

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУКФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

537.312.62

**ОБРАЗОВАНИЕ КУПЕРОВСКИХ ПАР И ПРИРОДА
СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ТОКОВ*)****В. Вайскопф**

Дается простое физическое объяснение образования куперовских пар в сверхпроводящем металле и природы образующих пары сил притяжения, возникновения вырожденного бозе-газа куперовских пар, существования конечной энергетической щели, препятствующей изменению квантового состояния электронов при низких температурах, и существования незатухающих токов в сверхпроводящей проволоке.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхпроводимость металлов обусловлена образованием слабосвязанных состояний электронных пар. Эти состояния часто рассматривают как удивительное явление, потому что две частицы с одинаковыми зарядами должны отталкиваться. Отчего же возникает притяжение между двумя электронами? Прошло много времени с тех пор, как такое притяжение между электронами было объяснено Бардином, Купером и Шриффером как эффект взаимодействия между электронами и решеткой. Однако их вычисления не основываются на наглядных физических представлениях. В этой статье мы дадим простую физическую модель, которая делает наглядным эффект притяжения и образования пар электронов. Наше описание, будучи в основном схоже с теорией БКШ, позволяет легче проследить, как возникает притяжение между электронами. Оказывается, что наша формулировка приводит к тому же самому значению для энергии связи куперовских пар, что и обычные вычисления.

Мы также приводим простые рассуждения, объясняющие, как куперовские пары и оставшиеся электроны проводимости образуют ансамбль, низшее квантовое состояние которого устойчиво, пока энергия на один электрон пары меньше, чем энергия связи куперовской пары. Поэтому такое состояние будет основным, если $kT < \Delta$. Далее будет показано, почему такое состояние приводит к появлению незатухающих токов в магнитном поле. Оказывается, что магнитное поле, создаваемое током в сверхпроводящей проволоке, как раз достаточно для поддержания тока, который его создает.

*) Weisskopf V. F. The Formation of Cooper Pairs and the Nature of Superconducting Currents.—Contemp. Phys., 1981, v. 22, pp. 375—395.—Перевод М. А. Либермана.

© Contemporary Physics., 1981.

© Перевод на русский язык,
издательство «Наука». Главная редакция
физико-математической литературы,
«Успехи физических наук», 1983.

Настоящее изложение не претендует на новые идеи в теории сверхпроводимости, а является лишь попыткой сформулировать теорию таким образом, чтобы физические явления были более прозрачными. Вместе с тем гл. 3—6 содержат новые в методическом отношении способы изложения. В гл. 7 более или менее обычным образом рассматриваются свойства тока в сверхпроводящей проволоке.

2. ПОЛУКОЛИЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Мы будем рассматривать металл как кубическую решетку из положительных ионов (с зарядом $+1$), заполненную вырожденным газом свободных электронов при нулевой температуре. Постоянная решетки d порядка нескольких боровских радиусов, и, следовательно, имеет место следующее приближенное равенство *):

$$\varepsilon_A \equiv \frac{e^2}{d} \sim \frac{\hbar^2}{md^2} \left[\frac{e^2}{d} = f \frac{\hbar^2}{md^2}, f > 1 \right], \quad (1)$$

$$f = \frac{d}{a_B}; \quad (1a)$$

здесь m — масса электрона, а a_B — боровский радиус **). Константа f больше единицы, а ε_A — энергия атома — порядка нескольких электрон-вольт. Импульс наиболее быстрых электронов, соответствующих границе фермиевского распределения, есть

$$p_F \sim \frac{\hbar}{d} \left[p_F = a \frac{\hbar}{d}, a = 3,1 \right], \quad (2)$$

и, таким образом, их скорость

$$v_e \sim \frac{\hbar}{md} \left[v_e = a \frac{\hbar}{md} \right].$$

Это значение скорости порядка скорости электронов в атомах.

Мы будем рассматривать механику решетки в самой простейшей модели, предполагая, что каждый ион является независимым осциллятором с массой M и частотой ω_D (дебаевская частота). Определим эту частоту. Естественно ожидать, что потенциальная энергия $(1/2) M \omega_D^2 x^2$, соответствующая смещению x , будет порядка $\sim \varepsilon_A$, если $x \sim d$. Отсюда, используя (1), получим

$$\frac{1}{2} M \omega_D^2 d^2 \sim \varepsilon_A \sim \frac{\hbar^2}{md^2}, \quad (3)$$

$$\omega_D \sim \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{\varepsilon_A}{\hbar},$$

$$\left[\omega_D = b \frac{\hbar}{\sqrt{mM} d^2} \right], \quad (3a)$$

*) Здесь и далее мы имеем дело с приближенными равенствами. Для получения окончательных формул из этих приближенных соотношений мы вводим численные константы порядка единицы. В конечном счете мы можем оценить комбинации из таких констант, появляющиеся в окончательном результате. «Точные» выражения, содержащие эти константы, приведены в квадратных скобках.

**) Всюду в статье буквой \hbar обозначается постоянная Планка, деленная на 2π (вместо обычного обозначения h).

где число b — несколько больше единицы *). Квадратный корень из отношения масс будет играть важную роль, и мы обозначим его

$$\beta \equiv \sqrt{\frac{M}{m}} \sim 300. \quad (36)$$

Между прочим, β является «числом Маха» для электронов, поскольку очевидно, что скорость звука есть $v_s \sim d\omega_D$.

3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТРУБКА ЗА ЭЛЕКТРОНОМ

Теперь мы рассмотрим, как влияет на решетку движение электронов. Рассмотрим электрон на границе распределения Ферми. За время $\tau = d/v_e$ он улетает на расстояние $\sim d$ от данного иона и за это время он передает импульс

$$p \sim \frac{\tau e^2}{d^2} \sim \frac{e^2}{v_e d} \quad \left[p = \frac{ce^2}{v_e d} \right] \quad (4)$$

соседнему иону, в направлении которого летит (c — константа, близкая к единице). Таким образом, ион смещается вдоль электронной траектории на расстояние δ . Из механических соотношений для осциллятора ясно, что **) $\delta = p/M\omega_D$. Поэтому из уравнений (2)–(4) получим

$$\delta \sim \frac{d}{v_e} \frac{e^2}{d^2} \frac{1}{M\omega_D} \sim \frac{1}{v_e} \frac{e^2}{d} \frac{h}{\sqrt{mM} \epsilon_A} \sim \sqrt{\frac{m}{M}} d \sim \frac{d}{\beta} \quad (5)$$

$$\left[\delta = \frac{fe}{ab} \frac{d}{\beta} \right].$$

Следовательно, ионы вблизи траектории электрона смещаются на расстояние δ вдоль траектории. Однако они не остаются в этом положении, а снова возвращаются в прежнее положение за время порядка ω_D^{-1} , скажем $s\omega_D^{-1}$. Здесь снова s — численная константа порядка единицы. Поэтому смещение ионов вдоль электронной траектории тянется на расстояние l за электроном, равное (см. (2) и (3)***)

$$l \sim \frac{v_e}{\omega_D} \sim \beta d \quad \left[l = s \frac{v_e}{\omega_D} = s \frac{a}{h} \beta d \right]. \quad (6)$$

Смещения положительных ионов вдоль траектории электрона создают отрицательный (притягивающий) потенциал U для другого электрона.

*) При выводе выражения для ω_D уравнение (3) следовало бы написать в виде $(1/2) M\omega_D^2 (d/2)^2 \sim \epsilon_A$, поскольку при смещении $d/2$ уже следует положить энергию зарядов порядка ϵ_A . При этом $b \sim 8$. Для большинства металлов, действительно, b заключено между 5 и 10.

