531.161(092)

ДИССИПАТИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ю. Л. Климонтович

Даже простой перечень работ Михаила Александровича Леонтовича, посвященных термодинамике и статистической физике [1–13], показывает, как широки были его интересы.

Но поражает не столь разнообразие, сколь оригинальность и глубина анализа рассматриваемых проблем. Вопросы, волновавшие Михаила Александровича Леонтовича много лет назад, остаются актуальными и по сей день.

Так, в аннотации к его статье «К кинетике флуктуаций», опубликованной более пятидесяти лет назад, читаем: «Излагается метод определения спектра флуктуаций, т. е. определения статистических средних значений квадратов коэффициентов пространственно-временнóго фурье-разложения флуктуаций. Метод применяется к флуктуациям концентрации и флуктуациям плотности в жидкостях. Следствия теории, относящейся к тонкой структуре линий спектра рассеяния, обсуждаются в связи с имеющимися опытными данными».

Здесь сказано все предельно ясно и четко.

Другая работа М. А. Леонтовича «О свободной энергии неравновесных состояний» почти целиком может быть перенесена в современный курс статистической физики. Цель и результат и здесь формулируются предельно ясно: «Определение свободной энергии неравновесного состояния, более общее, чем обычное, может быть дано, если ввести в рассмотрение дополнительную потенциальную энергию, при наличии которой неравновесное состояние становится равновесным. Разбирается связь этого определения с принципом Больцмана».

Предложенный в этой статье метод описания широкого круга неравновесных состояний изложен более детально в его книге «Статистическая физика»[8].

Здесь нет возможности разобрать и оценить с современных позиций все работы Михаила Александровича Леонтовича по термодинамике и статистической физике [1–13]. Рассмотрим более подробно лишь одну из них[6]. Выбор именно этой работы не является, конечно, случайным. Это станет ясным из изложенного ниже.

«Основные уравнения статистической теории газов с точки зрения теории случайных процессов». Под таким заголовком в № 5 «Журнала экспериментальной теоретической физики» за 1935 г. была опубликована поистине замечательная работа Михаила Александровича Леонтовича. По своим идеям она значительно выделялась на уровне тогдашней статистической теории неравновесных процессов.

Ко времени написания этой работы основой статистической теории неравновесных процессов служило знаменитое уравнение Больцмана. Из него вытекал закон возрастания энтропии (H-теорема Больцмана). На его основе получили обоснование уравнения газовой динамики и уравнения, описывающие свободно-молекулярное течение газа. Это был поистине триумф кинетической теории. Казалось, что она близка к завершению. Лишь немногие выдающиеся физики того времени понимали, что это лишь первый этап развития статистической теории неравновесных процессов. В работе М. А. Леонтовича мы читаем:

«Кинетическая теория рассматривает процессы в газах. Это — теория статистическая, поскольку в основе уравнения (1) (уравнения Больцмана) *лежит* статистическое *положение* Stosszahlansatz. Однако структура этой теории, несомненно, является очень несовершенной. Величине $f\,\mathrm{d}\omega\,do$ ($\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$, $\mathrm{d}o = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$) приходится приписывать значение некоторого статистического среднего (математического ожидания) от числа частиц в объеме $d\omega\,do$ фазового μ-пространства — только тогда могут быть поняты необратимый характер уравнения (1) и вытекающие отсюда следствия. Однако в рамках самой теории смысл этого «математического ожидания» остается весьма нечетким, поскольку не рассматриваются вероятности при помощи которых эти «математические ожидания» образованы. Теория не в состоянии поэтому дать также никаких сведений относительно флуктуаций в газе и их изменений во времени» [1][6, стр. 211].

Действительно, кинетическое уравнение Больцмана рассматривалось как уравнение для детерминированной (неслучайной) функции распределения. Соответственно этому при переходе от кинетического уравнения к уравнению газовой динамики детерминированными оказались газодинамические функции: ρ ($\mathbf{r}$, t) — плотность, $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — скорость, T ($\mathbf{r}$, t) — температура. В результате этого из рассмотрения выпадали явления, определяемые флуктуациями функции распределения (кинетическими флуктуациями) и флуктуациями газодинамических функций.

Сложилось удивительное положение. В классических работах Рэлея, Планка, Эйнштейна, Смолуховского было показано, что даже в равновесном состоянии флуктуации играют принципиальную роль во многих явлениях. Например, флуктуациями плотности определяется рассеяние света, флуктуации электромагнитного поля проявляются в тепловом излучении. Без учета флуктуаций среды, в которой движутся броуновские частицы, нельзя объяснить это «вечное движение». Этот перечень может быть, естественно, продолжен. Так, в последние годы выяснилась принципиальная роль флуктуаций при фазовых переходах второго рода. Тем не менее долгие годы кинетическая теория не включала неравновесные флуктуации в «круг своих интересов». Причин к этому несколько.

