.

Для слабой неоднородности ($\Gamma \ll 1$) величина β_2 , при которой впервые появляется локализованная доменная стенка, близка к β_p . В этом случае β_2 можно найти из уравнения (2.17), где следует положить $\beta = \beta_p$ всюду, кроме слагаемого $S_2/F \propto (\beta_p - \beta_2)$, что дает

$$(\beta_2 - \beta_p) \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta_p} \approx F \sqrt{2S(T_1, \beta_p)} \propto \Gamma.$$

Таким образом, $\beta_2 - \beta_p \sim \Gamma \beta_p$, т. е. при $\Gamma \ll 1$ доменная стенка может локализоваться в гораздо более широком интервале по β , чем домен (сравни с (2.14)).

3) Д о м е н ($\epsilon \ll 1$). В случае плавной ($\epsilon \ll 1$) неоднородности все параметры среды медленно меняются на характерной длине L . Если теперь возбудить в такой среде волну типа доменной стенки, то скорость ее движения будет медленно меняться в зависимости от локальной величины параметра $\beta_p(x)$ (см. формулу (2.5)), т. е.

$$\dot{D} = v(D), \quad (2.19)$$

где D — координата доменной стенки, v — ее скорость, полученная из уравнения (2.5), записанного локально для каждой точки среды.

Пусть для определенности доменная стенка возбуждена в области, где $\beta > \beta_p(x)$, т. е. горячая фаза ($T = T_2$) вытесняет холодную ($T = T_0$). Если на пути движения такой волны встретится область, в которой $\beta < \beta_p(x)$, она остановится, причем это локализованное состояние будет устойчивым. В самом деле, малое отклонение δD доменной стенки от положения равновесия удовлетворяет в силу (2.19) уравнению

$$\delta \dot{D} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_D \delta D. \quad (2.20)$$

Декремент затухания λ возмущения $\delta D \propto \exp(\lambda t)$ имеет вид

$$\lambda = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_D \propto - \frac{v_0}{\beta_p} \frac{\partial \beta_p}{\partial x} \Big|_D, \quad (2.21)$$

где мы воспользовались формулой (2.5). Выражение (2.21) показывает, что локализованная доменная стенка устойчива ($\lambda < 0$), если при $\partial \beta_p / \partial x > 0$ справа от точки $x = D$ находится фаза с $T = T_0$, а слева — фаза с $T = T_2$, и неустойчива в противном случае. Если же $\partial \beta_p / \partial x < 0$, возникает обратная ситуация.

Рассмотрим теперь локализованный домен при $\epsilon \ll 1$. Если размер домена D много больше, чем ширина его границ $\sim L$ (см. рис. 1, а), то мы имеем две независимые доменные стенки, движение каждой из которых определяется локальной величиной $\beta_p(x)$. В качестве примера обратимся к случаю, когда $\beta_p(x)$ имеет минимум (рис. 9). В соответствии со сказанным выше, величины $D_{\pm}$ на рис. 9 определяются из уравнений^{24, 29}:

$$\beta = \beta_p(D_{\pm}), \quad (2.22)$$

где величина $\beta_p(x)$ находится с помощью локальной теоремы «равных площадей» (2.4). Домен «сильного поля», локализованный внутри неоднородности изображенной на рис. 9, является устойчивым, а его размеры возрастают при увеличении β .

В области $\beta \rightarrow \beta_p(0)$ (см. рис. 9) величины $D_{\pm}$ становятся порядка L , где формула (2.22) уже неприменима. При $D \sim L$ параметры среды мало меняются на длине домена, и, если $\beta > \beta_p(0)$, то мы имеем дело с доменом в однородной среде. Наличие неоднородности проявляется здесь лишь в слабой (в меру ε^2) деформации такого домена за счет наличия параболической ямы в $\beta_p(x)$.

Таким образом, при $\varepsilon \ll 1$ на неоднородности могут локализоваться два типа доменов. Первый существует в интервале $\beta_p(0) \leq \beta \leq \beta_p(\infty)$; он имеет макроскопические (в масштабе L) размеры и является устойчивым. Домен второго типа существует при $\beta \geq \beta_p(0)$, его размеры порядка L . По своим свойствам он практически не отличается от домена в однородной среде и, следовательно, неустойчив в режиме, когда параметр β фиксирован.

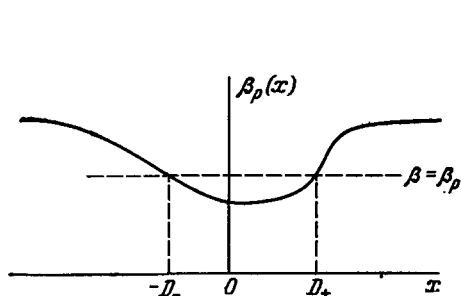


Рис. 9. Определение размеров локализованного домена при $\varepsilon \ll 1$.

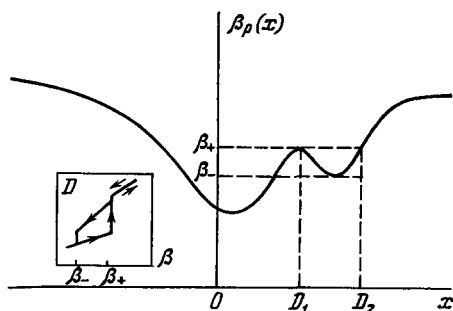


Рис. 10. Локализация домена при наличии двух плавных неоднородностей.

Слева на вставке изображена соответствующая зависимость $D = D(\beta)$.

Наличие немонотонной зависимости $\beta_p(x)$, например, в случае двух близко расположенных неоднородностей (рис. 10) приводит, помимо локализации доменов, к ряду гистерезисных явлений при увеличении (уменьшении) параметра β . В самом деле, пусть в начальном состоянии в центре самой глубокой ямы ($x = 0$ на рис. 10) локализован домен «сильного поля». При увеличении β вплоть до $\beta = \beta_+$ длина такого домена монотонно возрастает. Затем при $\beta = \beta_+$ она скачкообразно увеличивается на величину $D_2 - D_1$ (см. рис. 10), после чего вновь продолжает монотонно увеличиваться при росте β .

Если теперь уменьшать β , то длина домена монотонно уменьшается, а при $\beta_- < \beta < \beta_+$ внутри домена появляется «прослойка» холодной фазы с $T = T_0$, длина которой по мере уменьшения β монотонно возрастает так, что при $\beta < \beta_-$ мы опять попадаем в область, где гистерезис отсутствует. Таким образом, гистерезис возникает при $\beta_- < \beta < \beta_+$, что иллюстрируется рис. 10, на котором также изображена зависимость $D = D(\beta)$ (природа относительно небольших скачков, возникающих при обратном уменьшении β , будет рассмотрена ниже).

Гистерезис, связанный с наличием нескольких неоднородностей, экспериментально может проявляться в виде скачкообразного изменения свойств системы при небольших изменениях параметра β , в частности, в виде скачков на вольтамперных характеристиках (ВАХ), скачков деформации при пластическом течении материала^{77, 78}, скачков в поглощении энергии при освещении светом и т. д.

Отметим, что экспериментальное измерение $T = T(x)$ в образце с доменами при различных β позволяет определить зависимость $D = D(\beta)$ и тем самым восстановить $\beta_p(x)$. Например, для параболической ямы

в $\beta_p(x)$ получаем

$$D(\beta) \propto \sqrt{\beta - \beta_p(0)}. \quad (2.23)$$

Такой метод позволяет, по существу, исследовать характер неоднородностей, не разрушая образца.

в) Точно решаемая модель

Проиллюстрируем теперь рассмотренные выше особенности локализованных волн на примере модели, допускающей точное решение. Действительно, пусть $\mu = 0$, функция $f(\psi)$ (см. рис. 2) является кусочно-линейной, а все остальные параметры в уравнении (1.1) не зависят от ψ . Тогда уравнение (1.1) в безразмерной форме принимает вид

$$\dot{\psi} = \psi'' - \psi + p(x, \beta) \theta[\psi - \psi_1(x, \beta)], \quad (2.24)$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция, ($\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$), точка и штрих означают дифференцирование по безразмерным времени и координате, а неоднородность учтена введением явной зависимости $p(x)$ и $\psi_1(x)$ от x . Решение уравнения (2.24) может быть найдено для любых $p(x, \beta)$ и $\psi_1(x, \beta)$.

Эта модель является весьма популярной при описании нелинейных волн в однородных системах, в частности, тепловых доменов в сверхпроводящих микромостиках (модель «теплового пятна» — hot spot)^{20, 79}, тонких сверхпроводящих пленках¹⁹, а также волн, возникающих при цепных химических реакциях на поверхности твердого катализатора^{51, 52}, в газовом разряде⁴⁸ и т. д. При $p = \text{const}$ и $\psi_1 = \text{const}$ анализ решений уравнения (2.24) содержится в работах⁸⁰⁻⁸².

Рассмотрим теперь домен «сильного поля», локализованный на симметричной ($p(x) = p(-x)$, $\psi_1(x) = \psi_1(-x)$) неоднородности. Тогда для длины $2D$ той части домена, где $\psi > \psi_1$, имеет место уравнение²⁴

$$2\psi_1(D) = e^{-D} \int_{-D}^D p(x) \operatorname{ch} x dx. \quad (2.25)$$

В случае точечной неоднородности $p(x)$ можно представить как $p(x) = (1 + \Gamma \delta(x)) p_0$, а $\psi_1 = \text{const}$. Тогда

$$D_{1,2} = \ln \frac{\Gamma \mp \sqrt{\Gamma^2 - 4\xi}}{2\xi}, \quad (2.26)$$

$$\xi = \frac{2\psi_1(\beta)}{p_0(\beta)} - 1. \quad (2.27)$$

Величина β_p в данной модели определяется уравнением

$$\xi(\beta_p) = 0. \quad (2.28)$$

Рассмотрим, для примера, среду, разогреваемую током, где при $T = T_c$ происходит фазовый переход из высокопроводящего в низкопроводящее состояние^{22, 23} (см. рис. 4, а). Тогда $\psi_1 = 1$, $\psi = (T - T_0)/(T_c - T_0)$, β — плотность тока, α — параметр, определяющий джоулево тепловыделение $p = \alpha\beta^2$ в области $\psi > \psi_1$ (для простоты мы пренебрегли тепловыделением в высокопроводящей фазе с $\psi < 1$). При T_c не зависящем от β , получаем из (2.27), (2.28):

$$\xi(\beta) = \left(\frac{\beta_p}{\beta}\right)^2 - 1, \quad \beta_p = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}. \quad (2.29)$$

Зависимость $D(\beta)$, даваемая формулами (2.26), (2.29), изображена на рис. 11, где кривая 1 относится к случаю $\Gamma = 0$, кривые 2, 3 — к случаю

$\Gamma > 0$ и кривая 4 — к случаю $\Gamma < 0$. Напомним, что величина Γ в этом примере определяет дополнительное тепловыделение ($\Gamma > 0$) или теплоотвод ($\Gamma < 0$) на неоднородности в низкопроводящем состоянии. Параметры β_r , β_k и D_∞ (см. рис. 11) равны соответственно

$$\beta_r = \left(1 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)^{-1/2} \beta_p, \quad \beta_k = \beta_p \Gamma^{-1/2}, \quad D_\infty = \ln \left[\left(1 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)^{1/2} - \frac{\Gamma}{2} \right]. \quad (2.30)$$

Из рис. 11 видно, что при $\Gamma < 0$ неоднородность слабо (в меру $|\Gamma| \ll 1$) влияет на локализованный домен «сильного поля» (кривые 1 и 4 на рис. 11).

Такой домен существует при $\beta > \beta_p$ (ему соответствует точка 2 на рис. 5), что согласуется с качественным анализом, проведенным выше. Домен, которому на рис. 5 отвечает точка 1, в этой модели отсутствует, поскольку из-за θ — функции в (2.24) $F \equiv 0$ при $\psi < \psi_1$.

Характер решений, описывающих домен «сильного поля» при $\Gamma > 0$, меняется качественно — появляются новые (по сравнению с однородным случаем) типы доменов с возрастающей зависимостью $D = D(\beta)$ (см. кривые 2, 3 на рис. 11). Так, если $0 < \Gamma < 2$, то в интервале $\beta_r < \beta < \beta_p$ функция $D(\beta)$ имеет две ветви, которым отвечают точки 2 и 3 на рис. 5. При $\beta \rightarrow \beta_r$ оба типа доменных решений сливаются в одно, исчезающее скачком в точке $\beta = \beta_r$, причем $D(\beta_r) = \ln(2/\Gamma)$. Из формул (2.30)

Рис. 11. Зависимость $D = D(\beta)$ при локализации домена на точечной неоднородности (см. формулу (2.26)).
1 — $\Gamma = 0$, 2 — $0 < \Gamma < 2$, 3 — $\Gamma > 2$,
4 — $\Gamma < 0$.

получаем, что если $\Gamma \ll 1$, то $\delta\beta = \beta_p \Gamma^2/2$ в полном согласии с оценкой (2.14).

Случай $\Gamma > 2$ отвечает сильной связи домена с неоднородностью. Как видно из рис. 11, свойства локализованного домена при этом радикально отличаются от свойств домена в однородной среде — он существует лишь если $\beta < \beta_p$ и характеризуется возрастающей зависимостью $D(\beta)$ во всем интервале существования.

