

532.5(049.3)

### НОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

*Finite-difference Techniques for Vectorized Fluid Dynamics Calculations*/Ed. by D. L. Book.— New York; Heidelberg; Berlin; Springer-Verlag, 1981.—240 p.— (Springer Series in Computational Physics).

*Thomas F. Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*.— New York; Heidelberg; Berlin; Springer-Verlag, 1981.—176 p.— (Springer Series in Computational Physics).

*Telionis D. Unsteady Viscous Flows*.— New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1981.—408 p.— (Springer Series in Computational Physics).

Рецензируемые книги являются выпусками «Springer Series in Computational Physics», посвященными применению численных методов в задачах, включающих в себя расчеты гидродинамических течений. Они предназначены для специалистов в области вычислительной гидродинамики, физики плазмы, физики атмосферы, океанологии и т. д. В первой из них рассматриваются численные методы расчета одномерных и двумерных невязких гидродинамических течений, приспособленные для выполнения на современных быстродействующих ЭВМ. Важной особенностью таких ЭВМ является необходимость вычислений с векторами данных для эффективного использования их быстродействия.

Большая часть книги (шесть глав) посвящена методам решения уравнения конвективного переноса. Основные требования, предъявляемые к численным схемам решения таких уравнений, следующие: 1) линейная устойчивость; 2) выполнение физических законов сохранения, а также сохранение свойства положительности решений (плотности и т. д.) во времени; 3) достаточные точность, эффективность и общность их реализаций. С этой точки зрения анализируются метод квазичастиц, метод характеристик, конечно-разностные методы в эйлеровых и лагранжевых переменных, метод конечных элементов (в том числе и движущихся), спектральные методы.

Основным недостатком разностных методов решения уравнения конвективного переноса является введение численной вязкости (или диффузии), обеспечивающей положительность решения. Для ослабления влияния этого эффекта разработан метод корректировки потоков, оптимизирующий численную диффузию. Согласно приведенным примерам расчетов и оценкам метод позволяет понизить численную вязкость на 1—2 порядка по сравнению с существующими схемами.

Уравнения переноса в лагранжевых переменных имеют большие преимущества при описании явлений со свободными поверхностями, поверхностями раздела, сильными градиентами и т. д. Однако существенный недостаток численных схем для этих уравнений — искажение сетки со временем, которое можно устранить ее перестройкой. В двух главах описаны принципы изменения лагранжевой сетки в одномерном случае и подробно рассматриваются перестраиваемые треугольные сетки для двумерных течений. Указаны преимущества треугольных сеток, отмечается недостаточность их исследования к настоящему времени и обсуждаются перспективы их применения. Приведены примеры использования треугольных сеток для решения задач о развитии неустойчивости Релея — Тейлора и разрушении нелинейных поверхностных волн в жидкости конечной глубины.

В книге отдается предпочтение явным методам решения уравнений конвективного переноса. Но для моделей, которые описывают процессы с сильно различающимися характерными временами, применение явных схем ограничивает шаг по времени условием Куранта — Фридрихса — Леви для самых быстрых процессов, что снижает их эффективность. Для таких систем уравнений на примере моделей атмо-

сферы и океана, включающих быстрые гравитационные волны и медленные волны Россби, предлагаются явные схемы с раздельным интегрированием членов, описывающих одновременные процессы. Например, для бароклиной модели используется свой шаг по времени для каждой из гравитационных мод. Показана высокая эффективность такой схемы, особенно для моделей океана, где характерные времена различаются на два порядка.

Одна глава посвящена численным методам решения двумерных эллиптических уравнений. Приводится краткий обзор существующих методов, и подробно анализируется прямой метод решения, использующий функции отклика на значения вблизи границы, и итерационный метод решения несамосопряженных эллиптических уравнений, использующий для ускорения сходимости свойства полиномов Чебышева.

Заканчивается книга рекомендациями по написанию программ на языке фортран с учетом особенностей современных ЭВМ и полными текстами программ, реализующими описанные методы.

Во второй книге изложено применение метода конечных элементов для решения задач вязкой гидродинамики, где этот метод стал использоваться позднее, чем в линейных инженерных задачах (см.: Стрелитский, Филлипс и Дж. Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977). В методе конечных элементов, как и в методе Галеркина, используется разложение гидродинамических переменных в ряд по подходящей системе базисных функций, но определенных локально (в отличие от метода Галеркина). При этом система уравнений в частных производных приближается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Его привлекательной особенностью является большая гибкость, в частности, возможность расчета в областях со сложными границами. Укажем, например, что методом конечных элементов получены наиболее эффективные приближения любого числа первых собственных чисел оператора Лапласа — Бельтрами на произвольном многообразии. В общем случае число операций на узел сетки в методе конечных элементов превышает число операций в конечно-разностных методах, и он становится выгодным, если только достигается более высокая точность.

В книге последовательно излагается применение метода конечных элементов к решению линейных эллиптических уравнений в двумерных областях, аппроксимации конвективного переноса по аналогии с разностями против потока в конечно-разностных схемах и решению уравнений Стокса и Навье — Стокса. В качестве базисных областей используются треугольники и четырехугольники, а поля скорости и давления приближаются полиномами различных степеней.

Отдельная глава посвящена особенностям использования метода конечных элементов на современных ЭВМ. Это методы машинного разбиения областей на базисные итерационного решения уравнения Навье — Стокса, применение метода сопряженных градиентов к нахождению областей, которые необходимо измельчать, и способы эффективного решения систем линейных уравнений.

В книге отражены многие работы последних лет по применению метода конечных элементов к системе Навье — Стокса и к связанным с ней уравнениям, что делает книгу весьма актуальной.

Третья книга посвящена методам расчета течений несжимаемой вязкой жидкости при внезапном или периодическом изменении внешних условий. Такие задачи особенно часто возникают при исследовании внешней аэродинамики.

Для ламинарного течения жидкости приводятся различные варианты упрощения уравнений Навье — Стокса, основанные на методе сращивания внутренних и внешних разложений (в частности, уравнения Прандтля) и разложении в ряд по параметрам, характеризующим нестационарность. Численные методы решения упрощенных уравнений зависят от конкретных задач. Рассматривается сложное в математическом отношении решение задачи о течи, сопровождающемся отрывом пограничного слоя. Одна из глав посвящена малоисследованной области гидродинамики — нестационарным турбулентным течениям. Известно, что для расчета квазистационарных турбулентных течений с успехом применяются различные варианты полумпирических теорий для напряжений Рейнольдса. Для создания аналогичных моделей нестационарных течений существующий экспериментальный материал, по-видимому, недостаточен. Основные проблемы возникают при описании взаимодействия периодических во времени пульсаций скорости и ее турбулентных (случайных) пульсаций. Результаты численных экспериментов показывают, что модели, основанные на квазистационарных моделях замыкания (в которые время входит как параметр), не могут полностью описать поведение жидкости. В книге также приводится большое количество примеров расчета конкретных задач и тексты программ расчета на Фортране.

В целом данные книги достаточно полно отражают современное состояние вычислительной гидродинамики и применение ее методов к решению широкого класса физических задач.