**) Это вычисление правильно только для классического осциллятора. Такое классическое вычисление величины δ , строго говоря, сомнительно, поскольку амплитуда нулевых колебаний $\delta_0 \sim \beta^{-1/2}d$ больше смещения δ . Однако, как это часто бывает для осцилляторов, квантовомеханическое вычисление эффекта передачи импульса осциллятору в основном состоянии дает ту же величину смещения δ , что и в классической механике.

***). Чтобы понять приводимые рассуждения, мы должны иметь в виду, что $T = 0$, и поэтому электроны не могут передавать энергию колебаниям ионов, а ионы после столкновения с электроном возвращаются в первоначальное состояние за время порядка ω_D^{-1} . При этом смещения δ не распространяются по кристаллу как звуковая волна, а являются частью квантового состояния электрона в кристалле, которое отличается от состояния свободного электрона. Электрон тем самым приобретает «хвост» из смещений ионов вдоль своего пути. Это свойство квазичастицы, которой является электрон в кристалле. Такой «хвост» вносит вклад в эффективную массу электрона, однако простая оценка энергии, связанной с «хвостом» смещения ионов, дает величину порядка $\beta^{-1}\epsilon_A$, так что поправка мала по сравнению с массой электрона.

Этот потенциал локализован внутри тонкой трубки длины l и диаметра d и тянется за электроном при его движении через решетку (рис. 1).

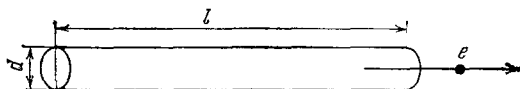


Рис. 1. За электроном e , движущимся вправо, возникает отрицательный потенциал внутри цилиндра длиной l и диаметром $\sim d$.

Давайте теперь найдем потенциал U в такой трубке относительно среднего потенциала в кристалле. При смещении иона на δ его обычный потенциал $\sim -e^2/d$ меняется на расстоянии $\sim d$ на величину

$$U \sim -\frac{e^2}{d^2} \delta \sim -\frac{e^2}{d} \frac{1}{\beta}, \quad (7)$$

$$\left[U = -g \frac{e^2}{d^2} \delta = -k \frac{g}{\beta} \frac{e^2}{d}, k = \frac{f c g}{a b} \sim 1 \right];$$

здесь g — новая константа больше единицы, поскольку средние смещения ионов меньше d и в окрестности данной точки трубки находится более чем один ион; f , b и a — также больше единицы, так что мы можем ожидать, что $k \sim 1$. Таким образом, электрон создает сзади себя потенциальную трубку длиной l и диаметром d с небольшим отрицательным потенциалом (7). Заметим, что в соответствии с (7), (36), (3) и (1) — $U \sim \hbar \omega_D$.

4. КУПЕРОВСКИЕ ПАРЫ

Какой вклад вносит такая потенциальная трубка во взаимодействие двух электронов? Будучи слабым, это взаимодействие сказывается только на электронах, расположенных близко к ферми-поверхности: другие электроны, расположенные ниже, «заморожены», и их квантовые состояния не могут изменяться. Для того чтобы в полной мере испытать воздействие этого потенциала, электроны должны встречаться, двигаясь в противоположных направлениях. Под «встречей» мы понимаем движение, при котором электроны сближаются на расстояние, меньшее или равное d . Но d — порядка длины волны электрона на поверхности Ферми. Таким образом, два электрона должны находиться в S-состоянии ($L = 0$, где L — квантовое число их относительного углового момента). Если для них $L \neq 0$, то кратчайшее расстояние между ними приблизительно будет $\sim L\lambda$, а поскольку $\lambda \sim d$, то они не будут «чувствовать» потенциала трубок, если $L \neq 0$, т. е. в полной мере ощущают воздействие такого потенциала только электронные пары в S-состояниях *).

Мы выберем потенциал взаимодействия в следующем виде (рис. 2):

$$V(r) \sim \begin{cases} = -\frac{1}{\beta} k \frac{e^2}{d} \delta_{L0} & \text{для } r < l, \\ \sim 0 & \text{для } r > l, \end{cases} \quad (8)$$

где символ δ_{L0} означает, что потенциал действует только в S-состоянии **),

*) Может показаться, что два электрона, движущихся почти в одном направлении, также должны взаимодействовать с таким потенциалом. Однако, как показано в приложении 1, это не так.

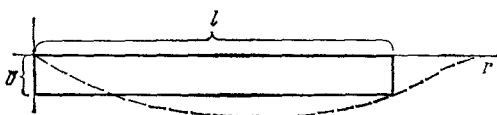
**) Здесь мы сталкиваемся со своеобразной ситуацией: потенциал действует только на расходящиеся в разные стороны электроны (т. е. когда $r > 0$) и не действует, когда они приближаются друг к другу, что связано с «хвостами» за электронами. Множитель 2 в (8), появляющийся от эффекта взаимодействия обоих электронов, мы не учитываем.

а k — численная постоянная порядка единицы. Теперь мы понимаем физическую причину того, что деформация решетки вызывает притяжение между парами электронов и почему это имеет место только для пар в S-состояниях. Далее мы должны учесть, что два электрона должны иметь противоположно направленные спины, чтобы удовлетворялся принцип Паули, поскольку S-состояние симметрично.

Теперь мы покажем, что это притяжение приводит к образованию связанных пар вблизи поверхности Ферми. В потенциале типа (8) между двумя

Рис. 2. Потенциал внутри трубки, изображенной на рис. 1, как функция расстояния за движущимся электроном.

Сплошная линия — используемое нами приближение. В действительности форма потенциала скорее ближе к штриховой линии, так как проходит некоторое время, прежде чем ионы вслед за электроном сдвигнутся на расстояние δ .



электронами заведомо должно возникать связанное S-состояние. Действительно, самое нижнее связанное состояние в потенциале глубины U и радиуса l , как на рис. 2, отвечает энергии

$$\varepsilon \approx -U + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}, \text{ если } U \gg \frac{\hbar^2}{2ml^2}.$$

Это условие хорошо выполняется для потенциальной ямы (8). Таким образом, два электрона будут образовывать связанное состояние с энергией связи $\Delta \sim U$, поскольку второй член здесь (см. (6)) мал по сравнению с первым *). Однако нас интересует связанное состояние не любых двух электронов, а лишь связанное состояние двух электронов вблизи поверхности Ферми. Это меняет ситуацию в двух отношениях. Во-первых, их относительная кинетическая энергия $2\varepsilon_F$, и можно было бы думать, что они не образуют связанное состояние, поскольку $\varepsilon_F \gg U$. Но благодаря принципу Паули такое состояние является наинизшим из всех возможных, так что приведенные соображения не обязательно справедливы. В действительности, как мы увидим ниже, взаимодействие (8) приводит к образованию связанных состояний на границе распределения Ферми, хотя и не столь сильно связанных, как это было для двух изолированных электронов.

Во-вторых, влияние взаимодействия (8) на волновые функции электронов уменьшается из-за того, что волновая функция связанного состояния может быть построена только как линейная комбинация волновых функций свободных частиц, соответствующих лишь *незанятым* состояниям, так что исключаются состояния, расположенные ниже поверхности Ферми. Мы должны удовлетворить этому условию при решении уравнения Шрёдингера для двух электронов вблизи поверхности Ферми.

Покажем теперь, что связанное состояние при этих условиях действительно образуется. Потенциал (8) уменьшает энергию пары разбегающихся электронов, расположенных на границе распределения Ферми или очень близко к ней, от величины $2\varepsilon_F$ до $2\varepsilon_F - \Delta$. Это справедливо, если только электроны движутся в противоположных направлениях (полный

*) Буква Δ в статье используется для обозначения трех разных величин: 1) как обозначение малой разности; 2) как величина энергии связи; 3) для обозначения ширины зоны энергии под поверхностью Ферми. Смысл всегда ясен из контекста.