Рассмотрим теперь локализацию доменной стенки на точечной неоднородности. В модели, о которой идет речь, для локализованных волн выполнено, очевидно, условие $\psi(0) > \psi_1$. Следовательно, справа от неоднородности находится участок длины L_0 , где $\psi > \psi_1$. Статическое решение кусочно-линейного уравнения (2.24) можно получить в общем виде, откуда для определения L_0 имеем

$$2\psi_1(L_0) = \int_0^\infty p(x - L_0) e^{-x} dx. \quad (2.31)$$

Рассмотрим, как и выше в этом параграфе, случай точечной неоднородности с $p(x) = (1 + \Gamma\delta(x))p_0$, $\psi_1 = \text{const}$. Тогда с помощью (2.31) получаем

$$L_0 = \ln \left(\frac{\Gamma}{\xi} \right). \quad (2.32)$$

Из (2.32) видно, что локализованная доменная стенка существует лишь, если Γ и ξ имеют один и тот же знак ($\Gamma > 0$, $\beta < \beta_p$ и $\Gamma < 0$, $\beta > \beta_p$). Выражение (2.32) справедливо и для точечной неоднородности более общего вида, когда

$$f(\psi) = \psi - p_0\theta(\psi - \psi_1) - \Gamma\delta(x). \quad (2.33)$$

Условие срыва доменной стенки с неоднородности, как следует из (2.32), имеет здесь вид

$$|\xi| > |\Gamma| \quad (2.34)$$

Неравенство (2.34) определяет одновременно и величину β_2 . В случае, когда $\xi(\beta)$ дается формулой (2.29), находим

$$\beta_2 = (1 + \Gamma)^{-1/2} \beta_p. \quad (2.35)$$

При малых Γ из (2.35) получаем $\beta_p - \beta_2 \approx \Gamma \beta_p / 2$, что согласуется с приведенной выше оценкой. В случае сильной связи доменной стенки с неоднородностью ($|\Gamma| \sim 1$) нетрудно, сопоставив между собой (2.35), (2.29) и (2.34), показать возможность локализации доменной стенки для $|\Gamma| \geq 1$ во всей области существования двухфазного состояния.

При наличии плавной неоднородности ($\varepsilon \ll 1$) величины $p(x)$ и $\psi_1(x)$ в (2.24) медленно меняются на масштабе ~ 1 . Положим для простоты, что $p(x) = (1 - sx^2) p_0$, где $s \sim \varepsilon^2 \ll 1$; тогда из формулы (2.25) получаем

$$\exp(-2D) + sD^2 + \xi(\beta) = 0. \quad (2.36)$$

Это уравнение с учетом $0 < s \ll 1$ имеет два корня с существенно различными D : $D_1 \approx 0,5 \ln(1/|\xi|)$, $D_2 \approx s^{-1/2} \sqrt{|\xi|}$. Обе ветви функции $D = D(\beta)$ сливаются при $\beta = \beta_r \approx \beta_p(0) + O(\varepsilon^2 \ln^2(1/\varepsilon))$, где в области $\beta \approx \beta_r$.

$$D(\beta) = D_c \pm M \sqrt{\beta - \beta_r}, \quad (2.37)$$

причем $D_c \equiv D(\beta_r) \approx 0,5 \ln(1/s)$, $M = \sqrt{|\partial \xi / \partial \beta| / 2sD_c}$, $\partial \xi / \partial \beta < 0$ (см., например, (2.29)). Таким образом, при $\varepsilon \ll 1$ зависимость $D = D(\beta)$ подобна кривой 2 на рис. 11, когда $\beta_k \rightarrow \infty$ и $\beta_p \rightarrow \beta_p(0)$.

г) Динамика локализованных волн

Интересующие нас локализованные на неоднородностях волны существенно нелинейны, поэтому весьма важным является вопрос об их устойчивости к возмущениям конечной амплитуды, а также о динамике локализации движущейся волны на неоднородности. В рассматриваемых здесь ситуациях однородное состояние устойчиво к малым возмущениям. Следовательно, для формирования волн, о которых шла речь выше, необходимы возмущения конечной амплитуды (жесткий режим возбуждения⁸³ волн). Решение этих вопросов требует исследования неавтономных решений уравнения (1.1), что в общем случае сделать невозможно. С другой стороны, основные качественные моменты динамики локализованных волн можно выяснить уже из анализа простой модели, обсуждавшейся в предыдущем разделе.

Пусть при $t = 0$ в окрестности точечной неоднородности с $p(x) = [1 + \Gamma \delta(x)] p_0$ (см. (2.24)) в результате внешнего воздействия образовалась область, где $\psi > \psi_1$, длиной $D(0) = D_+(0) + D_-(0)$, здесь $D_+(t)$ и $D_-(t)$ — расстояния от неоднородности до правой и левой границ этой области соответственно (см. рис. 12).

Рассмотрим динамику такого начального возмущения, ограничившись случаем $|\Gamma| \ll 1$. При этом условии домен может локализоваться на неоднородности в узком интервале $\delta\beta$ вблизи β_p , где равновесная его длина $D \gg 1$ (см. (2.26)–(2.29)), а скорость движения доменной стенки мала $v \sim \delta\beta/\beta_p \ll 1$ (см. (2.5)). Если начальное распределение $\psi = \psi_0(x)$ таково, что длина домена много больше, чем ширина его границ (рис. 12), то его дальнейшую эволюцию во времени можно разделить на два этапа. На первом этапе за время ~ 1 распределение $\psi_0(x)$ релаксирует к квазиравновесному, представляющему из

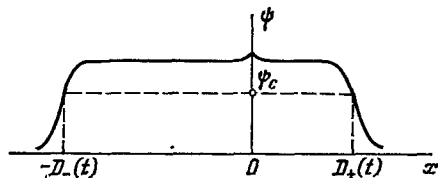


Рис. 12. Распределение $\psi = \psi(x, t)$ в процессе локализации домена.

себя область $-D_-(0) \leq x \leq D_+(0)$, в которой $\psi \approx \psi_2^*$). На втором этапе длина этой области начинает медленно меняться со временем. Скорость такого изменения определяется малыми при $\beta \approx \beta_p$ скоростями движения доменных стенок. Характерные времена изменения величин $D_{\pm}(t)$ порядка $D_{\pm}/v \gg 1$. Это позволяет свести довольно сложное нелинейное интегральное уравнение относительно $\psi(x, t)$ к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений для $D_{\pm}(t)$ ⁸⁴

$$\frac{1}{2} \dot{D}_{\pm} + \frac{\dot{p}}{p} = -\xi(\beta) + \Gamma e^{-D_{\pm}} - e^{-(D_{\pm} + D_{\mp})}. \quad (2.38)$$

Появление в (2.38) слагаемого $\dot{p}/p$ связано с возможной зависимостью параметра β от времени. Как видно из (2.38), медленность изменения $D_{\pm}(t)$ определяется малостью величин ξ , Γ , $\dot{p}/p$ и $\exp[-(D_+ + D_-)]$.

Рассмотрим прежде всего устойчивость локализованных волн по отношению к малым возмущениям. Считая, что $D_{\pm}(t) = D + \delta D_{\pm} \exp \lambda t$, $D \gg \delta D_{\pm}$, находим, что для домена инкремент наиболее опасных возмущений ($\delta D_+ = -\delta D_-$) имеет вид

$$\lambda = 2(2e^{-D} - \Gamma)e^{-D}, \quad (2.39)$$

где D определяется формулой (2.26). Если $\Gamma < 0$, то $\lambda > 0$, т. е. локализованный домен «сильного поля» всегда неустойчив. Если же $\Gamma > 0$, то $\lambda(\beta)$ обращается в нуль при $D = D_c = \ln(2/\Gamma)$, причем $\lambda > 0$ при $D < D_c$ и $\lambda < 0$ при $D > D_c$. Из сравнения формул (2.26) и (2.30) видно, что $\lambda = 0$ при $\beta = \beta_r$, когда $\xi(\beta_r) = \Gamma^2/4$. Таким образом, вся возрастающая ветвь $D(\beta)$ на рис. 11 является устойчивой, а вся падающая — неустойчивой.

Всюду выше предполагалось, что $\beta = \text{const}$. Возможны, однако, ситуации, когда параметр β меняется в зависимости от величины $2D(t) = D_+ + D_-$ за счет наличия в системе некоторой обратной связи. Такая обратная связь может стабилизировать и неустойчивые при $\beta = \text{const}$ типы доменов.

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда β — транспортный ток, текущий через образец, подключенный к нагрузке с сопротивлением r и индуктивностью $\mathcal{L}$. Будем для простоты считать, что все электрическое напряжение падает только на домене (это имеет место, например, в сверхпроводниках ¹⁹⁻²¹), тогда

$$\mathcal{L} \dot{\beta} + (r + 2D)\beta = r\beta_0, \quad (2.40)$$

где величины $\mathcal{L}$, r и D обезразмерены на характерные для конкретной задачи единицы. Линеаризуя систему (2.38), (2.40), можно показать, что устойчивый при $\beta = \text{const}$ домен (возрастающая ветвь $D = D(\beta)$ на рис. 11) остается устойчивым и в рассматриваемом случае. Неустойчивый же при $\beta = \text{const}$ домен (падающая ветвь $D = D(\beta)$ на рис. 11) стабилизируется обратной связью, если $\mathcal{L} < \mathcal{L}_k$, где

$$\mathcal{L}_k = \left[\frac{1}{2}(r + 2D) - 4 \right] e^{2D} (2 - \Gamma e^D)^{-1}; \quad (2.41)$$

здесь $D(\beta) \gg 1$ дается формулой (2.26). Отметим, что когда $\beta \rightarrow \beta_r$, величина $\mathcal{L}_k \rightarrow \infty$. В области $\mathcal{L} > \mathcal{L}_k$ происходит срыв на автоколебательный режим с частотой $\omega \sim \mathcal{L}^{-1}$. Такие автоколебания могут иметь место в самых разнообразных системах — сверхпроводящих пленках ^{20, 85, 86}, ультратонких сверхпроводящих нитях ⁸⁷, комбинированных сверхпроводниках ^{88, 89}, полупроводниковых структурах ^{90, 91} и т. д.

Рассмотрим теперь устойчивость локализованной доменной стенки (рис. 7). В этом случае вместо (2.39) получаем

$$\lambda = -2\Gamma \exp(-L_0). \quad (2.42)$$

*) За время такой релаксации размеры $D_{\pm}(t)$ меняются на величины ~ 1 .

Таким образом, в модели (2.24) локализованная стенка устойчива лишь если $\Gamma > 0$. Отсутствие устойчивых ($\lambda < 0$) решений при $\Gamma < 0$ связано с тем, что в этой модели $F(\psi) \equiv 0$ для $\psi < \psi_1$. Если же $f(\psi)$ дается формулой (2.33), то в интервале $0 < |\xi| < |\Gamma|$ локализация устойчивой доменной стенки возможна при любом знаке Γ .

Обратимся теперь к исследованию устойчивости локализованного домена «сильного поля» по отношению к возмущениям конечной амплитуды. Фазовый портрет⁸³ системы (2.38) при $\beta = \text{const}$ в области $0 < \xi < \Gamma^2/4$ изображен на рис. 13. Двум возможным состояниям домена на неоднородности ($\Gamma > 0$) соответствуют две особые точки 1 и 2, причем точка 1 (седло) соответствует неустойчивому, а точка 2 (узел) — устойчивому состояниям домена. Динамика домена зависит от положения его фазовой траектории на рис. 13. Если изображающая точка, отвечающая начальному ($t = 0$) состоянию домена $[D_+(0), D_-(0)]$, находится правее сепаратрисы AIB (штриховая линия на рис. 13), то при $t \rightarrow \infty$ происходит захват домена неоднородностью. В противоположном случае домен схлопывается раньше, чем он успевает локализоваться.

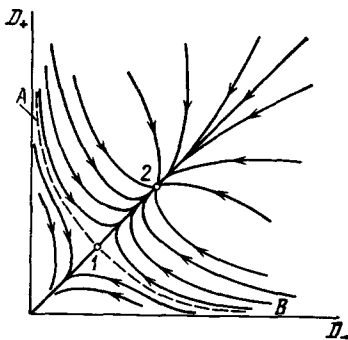


Рис. 13. Фазовый портрет системы (2.38) — при $0 < \xi < \Gamma^2/4$ и $\Gamma > 0$.

Качественно динамику локализации домена можно разбить на два этапа. На первом этапе происходит относительно быстрое независимое движение границ домена, приводящее к его симметризации ($D_+ \approx D_-$). Затем начинается либо медленная (см. (2.39)) релаксация домена к своему устойчивому состоянию на неоднородности ($\dot{D}_+ > 0$ при $D_1 < D_+ < D_2$ и $\dot{D}_+ < 0$ при $D_+ > D_2$), либо исчезновение домена при $D_+ < D_1$.

В заключение этого раздела остановимся на динамике локализации доменной стенки на точечной неоднородности. Если, например, стенка (см. рис. 7) движется справа налево ($\Gamma > 0$, $\xi > 0$), то в уравнениях (2.38) следует положить $D_- \rightarrow \infty$, $D_+(t) \equiv L_0(t)$; тогда

$$L_0(t) = \ln \left[\frac{\Gamma}{\xi} + \left(e^{L_0(0)} - \frac{\Gamma}{\xi} \right) e^{-2\xi t} \right]. \quad (2.43)$$

Из (2.43) видно, что при $L_0(0) \gg L_0(\infty) = \ln \frac{\Gamma}{\xi}$ доменная стенка движется равномерно ($L_0(t) = L_0(0) - 2\xi t$), а по мере приближения к неоднородности ($L_0 \sim L_0(\infty)$) скорость ее движения экспоненциально падает.

В рассматриваемой модели можно также получить уравнение, описывающее медленную динамику доменной стенки в среде с несколькими неоднородностями, когда $f(\psi) = \psi - p_0\theta(\psi - \psi_1) + \sum_i \Gamma_i \delta(x - x_i)$, где $\Gamma_i = \text{const}$. Воспользовавшись результатами работы⁸⁴, находим

$$\frac{1}{2} \dot{L}_0 = -\xi(\beta) + \sum_i \Gamma_i \exp(-|x_i - L_0|), \quad (2.44)$$

здесь величина $\xi(\beta)$ отвечает однородной части образца.

3. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ (ОБЩИЙ ПОДХОД)

В этом разделе мы приведем сводку формул, позволяющих описать общий случай, когда параметры в уравнении (1.1) являются произвольными функциями ψ . Нас будут интересовать статические решения этого уравнения, описывающие локализованные волны, условия их существования и устойчи-

вости. Эти вопросы рассматривались в ряде работ (см., например, ^{11, 15, 18, 22-24, 29}) применительно к различным физическим системам. Ниже мы, в основном, будем следовать работами ^{23, 24}.

а) Статические распределения

Рассмотрим сначала домен «сильного поля», локализованный на точечной ($\epsilon \gg 1$) неоднородности. Распределение $\psi(x)$ вне неоднородности получается непосредственным интегрированием уравнения (1.1) с $\dot{\psi} = 0$. Внутри неоднородности $\psi(x)$ при $\epsilon \gg 1$ меняется слабо, что позволяет найти $\psi(x)$, положив $\psi = \psi_m$ в функциях $f(\psi, x)$ и $\kappa(\psi, x)$ в (1.1). Сшивая полученные таким образом решения на границах неоднородности, получаем распределение $\psi = \psi(x)$ в домене:

$$|x(\psi)| = 2^{-1/2} \int_{\psi}^{\psi_m} \kappa S^{-1/2} d\psi, \quad (3.1)$$

причем функции $\kappa(\psi)$ и $S(\psi)$ (см. (2.2)) определяются однородной частью образца, а ψ_m является корнем уравнения (2.10), где $F^2(\psi_m)$ равно ²³

$$F^2(\psi_m) = \left[\int_{-l}^l f(\psi_m, x) dx \right]^2 - 8\kappa_m f_m \int_0^l \frac{dx}{\kappa(\psi_m, x)} \int_0^x f(\psi_m, x') dx'; \quad (3.2)$$

здесь f_m и κ_m — значения f и κ вне неоднородности при $\psi = \psi_m$. В однородной среде, когда f и κ не зависят явно от x , имеем $F \equiv 0$. Уравнение (2.10) совместно с выражением (3.2) для $F(\psi)$ позволяет рассмотреть все возможные типы доменов, которые могут локализоваться на точечной неоднородности произвольной физической природы. Следует отметить, что благодаря существенной зависимости F от ψ неоднородность в данном случае играет роль самосогласованного точечного источника, мощность которого зависит от распределения $\psi = \psi(x)$ в домене.

Критические величины β_r и β_k , при которых возникают новые типы локализованных доменов (см. рис. 5, 11), определяются из уравнений (2.13), где $T \equiv \psi$, $T_m \equiv \psi_m$, а $F = F(\psi)$ дается формулой (3.2).

Аналогичным образом строятся решения, описывающие локализованную на неоднородности доменную стенку. Считая, для определенности, что $\psi_1(-\infty) = \psi_2$, $\psi(\infty) = \psi_0$, $F > 0$, $\beta < \beta_3$ (см. рис. 7), находим

$$x(\psi) = 2^{-1/2} \int_{\psi}^{\psi_m} \kappa S^{-1/2} d\psi, \quad x > 0, \quad (3.3)$$

$$x(\psi) = -2^{-1/2} \int_{\psi_m}^{\psi} \kappa (S - S_2)^{-1/2} d\psi, \quad x < 0. \quad (3.4)$$

Величина $\psi_m \equiv \psi(0)$ в (3.3), (3.4) определяется, как и ранее, из условий сшивки решений вне и внутри неоднородности:

$$S(\psi_m) = \frac{F^2(\psi_m)}{8} + S_2 + \frac{S_2^2}{2F_1^2(\psi_m)} \equiv R(\psi_m), \quad (3.5)$$

$$F_1(\psi_m) = \int_{-l}^l \left[f(\psi_m, x) - \frac{f_m \kappa_m}{\kappa(\psi_m, x)} \right] dx. \quad (3.6)$$

Сравнивая формулы (3.5), (3.6) с уравнением (2.17), полученным в предположении точечности неоднородности, мы видим, что они совпадают лишь при $F = F_1$, т. е. в тех случаях, когда неоднородность приводит к сильному

изменению в $f(\psi, x)$ и слабому в $\kappa(\psi, x)$, и вторым слагаемым в формулах (3.2), (3.6) можно пренебречь.

Необходимым условием существования локализованных доменных стенок является наличие нетривиальных решений уравнений (3.5), (3.6). Критическая величина β_2 , при которой такие решения пропадают, определяется из системы, аналогичной (2.13):

$$S(\psi_m, \beta_2) = R(\psi_m, \beta_2), \quad \frac{\partial}{\partial \psi_m} [S(\psi_m, \beta_2) - R(\psi_m, \beta_2)] = 0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь противоположный случай плавной неоднородности $\varepsilon \ll 1$ ^{24, 29}. Если $D \sim L$ (см. рис. 1а), то коэффициенты в уравнении (1.1), зависящие явно от x , можно разложить в ряд по x , ограничиваясь слагаемыми $\propto x^2$. Далее в этих разложениях можно выразить x через ψ , воспользовавшись неявной зависимостью $x = x_0(\psi)$ для домена в однородной среде с параметрами $f = f_0(\psi) \equiv f(\psi, 0)$ и $\kappa = \kappa_0(\psi) \equiv \kappa(\psi, 0)$. В результате находим

$$|x| = 2^{-1/2} \int_{\psi}^{\psi_m} \left[\kappa_0 + \frac{x_0^2}{2} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x^2} \right]_0 \tilde{S}^{-1/2} d\psi, \quad (3.8)$$

$$\tilde{S}(\psi) = \int_{\psi_*}^{\psi} \left[\kappa_0 f_0 + \frac{x_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\kappa f) \right]_0 d\psi, \quad (3.9)$$

где

$$|x_0(\psi, \psi_m)| = 2^{-1/2} \int_{\psi}^{\psi_m} \kappa_0 S_0^{-1/2} d\psi, \quad (3.10)$$

$$S_0(\psi) = \int_{\psi_m}^{\psi} \kappa_0 f_0 d\psi \quad (3.11)$$

(при выводе (3.8)–(3.11) неоднородность для простоты считалась симметричной). Уравнение для определения ψ_m в (3.8)–(3.11) имеет вид

$$S(\tilde{\psi}_m) = 0 \quad (3.12)$$

Данный способ решения нелинейного уравнения (1.1) позволяет описать появление при $\beta \approx \beta_r$ новой ветви решений, отсутствовавших в однородной среде^{24 *}.

Уравнения для определения величины β_r аналогичны системе (2.4):

$$\tilde{S}(\psi_m, \beta_r) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi_m} \tilde{S}(\psi_m, \beta_r) = 0. \quad (3.13)$$

При незначительном превышении β над β_r ($\delta\beta \sim (\varepsilon \ln(1/\varepsilon))^2 \beta_r$) размер домена, соответствующего возрастающей ветви $D(\beta)$, становится много больше D_c . При $D \gg D_c$ величина D определяется из уравнения (2.22), а распределение $\psi = \psi(x)$ в домене можно найти с помощью следующих рассуждений^{24, 29}.

С точностью $\sim \varepsilon$ стационарное состояние фазы с $\psi = \psi_2$ в домене с $D \gg L$ определяется из условия локального баланса $f(\psi, x) = 0$ всюду, за исключением границ домена ($|x| \approx D_{\pm}$), где $\psi(x)$ меняется от $\psi \approx \psi_2$ до $\psi \approx \psi_0$ на длине $\sim L$. На границах домена $\psi = \psi(x)$ можно найти, разложив $f(\psi, x)$ и $\kappa(\psi, x)$ в ряд по ($|x| - D_{\pm}$). Сшивая решения для внутренней ($|x| \lesssim D_{\pm}$) и внешней ($|x| \gtrsim D_{\pm}$) области домена, находим, что уравнение самосогласования $D_{\pm} = D_{\pm}(\beta)$ с нулевой по ε точностью совпадает с уравнением (2.22) (более строгое обоснование построения доменных решений при $\varepsilon \ll 1$ дано в работе²⁹ с помощью метода сингулярных возмущений²³).

*) Этот подход эквивалентен известному в теории нелинейных колебаний методу Раушера (см., например,²²).

б) Устойчивость локализованных волн

Рассмотрим теперь устойчивость локализованных на неоднородности волн по отношению к малым возмущениям $\delta\psi(x, t)$:

$$\delta\psi(x, t) = \kappa^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) e^{\lambda_n t}, \quad (3.14)$$

где λ_n — собственные значения, а $y_n(x)$ — собственные функции, подлежащие определению. При $\varepsilon \gg 1$ уравнение для $y_n(x)$ имеет вид

$$y_n'' - \left[\gamma_n + \frac{1}{\kappa} \frac{df}{d\varphi} - \frac{1}{\kappa} \frac{dF}{d\psi} \delta(x) \right] y_n = 0, \quad (3.15)$$

где штрих означает дифференцирование по x , $\gamma_n = \kappa^{-1} \lambda_n (v + \mu \lambda_n)$, а координатная зависимость μ , v , κ , F и f определяется их зависимостью от стационарного решения $\psi(x)$. Волна, очевидно, неустойчива, если имеется хотя бы одно собственное значение $\lambda_n > 0$. Нас будет интересовать величина $\lambda_0 = \max \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, определяющая границу устойчивости $\lambda_0 = 0$.

Будем искать решение уравнения (3.15) в виде $y(x) = z(x) \cdot \exp\left(\int u dx\right)$, где $z(x) = \kappa \psi'(x)$. Тогда для $u(x)$ получаем уравнение первого порядка

$$u' + 2 \frac{z'}{z} u + u^2 = \gamma. \quad (3.16)$$

Вблизи границы устойчивости величина λ_0 мала и зависимость $u = u(x)$ можно искать в виде ряда по λ_0 . Это приводит к следующему выражению для λ_0 (см., например, ²³):

$$\lambda_0 = (-1 \pm \sqrt{1 + 4k\lambda_c}) \frac{1}{2k} \quad (3.17)$$

$$k = \frac{\int_{\psi_0}^{\psi_m} \mu \sqrt{S} d\psi}{\int_{\psi_0}^{\psi_m} v \sqrt{S} d\psi}, \quad \lambda_c = \frac{F}{2^{3/2} \kappa \int_{\psi_0}^{\psi_m} v \sqrt{S} d\psi} \frac{d}{d\psi_m} \left(\frac{F^2}{8} - S \right). \quad (3.18)$$

Локализованный домен «сильного поля» устойчив, если $\lambda_c < 0$, что приводит к критерию (2.12), полученному выше из качественных соображений (в окрестности точек бифуркации β_r и β_k). Выражения (3.17), (3.18) применимы, строго говоря, лишь если $\lambda_0 \rightarrow 0$, $\lambda_c \rightarrow 0$ (см. ²³), поэтому квадратный корень в (3.17) следует разложить в ряд, за исключением случая, когда величина k не является аномально большой. Последнее имеет место, например, для джозефсоновского контакта ¹³, где затухание возмущений носит осциллирующий характер уже вблизи порога устойчивости ($4k\lambda_c < -1$).

Аналогичным образом при $\lambda_0 \rightarrow 0$ для локализованной доменной стенки получаем

$$z^{-2} (+0) \int_0^{\infty} \gamma_0 z^2 dx + z^{-2} (-0) \int_{-\infty}^0 \gamma_0 z^2 dx = \frac{d}{d\psi} [F + z(+0) - z(-0)] \psi_m; \quad (3.19)$$

здесь выражение для $z(x) = \kappa \psi'(x)$ следует из (3.3) и (3.4). Условие устойчивости $\lambda_0 < 0$ ($\gamma_0 < 0$) приводит к критерию (2.18), полученному выше из качественных соображений в окрестности точки бифуркации $\beta = \beta_2$. Таким образом, при $\beta = \beta_2$ делокализация доменной стенки связана с потерей устойчивости. Отметим, однако, что в модели (2.24) величина λ для $\beta = \beta_2$ остается конечной (см. формулу (2.42)). Это связано с неаналитичным поведением функции $S(\psi)$ при $\psi = \psi_1$ *).

*) Скачкообразная перестройка устойчивых структур, описывающихся двумя связанными нелинейными параболическими уравнениями, рассматривалась в работе ²⁴.

Остановимся теперь подробнее на ситуации в окрестности точки бифуркации $\beta = \beta_3$, где $2 |S_2| = F^2$. При $\beta = \beta_3$ правая часть (3.19) обращается в нуль, однако одновременно с этим обращается в бесконечность коэффициент при γ_0 в левой части (3.19). Это связано с тем, что для «траекторий», соответствующих точкам 3 и 2, обращаются в нуль «импульсы» $z (\pm 0)$. Обращение в бесконечность коэффициента при γ_0 свидетельствует о неприменимости теории возмущений, развитой для вывода (3.19), и, следовательно, самого соотношения (3.19) в окрестности $\beta = \beta_3$. Таким образом, критерий устойчивости (2.18) неприменим в точке бифуркации $\beta = \beta_3$. Физически, как уже упоминалось, это связано с конечностью инкремента нарастания возмущений при $\beta = \beta_3$.

Исследование устойчивости локализованного домена при $\varepsilon \ll 1$ ²⁴ показывает, что при $D \gg D_c \sim L \ln (1/\varepsilon)$ выражение для λ_0 ($\mu = 0$) совпадает с формулой (2.24), полученной из качественных соображений. Если же $D < D_c$, то λ_0 меняет знак, что соответствует неустойчивости падающей ветви $D(\beta)$ (см. рис. 11, кривая 2).

4. ПРИМЕРЫ

В этом разделе мы рассмотрим некоторые конкретные системы, которые можно описать с помощью уравнения (1.1). Нас будет интересовать здесь лишь явления, связанные с наличием неоднородностей, поэтому список литературы, относящийся к этой части обзора, безусловно, не является полным.