Основываясь на уравнении Смолуховского, М. А. Леонтович получил для разреженного газа уравнение марковского типа для наиболее общей функции распределения f_N системы из N частиц. Полученное им уравнение с самого начала является необратимым. При этом не ставилась задача о причинах возникновения необратимости. М. А. Леонтович писал:

«Замечу, что я не касаюсь *основного физического вопроса* о том, в какой мере статистическое описание процессов с помощью вероятностей перехода можно связать или поставить в соответствие с описанием квантовой (или классической) механики. Я думаю только, что эта статистическая схема наиболее подходяща для того, чтобы в более совершенной форме изложить *фактическое содержание* кинетической теории» ([6], с. 213).

Таким образом, вопрос о связи обратимых уравнений [механики с [6, стр. 213] необратимыми уравнениями статистической теории неравновесных процессов оставался открытым. Эта проблема и выдвинулась на первый план. Задача же построения последовательной флуктуационной теории неравновесных процессов отошла на второй план и долгое время не привлекала исследователей.

Существенный вклад в решение задачи обоснования кинетической теории внесли работы Н. Н. Боголюбова, М. Борна и X. Грина, И. Кирквуда. В классической ныне монографии Н. Н. Боголюбова «Проблемы динамической теории в статистической физике» (1946) разработан метод получения кинетических уравнений Больцмана (для разреженного газа) и Ландау, Власова (для систем заряженных частиц). Благодаря этим работам стало ясно, каким образом и *какой ценой* их обратимых уравнений механики можно получить необратимые уравнения кинетической теории.

В результате отпали многие вопросы, которые волновали исследователей. Однако возникли новые, которые также оказались нелегкими. К их числу относился и вопрос о неравновесных флуктуациях.

В работе Н. Н. Боголюбова [14] при выводе кинетических уравнений — замкнутых уравнений для одночастичных функций распределения — существенным является предположение (*принцип*) о полном ослаблении начальных корреляций. При этом допускалось (*неявно*), что долгоживущие корреляции (с временами $\tau_{\text{кор}}$ порядка или бóльшими времени релаксации одночастичных функций распределения) не играют заметной роли. Тем самым выпали из рассмотрения кинетические и гидродинамические флуктуации.

Заметим, что в работе Н. Н. Боголюбова [14] статья М. А. Леонтовича [6] цитируется, но не в связи с вопросом о флуктуациях функции распределения. В § 2 книги [14] есть замечание: «Изучение функций F_s во многих случаях может быть значительно облегчено с помощью введения особого функционала, являющегося обобщением производящих функций, применявшихся в работе М. А. Леонтовича [6] по теории стохастических процессов с дискретным фазовым пространством».

В дальнейшем работа М. А. Леонтовича [6] была почти забыта и не оказала заметного влияния на развитие теории неравновесных флуктуаций. Диссипативные уравнения для многочастичных функций распределения вновь открывались разными авторами, например, в работах И. Пригожина и Р. Браута, М. Каца (см. гл. 4, 11 в [15], гл. 10 в [16], гл. 2 в [17], гл. 24 в [18]).

Так, исследованию кинетических уравнений для многочастичных функций распределения (master equations) посвящены многие страницы прекрасной книги американского математика М. Каца, представляющей запись лекций по ряду проблем статистической теории [19]. М. Кац, к сожалению, не был знаком в период работы над лекциями с работой М. А. Леонтовича *). В работе В. Н. Жигулева [20] на основе уравнения Лиувилля была установлена для последовательности функций распределения разреженного газа цепочка диссипативных уравнений, являющаяся прямым следствием уравнения Леонтовича. Попытки приближенного решения такой цепочки с целью исследования влияния турбулентных пульсаций на распределение частиц разреженного газа по скоростям были предприняты в недавних работах японских исследователей (см. в [21]).

*) Во время школы по статистической физике в Ядвисине (Польша) М. Кац рассказал мне следующее. После выхода его книги на русском языке кто-то из ленинградских физиков прислал ему копию статьи М. А. Леонтовича [6]. М. Кац спросил меня: «Как мог он (М. А. Л.) знать и понимать все это еще в 1935 г.?» Чувствовалось, что это задевает самолюбие М. Каца. В разговоре я упомянул о дружбе и сотрудничестве М. А. Леонтовича с А. Н. Колмогоровым. М. Кац сразу отреагировал: «Вот Колмогоров и научил его этому».