импульс $P = 0$) и находятся в S-состоянии (полный угловой момент равен нулю). Результат будет

$$\Delta = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\xi 2\pi \frac{\varepsilon_F}{e^2/d}\right) \sim 10^{-4}\varepsilon_A,$$

где ξ — численный множитель порядка единицы. Это — выражение для энергии связи куперовских пар, обычно получаемое путем довольно сложного вычисления испускания и поглощения звуковых волн.

Теперь мы приступим к выводу этой формулы. Тот, кто не интересуется этими вычислениями, может пропустить все вплоть до формулы (23). Мы знаем, что решение $\Psi(r)$ должно описывать S-состояние (r — расстояние между двумя электронами), поэтому разложим Ψ по S-состояниям $\psi(r)$ пар свободных электронов, имеющих относительный импульс p и полный импульс $P = 0$, поскольку эти электроны движутся навстречу друг другу.

Проблема сводится к одномерной задаче с граничным условием $\psi(0) = 0$:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sin \frac{pr}{h}. \quad (9)$$

Эти функции нормированы и ортогональны внутри большой сферы радиуса R . Теперь мы можем написать для волновой функции $\Psi(r)$ куперовской пары:

$$\Psi(r) = \sum_{p'} \alpha(p') \sqrt{\frac{2}{R}} \sin \frac{p'r}{h}, \quad (10)$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям p' в сфере R . Уравнение Шрёдингера для Ψ имеет вид

$$\left(\frac{1}{2\mu} p^2 + \hat{V}\right) \Psi = E\Psi, \quad (11)$$

где $\mu = m/2$ — приведенная масса.

При решении уравнения Шрёдингера следует иметь в виду, что сумма в (10) не содержит импульсы $p < p_F$, так как они заняты другими электронами. Как будет видно из дальнейших вычислений, интервал Δp , где коэффициенты $\alpha(p)$ заметно отличаются от нуля, очень узкий

$$\Delta p \sim \frac{m}{p_F} \Delta.$$

Подставим (10) в уравнение (11), умножим на $\psi(p)$ и проинтегрируем. В результате получим

$$\alpha(p) \left(\frac{p^2}{m} - E\right) = - \sum_{p'} \alpha(p') (p|V|p'), \quad (12)$$

где $(p|V|p')$ — матричный элемент потенциала V , определяемого формулой (8):

$$(p|V|p') = \int_0^R dr \psi(p) V(r) \psi(p'), \quad (13)$$

а E — собственное значение энергии, отвечающее связанному состоянию Ψ . Теперь введем вместо p энергетическую переменную ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{m} (p^2 - p_F^2). \quad (14)$$

Равное нулю значение этой переменной соответствует энергии Ферми $2\varepsilon_F$ пары ($\varepsilon_F = p_F^2/2m$), т. е. энергии пары, которая была бы в отсутствие взаимодействия $V(r)$. При выбранном таким способом начале отсчета энергий собственное значение E будет равно взятой с обратным знаком энергии связи пары Δ :

$$E = -\Delta. \quad (15)$$

Из формул (12) и (15) мы имеем теперь

$$\alpha(\varepsilon)(\varepsilon + \Delta) = -\sum_{\varepsilon'} \alpha(\varepsilon')(\varepsilon | V | \varepsilon'). \quad (16)$$

Вычислим матричный элемент (13). Поскольку потенциал $V(r) = 0$ для $r > l$ и постоянен при $r < l$, все вычисление сводится к интегрированию от 0 до l произведения

$$\psi(p)\psi(p') = \frac{1}{R} \left[\cos(p-p') \frac{r}{h} - \cos(p+p') \frac{r}{h} \right].$$

Так как p всегда близко к p_F , интеграл от периодических функций для $l \gg h/p_F$ равен нулю, кроме случая $p - p'$ меньше или порядка (h/l) . С учетом этого сразу получаем

$$\int_0^l \psi(p)\psi(p') dr \begin{cases} \sim -\frac{l}{R} & \text{для } p-p' < \frac{h}{l}, \\ = 0 & \text{для } p-p' > \frac{h}{l}. \end{cases} \quad (17)$$

Какой интервал $\Delta\varepsilon$ по шкале энергии ε соответствует $p - p' = h/l$ вблизи $p = p_F$? Из формулы (14) мы видим, что $\varepsilon - \varepsilon' = 2p_F(p - p')/m$. Отсюда для критической разности энергии $\Delta\varepsilon$, используя (6) и $V_e = p_F/m$, получаем

$$\Delta\varepsilon = \frac{2p_F}{m} \frac{h}{l} \sim \frac{1}{\beta} \frac{2p_F}{m} \frac{h}{d} \sim 2h\omega_D. \quad (18)$$

Используя теперь соотношения (6), (8), (17) и (19), находим матричный элемент

$$(\varepsilon | V | \varepsilon') \sim \begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{e^2}{d} \frac{l}{R} \sim \frac{e^2}{R} & \text{для } \varepsilon - \varepsilon' < \Delta\varepsilon \sim 2h\omega_D, \\ 0 & \text{для } \varepsilon - \varepsilon' > h\omega_D \end{cases} \quad (19)$$

$$\left[(\varepsilon | V | \varepsilon') = ks \frac{e^2}{R} \text{ для } \varepsilon - \varepsilon' < 2h\omega_D \right].$$

Интересно, что β выпадает из окончательного результата.

Мы приходим к важному выводу, о котором упоминалось выше. Уравнение Шрёдингера (16) было бы правильно, если бы два электрона были изолированы, но они занимают состояния на поверхности Ферми, поэтому никакие состояния под поверхностью Ферми не годятся для образования куперовских пар. Отсюда следует, что сумма по ε' в (16) распространяется только на $\varepsilon' > 0$! Заменим эту сумму $\sum_{\varepsilon'}$ интегралом.

Число S-состояний в интервале энергий $d\varepsilon$ вблизи ε_F есть $(mR/2\pi p_F \hbar) d\varepsilon$, и, следовательно, уравнение Шредингера (16) можно переписать как *)

$$\alpha(\varepsilon)(\varepsilon + \Delta) = +B \int_0^{2\hbar\omega_D} \alpha(\varepsilon') d\varepsilon', \quad (20)$$

$$B \sim \frac{e^2 m}{2\pi p_F \hbar} = \frac{e^2 m p_F}{2\pi p_F^2 \hbar} \sim \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{d\varepsilon_F} \quad (21)$$

$$\left[B = ks \frac{e^2 m}{2\pi p_F \hbar} \right].$$

В определении B использованы соотношения $\varepsilon_F = p_F^2/2m$ и $p_F = a(h/d)$. Численный множитель 2π мы оставили в приближенном выражении для B , так как в окончательном результате он оказывается в экспоненте. Правая часть уравнения (20) не зависит от ε , поэтому мы положим (C — константа, которая в дальнейшем выпадает)

$$\alpha(\varepsilon) = C(\varepsilon + \Delta)^{-1}. \quad (22)$$

и получим

$$1 = B \int_0^{2\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' + \Delta} = B \ln \frac{2\hbar\omega_D + \Delta}{\Delta}.$$

Как будет видно, $\Delta \ll \hbar\omega_D$, так что

$$\Delta = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\xi \frac{2\pi\varepsilon_F}{e^2/d}\right), \quad \xi = \frac{1}{ks} = \frac{ab}{fegs}. \quad (23)$$

Множитель ξ порядка единицы, так как ab компенсируется множителями f и g . Δ — энергия связи куперовской пары. Обозначим

$$\Psi = \exp\left(-\xi 2\pi \frac{\varepsilon_F}{e^2/d}\right). \quad (24)$$

Эта величина порядка 10^{-2} — 10^{-3} , поскольку $\varepsilon_F/e^2/d \sim 1$. Мы можем теперь записать Δ в атомных единицах энергии следующим образом (см. формулу (3)):

$$\Delta = 2\beta^{-1}\gamma\varepsilon_A, \quad (25)$$

т. е. Δ составляет около 10^{-4} — 10^{-5} атомных единиц; грубо говоря, около нескольких единиц на 10^{-4} эВ, что соответствует нескольким градусам (kT).