а) Разистивные домены в сверхпроводниках

При воздействии внешних полей сверхпроводник может переходить в различные неоднородные состояния, как термодинамически равновесные (промежуточное состояние и вихревая структура в сверхпроводниках первого и второго рода^{95, 96}), так и далекие от термодинамического равновесия. О последних и пойдет речь ниже.

Способы создания неравновесных неоднородных состояний могут быть самыми разнообразными, включая воздействие транспортного тока^{19–24, 27, 28}, лазерного и СВЧ излучения^{97–100}, ультразвука^{101–102}, туннельной инжекции электронов^{103–107} и т. д.

При количественном описании неравновесных состояний в сверхпроводниках приходится обращаться к динамическим уравнениям теории сверхпроводимости^{62, 108–110}. Существует, однако, ряд случаев, когда эти достаточно сложные уравнения сводятся к одному уравнению, аналогичному (1.1). В зависимости от конкретных условий (см., например, ^{62, 108–110}) оно может описывать диффузию электронных возбуждений, распределение параметра порядка, температуры и т. д.

Рассмотрим здесь ситуацию, когда существенны лишь тепловые эффекты. В сверхпроводниках с транспортным током I величину Q в простейшем случае можно записать как

$$Q = j^2 \rho(j, T) \times \begin{cases} 0, & T < T_c(j), \\ 1 - j_c/j, & T > T_c(j), \end{cases} \quad (4.1)$$

где j — плотность тока, ρ — удельное электросопротивление в резистивном состоянии, j_c — плотность критического тока, обусловленная либо пиннингом вихревой решетки в сверхпроводниках II рода¹¹¹, либо критической скоростью сверхпроводящего конденсата в тонких пленках¹¹².

Для сверхпроводников с током зависимости функций $Q(T)$ и $W(T)$ от T аналогичны изображенным на рис. 4, а *) ($Q(T) = 0$ при $T < T_c$). Следовательно, в них возможно существование резистивных доменов — областей

*) Возможно также и большее число точек пересечения $Q(T)$ и $W(T)$, обусловленное, например, пик-эффектом в критическом токе¹¹¹, кризисом кипения охладителя³⁷ и т. д.

конечного размера, находящихся в нормальном (резистивном) состоянии за счет джоулева нагрева¹⁹⁻²¹. Такие домены являются одновременно и доменами электрического поля.

Рассмотрим теперь локализацию резистивных доменов на точечных неоднородностях, обусловленных, например, пониженным значением j_c и ρ , что может быть связано со снижением поверхностного барьера для вхождения вихрей^{27, 113}, изменением поперечного сечения образца, наличием границ зерен и включений другой фазы (особенно в гранулированных пленках) и т. д. Эти неоднородности в большинстве своем являются, очевидно, «затравками» для образования на них резистивных доменов.

Весьма наглядно все особенности, связанные с локализацией резистивных доменов, проявляются на ВАХ сверхпроводника $V = V(j)$, где

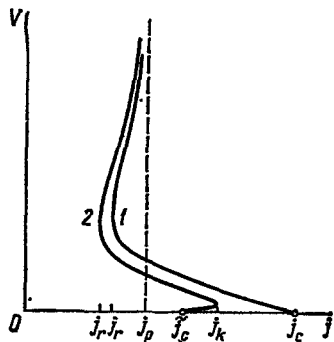


Рис. 14. ВАХ сверхпроводника с локализованным резистивным доменом при наличии неоднородности в удельном сопротивлении (кривая 1), критическом токе и удельном сопротивлении (2) (на оси j правее 0 штрихи соответствуют j_2^2, j_1^2).

$$V(j) = V_2 \int_{T_c}^{T_m} \kappa \rho (j - j_c) S^{-1/2} dT + j A \Delta R; \quad (4.2)$$

здесь $V(j)$ — разность потенциалов на сверхпроводнике с доменом, T_m — корень уравнений (2.10), (3.2), в которых $\beta \equiv j, \psi_m \equiv T_m, \Delta R$ — избыточное сопротивление неоднородности, A — площадь поперечного сечения образца. ВАХ здесь является многозначной, а формула

(4.2) описывает ту ветвь на ВАХ, которая соответствует данному доменному решению.

Характерные ВАХ сверхпроводника с локализованным в нем резистивным доменом изображены на рис. 14; кривая 1 соответствует неоднородности только в $\rho = \rho(x)$, которая является дополнительным источником тепла в резистивном состоянии, а кривая 2 — неоднородности как в $\rho(x)$, так и в $j_c(x)$ ^{22, 23}. На рис. 14 j_c — плотность критического тока, $\tilde{j}_c$ — плотность критического тока на неоднородности, j_r и j_k — плотности тока, определяемые из (2.13), где $\beta_{r,k} \equiv j_{r,k}$, а j_p — из уравнений (2.4), где $\beta_p \equiv j_p$. Величина I_p носит название минимального тока распространения нормальной фазы^{37, 38}, ее можно оценить, приравнявая джоулево тепловыделение ρj_p^2 в резистивной ($T > T_c$) фазе отводу тепла в охладитель $h(T - T_0)/d$. При характерном для сверхпроводника масштабе температур $T_c - T_0$ это дает

$$j_p \sim \left(\frac{dT_c}{\rho h} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{T_0}{T_c} \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Явления, связанные с джоулевым нагревом в сверхпроводниках, становятся, очевидно, существенными в интервале $j_p \leq j < j_c$. Для пленок, например, $j_c \approx j_0 [1 - (T/T_c)]^{3/2}$ ¹¹², поэтому при $T \rightarrow T_c$ имеем $j_c \ll j_p$, т. е. в области температур $T_c - T_0 \leq T_c j_0^{-1} \sqrt{h T_c / \rho d}$ тепловыми явлениями можно пренебречь.

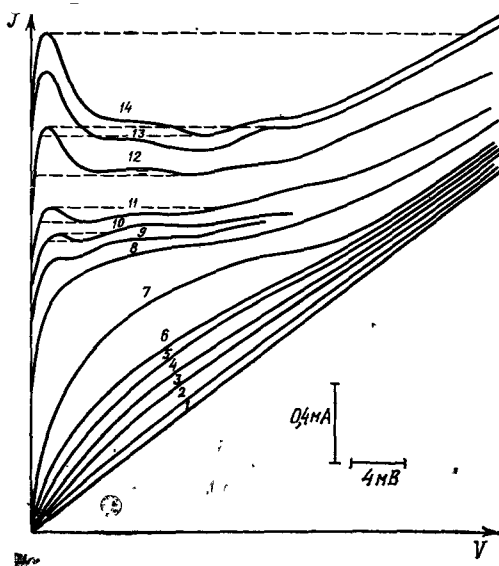
Для плотности токов j_r и j_k на рис. 14 имеем по порядку величины: $j_c - j_k \sim \Gamma j_c$, $j_p - j_r \sim \Gamma^2 j_p$, где $\Gamma \sim \Delta \rho l / \rho L$, $\Delta \rho$ — изменение $\rho = \rho(x)$ внутри неоднородности.

Многозначность и наличие падающих ветвей на ВАХ (рис. 14) приводят к гистерезисным явлениям при разрушении (восстановлении) сверхпроводимости током^{22, 23}. При этом даже в простейших случаях в сверхпроводнике в широком интервале токов $\min(\tilde{j}_c, j_r) < j < j_k$ могут существовать огра-

ниченные устойчивые резистивные области, не распространяющиеся на весь образец.

ВАХ, аналогичные изображенным на рис. 14, неоднократно наблюдались экспериментально^{28, 88, 114, 115}; в частности, на рис. 15 изображена ВАХ гранулированной пленки In, полученная экспериментально в работе²⁸. В этой же работе было показано, что температурные зависимости $\rho(T)$ и $\tilde{j}_c(T)$ внутри неоднородности могут существенно отличаться от таковых для однородной

Рис. 15. ВАХ гранулированной пленки In²⁸ при различных значениях параметра $\xi_0 = 1 - (T_0/T_c)$.
1 — $\xi_0 = 0$, 2 — $8 \cdot 10^{-4}$, 3 — $4,7 \cdot 10^{-3}$,
4 — $6,1 \cdot 10^{-3}$, 5 — $7,5 \cdot 10^{-3}$, 6 — $9,1 \cdot 10^{-3}$,
7 — $1,19 \cdot 10^{-2}$, 8 — $1,4 \cdot 10^{-2}$, 9 — $1,46 \cdot 10^{-2}$,
10 — $1,52 \cdot 10^{-2}$, 11 — $1,63 \cdot 10^{-2}$, 12 — $1,79 \cdot 10^{-2}$,
13 — $1,9 \cdot 10^{-2}$, 14 — $2,07 \cdot 10^{-2}$.



части пленки, что необходимо учитывать для правильной интерпретации экспериментальных данных. При $T_0 \rightarrow T_c$ ВАХ, изображенная на рис. 15, однозначна, по мере уменьшения T_0 она становится многозначной и на ней появляется падающий участок (см. также¹¹⁵). На рис. 3, 5 это соответствует переходу из области, где $\beta \ll \beta_1 \sim \beta_p$, в область, где $\beta \sim \beta_p$.

ВАХ сверхпроводника с резистивным доменом, локализованным на плавной неоднородности ($\epsilon \ll 1$), изображены на рис. 14 (кривая 1, где $j_r \approx j_p(0)$, $j_p = j_p(\infty)$, $j_c = j_c(0)$) и рис. 16. Здесь в зависимости от параметров возможны случаи $j_c(0) > j_p(\infty)$ (см. рис. 14 и $j_c(0) < j_p(\infty)$ (рис. 16). В первом из них при увеличении тока образец переходит в нормальное состояние, когда $j = j_c(0)$ и обратно: из нормального в сверхпроводящее — начиная с $j = j_p(0) < j_c(0)$. Тем самым, в интервале значений плотности тока $j_p(0) < j < j_p(\infty)$ образец находится в резистивном состоянии за счет локализации в нем резистивного домена.

В случае, если $j_c(0) < j_p(\infty)$ (см. рис. 16), при $j = j_c(0) > j_p(0)$ на неоднородности возникает локализованный домен, остальная же часть образца остается сверхпроводящей. При уменьшении тока появляется гистерезис, так как сверхпроводимость восстанавливается, когда $j \approx j_p(0) < j_c(0)$. Для $j_c(0) < j_p(0)$ ВАХ образца с резистивным доменом подобна кривой 3 на рис. 11 и гистерезис, очевидно, отсутствует.

При наличии в образце нескольких неоднородностей на ВАХ может образоваться серия ступенек, связанных с последовательным возникновением резистивных доменов.

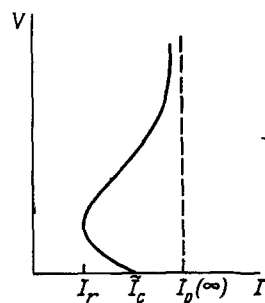


Рис. 16. ВАХ сверхпроводника с резистивным доменом, локализованным на плавной неоднородности при $\tilde{j}_c < j_p(\infty)$.

стивных доменов внутри каждой из неоднородностей в процессе увеличения тока. При уменьшении j появляется гистерезис за счет различия $j_c(X_n)$ и $j_p(X_n)$, где X_n — координата n -й неоднородности ($j_c(X_n) > j_p(X_n)$). Для возникновения ступенек на ВАХ достаточно также нескольких неоднородностей, приводящих к немонотонной координатной зависимости $I_p(x)$ (см. рис. 10). В этом случае процесс разрушения сверхпроводимости током начнется локально на «слабой»

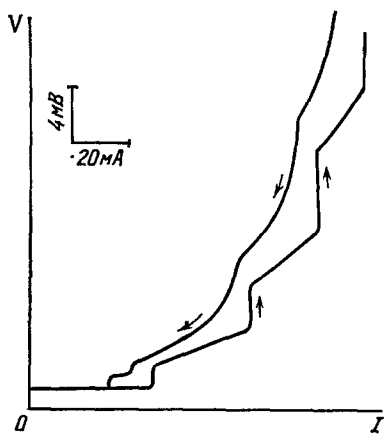


Рис. 17. ВАХ гранулированной пленки In²⁷.

точке, где $\tilde{j}_c < j$, и в дальнейшем будет иметь ступенчатый характер (см. вставку на рис. 10). На рис. 17 изображена ВАХ гранулированной пленки In, полученная экспериментально в работе²⁷, которая вполне согласуется с изложенной выше картиной.

Отметим, что гистерезис, ступеньки и срывы на ВАХ тонких сверхпроводящих пленок наблюдались во многих работах^{27, 28, 113-117}, что, по-видимому, можно объяснить влиянием неоднородностей. Альтернативные (нетепловые) механизмы образования ступенек на ВАХ могут быть обусловлены, например, возникновением центров проскальзывания фазы^{118, 119}, вхождением «строчек»

вихрей в образец^{113, 120}, метастабильными состояниями вихревой решетки на макроскопических дефектах^{121, 122} и т. д. Эти механизмы играют большую роль для возникновения резистивного состояния при $T \rightarrow T_c$, однако, если число вихрей или центров проскальзывания фазы на характерной тепловой длине L становится много больше единицы, то осуществляется переход к изложенному выше макроскопическому описанию.

б) Оптический разряд в газах

Весьма интересным примером локализованных доменов являются волны ионизации, возникающие при распространении в газе мощного лазерного луча (см., например,^{47, 48}). Внутри такого луча могут образовываться плазменные сгустки (домены), существующие благодаря нагреву и ионизации газа падающим излучением. Температура плазмы ($T \sim (1-3) \cdot 10^4$ K) определяется балансом между тепловыделением Q и теплоотводом W в окружающий холодный газ.

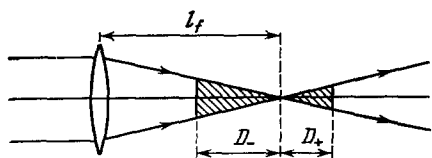


Рис. 18. Плазменный домен при оптическом газовом разряде.