Ниже мы вернемся к обсуждению диссипативных уравнений для многочастичных функций распределения. Отметим сейчас лишь следующее.

При учете в кинетической теории крупномасштабных и долгоживущих флуктуаций, кроме вкладов, учитываемых уравнением Леонтовича, появляются дополнительные вклады. Они определяются флуктуациями с временами жизни много бо́льшими времени свободного пробега и поэтому не могут быть учтены в схеме Больцмана. Эти дополнительные вклады особенно велики для состояний далеких от равновесного, например при развитии турбулентности. При этом заметно меняются как термодинамические функции, так и кинетические коэффициенты.

Вернемся теперь к вопросу о флуктуациях функции распределения разреженного газа.

Первый шаг в кинетической теории флуктуаций был сделан в работе Б. Б. Кадомцева [22], посвященной расчету флуктуаций функции распределения равновесного разреженного газа. Результат был получен путем использования в теории равновесных флуктуаций, развитой в работах Х. Каллена и Т. Вельтона [23], С. М. Рытова [24], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [25], в качестве релаксационного уравнения линеаризованного кинетического уравнения Больцмана. Аналогичным путем в работе Л. П. Горькова, И. Е. Дзялошинского, Л. П. Питаевского [26] были рассчитаны равновесные флуктуации для уравнения Фоккера — Планка и линеаризованного уравнения Ландау.

Обобщение формулы Б. Б. Кадомцева на неравновесные состояния было проведено различными способами в работах Ш. М. Когана и А. Я. Шульмана, С. В. Ганцевича, В. Л. Гуревича, Р. Катилюса, в работах автора и из др. (см. обзор [27], гл. 4, 11 в [15] и § 19.20 в [28]).

Один из способов построения теории неравновесных флуктуаций основан на использовании диссипативного уравнения для многочастичной функции распределения (§ 18 и гл. 4 в [15]). Однако исходные позиции здесь иные, чем в работе М. А. Леонтовича.

Исходным в [15] служит уравнение Лиувилля — обратимое уравнение для функции распределения f_N. От него путем усреднения по физически бесконечно малому объему $V_ф$ производится переход к диссипативному уравнению для сглаженной многочастичной функции распределения $\tilde{f}_N$. Для возможности такого перехода принцип Боголюбова о полном ослаблении начальных корреляций заменяется условием частичного ослабления начальных корреляций: ослабляются лишь мелкомасштабные корреляции, для которых

$$\tau_{кор} < \tau_ф, \qquad r_{кор} < l_ф; \tag{1}$$

$\tau_ф$, $l_ф$ — интервалы времени и длины, принятые за физически бесконечно малые. Для разреженного газа, когда параметр плотности $\varepsilon = nr_0^3$ много меньше единицы, величины $\tau_ф$, $l_ф$ на кинетическом этапе релаксации могут быть определены следующим образом (§ 18 в [15] и гл. 7 в [18]):

$$\tau_ф \sim \sqrt{\varepsilon}\tau \ll \tau, \quad l_ф \sim \sqrt{\varepsilon}\, l \ll 1, \quad N_ф \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \gg 1 \text{ при } \varepsilon = nr_0^3 \ll 1.$$

Введение величин $\tau_ф$, $l_ф$ позволяет произвести разделение корреляций на крупно- и мелкомасштабные. В результате для функции $\tilde{f}_N$ можно записать уравнение

$$\frac{\partial \tilde{f}_N}{\partial t} + \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left(\mathbf{v}_i\frac{\partial \tilde{f}_N}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_0\frac{\partial \tilde{f}_N}{\partial \mathbf{p}_i} - \sum_{1\leqslant j\leqslant N}\frac{\partial \tilde{\Phi}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}\frac{\partial \tilde{f}_N}{\partial \mathbf{p}_i}\right) =$$
$$= I_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N, t); \tag{3}$$

здесь введено обозначение I_N для соответствующего интеграла столкновений. Он может быть записан либо в представлении Боголюбова (как в (18.10) в [15])

$$I_N = \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant N} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \int\limits_{V_\text{ф}} d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \times$$
$$\times [\tilde{f}_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{r}_i \mathbf{P}_i(-\infty), \ldots, \mathbf{r}_j, \mathbf{P}_j(-\infty), \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) -$$
$$- \tilde{f}_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \ldots, \mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)], \quad (4)$$

либо, что более удобно для сопоставления с уравнением М. А. Леонтовича, в представлении Больцмана

$$I_N = \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant N} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{ij} \int\limits_0^{\infty} \rho_{ij}\, d\rho_{ij} \mid \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \mid \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times$$
$$\times [\tilde{f}_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i', \ldots, \mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j', \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) -$$
$$- \tilde{f}_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \ldots, \mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)]. \quad (5)$$

В выражениях (4), (5) «ширина» функции $\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ характеризуется величиной $l_\text{ф}$.