Следующее интересное обстоятельство позволяет лучше понять вид выражения (23). Хорошо известно, что в трехмерной потенциальной яме (глубины U и радиуса l) не образуются связанные состояния, пока глубина потенциальной ямы не станет достаточно большой:

$$U > t \frac{\hbar^2}{ml^2},$$

*) Верхний предел в интеграле следует выбрать $\sim (\hbar\omega_D + \varepsilon)$, так как матричные элементы отличны от нуля для $\varepsilon - \varepsilon' \sim \hbar\omega_D$. Однако, как будет видно ниже, $\alpha(\varepsilon')$ существенно отлично от нуля только при $\varepsilon \ll \hbar\omega_D$, так что зависимость от ε в верхнем пределе можно не учитывать.

где t — некоторая численная константа. В то же время в одномерной потенциальной яме связанные состояния образуются при любой величине U . Наименьшая энергия связи есть

$$\Delta = t' \frac{U^2}{h^2/ml^2};$$

здесь t' — другой численный множитель.

Двумерная потенциальная яма также допускает связанные состояния при любой величине U :

$$\Delta = t'' \frac{h^2}{ml^2} \exp\left(-\zeta \frac{h^2/ml^2}{U}\right),$$

где t'' и ζ — численные постоянные. Энергия связи в этом случае экспоненциально обращается в нуль при $U \rightarrow 0$. Последнее выражение напоминает выражение (23) для энергии связи куперовской пары. В действительности обе эти ситуации несколько похожи, поскольку задача для куперовской пары также ограничена двумя измерениями (поверхность Ферми) в импульсном пространстве.

5. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ КУПЕРОВСКОЙ ПАРЫ

Так как волновая функция куперовской пары отвечает связанному S-состоянию, движение электронов можно представить как периодическое движение взад и вперед двух электронов, однородно распределенных в

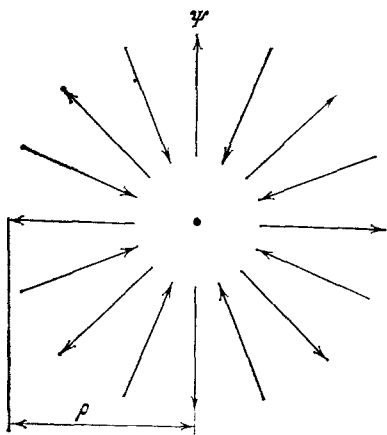


Рис. 3. Структура квантового состояния куперовской пары. Она представляет линейную комбинацию движений во взаимно противоположных направлениях, причем электроны остаются в пределах области размером порядка ρ .

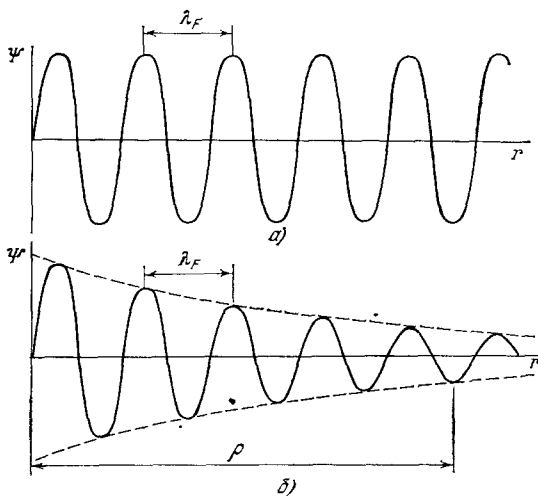


Рис. 4. а) Волновая функция Ψ двух не взаимодействующих электронов вблизи поверхности Ферми в S-состоянии как функция расстояния между ними; б) волновая функция Ψ двух взаимодействующих электронов — волновая функция куперовской пары. λ_F — около двух постоянных решетки, а ρ — длина когерентности. Заметим, что в действительности ρ — около 10^4 постоянных решетки.

области с размером порядка ρ , как изображено на рис. 3. Эта картина аналогична движению двух нуклонов в дейтроне или двух электронов в основном состоянии позитрония. Другой пример — атом водорода в

S-состоянии. В последнем случае электрон совершает много пролетов туда и обратно, в то время как протон только слегка сдвигается. Волновая функция конечна, т. е. она обращается в нуль значительно быстрее, чем r^{-1} , на расстояниях $r > \rho$.

Давайте определим ρ из распределения по импульсам для волновой функции пары. Согласно (10) волновая функция куперовской пары состоит из волновых функций типа (9) (рис. 4) с импульсами p , заключенными в узком интервале вблизи p_F . Средний разброс импульса Δp связан с разбросом по энергии соотношением (14): $\Delta \varepsilon = \Delta p \cdot p_F / m$. В соответствии с (22) $\Delta \varepsilon$ порядка Δ , и, следовательно, мы получаем

$$\Delta = \frac{p_F}{m} \Delta p. \quad (26)$$

Так как $\varepsilon_F = p_F^2 / 2m$, то мы видим, что $\Delta p / p_F \sim \Delta / \varepsilon_F$ — очень малая величина. Таким образом, Ψ состоит в основном из волн с волновым числом p_F / \hbar и имеет вид $\sin(p_F r / \hbar)$ для $r \ll \rho$, где $\rho \sim \hbar / \Delta p$. Для $r > \rho$ волны (9) исчезают благодаря интерференции, и, следовательно, Ψ имеет конечную протяженность (см. рис. 4). Расстояние ρ как раз и является «размером» волновой функции Ψ , и поэтому мы получаем

$$\rho \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim \frac{\hbar p_F}{m \Delta} \sim \frac{p_F^2}{m \Delta} d \sim \frac{\varepsilon_F}{\Delta} d, \quad (27)$$

где третий знак \sim появляется из $p_F \sim \hbar / d$, а четвертый — из $(p_F^2 / m) \sim \varepsilon_F$. Отсюда мы видим, что ρ очень велико по сравнению с постоянной решетки. Согласно формуле (25) размер ρ даже больше в γ^{-1} раз (см. формулу (24)), чем длина потенциальной трубки $l \sim \beta d$. То, что волновая функция простирается на значительно большие расстояния, чем потенциал, когда энергия связи мала, — явление хорошо известное; вспомним, например, дейтон.

Большая протяженность волновой функции является причиной того, что электростатическое отталкивание между электронами пары не сказывается существенно на энергии связи. Такое отталкивание действует только на расстояниях порядка d , так как электрическое поле на больших расстояниях (вне «дебаевского радиуса») сильно экранируется благодаря перестройке электронного газа. Оставшееся отталкивание будет уменьшать волновую функцию на расстояниях порядка нескольких d от центра. Поскольку $\rho \gg d$, это обстоятельство изменяет волновую функцию в непосредственной близости к центру и не сказывается существенно на энергии связи, поскольку потенциал $V(r)$ простирается на значительно большие расстояния, $l \gg d$. В теории сверхпроводимости длина ρ называется «длинной когерентности» и имеет порядок $\sim 10^{-4}$ см.