Ограничимся здесь рассмотрением режима «медленного светового горения»⁴⁸. В этом случае мощность лазера недостаточна для прямой ионизации газа, а скорость движения границ плазменной области малы по сравнению со скоростью звука. При не слишком высоких давлениях газа процесс образования плазменного домена в первом приближении может быть описан системой уравнений (см., например,⁴⁸)

$$v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + cP\mu_\omega(T) - \frac{\gamma}{r^2} \kappa (T - T_0), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \mu_\omega(T) J = 0; \quad (4.5)$$

здесь x — координата вдоль луча радиуса $r(x)$ (рис. 18), $P(x)$ — плотность потока энергии падающего излучения в единицу времени, $J(x) = \pi r^2 P$ — мощность в луче, $\mu_\omega(T)$ — коэффициент поглощения света, γ — численный

коэффициент порядка единицы. Уравнение (4.5) описывает, очевидно, ослабление интенсивности лазерного луча за счет поглощения света.

При $T > T_c$, где T_c — порядка температуры ионизации газа, величина $\mu_\omega(T)$ резко возрастает (см., например, ¹²³). Таким образом, температурная зависимость тепловыделения $Q(T) = cP\mu_\omega$ имеет характерный вид, аналогичный изображенному на рис. 4, а. При наличии трех точек пересечения $Q(T)$ и $W(T)$ возможно существование самоподдерживающегося режима, в котором плазма поглощает падающую на нее световую энергию, разогреваясь до температуры $T = T_3 > T_c$ (см. рис. 4, а). Зависимость $U = \dot{U}(T)$ в данном случае совпадает с изображенной на рис. 5, где роль параметра β играет величина J , а область, занятая плазмой, является доменом «сильного поля».

На рис. 18 изображена схема эксперимента ⁴⁷ по исследованию «медленного светового горения». Фокусировка лазерного луча приводит к неоднородности внешних условий, в которых находится газ, и тем самым к локализации плазменного домена в области фокуса (характерный масштаб неоднородности, очевидно, порядка фокусного расстояния линзы l_f). В соответствии с проведенным выше анализом, такой локализованный домен устойчив, если мощность в луче J превышает пороговое значение J_p . Для оценки величины J_p удобно воспользоваться моделью ⁴⁸, в которой $\mu_\omega(T) = \mu_0$ при $T > T_c$ и $\mu_\omega(T) = 0$ при $T < T_c$, а остальные параметры в (4.4) не зависят от T (см. также гл. 2, п. б). Пренебрегая поглощением света, получаем (см., например, ⁴⁸)

$$J_p = \frac{2\pi\gamma\kappa}{c\mu_0} (T_c - T_0). \quad (4.6)$$

Эта формула имеет простой физический смысл — интенсивность падающего излучения должна быть достаточной для разогрева плазмы до температур порядка T_c , т. е. $c\mu_0 P_p \sim (T_c - T_0) \gamma\kappa/r^2$.

Рассмотрим теперь более подробно ситуацию, когда в результате фокусировки лазерного луча величина $P(x)$ медленно меняется на длинах порядка r , т. е. $l_f \gg r$ (рис. 18). В этом случае имеет место локализация домена на плавной ($\epsilon \ll 1$) неоднородности. Размеры домена D_+ и D_- определяются из уравнений, аналогичных (2.22):

$$v[J(D_\pm), D_\pm] = 0, \quad (4.7)$$

где явная зависимость скорости доменной стенки v от $D_\pm$ обусловлена наличием неоднородности (фокусировки), зависимость же J от $D_\pm$ связана с поглощением излучения в плазме, которое предполагается достаточно слабым ($\mu_\omega r \ll 1$). Величина v выражается через параметры лазерного луча и характеристики газа согласно формуле (2.5); сами же уравнения (4.7) эквивалентны «теореме равных площадей» (2.4), где $\beta \equiv J(x)$, а координата x является параметром.

Если $D_\pm \ll l_f$, то уравнения (4.7) можно разложить в ряд по $D_\pm$. Поместив начало координат в фокусе, получаем уравнения описывающие медленную динамику домена в случае достаточно слабого поглощения $\mu_\omega(T_2)l_f \ll 1^*$

$$\frac{\partial D_-}{\partial t} = v_1(J) - sD_-^2, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial D_+}{\partial t} = v_1(J) - m(D_+ + D_-) - sD_+^2, \quad (4.9)$$

где J — мощность луча, падающего на левую границу ($x = -D_-$) домена (см. рис. 18), $v_1(J)$ — скорость движения плазменной границы (доменной стенки) вдоль однородного луча ($\epsilon = 0$) с $J_p = J_p(0)$. Параметры s и m

*) Этот случай характерен, например, для неодимового лазера при разряде в атмосферном воздухе ⁴⁷, где $\mu_\omega(T_2) \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ при $T_2 \approx 12\,000 \text{ K}$, $J_p \approx 1 \text{ МВт}$ ⁷³.

в (4.8), (4.9) равны

$$s = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=0} \sim \frac{v_0}{l_f^2}, \quad m = - \frac{\partial v}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial x} \Big|_{D_-} = J \mu_\omega (T_3) \frac{\partial v}{\partial J} \propto \mu_0 v_0, \quad (4.10)$$

где $v_0 \propto \kappa/vr$. При получении выражения для m мы воспользовались уравнением (4.5). Отметим, что (4.8), (4.9) аналогичны рассмотренному выше соотношению (2.19). Появление в (4.9) дополнительного слагаемого $-m(D_+ + D_-)$ обусловлено уменьшением интенсивности излучения, доходящего до правой границы домена ($x = D_+$), за счет поглощения света.

Нетрудно получить решения уравнений (4.8), (4.9), описывающих устойчивый локализованный домен:

$$D_+ = \sqrt{\frac{v_1}{s}} - \frac{m}{s}, \quad D_- = \sqrt{\frac{v_1}{s}}. \quad (4.11)$$

Видно, что учет поглощения ($m > 0$) приводит к асимметрии домена ($D_- > D_+$). По мере уменьшения мощности J длина домена $D = D_+ + D_-$ падает, поскольку при $J \approx J_p(0)$ величина $v_1(J) \propto J - J_p(0)$ (см. (2.5)), а $m, s = \text{const}$. Если $v_1(J) < m^2/s$, то правая граница домена смещается левее фокуса ($D_+ < 0$, см. рис. 18). В тот момент, когда мощность J становится равной J_r , где J_r определяется из условия $v_1(J_r) = m^2/4s$, домен исчезает. При этом $D_+ = -D_-$, $D = 0$, а $J_r - J_p(0) \sim J_p(0) \cdot (\mu_0 l_f)^2$. Исчезновение домена происходит в точке $x = -D_c$, находящейся слева от фокуса на расстоянии

$$D_c = \frac{m}{2s} \propto \mu_\omega (T_2) l_f^2 \quad (4.12)$$

Здесь для оценок мы воспользовались формулами (4.10). В условиях эксперимента ⁴⁷, когда $l_f = 50$ см, а $\mu_\omega (T_2) \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ⁴⁸, длина D_c составляет порядка 1—10 см.

Аналогичным образом можно рассмотреть, например, локализованный плазменный шнур, возникающий при СВЧ разряде ⁷³, тлеющий разряд в трубке переменного сечения ¹²⁴ и т. д. Заметим, что так же, как и в приведенном выше примере неоднородность здесь зачастую обусловлена самой геометрией разряда.

в) Температурно-электрические домены в нормальных металлах

Рассмотрим еще один пример — температурно-электрические домены в нормальном металле с током. В бесконечном образце также домены могут существовать, если условие баланса тепла $\rho(T)j^2 = W(T)$ выполняется для двух и более значений температуры T (см. рис. 4). Реально такая ситуация возникает либо при достаточно резкой температурной зависимости удельного электросопротивления $\rho(T)$, либо при N-образной зависимости мощности тепловода $W = W(T)$ (см. рис. 4, а и б соответственно).

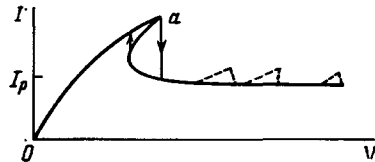
Если например, наличие трех точек пересечения функций $Q(T)$ и $W(T)$ обусловлено, в основном, поведением величины $\rho(T)$, то возникновение температурного домена сопровождается появлением существенно неоднородного электрического поля. Домены такого типа являются, по существу, температурно-электрическими ⁴¹. Рассмотрим физические механизмы, ответственные за возникновение таких доменов. Зависимость $Q = Q(T)$ подобная изображенной на рис. 4а, характерна для любого достаточно чистого металла, поскольку переход от гелиевых к азотным температурам сопровождается «включением» фононного рассеяния электронов, приводящего к существенному возрастанию $\rho(T)$ ⁴¹. Кроме того, появление температурно-электрических доменов может быть связано с фазовыми превращениями, когда $\rho(T)$ возрастает

в узких температурных интервалах *)⁴², например, плавлением, магнитными переходами^{39, 43} и т. д. Что касается N-образной зависимости $W = W(T)$, то она может быть обусловлена особенностями электрон-фононного взаимодействия, например, наличием «узкого фононного горла» в полуметаллах¹²⁶ и т. д.

Всюду выше речь шла о свойствах металла как такового. С другой стороны, при больших тепловых потоках из образца в охладитель могут меняться и свойства самой охлаждающей среды. Характерным примером является так называемый кризис кипения жидкого охладителя^{70, 71} — переход от режима

Рис. 19. ВАХ нормального металла с температурно-электрическим доменом.

Штриховой линией показано изменение ВАХ при наличии точечных неоднородностей.



пузырькового кипения к пленочному (см. рис. 4, б). В результате, если теплоотвод осуществляется кипящей жидкостью, то могут возникать температурно-электрические домены, обусловленные образованием на поверхности металла паровой пленки^{127, 128}.

В режиме фиксированного тока переход металла из одного однородного состояния ($T = T_1$) в другое ($T = T_3$) происходит при $j > j^*$ (см. рис. 4, а). Если же фиксирован не ток, а напряжение, такой переход становится невозможным, так как он сопровождается сильным повышением электросопротивления и уменьшением j ниже j_* , когда равновесное состояние с $T = T_3$ отсутствует. Таким образом, в высокотемпературное состояние может перейти только часть образца, которая и является температурно-электрическим доменом.

На рис. 19 изображена ВАХ металла с температурно-электрическим доменом (см., например, ^{42, 129}). Ветвь Oa отвечает однородно нагретому металлу ($T = T_1$), остальная часть ВАХ соответствует образцу с доменом. При достаточно большом напряжении V ток в металле I остается постоянным (эффект барретирования⁴²). В этом режиме длина домена $D(V)$ определяется из условия равновесия его границ $I = I_p$, т. е.

$$R_0(I_p) I_p + \Delta\rho(I_p) D(V) I_p = V, \quad (4.13)$$

где $R_0(I)$ — сопротивление образца с $T = T_1(I)$, $\Delta\rho$ — скачок сопротивления единицы длины образца при переходе из состояния с $T = T_1$ в состояние с $T = T_3$.

В неоднородных металлах домены могут локализоваться, что приводит к следующим эффектам: 1) стабилизации домена в режиме фиксированного тока, 2) существованию локализованных доменов нескольких типов и, следовательно, к наличию скачкообразных переходов между ними при изменении I , воздействии внешних возмущений и т. д., 3) многозначности, скачкам и гистерезису на ВАХ.

В качестве примера рассмотрим ту часть ВАХ однородного образца, где ток стабилизирован ($I = I_p$) (см. рис. 19), а увеличение V вызывает пропорциональное увеличение длины домена $D(V)$ (см. (4.13)). При наличии локальных неоднородностей такая ситуация будет иметь место до тех пор, пока обе границы домена не встретятся с «холодными» неоднородностями ($\Gamma < 0$). Как было показано в разделе 2, это приводит к локализации доменных стенок. В результате домен оказывается «запертым» между двумя неоднородностями,

*) Если $\rho(T)$ падает при росте T , может возникнуть шнурование — расслоение фаз поперек направления тока (примерами являются плавление галлия, сурьмы и висмута, переход из ферромагнитного в сверхпроводящее состояние в магнитных сверхпроводниках¹²⁵ и т. д.).

а его длина перестает зависеть от V . ВАХ образца с таким локализованным доменом становится омической, поэтому при дальнейшем увеличении V ток I начинает возрастать до тех пор, пока одна из доменных стенок не срывается с неоднородности ($I - I_p > \Delta I \sim |\Gamma| I_p$; см. также (2.17)). При делокализации доменной стенки ток скачкообразно уменьшается на величину ΔI , а образец переходит в режим бареттирования ⁴² до тех пор, пока по мере увеличения V граница домена не встречается с очередной неоднородностью с $\Gamma < 0$. Таким образом, ВАХ неоднородного образца приобретает пилообразный характер (пунктир на рис. 19) Заметим, что расстояния между «зубьями пилы» на ВАХ однозначно связаны с расстояниями между неоднородностями в образце.

Экспериментально температурно-электрические и тепловые домены наблюдались в работах ^{42, 128–131} при различных температурах охладителя, причем в работе ¹²⁸ были обнаружены локализованные тепловые домены.

г) Волны химических реакций

Проиллюстрируем подробно ситуацию, возникающую при локализации доменной стенки, на примере волн переключения режимов химических реакций. Здесь мы рассмотрим два предельных случая: неизотермические волны, распространяющиеся по поверхности твердого катализатора ^{51–52}, и, изотермические волны цепной реакции «холодного горения» ^{49, 50, 54, 132}. Пусть на поверхности тонкой катализирующей нити диаметром d протекает химическая реакция газообразных реагентов. В зависимости от температуры катализатор может находиться в двух реакционных состояниях — кинетическом (низкотемпературном) и высокоактивном диффузионном (высокотемпературном) (см., например, ⁴⁹). Переключение режимов активности катализатора происходит путем распространения температурной волны ^{51, 52}, которая может быть описана уравнением ⁵¹

$$v \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{4}{d} [h(T - T_0) - CmQ\theta(T - T_k)], \quad (4.14)$$

где v и κ — теплоемкость и теплопроводность катализатора, h — коэффициент теплоотдачи от нити в окружающий газ с температурой T_0 , m — коэффициент массоподвода реагента с концентрацией C , Q — тепловой эффект реакции, $T_k \sim E_a$, где E_a — энергия активации реакции. При записи уравнения (4.14), для простоты, пренебрегалось температурными зависимостями v , κ и h , а также тепловыделением в кинетическом режиме ($T < T_k$).