Уравнение (3) с интегралом столкновений (5) соответствует уравнению (42), (43) работы М. А. Леонтовича (величина I_N в (42) определена в [6] на стр. 231). Различие состоит в следующем.

В уравнении (42) в [6] в интеграле столкновений по сравнению с (5) опущен второй член в квадратных скобках (с функцией $\tilde{f}_N(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_j, \ldots, x_N, t)$), существенный, например, при доказательстве закона возрастания энтропии всей системы (см. ниже). Однако при переходе в работе [6] от уравнения (42) к уравнению Больцмана вклад этого члена, разумеется, учитывается.

В левой части уравнения (3) по сравнению с (43) в [6] имеется дополнительный член, учитывающий взаимодействие частиц. Он, как мы увидим, существен при исследовании вклада крупномасштабных флуктуаций.

Рассмотрим наиболее важные следствия уравнения (3) с интегралом столкновений (5) (или (4)).

Найдем с помощью уравнения (3) уравнение для одночастичной функции распределения:

$$f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) \equiv \tilde{f}_1 =$$
$$= V \int \tilde{f}_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N, t)\, d\mathbf{r}_2 \ldots d\mathbf{r}_N\, d\mathbf{p}_2 \ldots d\mathbf{p}_N. \quad (6)$$

При интегрировании по $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N$ выпадут все члены с $i \neq 1$; все члены суммы $\sum\limits_{1 < j \leqslant W}$ под интегралом по $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{p}_j$ равноправны, поэтому можно положить например, $j = 2$, опустить сумму, но ввести множитель $N - 1$, равный числу членов в сумме по j. Наконец, $(N-1)/V \to N/V = n$. В результате получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \tilde{f}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t)\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{p}_2 +$$
$$+ n \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{12} \int\limits_0^{\infty} \rho_{12}\, d\rho_{12} \int d\mathbf{p}_2 \mid \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \mid [\tilde{f}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2', \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1', t) -$$
$$- \tilde{f}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)], \quad (7)$$

соответствующее уравнению (63) работы М. А. Леонтовича. Разница лишь в том, что в правой части уравнения (7) есть дополнительный член (первый член правой части), учитывающий (см. ниже) вклад купномасштабных флуктуаций.

Введем двухчастичную корреляционную функцию. По определению, с учетом того, что $f_1 \equiv \tilde{f}_1$, имеем

$$\tilde{f}_2 = f_1 f_1 + \tilde{g}_2. \tag{8}$$

Тогда можно сказать, что уравнение (7) не является замкнутым, так как в него, наряду с функцией f_1, входит корреляционная функция $\tilde{g}_2$. По этой причине даже при пренебрежении первым членом правой части уравнение отличается от уравнения Больцмана. Оно представляет собой первое уравнение цепочки зацепляющихся уравнений для сглаженных (по физически бесконечно малому объему V_Φ) функций f_1, $\tilde{g}_2$, $\tilde{g}_3$, ... (см. [15]). В отличие от последовательности уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона для обычных функций распределения рассматриваемая система является приближенной из-за сглаживания по объему и по этой причине диссипативной.

В уравнение (7) корреляционная функция $\tilde{q}_2$ входит двумя путями, как бы дополняющими друг друга. Во второй член правой части уравнения (7) функция $\tilde{g}_2$ входит под знак интеграла, учитывающего вклад парных столкновений. Чтобы получить интеграл столкновений Больцмана, надо положить в нем $\tilde{g}_2 = 0$. Но как обосновать такое приближение? По этому поводу М. А. Леонтович пишет:

«Это соотношение (уравнение (7) без первого члена правой части.— *Ю. К.*) будет иметь тот же вид, что и «основное уравнение теории газов» (уравнение Больцмана.— *Ю. К*), если в нем заменить (в наших обозначениях.— *Ю. К.*) $\tilde{f}_2(\mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_1)$ на $f_1(\mathbf{p}'_2) f_1(\mathbf{p}'_1)$ и соответственно $\tilde{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ на $f_1(\mathbf{p}_2) f_1(\mathbf{p}_1)$. Такая замена могла бы быть оправдана, если бы было доказано, что при безграничном возрастающем общем числе частиц величины, определяющие дисперсию чисел частиц в определенных состояниях, растут, как N. По аналогии с «предельной теоремой», доказанной для дискретного ряда состояний, такое поведение дисперсии и, следовательно, справедливость такой предельной теоремы и в этом случае кажется мне вероятным, хотя доказать мне ее и не удалось. В результате указанной замены уравнение (63) (уравнение (7) без первого члена правой части.— *Ю. К.*) обратится в уравнение (1) (уравнение Больцмана.— *Ю. К.*)».