6. АНСАМБЛЬ КУПЕРОВСКИХ ПАР

Куперовские пары образуются только электронами, которые лежат вблизи границы распределения Ферми, не более чем на Δ ниже поверхности Ферми ε_F или не более чем на Δp (определяемое (26)) ниже поверхности p_F в пространстве импульсов (рис. 5). Электроны, лежащие глубже, не могут воспользоваться пустыми состояниями для того, чтобы образовать волновую функцию Ψ куперовской пары. Все куперовские пары обладают полным импульсом $P = 0$ и поэтому находятся в одном и том же квантовом состоянии. Это ничему не противоречит, поскольку, как двухэлектронная система, они подчиняются статистике Бозе и образуют вырожденный бозе-газ.

Каково число n' куперовских пар в 1 см^3 ? Обозначив $n = 1/d^3$ — число электронов на 1 см^3 , получим

$$n' \sim \frac{1}{2} n \frac{\Delta}{\varepsilon_F}.$$

Поскольку это соотношение полуколичественное, можно опустить множитель $1/2$, и тогда можно написать

$$n' \sim \frac{1}{d^3} \frac{\Delta}{\varepsilon_F} \sim \frac{1}{4d^2\rho},$$

откуда получим для расстояния D между куперовскими парами

$$D \sim \left(\frac{1}{n'}\right)^{1/3} = d \left(\frac{\rho}{d}\right)^{1/3} \sim (30 \div 40) d. \quad (28)$$

Поскольку размер пар ρ значительно больше этой величины, то они будут перекрываться. Важно однако отметить, что, несмотря на перекрытие, их волновые функции остаются ортогональными:

$$\int \Psi_i \Psi_k d\tau = \delta_{ik}, \quad (29)$$

где $d\tau$ — пространственные координаты электронов, входящих в две пары, описываемые волновыми функциями Ψ_i и Ψ_k соответственно. Это не удивительно, если учесть, что волновые функции осциллируют около нуля, как

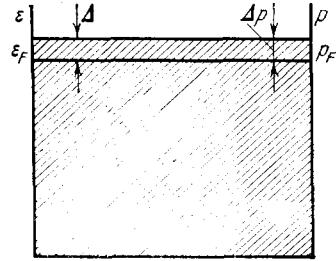


Рис. 5. Распределение в металле электронов по энергии. Все состояния ниже ε_F (по энергетической шкале) или p_F (по шкале импульсов) заняты.

Электроны, образующие куперовские пары, находятся в Δ -слое (по энергии) или $\Delta\rho$ -слое (по импульсам) под верхней границей.

изображено на рис. 4, 6. Следующие полуколичественные рассуждения помогут нам понять смысл соотношения (29). Когда взаимодействие между электронами выключено, электроны, входящие в куперовские пары, находятся в ортогональных состояниях и заполняют фазовое пространство в верхней части распределения Ферми — от границы до энергий примерно на Δ ниже поверхности Ферми. Назовем « Δ -слоем» часть распределения Ферми в интервале энергий шириной Δ под поверхностью Ферми. «Включение» взаимодействия несущественно изменяет их энергию или импульс. В самом деле, это изменение порядка Δ по энергии или $\Delta\rho$ по импульсу. Таким образом, фазовое пространство этих электронов не очень сильно изменяется. Поскольку они находились в ортогональных состояниях и полностью заполняли все фазовое пространство в Δ -слое до включения взаимодействия, с хорошей точностью можно считать, что они останутся в тех же состояниях и после включения взаимодействия. Волновые функции куперовских пар — это другой набор ортогональных состояний для n' электронов в Δ -слое.

На основании тех же соображений мы заключаем, что волновые функции куперовских пар ортогональны волновым функциям всех электронов, занимающих состояния ниже Δ -слоя. Специфическое взаимодействие между электронами, обсуждавшееся в предыдущей главе, переводит рас-

пределение Ферми в ансамбль, состоящий из куперовских пар, образованных из n' электронов в Δ -слое и свободных электронов ниже Δ -слоя. (Последние не могут образовывать куперовские пары, поскольку все соседние уровни внутри Δ -слоя заняты другими электронами.)

Следующая наша задача — это осознание того факта, что для того, чтобы достичь первого возбужденного состояния в ансамбле, необходима конечная энергия порядка Δ . Вспомним, что возбужденные состояния свободных электронов в фермиевском распределении расположены бесконечно близко к основному состоянию. Это — состояния, в которых один или несколько электронов вблизи поверхности Ферми перешли на уровни слегка выше поверхности Ферми — именно они и переносят электрический ток. Существование конечной энергии, необходимой для достижения первого возбужденного состояния, можно увидеть следующим образом. Для свободных электронов ниже Δ -слоя необходима, по крайней мере, энергия Δ , чтобы попасть на один из незанятых уровней выше поверхности Ферми, а для электронов, образующих куперовские пары, нужно преодолеть энергию связи куперовской пары, чтобы попасть на эти уровни.

Но здесь возникает другой вопрос: что мешает простой куперовской паре изменить свое движение таким образом, чтобы перейти, не разрушаясь, из состояния с импульсом $P = 0$ в состояние с малым импульсом $P' \neq 0$? Если $(P')^2/m \ll \Delta$, то это будет возбужденное состояние ансамбля с энергией возбуждения много меньше Δ , и, более того, — это «*токонесущее*» состояние. Однако изменение движения одной куперовской пары невозможно, поскольку это потребовало бы такого изменения свободных электронных состояний (9), образующих куперовские пары, чтобы они включали пары свободных электронных уровней с суммарным импульсом P' . Но все электроны в Δ -слое образуют куперовские пары, и, следовательно, изменение движения одной пары потребовало бы перестройки также и всех других пар. В действительности, единственная возможность для одной куперовской пары изменить свой импульс от $P = 0$ до $P = P'$ — это изменить импульс всего ансамбля пар, для чего необходима энергия значительно больше Δ .

Образование куперовских пар в Δ -слое действует подобно корке льда на границе распределения Ферми. Необходима по крайней мере энергия Δ , что сломать корку и освободить один или более электронов, так чтобы они смогли занять пустые уровни над поверхностью Ферми.

В этой связи, может быть, интересно обсудить сверхтекучесть гелия. Рассмотрим разреженный и плотный вырожденный бозе-газ из атомов He. Под разреженным мы имеем в виду газ с плотностью (число атомов на 1 см^3) $n \ll 1/r_0^3$, где r_0 — радиус атома He. При нулевой температуре все атомы будут находиться в наинизшем состоянии в сосуде Ω . На рис. 6 показаны возможные состояния атомов в Ω — они расположены бесконечно близко друг к другу. Наинизшее состояние занято всеми атомами He, но один атом может легко перейти в соседнее, более высокое состояние. Хотя при этом он движется относительно других атомов, вероятность его столкновения с ними очень мала, т. е. он находится в свободном состоянии. Чтобы вырваться на свободу и перейти в состояние с другой скоростью, атому нужно сообщить бесконечно малую энергию. Мы говорим, что в такой ситуации нет энергетической цели.

Теперь рассмотрим плотный газ, под которым мы понимаем газ, в котором атомы «касаются» друг друга (рис. 7), но все же не перекрываются, так что условие (29) для них остается в силе. Добавление еще нескольких атомов привело бы к нарушению принципа Паули по отношению к электронам в атомах гелия. Вырожденное состояние такого бозе-газа — это состояние, в котором все атомы имеют один и тот же импульс P , например

$P = 0$. В этом случае следует затратить энергию, чтобы «освободить» один атом — перевести его из состояния покоя в состояние с другой скоростью. Эту ситуацию мы можем понять, сравнивая ее с полностью забитым вагоном метро. Имеется две возможности для человека, находящегося

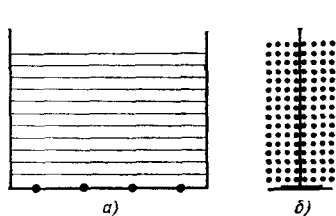


Рис. 6. а) Разреженный бозе-газ (одночастичные состояния; при нулевой температуре все частицы занимают основное состояние (нет движения); б) состояния ансамбля (при нулевой температуре газ находится в наинизшем состоянии, но имеются разрешенные состояния в непосредственной близости над наинизшим; если одна или несколько частиц занимают эти состояния, это соответствует медленному движению).