Рассмотрим теперь локализацию волн переключения режимов активности катализатора на неоднородности, обусловленной, например, локальным повышением $h(x)$ на длине $2l$. Для дальнейшего уравнение (4.14) удобно записать в безразмерной форме, перейдя к безразмерной координате $x_1 = x/L$, времени $t_1 = t/\tau$ и температуре $\psi = (T - T_0)/(T_k - T_0)$, где $L = \sqrt{d\kappa/4h}$, $\tau = vd/4h$. Тогда

$$\dot{\psi} = \psi'' - \psi + \beta\theta(\psi - 1) + \Gamma\psi\delta(x_1), \quad (4.15)$$

где

$$\beta = \frac{CmQ}{(T_k - T_0)h}, \quad \Gamma = \int_{-l}^l \left[1 - \frac{h(x)}{h} \right] \frac{dx}{L}. \quad (4.16)$$

Отметим, что (4.15) является частным случаем уравнения (2.24), исследовавшегося нами в гл. 2 (п. в).

При $\Gamma = 0$ из (4.15) нетрудно найти решение, описывающее доменную стенку, движущуюся со скоростью v , причем

$$v = v_0 \frac{\beta - 2}{\sqrt{\beta - 1}}. \quad (4.17)$$

Из (4.17) видно, что двухфазное состояние может существовать лишь, если $\beta > 1$. В интервале $1 < \beta < 2$ доменная стенка переводит катализатор из диффузионного режима в кинетический, для $\beta > 2$ имеет место обратная ситуация. Если же $\beta = 2$, то доменная стенка покоится ($\beta_p = 2$).

Из уравнения (4.15) (см. также (2.17)) нетрудно получить, что при $\Gamma < 0$ волна диффузионного режима локализуется в интервале $\beta_p < \beta < \beta_2$, где для $|\Gamma| \ll 1$ имеем

$$\beta_2 = 2 - \Gamma. \quad (4.18)$$

Так как каждому значению параметра β отвечает волна, движущаяся с определенной скоростью $v = v(\beta)$, из формулы (4.18) следует, что волны диффузионного режима со скоростями $v < v_k$ ($v_k = v(\beta_2)$) распространяться не могут. С помощью (4.17), (4.18) находим величину критической скорости $v_k = 2|\Gamma|v_0$, ($|\Gamma| \ll 1$). Заметим, что параметр $\Gamma \propto d^{-1/2}$, поэтому роль неоднородностей возрастает по мере уменьшения d .

Если, например, в эксперименте изучается зависимость скорости от температуры среды T_0 то в интервале температур $T_p < T_0 < T_p + \delta T_0$ волна распространяться не будет. Здесь T_p определяется из соотношения $\beta(T_p) = \beta_p = 2$, а

$$\delta T_0 = (T_k - T_0) |\Gamma|. \quad (4.19)$$

Отметим, что в интервале $T_p < T_0 < T_p + \delta T_0$ катализатор может перейти в метастабильное неоднородное состояние, когда участки, находящиеся в кинетическом и диффузном режимах, чередуются вдоль его длины горение «пятнами».

Эффекты, связанные с локализацией волн химических реакций, протекающих на поверхности катализатора, наблюдались во многих экспериментах^{51, 52, 133}. В частности, локализация волн, движущихся со скоростями $v < v_k$, наблюдалась при исследовании окисления CO, аммиака, этилена,^{51, 52, 133} на платине. В работах^{51, 52} путем создания искусственных неоднородностей удалось получить ряд чередующихся локализованных областей, находящихся в различных реакционных состояниях.

На рис. 20 изображены температурные профили движущейся (1) и локализованной (2) волн при окислении этилена на платине, полученные экспериментально в работе¹³³. Хорошо виден излом, характерный для локализованных на неоднородностях волн (сравни с рис. 7). Согласно данным работы⁵¹, при окислении аммиака на платине величина $T_k - T_0 \sim 10^3$ К, а температурный интервал локализации $\delta T_0 \sim 10$ К. Из формулы (4.19) следует, что для локализации волны в условиях эксперимента⁵¹ достаточно уже малой неоднородности с $\Gamma \sim 10^{-2}$.

Рассмотрим теперь изотермическую реакцию «холодного» горения, которая может протекать в газовой фазе (см., например,^{49, 50, 132}), на поверхности катализатора⁵⁴ и т. д. При «холодном» горении один из реагентов находится в недостатке, нагрев смеси за счет теплового эффекта реакции невелик, поэтому распространение обычных волн горения, связанных с тепловым самовоспламенением^{49, 50} оказывается невозможным. В последнее время к таким реакциям проявляется интерес в связи с созданием химических лазеров¹³⁴.

Реакции «холодного» горения часто идут через ряд промежуточных стадий, в одной из которых образуются активные центры, осуществляющие разветвление цепи. Это приводит к распространению волн «холодного» горения, обусловленных диффузией активных центров⁵⁰. Рассмотрим локализа-

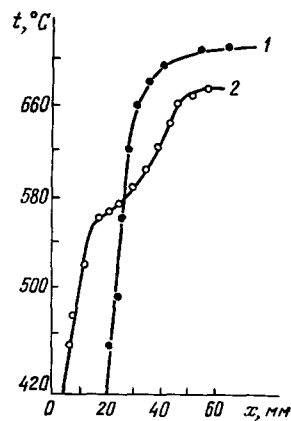


Рис. 20. Распределение температуры в движущейся (1) и локализованной (2) волне переключения активности катализатора при окислении этилена на платине¹³³.

цию таких волн, связанную, например, с неоднородностью поверхности реакционной трубки или катализатора.

При больших временах жизни активных центров исходная система уравнений химической кинетики может быть сведена к одному уравнению диффузии для концентрации активных центров n :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - f(n), \quad (4.20)$$

где конкретный вид $f(n)$ определяется характером промежуточных стадий данной реакции, а коэффициент диффузии D_n считается, для простоты, не зависящим от n .

Ограничимся случаем квадратичного разветвления цепи, когда функция $f(n)$ имеет вид ^{49, 50, 132}

$$f(n) = kn - \frac{k_1 n^2 (n_0 - n)}{k_2 + mk_3}, \quad (4.21)$$

где k и k_1 — константы, выражающиеся через соответствующие константы скоростей элементарных реакций, m — концентрация молекул M , на которых происходит обрыв реакционной цепи, n_0 — начальная концентрация реагента, находящегося в недостатке, k_2 и k_3 — константы скорости обрыва цепи соответственно на стенке реакционной трубки и в объеме при столкновении с молекулой M .

Функция $f(n)$ в виде (4.21) достаточно хорошо, например, описывает реакцию окисления сероуглерода CS_2 , исследованную в работе ¹³² ($n_0 = [\text{CS}_2]$, а кислород находится в избытке).

Уравнение (4.20) аналогично уравнению (2.6), причем зависимость $U = U(n)$ сходна с изображенной на рис. 3. Для дальнейшего удобно перейти к безразмерным переменным $x_1 = x/L$,

$$t_1 = t/\tau, \quad y = n/n_0, \quad \text{где } L = \sqrt{D_n/k}, \quad \tau = k^{-1}$$

и выбрать в качестве интенсивного параметра β отношение $\beta = k_1 n_0^2 / k(k_2 + mk_3)$. Волнами «холодного» горения являются рассмотренные выше доменные стенки. Они могут, очевидно, существовать лишь при $n_0 > n_p$, при $n_0 = n_p$ скорость волны обращается в нуль, а при $n_0 < n_p$ распространение таких волн невозможно. Величина n_p находится из уравнения $\beta_p = 9/2$ (см., например, ⁵⁰).

Рассмотрим теперь локализацию волны «холодного» горения на неоднородности, связанной с локальным повышением константы скорости обрыва цепи на поверхности трубки k_2 на длине $2l \ll L$. Как было показано в гл. 3, условием такой локализации является наличие нетривиальных решений y_m и уравнений (3.5), (3.6), которые в данном случае $\psi_m \equiv y_m$ имеют вид

$$\frac{\beta - \beta_p}{\beta_p} = \frac{81}{4} \Gamma y_m^3 (1 - y_m) \left(1 - \frac{3}{2} y_m\right), \quad (4.22)$$

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2(x) - k_2(\infty)}{k_2(x) + mk_3} dx_1, \quad (4.23)$$

где $\Gamma \sim l/L$, а в (4.22) отброшены члены порядка Γ^2 . Из уравнения (4.22) находим критическую величину β_2 , при которой происходит локализация волны горения:

$$\beta_2 = \beta_p + c_1 \Gamma, \quad c_1 = \frac{9}{10} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^3 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx 1,49. \quad (4.24)$$

Величину критической скорости v_k нетрудно получить, подставив выражение для β_2 в формулу (2.5), что дает

$$v_k = c_2 k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2(x) - k_2(\infty)}{k_2(x) + mk_3} dx, \quad c_2 = \frac{2}{3} c_1 \approx 1. \quad (4.25)$$

Таким образом, срыв пламени наступает еще до того, как скорость движения волны обращается в нуль, что наблюдалось уже в первых опытах по «холодному» окислению сероуглерода¹³² (альтернативное объяснение предложено в работе¹³⁵).

Прямое измерение v_k позволяет получить информацию о кинетике промежуточных стадий реакции «холодного» горения. В частности, если искусственно создать на поверхности реакционной трубки область, где $k_2 \gg \gg \max [k_2(\infty), mk_3]$, то $v_k \approx 2lk$, что позволяет исследовать зависимость константы k от T и давления. Если константа k отвечает реакции второго¹³² порядка, то

$$v_k \approx 2lk_0 \left(\frac{p}{p_0} \right) \exp \left(-\frac{E_a}{RT} \right), \quad (4.26)$$

где p — парциальное давление кислорода, E_a — энергия активации (зависимостью предэкспоненты k_0 от T мы пренебрегаем).

д) Сверхпроводник под действием лазерного излучения

При облучении лазером в сверхпроводнике возможно сосуществование сверхпроводящей и резистивной фаз, а также сверхпроводящих фаз с различными значениями модуля параметра порядка Δ (см., например,⁶²). Интересующие нас нелинейные волны (доменные стенки) являются границами раздела соответствующих фаз. Волны такого типа обычно связаны с диффузией неравновесных электронных возбуждений и описываются уравнением типа (4.20)⁶². Зависимость $U = U(n)$ при этом аналогична изображенной на рис. 3, а роль параметра β играет мощность облучения P .

При превышении некоторой пороговой мощности P_p резистивная фаза вытесняет сверхпроводящую, причем при $P \approx P_p$ скорость движения $N-S$ границы $v \propto P - P_p$. Величину P_p можно оценить, приравняв плотность n_R куперовских пар, разрушаемых электромагнитным полем, равновесной плотности спаренных электронов $n_0 \sim \Delta^2 N_F / k_B T_c$, здесь N_F — плотность состояний на поверхности Ферми, k_B — константа Больцмана. Величина $n_R \sim \sim N_R \tau_e r / d$, где N_R — количество фотонов, поглощаемых единицей поверхности пленки в единицу времени, τ_e — время энергетической релаксации электронов, r — коэффициент размножения квазичастиц, обусловленный перепоглощением фононов, ударной ионизацией через щель и т. д.⁶², d — толщина пленки. Оценка для n_R имеет простой физический смысл — каждый поглощенный фотон приводит к разрыву r куперовских пар, в результате образуется $2r$ неравновесных квазичастиц, рекомбинирующих за время τ_e . Поскольку $N_R = (1 - k) P / \hbar \omega$, где ω — частота излучения, k — коэффициент отражения, то из приведенных выше оценок следует, что^{62, 136}

$$P_p \sim \frac{\Delta^2 \hbar \omega N_F d}{(1 - k) \tau_e r k_B T_c}, \quad (4.27)$$

где $\Delta^2 \sim T_c (T_c - T_0) k_B^2$.

В случае стационарного освещения с мощностью $P > P_p$ весь образец переходит в резистивное состояние за время $L_{обр}/v$, где $L_{обр}$ — длина образца. При импульсном освещении⁹⁷⁻⁹⁹ резистивная фаза существует лишь в течение времени действия импульса τ_0 ($\tau_0 \gg \tau_e$), а размер области, которую она занимает, порядка $v\tau_0$ (модель динамического промежуточного состояния¹³⁷).

Наличие в сверхпроводнике неоднородностей может приводить к следующему. Во-первых, становится возможной локализация резистивной фазы при стационарном освещении. Во-вторых, в случае импульсного освещения может происходить локализация доменных стенок, что приведет к отклонению наблюдаемого электросопротивления R от закона $\rho v \tau_0 / A$, предсказываемого моделью нестационарного неоднородного состояния. Локализация же рези-

стивной фазы на неоднородностях может сопровождаться гистерезисными эффектами, подобными описанным выше.

Характерные неоднородности могут быть обусловлены, например, переменной толщиной пленки, характером поверхности, распределением примесей и различных структурных дефектов, самим освещением (управляемая слабая связь¹³⁸) и т. д. Отметим, что некоторые из неоднородностей, на которых возможна локализация доменных стенок, не сказываются существенно на ширине сверхпроводящего перехода, являющейся обычно мерой однородности сверхпроводников. Это, например, относится к точечным неоднородностям (из-за малости отношения $l/L_{\text{обр}}$); к неоднородному распределению немагнитных примесей, не влияющих на T_c в силу теоремы Андерсона⁹⁶; к свойствам поверхности, проявляющимся в изменении коэффициента отражения k в формуле (4.27) и т. д.