Таким образом, М. А. Леонтович считал, что $\tilde{g}_2 = 0$ в интеграле столкновений лишь в термодинамическом пределе: $N \to \infty$, $V \to \infty$, но N/V — конечная величина. В работе Н. Н. Боголюбова [14] уравнение Больцмана — замкнутое уравнение для одночастичной функции распределения получается на основе принципа полного ослабления начальных корреляций. Можно проследить определенную связь двух этих подходов. И в том и другом случаях мы приходим к замкнутому уравнению для детерминированной (неслучайной) функции распределения. По этой причине, как уже отмечалось, выпадают из рассмотрения все явления, определяемые кинетическими и гидродинамическими флуктуациями.

Используем для оценки роли функции $\tilde{g}_2$ в интеграле столкновений условие частичного ослабления начальных корреляций (условие (1)). Полагая (для мелкомасштабных корреляций), что радиус корреляции

$r_{\text{кор}} \sim r_0$ (r_0 — диаметры атома-шарика), получим оценку

$$\tilde{g}_2 = \int g_2(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{V_\varphi} \sim \frac{r_0^3}{V_\Phi} \sim \frac{\varepsilon}{N_\Phi} \sim \varepsilon^{3/2}, \text{ так как } N_\Phi \infty \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{9}$$

Это и служит основанием для отбрасывания функций $\tilde{g}_2$ в интеграле столкновений. Крупномасштабные корреляции включаются в первый член правой части уравнения (7). В результате уравнение для функции f_1 принимает вид (уравнение (18.6) в [15])

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = I_Б(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) + \tilde{I}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t); \tag{10}$$

здесь

$$I_Б = n \int_0^{2\pi} d\varphi_{12} \int_0^{\infty} \rho_{12}\, d\rho_{12} \int d\mathbf{p}_2 \,|\, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \,|\, \times$$
$$\times [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2', t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1', t) - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)] \tag{11}$$

— интеграл столкновений Больцмана, а

$$\tilde{I} = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \tilde{g}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2 t)\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{p}_2 \tag{12}$$

— дополнительный интеграл, определяемый крупномасштабными (кинетическими или гидродинамическими) флуктуациями. Сила F в уравнении (10) определяется выражением

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_0 - n \int \frac{\partial \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'|)}{\partial \mathbf{r}} f_1(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t)\, d\mathbf{r}'\, d\mathbf{p}'. \tag{13}$$

Итак, при условии ослабления мелкомасштабных корреляций уравнение для функции f_1 имеет вид (10). Оно является диссипативным. При этом диссипация, обусловленная исключением мелкомасштабных корреляций, входит явно через интеграл столкновений Больцмана. Возможна и дополнительная диссипация, определяемая функцией $\tilde{g}_2$ (интегралом $\tilde{I}$). Однако о структуре этой функции нам пока еще ничего не известно. Об этом будет сказано ниже. Прежде отметим следующее.

В качестве исходного вместо уравнения (3) для функции $\tilde{f}_N$ можно использовать уравнение для сглаженной по объему V_Φ микроскопической фазовой плотности

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)). \tag{14}$$

Обозначим ее через $\tilde{N}$. Усредняя это уравнение (см. § 22 в [15]) и используя равенство $\langle \tilde{N} \rangle = nf_1$ и условие ослабления мелкомасштабных корреляций, снова приходим к уравнению (10). Теперь, однако, интеграл $\tilde{I}$ представляется в иной, но эквивалентной прежней форме

$$\tilde{I}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) =$$
$$= \frac{1}{n} \int \frac{\partial \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \langle \delta\tilde{N} \delta\tilde{N} \rangle_{\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', t}}{\partial \mathbf{p}}\, d\mathbf{r}'\, d\mathbf{p}' \equiv -\frac{1}{n} \frac{\partial \langle \delta\tilde{\mathbf{F}} \delta\tilde{N} \rangle}{\partial \mathbf{p}}; \tag{15}$$

здесь $\delta\tilde{N} = \tilde{N} - nf_1$ и

$$\delta\tilde{\mathbf{F}} = -\int \frac{\partial \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}} \delta\tilde{N}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t)\, d\mathbf{r}'\, d\mathbf{p}'. \tag{16}$$

При таком подходе уравнение (10) надо дополнить уравнением для коррелятора флуктуаций фазовой плотности $\tilde{N}$.