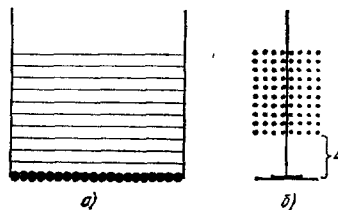


Рис. 7. а) Плотный бозе-газ (одночастичные состояния; при нулевой температуре все частицы находятся в основном состоянии и касаются друг друга; б) состояния ансамбля (при нулевой температуре газ находится в наинизшем состоянии; следующее, более высокое состояние, находится на конечном расстоянии Δ над наинизшим, поскольку движение одной или нескольких частиц независимое от других невозможно; единственный способ возбуждения ансамбля — рождение ротонов, т. е. переход частицы в возбужденное состояние).

в середине вагона, передвигаться относительно соседей, чтобы попасть к выходу. Первый путь — проникать насквозь через соседей. Конечно, для пассажира это невозможно, но атом He может так поступать, переходя в возбужденное состояние. В этом случае принцип Паули не запрещает такому атому занимать то же самое место, что и другому атому в основном состоянии. Вообще говоря, для такого перехода требуется энергия

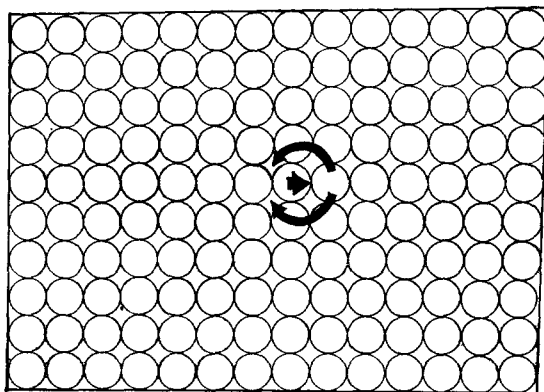


Рис. 8. Изображение плотного бозе-газа.

Частица может двигаться вперед, только расталкивая соседей. Частица, находящаяся прямо перед ней, должна быть вытолкнута либо вверх, либо вниз.

$\epsilon_A \sim h^2/mr_0^2$. Другой, более дешевый (а также и более реалистичный) путь — своего рода «проплывание брассом» с отбрасыванием соседей назад (рис. 8). Такое передвижение требует небольшого сжатия и вращения. Необходимая энергия будет порядка энергии вращения двух атомов, $\sim h^2/Mr_0^2$, которая в M/m раз меньше, чем ϵ_A , и составляет несколько единиц на 10^{-4} эВ, что соответствует температуре в несколько градусов.

Таким образом, для того чтобы удалить атом из плотного бозе-газа (все частицы в одном и том же состоянии), необходима конечная энергия. То есть мы видим, что имеется конечная энергетическая щель между вырожденным состоянием бозе-газа, в котором все атомы имеют один и тот же импульс, и состоянием, в котором один атом свободный. Энергетическая щель представляет температуру перехода в сверхтекучее состояние. Если kT меньше этой щели, жидкость может двигаться только как целое.

7. СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ТОК

Каким образом в ансамбле электронов с полным импульсом $P = 0$ возникает ток, и даже сверхпроводящий? — вовсе без сопротивления — ток? Можно подумать, что в состоянии с $P = 0$ движение зарядов отсутствует. Это не так, и причина заключается в том, что в присутствии магнитного поля скорость более не пропорциональна импульсу. Общее определение скорости — это

$$v = \frac{\partial k}{\partial p},$$

где k — кинетическая энергия, которая для свободных электронов в присутствии вектор-потенциала A будет равна

$$k = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{e}{c} A \right)^2. \quad (30)$$

Отсюда для скорости мы получаем

$$v = \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c} A \right). \quad (31)$$

Плотность тока j в ансамбле электронов есть

$$\frac{1}{c} j = \frac{e}{c} \sum_i v_i = \frac{e}{mc} \sum_i p_i - \frac{e^2 n}{mc^2} A, \quad (32)$$

где n — число электронов в единице объема. Здесь пренебрегается небольшим изменением импульса, связанным с образованием куперовских пар — во всяком случае, основной ток создается электронами, расположенными под коркой из куперовских пар. Сумма по импульсам в формуле (32) равна нулю, поскольку $P = 0$, и мы получаем

$$\frac{1}{c} j = -\frac{1}{\lambda^2} A, \quad \lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{e^2 n}} = d \sqrt{\frac{d}{r_0}}, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}. \quad (33)$$

Мы видим, что ток прямо пропорционален *) A с константой, имеющей размерность обратного квадрата длины λ , содержащей d , поскольку $n = d^{-3}$, и так называемый классический радиус электрона r_0 . Легко видеть, что

$$\lambda = \sqrt{f} \frac{hc}{e^2} d,$$

где f определено в (1а). Эта величина более чем в 137 раз меньше постоянной решетки **).

*) Может показаться удивительным, что физическая величина, такая, как плотность тока, пропорциональна величине A , не являющейся градиентно инвариантной. Ответ заключается в том, что при калибровочном преобразовании A переходит в $A' = A + \nabla \eta$, где η — функция пространственных координат. При этом волновая функция электронов ψ переходит в $\psi' = \psi \exp \{ i [(e/c) \eta] \}$, и поэтому импульс p всех электронов переходит в $p' = p + (e/c) \nabla \eta$, тем самым компенсируя изменение A в (30). Мы выбрали естественную калибровку, при которой все импульсы электронов остаются нулевыми.

**) Конечно, $hc/e^2 = \lambda_C/r_0 = a_B/\lambda_C = 137$, где λ_C — комптоновская длина волны.

Кажется парадоксальным, что в системе, полный импульс которой остается равным нулю, может возникать электрический ток. Эту ситуацию можно иллюстрировать следующим примером. Рассмотрим электронную оболочку атома неона. Она целиком заполнена, и поэтому полный угловой момент равен нулю, хотя при этом некоторые электроны вращаются в одну сторону и такое же количество — в другую сторону, имея угловой момент, равный одному \hbar *). Когда включается магнитное поле B ($A \neq 0$), электроны с угловым моментом L , параллельным B , начинают вращаться быстрее, а с противоположным угловым моментом — медленнее (эффект Зеемана), но величины их угловых моментов остаются без изменения, они могут быть только целыми кратными \hbar . Таким образом, мы получаем циркулярный ток без изменения углового момента, который остается равным нулю. Циркулярный ток порождает магнитное поле, уменьшающее B . Это явление называется диамагнетизмом.

Наиболее важный пункт для понимания природы сверхпроводящего тока — это существование энергетической щели Δ . Ток (33) — это не что иное, как индукционный ток, который появляется при включении магнитного поля. Электроны ускоряются в процессе включения, и таким образом возникает ток (33). Кинетическая энергия в процессе включения поля возрастает. Полная кинетическая энергия K на единицу объема, соответствующая уравнению (30), есть

$$K = \sum_i k_i = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + \frac{e^2 n}{2mc^2} A^2 \quad (34)$$

(член, содержащий $p_i A$, равен нулю, поскольку $P = 0$). В несверхпроводящем металле такое увеличение кинетической энергии компенсируется за короткое время релаксации изменением импульса p_i каждого электрона на eA/c , так что кинетическая энергия K приходит к первоначальному значению **). Тогда полный ток снова станет равен нулю. Индукционный ток затухает благодаря сопротивлению металла. Такой перестройке, однако, мешает корка из куперовских пар на поверхности Ферми. (Аналогично тому, как не затухает диамагнетизм He с течением времени.) Распределение электронов по импульсам не может измениться, поскольку это требует конечной затраты энергии, пусть и очень небольшой ***).