Таким образом, резистивные состояния стационарно освещаемых лазером пленок однородных в смысле ширины сверхпроводящего перехода могут определяться локализацией $N-S$ границ на неоднородностях.

е) Фазовый переход диэлектрик — металл

Рассмотрим теперь нелинейные волны, возникающие при фазовом переходе диэлектрик — металл (см., например,¹³⁹). Такой переход обычно происходит при повышении температуры или давления и сопровождается существенным (до 10 порядков в окислах ванадия) скачком в проводимости σ , а также радикальным изменением оптических свойств, что широко используется в электронике, оптоэлектронике и т. д.¹³⁹.

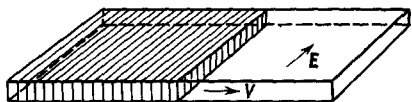


Рис. 21. Расслоение фаз при переходе металл — диэлектрик в электрическом поле E

Интересующие нас нелинейные волны возникают в неравновесных условиях, в частности, в случае разогрева образца электромагнитным полем^{64, 139}, создания существенно неравновесного распределения носителей тока⁶³ и т. д. Они являются волнами переключения, переводящими образец из металлического состояния в диэлектрическое и наоборот. Рассмотрим здесь, для определенности, температурные волны (доменные стенки), возникающие в постоянном электрическом поле E ^{64, 139}, где, очевидно, тепловыделение $Q = \sigma(T) E^2$. Так как интересующая нас система, в отличие, например, от сверхпроводника с током, обладает не N -, а S -образной ВАХ, то в ней расслоение фаз происходит поперек направления E -шнурования^{17, 18} (рис. 21). В остальном возникающие здесь волны переключения аналогичны рассмотренным выше (см. гл. 2), например, зависимость $U = U(T)$ подобна изображенной на рис. 3, где роль параметра β играет E .

Скорость волны переключения (доменной стенки) меняет знак при $E = E_p$. Оценку для величины E_p нетрудно получить по аналогии с (4.3) (см. также⁶⁴), откуда

$$E_p \sim \sqrt{\frac{\hbar T_c}{\sigma d}} \sqrt{1 - \frac{T_0}{T_c}}, \quad (4.28)$$

где σ — проводимость металлической фазы, T_c — температура фазового перехода. В случае $E > E_p$ металлическая фаза вытесняет диэлектрическую, если же $E < E_p$, то имеет место обратная ситуация.

Наличие неоднородностей приводит к тому, что доменная стенка может локализоваться при $E \approx E_p$. В частности, для неоднородностей в проводимости $E_2 - E_p \sim \Gamma E_p$, где $\Gamma \sim \Delta \sigma l / \sigma L$, $L = \sqrt{\hbar / \Delta \sigma}$, $\Delta \sigma = \sigma - \sigma_0$. В качестве примера рассмотрим распространение волны переключения в среде с точечными неоднородностями при $E > E_p$. Воспользуемся простой моделью, обсу-

ждавшейся в разделе 2, учитывая неоднородности добавлением слагаемых $\sum_i \Gamma_i \delta(x - x_i)$ в правую часть уравнения (2.24), где Γ_i — константы, характеризующие величину i -й неоднородности, находящейся в точке $x = x_i$.

Уравнение (2.44), описывающее динамику доменной стенки в рассматриваемом случае, легко интегрируется, что позволяет проследить движение стенки при произвольном распределении неоднородностей. Для наглядности мы ограничимся здесь лишь предельным случаем $|x_i - x_{i \pm 1}| \gg L$, когда фронт волны взаимодействует с каждой из неоднородностей независимо. В этом случае волна будет двигаться рывками, ускоряясь при прохождении неоднородностей с $\Gamma_i > 0$ и замедляясь при $\Gamma_i < 0$. Динамика этих процессов описывается формулой (2.43), в которой необходимо сделать замену $t \equiv |t|$.

Получим выражение для средней скорости движения доменной стенки $\bar{v} = L_{\text{обп}}/\bar{t}$, где $\bar{t}$ — время прохождения волной всего образца. Очевидно, что $\bar{t} = (L_{\text{обп}}/v) + \sum_i \Delta t_i$, где Δt_i — время задержки доменной стенки на i -й неоднородности, здесь $v = v(E)$ — скорость движения волны в однородном образце ($v > 0$ при $E > E_p$). Из (2.43) нетрудно получить, что $\Delta t_i = - (2L/v) \ln [1 + (2\Gamma_i v_0/v)]$, где $v_0 = L/\tau$, $\tau = \hbar/vd$ — тепловое время. Вводя функцию распределения неоднородностей $\varphi(\Gamma)$ получаем:

$$\bar{t} = \frac{L_{\text{обп}}}{v} \left[1 + \frac{2L}{l_i} \int_{-\infty}^{\infty} d\Gamma \varphi(\Gamma) \ln \frac{v}{v + 2\Gamma v_0} \right], \quad (4.29)$$

где l_i — среднее расстояние между неоднородностями ($l_i \gg L$). Время t обращается в бесконечность при наличии хотя бы одной неоднородности Γ_i , для которой выполняется условие локализации $2v_0 |\Gamma_i| > v$. Если, например, неоднородности являются одинаковыми источниками или стоками тепла ($|\Gamma_i| = \Gamma_0$), а в среднем образец однороден ($\sum_i \Gamma_i = 0$), то

$$\bar{v} = \frac{v}{1 + \frac{L}{l_i} \ln \frac{v^2}{v^2 - 4\Gamma_0^2 v_0^2}}. \quad (4.30)$$

Величина $\bar{v}$ обращается в нуль на пороге локализации ($2\Gamma_0 v_0 = v$). В том случае, когда $v - 2\Gamma_0 v_0 > \delta v \sim v_0 \Gamma \exp(-l_i/L)$, влияние неоднородностей практически не сказывается на средней скорости волны.

Таким образом, неоднородности влияют на время переключения (особенно при $E \approx E_p$), что может быть существенным для приложений. Заметим, что создавая должным образом искусственные неоднородности, можно получить металлические области (шнуры тока), локализованные в диэлектрической фазе. В частности, обсуждавшийся выше гистерезис на ВАХ и скачкообразные переходы между различными состояниями локализованных волн могут быть использованы для записи и хранения информации и т. д.

ж) О диссипативных структурах в неоднородной среде

В предыдущих параграфах в основном рассматривались локализованные состояния доменов и доменных стенок на изолированных неоднородностях. Если же в образце имеется несколько неоднородностей, то может возникнуть метастабильное неоднородное состояние, представляющее из себя структуру, построенную из отдельных фрагментов — локализованных доменов, либо доменных стенок. Остановимся на свойствах таких структур более подробно.

Начнем с относительно простого случая плавных неоднородностей, когда наиболее существенным фактором является изменение величины $\beta_p = \beta_p(x)$ вдоль образца. В этой ситуации на неоднородностях в окрестности минимумов функции $\beta_p(x)$ могут локализоваться устойчивые домены «сильного поля».

Если, например, такие домены описываются уравнением теплопроводности (2.6), то образующаяся структура представляет из себя чередующиеся участки «горячей» и «холодной» фаз. Отметим, что при заданном распределении неоднородностей вид самой структуры не определяется однозначно величиной параметра β . Действительно, для образования каждого локализованного домена необходима, вообще говоря, флуктуация конечной амплитуды. Максимальное число различных структур, которые могут быть реализованы при наличии n плавных неоднородностей, равно 2^n . Конкретный вид образующейся структуры определяется здесь предысторией образца, характером внешних воздействий и т. д.

При изменении параметра β может происходить скачкообразная перестройка рассматриваемых структур, например, в результате «перескока»

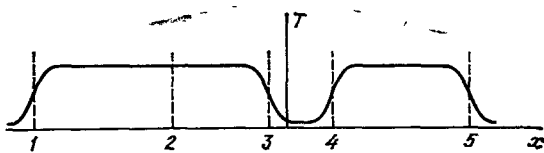


Рис. 22. Пример диссипативной структуры, возникающей при локализации доменных стенок на неоднородностях 1, 2, 3, 4, 5.

границы домена в соседнюю неоднородность, возникновения новых локализованных доменов и т. д. Как уже обсуждалось выше, такая перестройка обычно сопровождается гистерезисом (см. рис. 10).

При наличии точечных неоднородностей также может существовать метастабильная многофазная структура, обусловленная локализацией либо межфазных границ (доменных стенок), либо областей различных фаз конечных размеров (доменов). При локализации, например, доменных стенок в образце могут существовать участки различных фаз, размеры которых D_n определяются расстояниями между неоднородностями (рис. 22). Если для каждой из доменных стенок выполняется условие ее локализации (3.5), то величина D_n слабо зависит от β . В тот момент, когда для какой-либо неоднородности, например 1 на рис. 22, это условие перестает выполняться, локализованная на ней доменная стенка «срывается» и длина левого домена на рис. 22 уменьшается до тех пор, пока стенка не встретит на своем пути более сильную неоднородность, например, 2. Такая скачкообразная перестройка может происходить как за счет изменения параметра β , так и в результате достаточно сильного внешнего возмущения. Заметим, что при обратном изменении параметра β возникает гистерезис, связанный с различием между β_1 и β_2 (см. гл. 2).

Изложенные выше соображения могут быть использованы и для описания диссипативных структур в неоднородной среде. В самом деле, диссипативные структуры — статические пространственно-неоднородные распределения различных физических величин (концентраций химических реагентов, плотности, электрического поля, температуры и т. д.), возникающие в неравновесных условиях, описываются обычно двумя связанными уравнениями (см., например, 4-6):

$$v_\psi \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa_\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - f(\psi, \varphi), \quad (4.31)$$

$$v_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \Phi(\psi, \varphi), \quad (4.32)$$

где переменные $\psi(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ определяются спецификой конкретной задачи. Функции $f(\psi, \varphi)$ и $\Phi(\psi, \varphi)$ описывают взаимодействие (в том числе и самодействие) величин ψ и φ .

В последние годы интенсивно изучались диссипативные структуры (периодические, стохастические и т. д.) в различных физических, химических и биологических системах (см., например, 1-8, 32, 33, 140). Для возникновения таких структур в однородной среде необходимо, чтобы нуль — изоклина $\varphi = \varphi_s(\psi)$ уравнения (4.31) ($f(\psi, \varphi_s) = 0$), имела N-образный вид (сравни

с рис. 2), а переменная $\varphi(x, t)$ демпфировала бы неустойчивые при $\varphi = \text{const}$ неоднородные распределения $\psi(x)$, например, периодические и т. д.^{4, 140}. При таком подходе сама среда, в которой возникают диссипативные структуры, является лишь пассивным фоном, на котором «разыгрываются события». С другой стороны, неоднородности в той или иной мере всегда присутствуют в реальных системах.

Проведенное выше рассмотрение показывает, что для существования диссипативной структуры в неоднородной среде наличие демпфирующей переменной $\varphi(x, t)$ не является обязательным — ее функции начинает выполнять неоднородность. Формальный переход от системы (4.31), (4.32) к уравнению (2.6), описывающему неоднородную однокомпонентную среду ($\mu \equiv 0$), осуществляется, когда функция $\Phi(\psi, \varphi)$ не зависит от ψ , т. е. величина $\varphi(x, t)$ играет роль заданного внешнего поля. Отметим здесь основные особенности рассмотренных выше диссипативных структур: 1) жесткий режим возбуждения, 2) скачкообразная перестройка и гистерезис при изменении внешних параметров, 3) существенная зависимость характеристик от расположения и величины неоднородностей, которые в некотором смысле можно рассматривать как «затравочные» носители информации, содержащиеся в диссипативной структуре (см., например, ⁴).

В случае, когда функция $\Phi(\psi, \varphi)$ в (4.32) существенно зависит от ψ , переменную $\varphi(x, t)$ можно рассматривать как самосогласованную неоднородность, подстраивающуюся под поле $\psi(x, t)$. Если характерные пространственные масштабы L_ψ и L_φ уравнений (4.31), (4.32) существенно различаются, то для анализа возникающих диссипативных структур могут оказаться полезными методы, изложенные выше, применительно к неоднородным однокомпонентным системам. Что же касается влияния истинных неоднородностей на свойства многокомпонентных диссипативных структур, описывающихся, например, уравнениями (4.31), (4.32), то эта задача представляет, разумеется, самостоятельный интерес (см., например, ^{141, 142}, а также обзор ¹⁴³).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре мы попытались выделить общие черты, присущие нелинейным волнам типа доменов и доменных стенок, локализованных на неоднородностях среды. Проведенный анализ показывает, что такая локализация может существенно влиять на различные физические свойства системы.

Волны, рассмотренные в данном обзоре, соответствовали одномерным (или, точнее, квазиодномерным) ситуациям, достаточно часто возникающим в эксперименте. Описание двух- и трехмерных волн, локализованных на неоднородностях, является несомненно важной, хотя и существенно более сложной задачей. Однако развитые в последние годы весьма эффективные методы интегрирования нелинейных уравнений в частных производных, основанные, например, на методе обратной задачи рассеяния^{9, 10} позволяют надеяться на прогресс и в этой области.

Институт высоких температур
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Автоволновые процессы в системах с диффузией/Под ред. М. Т. Греховой.— Горький, 1981.
2. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.— УФН, 1979, т. 128. с. 625.
3. Скотт А. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.— М.: Сов. радио, 1977.
4. Николис Ж., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах.— М.: Мир, 1979.
5. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах.— М.: Мир, 1977.
6. Хакен Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.