Естественно, что уравнение для такого коррелятора в силу нелинейности системы содержит более сложный тройной коррелятор. Замыкание этой последовательности уравнений возможно при условии малости флуктуаций. Это условие оправдано для широкого класса задач при соответствующем выборе объема усреднения $V_ф$, содержащего много частиц ($N_ф \gg 1$).

Можно, разумеется, не обращаться к уравнениям для моментов флуктуаций $\delta\tilde{N}$, а использовать для интеграла $\tilde{I}$ выражение (12) через $\tilde{g}_2$. Уравнение для $\tilde{g}_2$ имеет вид (18.25) в [15]. Условие малости флуктуаций $\delta\tilde{N}$ соответствует в (18.25) приближению $\tilde{g}_3 = 0$, $\tilde{g}_2 \ll f_1 f_1$.

В нулевом приближении по флуктуациям интеграл $\tilde{I}$ в (10) равен нулю, и мы возвращаемся к кинетическому уравнению Больцмана. В следующем приближении уравнение для коррелятора $\langle\delta\tilde{N}\delta\tilde{N}\rangle$ можно представить в виде уравнения с источником $A\ (x, x', t)$ — функцией, определяемой одночастичной функцией распределения (уравнение (22.21) в [15]). Источник представляется в виде суммы двух вкладов

$$A\ (x, x', t) = A_Б\ (x, x', t) + \tilde{A}\ (x, x', t). \tag{17}$$

Первый из них $A_Б$ определяется атомарной структурой подсистемы в физически бесконечно малом объеме $V_ф$. Процесс столкновений частиц из объема $V_ф$ не является непрерывным. Имеет место дробовой эффект.

Появление второго члена в правой части (17) обусловлено диссипативным эффектом крупномасштабных флуктуаций $\delta\tilde{N}$, поэтому функция $\tilde{A}$ может быть выражена через интеграл $\tilde{I}$ ((22.23) в [15]).

Таким образом, имеется как бы двойная надстройка над уровнем описания с помощью уравнения Больцмана.

«Первый уровень» определяется молекулярной структурой, что приводит к дробовому эффекту в процессе столкновений. По этой причине источник $A_Б\ (x, x', t)$ можно назвать *молекулярным.*

«Второй уровень» определяется крупномасштабными флуктуациями и не связан непосредственно с молекулярной структурой системы. Источник $\tilde{A}$ можно назвать поэтому *турбулентным.*

В отдельных ситуациях может доминировать один из этих двух факторов. Тогда можно выделить два более частных обобщения уравнения Больцмана. Рассмотрим сначала случай, когда источник $\tilde{A} = 0$. В этом приближении в уравнении (10) интеграл $\tilde{I} = 0$, и оно совпадает с уравнением Больцмана. Таким образом, функция $f_1\ (\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ может быть определена вне связи с задачей расчета флуктуаций функции распределения.

Однако, поскольку функция f_1 вводится, как предполагалось в работе М. А. Леонтовича, в виде «математического ожидания» ($nf_1 = \langle\tilde{N}\rangle$), то существуют флуктуации $\delta\tilde{N} = \tilde{N} - \langle\tilde{N}\rangle$. В рассматриваемом случае источник $A\ (x, x', t)$ в уравнении для коррелятора $\langle\delta\tilde{N}\delta\tilde{N}\rangle$ определяется полностью функцией $A_Б\ (x, x', t)$. Она может быть следующим образом выражена через функцию f_1 ((10.12), гл. 11 [18]):

$$A_Б = [(\delta\hat{I}_{\mathbf{p}} + \delta\hat{I}_{\mathbf{p}'}) - (\delta\hat{I}_{\mathbf{p}} + \delta\hat{I}_{\mathbf{p}'})_0]\, n\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\, f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t); \tag{18}$$

здесь $\delta\hat{I}_{\mathbf{p}}$ — оператор, определяемый линеаризованным интегралом столкновений Больцмана. Знак «0» у второго члена в квадратных скобках означает, что операторы столкновений действуют лишь на функцию распределения (не действуют на функцию $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$).