Мы теперь изложим известное утверждение Фрица Лондона, согласно которому из уравнения (33) следует, что магнитное поле может проникать в сверхпроводник не больше чем на глубину λ . Поэтому λ называют «глубиной проникновения». Об этом явлении говорят как о бесконечном диамагнетизме. Воспользуемся одним из уравнений Максвелла, а именно $\text{rot } B = j/c$ и запишем уравнение (33) в следующем виде:

$$\text{rot } B = -\frac{1}{\lambda^2} A.$$

*) Электронная оболочка неона не содержит электронов с более высокими угловыми моментами, больше, чем значение \hbar .

**) В действительности не каждый электрон должен изменить импульс, чтобы получилось новое распределение по импульсам, а только часть из них вблизи поверхности Ферми. Электроны, для которых p_i параллельно или почти параллельно A , должны увеличить энергию, а электроны, для которых p_i направлены в противоположную сторону, — уменьшить ее. Новое распределение импульсов получается из первоначального изменением направлений p_i .

***) Можно было бы подумать, что в изоляторе также возможен сверхпроводящий ток, так как там тоже имеется энергетическая щель (и даже значительно бóльшая) между зоной заполненных электронных состояний и следующей незаполненной зоной. Почему изолятор не является сверхпроводником, объясняется в приложении 2.

Конечно, это уравнение справедливо только внутри сверхпроводника. Применим к нему еще раз операцию rot ($\text{rot rot} = -\nabla^2$):

$$\nabla^2 B = \frac{1}{\lambda^2} B. \quad (35)$$

Это соотношение показывает, что внутри сверхпроводника B должно вести себя экспоненциально: $B \sim \exp(\pm x/\lambda)$, где ось x , например, может быть направлена в глубь проводника. Ясно, что если толщина проводника много больше λ , то возможен только знак минус (рис. 9).

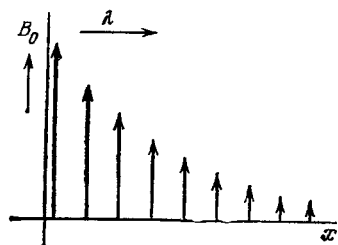


Рис. 9. Проникновение магнитного поля B_0 в сверхпроводник, занимающий полупространство при $x > 0$.

Наша конечная цель — это описание сверхпроводящего тока в прямой цилиндрической проволоке, имеющей радиус R и практически бесконечную длину. Сначала рассмотрим бесконечный сверхпроводник с плоской поверхностью. Представим себе прямоугольную систему координат с плоскостью $x = 0$, совпадающей с поверхностью сверхпроводника, и с осью x , направленной в глубь металла. Представим далее, что во внешней ($x < 0$) области имеется магнитное поле B_0 , направленное вдоль оси y (рис. 10). Из уравнения (35) видно тогда, что внутри металла ($x > 0$) магнитное поле должно быть таково:

$$B_y = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad x > 0, \quad (36)$$

а все другие компоненты (B_z , B_x) равны нулю. Соответствующий векторпотенциал ($\text{rot } A = B$)

$$A_z = -\lambda B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad x > 0, \quad (37)$$

с $A_x = A_y = 0$, направлен против оси z . В соответствии с уравнением (33) должен возникать электрический ток с плотностью j :

$$\frac{1}{c} j_z = -\frac{1}{\lambda^2} A_z = \frac{1}{\lambda} B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

и $j_x = j_y = 0$. Ток течет по металлу вдоль оси z только в слое толщиной λ вблизи поверхности. Заменим экспоненту ступенчатой функцией:

$$\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = \begin{cases} 1 & \text{для } x < \lambda, \\ 0 & \text{для } x > \lambda. \end{cases} \quad (38)$$

Полезно определить полный ток J_S , протекающий через прямоугольник в плоскости x , y с длиной S в y -направлении и шириной λ в x -направлении, прилегающий к поверхности внутри металла. В соответствии с нашим допущением (38) плотность тока через прямоугольник равна B_0/λ и ток J_S есть

$$\frac{1}{c} J_S = \frac{B_0}{\lambda} \lambda S = S B_0. \quad (39)$$

Это равенство следует интерпретировать следующим образом: пока имеется магнитное поле B_0 вдоль y -направления вне сверхпроводника, внутри металла, на глубине толщиной λ , течет ток вдоль поверхности в направлении z , и этот ток равен $c B_0$ на единицу длины в направлении x , перпендикулярном току.

Теперь рассмотрим сверхпроводящую проволоку радиуса R , с осью, направленной по z и азимутальным магнитным полем B_0 вокруг проволоки, параллельным ее поверхности и перпендикулярным оси z . Мы видим, что вдоль z будет течь ток J силой

$$J = 2\pi R c B_0, \quad (40)$$

который локализован в слое толщиной λ вблизи поверхности (рис. 11). Из уравнений Максвелла мы знаем, что ток (40) создает на расстоянии R такое же азимутальное магнитное поле B_0 . Таким образом, эта ситуация самосогласованная и стабильная. Ток производит поле B_0 , которое в свою

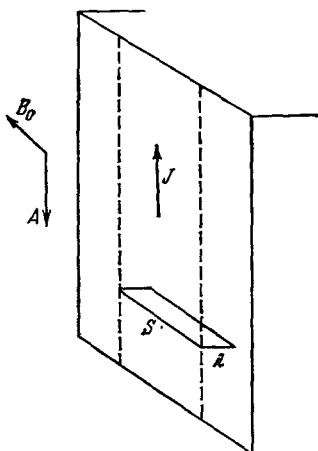


Рис. 10. Поверхность сверхпроводника.

Поле B_0 , изображенное на рисунке, создает ток J вверх вдоль поверхности в слое толщиной λ . Ток в полоске шириной S пропорционален B_0 : $J/c = S B_0$. Соответствующий вектор потенциал A направлен вниз.

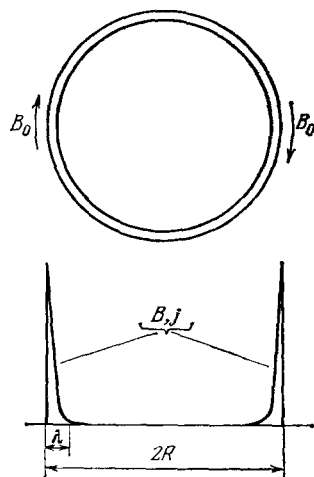


Рис. 11. Сечение сверхпроводящей проволоки радиуса R .

Ток течет в тонком приповерхностном слое толщиной λ , в который проникает магнитное поле.