7. Serignani C.— *Rev. Nuovo Cimento*, 1977, v. 7, p. 429.
8. Солитоны в действии/Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта.— М.: Мир, 1981.
9. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.— *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 19, p. 1095.
10. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
11. Заславский Г. М.— *УФН*, 1973, т. 111, с. 395.
12. Fogel M. B., Trullinger S. E., Bishop A. R., Krumhansl J. A.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1977, v. 15, p. 1578.
13. Кулик И. О., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах.— М.: Наука, 1970.
14. Лихарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
15. Васенко С. А., Лихарев К. К., Семенов В. К.— *ЖЭТФ*, 1981, т. 81, с. 1444.
16. Гальперн Ю. С., Филиппов А. Т.— *Письма ЖЭТФ*, 1982, т. 35, с. 470.
17. Волков А. Ф., Коган Ш. М.— *УФН*, 1968, т. 96, с. 633.
18. Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках.— М.: Наука, 1972.
19. Волков А. Ф., Коган Ш. М.— *Письма ЖЭТФ*, 1974, т. 19, с. 9.
20. Skocpol W. J., Beasley M. R., Tinkham M.— *J. Appl. Phys.*, 1974, v. 45, p. 4054.
21. Гуревич А. Вл., Минц Р. Г.— *Письма ЖЭТФ*, 1981, т. 31, с. 52.
22. Минц Р. Г.— *ДАН СССР*, 1979, т. 248, с. 352.
23. Гуревич А. Вл., Минц Р. Г.— *ФТТ*, 1981, т. 23, с. 113.
24. Гуревич А. Вл.— *ФТТ*, 1982, т. 24, с. 1776.
25. Lee P. A., Rice T. M., Anderson P. W.— *Solid State Comm.*, 1974, v. 14, p. 703.
26. McMillan W. L.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1976, v. 14, p. 1496.
27. Иванченко Ю. М., Михеенко П. Н., Хирный В. Ф.— *ЖЭТФ*, 1979, т. 77, с. 952; 1981, т. 80, с. 171.
28. Иванченко Ю. М., Михеенко П. Н.— *ЖЭТФ*, 1982, т. 82, с. 488.
29. Розанов Н. Н.— *ЖЭТФ*, 1981, т. 80, с. 96.
30. Нечаев А. М., Рубаха Е. А., Синкевич В. Ф.— *Радиотехн. и электрон.*, 1981, т. 26, с. 1773.
31. Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы.— М.: Наука, 1979.
32. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике.— М.: Наука, 1975.
33. Маркин В. С., Пастушенко В. Ф., Чизмаджев Ю. А. Теория возбудимых сред.— М.: Наука, 1981.
34. Микулинский М. А.— *УФН*, 1973, т. 110, с. 213.
35. Леванюк А. П., Осипов В. В., Сигов А. С., Собянин А. А.— *ЖЭТФ*, 1979, т. 76, с. 34.
36. Breemer J. W., Newhouse V. L.— *Phys. Rev. Lett.*, 1958, v. 1, p. 282.
37. Maddok B. I., James G. B., Norris W. T.— *Cryogenics*, 1969, v. 9, p. 261.
38. Overton W. C.— *J. Low Temp. Phys.*, 1971, v. 5, p. 397.
39. Ross B., Lister J. D.— *Phys. Rev. Ser. A*, 1977, v. 15, p. 1246.
40. Landauer R.— *Ibid.*, p. 2117.
41. Кадигробов А. М., Слуцкий А. А.— *Письма ЖЭТФ*, 1978, т. 28, с. 219.
42. Барелко В. В., Бейбутян В. М., Володин Ю. Е., Зельдович Я. Б.— *ДАН СССР*, 1981, т. 257, с. 339.
43. Ausloos M.— *Physica. Ser. B*, 1981, v. 108, p. 969.
44. Руманов Э. Н.— *ЖЭТФ*, 1978, т. 74, с. 1422; *Письма ЖЭТФ*, 1982, т. 35, с. 286.
45. Атражеев В. М., Якубов И. Т.— *ТВТ*, 1980, т. 18, с. 16.
46. Велихов Е. П., Дыхне А. М. В кн. Труды VII Международного симпозиума по ионизационным явлениям в газах.— Белград, 1965.— С. 43.
47. Бункин Ф. В., Конов В. И., Прохоров А. М., Федоров В. Б.— *Письма ЖЭТФ*, 1969, т. 9, с. 609.
48. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов.— М.: Наука, 1974; *УФН*, 1980, т. 132, с. 549.
49. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.
50. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
51. Мержанов А. Г., Барелко В. В., Курочка И. И., Шкадинский К. Г.— *ДАН СССР*, 1975, т. 221, с. 1114.
52. Володин Ю. Е., Барелко В. В., Мержанов А. Г.— *Хим. физика*, 1982, т. 1, с. 670.
53. Хачатурян А. Г. Теория фазовых переходов и структура твердых растворов.— М.: Наука, 1974.

54. Барелко В. В., Володин Ю. Е.— ДАН СССР, 1975, т. 223, с. 112.
55. Копеев Ю. В.— Тр. ФИАН, 1975, т. 86, с. 3.
56. Сонин Э. Б.— УФН, 1982, т. 137, с. 287.
57. Лифшиц И. М.— ЖЭТФ, 1942, т. 12, с. 117, 137, 156.
58. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, с. 1012.
59. Косевич А. М. Физическая механика реальных кристаллов.— Киев: Наукова думка, 1981.
60. Френкель Я. И., Конторова Т. А.— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 1340.
61. Frank F. C., Van-der-Merwe J. H.— Proc. Roy. Soc., 1949, v. 198, p. 205.
62. Елесин В. Ф., Копеев Ю. В.— УФН, 1981, т. 133, с. 259.
63. Келдыш Л. В.— Вестн. Моск. ун-та. «Сер. физика, астрономия», 1978, т. 19, вып. 4, с. 86.
64. Калафати Ю. Д., Сербинов И. А., Рябова Л. А.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 637.
65. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.— Бюлл. Моск. ун-та. Сер. матем. и мех., 1937, т. 1, с. 6.
66. Зельдович Я. Б.— ЖФХ, 1948, т. 22, с. 27.
67. Гельфанд И. М.— УМН, 1959, т. 14, вып. 1, с. 87.
68. Каметакэ Ю.— Osaka J. Math., 1976, v. 43, p. 11.
69. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1958.
70. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена.— М.: Атомиздат, 1979.
71. Теплопередача при низких температурах/Под ред. У. Фроста.— М.: Мир, 1977.
72. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В.— УФН, 1960, т. 70, с. 201.
73. Райзер Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов.— М.: Наука, 1980.
74. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М.: Наука, 1975.
75. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.— М.: Наука, 1973.
76. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения/Под ред. Дж. Б. Келлера, С. Анмана.— М.: Мир, 1974.
77. Клявин О. В.— В кн. Физические процессы пластической деформации при низких температурах.— Киев, 1974.
78. Старцев В. И., Ильичев В. Я., Пустовалов В. В. Пластичность и прочность металлов при низких температурах.— М.: Металлургия, 1975.
79. Dharmadurai G.— Phys. Stat. Sol. Ser. a, 1980, v. 62, p. 9.
80. Vedeaux D., Mazur P., Pasmanter R. A.— Physica. Ser. A, 1977, v. 86, p. 355; 1978, v. 90, p. 151.
81. Vedeaux D., Mazur P.— Ibid., 1981, v. 105, p. 1.
82. Mazur P., Vedeaux D.— J. Stat. Phys., 1981, v. 24, p. 215.
83. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Наука, 1981.
84. Гуревич А. В., Минц Р. Г.— ДАН СССР, 1982, т. 267, с. 1103.
85. Еру И. И., Песковацкий С. А., Поладич А. В.— ФТТ, 1973, т. 15, с. 2228.
86. Huebener R. P.— J. Appl. Phys., 1975, v. 46, p. 4982.
87. Богомолов В. Н., Квятковский Б. Е., Колла Е. Б., Клиторов С. А., Кумзеров Ю. А., Окунева Н. М.— ФТТ, 1981, т. 23, с. 2173.
88. Альтов В. А., Зенкевич В. Б., Кремлев М. Г., Сычев В. В. Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем.— М.: Энергия, 1975.
89. Баев В. П., Гуревич А. В., Минц Р. Г., Ушомирский М. С.— ФТТ, 1982, т. 24, с. 1544.
90. Schafft H. A.— Proc. IEEE, 1967, v. 55, p. 1272.
91. Кернер Б. С., Осипов В. В.— Микроэлектроника, 1977, т. 6, с. 337.
92. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах.— М.: ИЛ, 1953.
93. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
94. Кернер Б. С., Осипов В. В.— ДАН СССР, 1982, т. 264, с. 1366.
95. Абрикосов А. А.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 1442.
96. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов.— М.: Мир, 1968.
97. Sai-Halas C. A., Chi C. C., Denstein A., Langenberg D. N.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 215.
98. Hu P., Dynes R. C., Nagaranamurti W.— Phys. Rev. Ser. B, 1974, v. 10, p. 2786.
99. Головашкин А. И., Мицен К. В., Мотулевич Г. П.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 1408.
100. Дмитриев В. М., Христенко Е. В.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 753.
101. Гальперин Ю. М., Козуб В. И.— ФТТ, 1977, т. 19, с. 1765.

102. Eckern V., Schmid A., Smutz M., Schön G.— J. Low Temp. Phys., 1979, v. 36, p. 643.
103. Iguchi I.— Phys. Rev. Ser. B, 1977, v. 16, p. 1954.
104. Fich J., Erpelrein P. W., Welte M., Eisenmerger W.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 919.
105. Dynes R. C., Naragana murti C. J., Carno J. B.— Ibid., 1977, v. 39, p. 229.
106. Мицен К. В.— ФТТ, 1979, т. 21, с. 3475.
107. Gray K. E., Willemssen H.— J. Low Temp. Phys., 1978, v. 31, p. 911.
108. Элиашберг Г. М.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 1254.
109. Аронов А. Г., Спывак Б. З.— ФНТ, 1978, т. 4, с. 1365.
110. Аронов А. Г., Gal'perin Yu. M., Gurevich V. L., Kozub V. I.— Adv. Phys., 1981, v. 30, p. 539.
111. Компбелл А., Иветс Дж. Критические токи в сверхпроводниках.— М.: Мир, 1975.
112. Гинзбург В. Л.— ДАН СССР, 1958, т. 118, с. 464.
113. Huebener R. P.— Phys. Rept., 1974, v. 13, p. 143.
114. Breemer J. W., Newhouse V. L.— Phys. Rev., 1959, v. 116, p. 309.
115. Мусиенко Л. Е., Шнырков В. И., Волоцкая В. Г., Дмитриенко И. М.— ФНТ, 1975, т. 1, с. 413.
116. Колчин А. М., Михайлов Ю. Г., Райнов Н. М., Румянцев А. В., Смирнов А. П., Тотуболин В. Н.— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 1543.
117. Смирнов А. П., Тотуболин В. Н., Паршина И. С.— ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 117.
118. Галайко В. П.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 223.
119. Skosrol W. J., Beasley M. R., Tinkham M.— J. Low Temp. Phys., 1974, v. 16, p. 115.
120. Дьяченко А. И., Тараненков В. Ю., Ступаков В. В.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 1262.
121. Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 2334.
122. Овчинников Ю. Н.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 2020; 1983, т. 84, с. 230.
123. Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С., Замалин В. М., Кобзев Г. А., Лагарьков А. Н., Мнацаканян А. Х., Норман Г. Э.— Оптические свойства горячего воздуха.— М.: Наука, 1970.
124. Грановский В. Л. Электрический ток в газе/Под ред. Л. А. Сена, В. Е. Голанта.— М.: Наука, 1971.
125. Dharmadurai G.— Nuovo Cimento Ser. B, 1981, v. 64, p. 503.
126. Ваксер А. И., Гуревич Ю. Г.— ФТТ, 1982, т. 24, с. 3000.
127. Петухов Б. С., Ковалев С. А.— Изв. вузов. Сер. «Энергетика», 1963, № 4, с. 81.
128. Жуков С. А., Барелко В. В., Мержанов А. Г.— ДАН СССР, 1978, т. 242, с. 1064; 1979, т. 245, с. 94; J. Heat and Mass. Transfer, 1980, v. 24, p. 47.
129. Абрамов Г. И., Гуревич А. Вл., Дзугутов В. М., Минц Р. Г., Фишер Л. М.— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 453.
130. Бойко В. В., Подрезов Ю. Ф., Климова Н. П.— Письма ЖЭТФ, 1982, т. 35, с. 524.
131. Цзян Ю. Н., Логвинов И. И.— ФНТ, 1982, т. 8, с. 774.
132. Воронков В. Г., Семенов Н. Н.— ЖФХ, 1939, т. 13, с. 1695.
133. Жуков С. А., Барелко В. В.— Хим. физика, 1982, т. 1, с. 516.
134. Химические лазеры/Под ред. Р. Гросса, Дж. Ботта.— М.: Мир, 1980.
135. Новожилов Б. В., Посвянский В. С.— Физ. горен. и взрыва, 1973, г. 9, с. 225; 1974, т. 10, с. 94.
136. Головашкин А. И., Елесин В. Ф., Иваненко О. И., Мицен К. В., Мотулевич Г. П.— ФТТ, 1980, т. 21, с. 105.
137. Елесин В. Ф.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1490; 1977, т. 72, с. 365.
138. Волков А. Ф.— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 1500.
139. Бугаев А. А., Захарченя Б. П., Чудновский Ф. А. Фазовый переход металл — диэлектрик и его применения.— Л.: Наука, 1979.
140. Кернер Б. С., Осипов В. В.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 1675; 1980, т. 79, с. 2218.
141. Ross J., Ortoleva P.— J. Chem. Phys., 1972, v. 56, p. 4397; 1973, v. 58, p. 5673; 1975, v. 63, p. 3398.
142. Bimprong-Vota E. K., Nitzan A., Ortoleva P., Ross J.— J. Chem. Phys., 1977, v. 66, p. 3650.
143. Hanusse P., Ross J., Ortoleva P.— Adv. Chem. Phys., 1978, v. 38, p. 317.