Коррелятор $\langle\delta\widetilde{N}\delta\widetilde{N}\rangle_{x,\,x',\,t}$ может служить начальным условием ($t = t'$) для расчета двухвременнóго коррелятора, удовлетворяющего уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\delta\hat{I}_{\mathbf{p}}+\mathbf{F}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\langle\delta\widetilde{N}\delta\widetilde{N}\rangle_{x,\,t,\,x',\,t'}=0,\quad t>t'. \tag{19}$$

Система уравнений для одновременнóго и двухвременнóго корреляторов эквивалентна уравнению Ланжевена для функции $\delta\widetilde{N}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\delta\hat{I}_{\mathbf{p}}+\mathbf{F}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\widetilde{N}(\mathbf{r},\ \mathbf{p},\ t)=y(\mathbf{r},\ \mathbf{p},\ t). \tag{20}$$

Левая часть этого уравнения совпадает по форме с линеаризованным уравнением Больцмана. Моменты ланжевеновского источника определяются формулами

$$\langle y(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\rangle=0, \tag{21}$$
$$\langle y(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,y(\mathbf{r}',\mathbf{p}',t)\rangle=A_{\text{Б}}(x,x',t)\,\delta(t-t').$$

Таким образом, интенсивность ланжевеновского источника в линеаризованном уравнении Больцмана для флуктуаций $\delta\widetilde{N}$ определяется выражением (18). Последнее в свою очередь служит источником в уравнении для одновременного коррелятора флуктуаций $\delta\widetilde{N}$ при $\widetilde{A}=0$.

Для равновесного состояния второй член в формуле (18) (с $(\ldots)_0$) выпадает, и мы приходим к результату работы Б. Б. Кадомцева, посвященной исследованию кинетических флуктуаций в идеальном газе при равновесных условиях. Для неравновесного состояния формулы (21), (18) эквивалентны приведенным в работах [27, 28, 15].

Из изложенного следует, что результаты (18) — (21) могут быть получены на основе диссипативного уравнения, введенного М. А. Леонтовичем, с интегралом столкновений (5).

Установим теперь связь формулы (5) (или (4)) с известным выражением Пригожина — Браута для интеграла столкновений в уравнении для многочастичной функции пространственно однородного газа по координатам всех частиц. Эта функция распределения определяется равенством.

$$\widetilde{f}_N(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{p}_1,\ \ldots,\ \mathbf{r}_N,\ \mathbf{p}_N,\ t)=\frac{1}{V^N}\widetilde{f}_N(\mathbf{p}_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}_N,\ t). \tag{22}$$

Выражение для интеграла $I_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N,t)$ следует из (5) и имеет вид

$$I_N(\mathbf{p}_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}_N,\ t)=\frac{1}{V}\sum_{1\leqslant i,\ j\leqslant N}\int_0^{2\pi}d\varphi_{ij}\int_0^{\infty}\rho_{ij}\,d\rho_{ij}|\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j|\times$$
$$\times[\widetilde{f}_N(\mathbf{p}_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}_i',\ \ldots,\ \mathbf{p}_j',\ \ldots,\ \mathbf{p}_N,t)-\widetilde{f}_N(\mathbf{p}_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}_i,\ \ldots,\ \mathbf{p}_j,\ \ldots,\ \mathbf{p}_N,t)]. \tag{23}$$

Можно, используя (4), записать его и в представлении Боголюбова.

В формуле (23) учитываются парные (модель Больцмана), но сильные взаимодействия. В приближении теории возмущений по взаимодействию из них следует результат Пригожина — Браута (гл. 2 в [17]). Соответствующее уравнение для одночастичной функции распределения (при пренебрежении крупномасштабными корреляциями) совпадает с кинетическим уравнением Ландау.

Вернемся к другому предельному случаю, когда в формуле (17) в правой части доминирует турбулентный источник $\widetilde{A}$. При этом, как мы знаем, уравнение (10) не сводится к уравнению Больцмана.

Дополнительный вклад в диссипативные характеристики, определяемый интегралом $\widetilde{I}$, может быть значительным. Он определяет, в частности, аномальную электрическую проводимость плазмы [29, 18].

Обратимся снова к уравнению (3) для многочастичной функции распределения $\widetilde{f}_N$ и рассмотрим некоторые его свойства.

В равновесном состоянии интегралы столкновений (4), (5) обращаются в нуль при подстановке в них многомерного распределения Максвелла:

$$\widetilde{f}_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N, t) = \frac{1}{V^N} \frac{1}{(2\pi mkT)^{3N/2}} \exp\left(-\sum_{1\leqslant i\leqslant N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2mkT}\right). \qquad (24)$$

Если умножить интеграл столкновений (5) (или (4)) на функцию — $-k\ln\widetilde{f}_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)$ и проинтегрировать по всем переменным, то будет

$$-k\int \ln\widetilde{f}_N\cdot I_N\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{r}_N\, d\mathbf{p}_N \geqslant 0. \qquad (25)$$

Это свойства обеспечивает неубывание энтропии изолированной системы

$$S(t) = -k\int \ln\widetilde{f}_N\cdot\widetilde{f}_N\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{r}_N\, d\mathbf{p}_N, \qquad (26)$$

т. е.

$$\frac{dS}{dt} \geqslant 0. \qquad (27)$$

Знак равенство отвечает равновесному состоянию.