очередь вызывает такой же ток в «замороженном» электронном газе, удерживаемом в основном состоянии с $P = 0$ коркой из куперовских пар на поверхности Ферми, пока $kT < \Delta$. Электроны внутри проволоки на глубине больше λ не создают тока, так как там магнитное поле отсутствует. Но в слое толщиной λ вблизи поверхности, поскольку магнитное поле проникает в металл на глубину λ , электроны движутся (как в куперовских парах, так и неспаренные), хотя их полный импульс остается нулевым. Так как нет энергии, необходимой для разрушения замороженного распределения электронов, такой ток будет незатухающим. Диссипация кинетической энергии электронов отсутствует. Эта ситуация имеет место до определенного предела. Как говорилось выше, уравнение (33) нарушится, когда дополнительная кинетическая энергия, полученная электронами, станет больше, чем энергия, необходимая для разрушения куперовских пар. В этом случае замороженное распределение разрушается и возникает новое, в котором ток отсутствует и, следовательно, нет избытка кинетической энергии. Рассмотрим 1 см^2 поверхности сверхпроводника. Ток и, следовательно, избыточная кинетическая энергия содержится в слое вблизи поверхности толщиной λ , т. е. в объеме $V = \lambda \text{ см}^3$. Дополнительная кинети-

ческая энергия ΔK в этом объеме определяется вторым членом в формуле (34). Этот член дает избыточную энергию на единицу объема, так что

$$\Delta K = V \frac{ne^2}{2mc^2} A^2 = V \frac{1}{2\lambda^2} A^2. \quad (41)$$

Ток будет устойчив, если ΔK меньше полной энергии связи куперовских пар G :

$$G = V_n \Delta, \quad (42)$$

где $n' = \Delta n / \varepsilon_F$ — число куперовских пар на единицу объема. Если ΔK больше G , то это приводит к разрушению куперовских пар и сверхпроводящего тока. Приравнявая (41) и (42), мы получаем предельные значения поля B_{cr} . В соответствии с уравнением (33) по порядку величины имеем

$$n \frac{\Delta}{\varepsilon_F} \Delta \sim \frac{1}{\lambda^2} A_{cr}^2.$$

Из формул (36) и (37) находим, что $A^2/\lambda^2 = B^2$, и, следовательно,

$$B_{cr}^2 \sim \frac{1}{d^3} \left(\frac{d}{\rho} \right)^2 \varepsilon_F \sim \left(\frac{e}{d\rho} \right)^2. \quad (43)$$

Здесь мы использовали: $n = d^{-3}$, $\rho/d \sim \Delta/\varepsilon_F$, $\varepsilon_F \sim e^2/d$. Таким образом, критическое поле, при котором сверхпроводимость разрушается, есть $e/d\rho$. Эта величина порядка 300 Гс, если $\Delta \sim 10^{-4} \varepsilon_F$, а $\varepsilon_F \sim 5$ эВ. Плотность критического тока связана с A_{cr} уравнением (33), и мы получаем $j_{cr} = cB_{cr}/\lambda$. Критический ток J_{cr} есть $2\pi R \lambda j_{cr} = 2\pi R c B_{cr}$, где R — радиус сверхпроводящей проволоки. Для выбранных выше значений констант мы получим для критического тока величину $2 \cdot 10^4 R$ А, если R измерять в сантиметрах. (Это критическое значение тока при нулевой температуре и только для сверхпроводников I рода.)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

На первый взгляд может показаться, что два электрона вблизи поверхности Ферми, двигающиеся почти в одном направлении друг за другом, также будут подвергаться действию потенциала притяжения. Это не так, и причина заключается в следующем. При рассмотрении двухчастичной задачи прежде всего следует отделить движение центра масс от относительного движения. В нашем случае импульс P движения центра масс есть $P \sim 2p_F$. Конечно, на это движение взаимное притяжение не влияет. При относительном движении двух электронов они в полной мере испытывают притяжение, только если они движутся параллельно P . Если они заметно отклоняются от этого направления, то электрон не остается внутри потенциальной трубки. Следовательно, потенциал относительного движения сильно асимметричен по направлениям, представляя собой длинную трубку длиной l и шириной d , вытянутую вдоль P . Он действует только на расстояние d в направлении, перпендикулярном P . Такой потенциал приводит к очень небольшой энергии связи. Грубая оценка, полученная усреднением по углам, приводит к такой же формуле (23), но с множителем $l^2/d^2 = \beta^2$ в экспоненте.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Мы можем задать следующий вопрос. В изоляторе электроны заполняют все состояния от потолка до дна зоны и, таким образом, имеется энергетическая щель между заполненной зоной и следующей незаполненной. Можно было бы ожидать, что эта щель будет играть такую же роль, как и энергетическая щель над замороженным распределением электронов в сверхпроводнике, т. е. она не будет давать электронам возможность покидать распределение с полным импульсом, равным нулю. Почему же изолятор не является сверхпроводником и даже с более высокой температурой перехода, поскольку энергетическая щель в изоляторе порядка 1 эВ?

Ответ заключается в том, что выражение (30) для кинетической энергии электрона даже приблизительно неверно вблизи верхнего края зоны. Обозначим через $k(p)$ кинетическую энергию электрона как функцию импульса в отсутствие поля. Пусть для простоты p имеет только одну компоненту, $k(p)$ — квадратичная функция $p^2/2m$

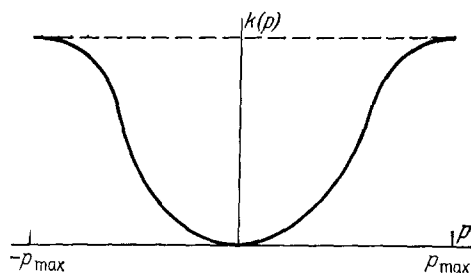


Рис. 12. Кинетическая энергия $K(p)$ в зоне проводимости как функция p .

Производная обращается в нуль при $\pm p_{\max}$. В изоляторе зона заполнена и скорость электронов наверху зоны равна нулю. В металле зона заполнена частично и электроны на границе распределения имеют скорость $\sim \pm p/m$.

только для нижней части зоны. У верхней границы зоны, где p достигает значения p_{\max} , функция $k(p)$ имеет горизонтальную касательную (рис. 12). Скорость представляет собой производную k по p , и отсюда выражение для тока можно записать так:

$$J = e \sum \frac{dk}{dp} = e \int_{-p_{\max}}^{+p_{\max}} \frac{dk}{dp} \sigma dp. \quad (\text{П.1})$$

Здесь во втором равенстве сумма по всем электронам заменена на интеграл, в котором σdp представляет число состояний в интервале dp . Ясно, что (П.1) дает нуль, поскольку dk/dp — нечетная функция p . Отсюда видно, что полный ток равен нулю, когда поле отсутствует. При наличии поля функцию $k(p)$ следует заменить на $k[p - (eA/c)]$. Вообще говоря, $eA/c \ll p$, так что изменение кинетической энергии можно записать в виде

$$\Delta k \left(p - \frac{e}{c} A \right) = - \frac{e}{c} A \frac{dk}{dp}. \quad (\text{П.2})$$

Таким образом, мы получаем для изменения тока при $A \neq 0$

$$\Delta J = - \frac{e^2}{c} A \int_{-p_{\max}}^{+p_{\max}} \frac{d^2 k}{dp^2} \sigma dp = \frac{e^2}{c} \sigma A \left. \frac{dk}{dp} \right|_{-p_{\max}}^{+p_{\max}} = 0,$$

поскольку производная k равна нулю при $\pm p_{\max}$. В целиком заполненной проводящей зоне ток в магнитном поле не индуцируется!

Объяснение этого замечательного результата следующее. В присутствии поля все импульсы p получают добавку $-eA/c$. Таким образом, распределение электронов более не симметрично относительно $p = 0$, а смещается на $-eA/c$. Поскольку распределение было компактным (все уровни с $|p| < |p_{\max}|$ заняты), такое смещение эквивалентно перемещению нескольких электронов из крайнего положения на одном конце зоны (скажем, вблизи $-p_{\max}$, если eA/c отрицательно) к другому концу (вблизи $+p_{\max}$). Если зона не полностью заполнена, такой сдвиг приводит к появлению тока, поскольку электроны по одну сторону от точки $p = 0$ движутся в противоположных направлениях по сравнению с электронами по другую сторону. Однако если зона заполнена, то скорость электронов вблизи p_{\max} равна нулю, поскольку $v = dk/dp = 0$ на краю зоны. Таким образом, перенос электронов с одного края зоны на другой не изменяет тока, который был сначала равен нулю.