С помощью уравнения (3) с интегралами столкновений (4), (5) (или (23) для пространственно однородного случая) можно оценить времена релаксации на различных этапах временнóй эволюции. Так, например, на кинетическом этапе, который описывается уравнением Больцмана, для времени релаксации получаем известное выражение

$$\tau_{\text{рел}} \sim \frac{l_{\text{рел}}}{V_{\text{т}}} \sim \frac{1}{V_{\text{т}} n r_0^2}. \qquad (28)$$

Таким образом, время релаксации определяется средним временем свободного пробега *выделенной* (например, с номером «1» в уравнении (10)) частицы.

С помощью, например, выражения (23) можно оценить минимальное время релаксации $(\tau_{\text{рел}})_{\min}$ — время, за которое «забудет дорогу» одна *любая* частица системы. Этого уже достаточно, чтобы система в целом не смогла вернуться в исходное состояние при изменении знаков скорости всех частиц системы. Из выражения (23) следует, что

$$(\tau_{\text{рел}})_{\min} \sim \frac{1}{N}\tau_{\text{рел}} \sim \frac{1}{N V_{\text{т}} n r_0^2}. \qquad (29)$$

Таким образом, минимальное время релаксации в N раз меньше времени свободного пробега. Оно характеризует начальный этап возникновения необратимости.

Из изложенного видно, сколь велики были потенциальные возможности работы Михаила Александровича Леонтовича. Сожалею, что впервые прочитал эту работу, когда Михаил Александрович был уже тяжело болен и не было возможности обсудить с ним возникшие вопросы. Оставалось лишь удивляться тому, насколько Михаил Александрович Леонтович опережал свое время в понимании принципиальных вопросов статистической физики.

В заключение хочу отметить, что возможны другие типы диссипативный уравнений для многочастичных функций распределения.

Диссипативное уравнение (3) записано для функции распределения полного набора переменных $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{p}_1$, ..., $\mathbf{r}_N$, $\mathbf{p}_N$ рассматриваемой системы N частиц. Диссипация возникает при исключении мелкомасштабных корреляций в этой системе. Это и определяет неполноту описания.

В гл. 10 в [16] (см. также гл. 24 в [18]) рассматривается иная ситуация. Ищется уравнение для функции распределения переменных основной системы, состоящей из N сколь угодно сильно взаимодействующих частиц. Диссипация определяется неполнотой описания по дополнительным переменным расширенной системы. В отличие от (3) с интегралом столкновений (5) полученное таким путем уравнение для многочастичной функции распределения является нелинейным по функции $\tilde{f}_N$.

В равновесном состоянии интеграл «столкновений» в этом уравнении обращается в нуль при подстановке в него канонического распределения Гиббса с гамильтонианом основной системы. Здесь также справедлива H-теорема Больцмана. Минимальное время релаксации, как и в (29), пропорционально $1/N$.

Кинетические уравнения для многочастичных функций распределения слишком сложны для решения. Они, однако, могут оказаться весьма эффективными для построения приближенных уравнений, отвечающих различным уровням описания и пригодных, в частности, для описания кинетики когерентных состояний при неравновесных фазовых переходах.

Основополагающей здесь является работа Михаила Александровича Леонтовича «Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов» [6]. Нет сомнения, что еще многие годы к этой работе будут обращаться исследователи, занимающиеся развитием статистической теории неравновесных процессов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А. О принципе равновесия Левиса.— Zs. Phys., 1925, Bd. 33, S. 470 (нем.)
2. Леонтович М. А. К кинетике флуктуаций.— Ibid., 1931, Bd. 72, S. 247 (нем.).
3. Леонтович М. А. К основам термодинамической статистики.— ЖЭТФ, 1932, т. 2, с. 366.
4. Леонтович М. А. К статистике непрерывных систем и протеканию физических процессов во времени. — Phys. Zs. Sowjetunion, 1933, Bd. 4, S. 35 (нем.).
5. Леонтович М. А. (совместно с А. Н. Колмогоровым).— Ibid., S. 1 (нем.).
6. Леонтович М. А. Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов.— ЖЭТФ, 1935, т. 5, с. 211.
7. Леонтович М. А. О свободной энергии неравновесного состояния.— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 844.
8. Леонтович М. А. Статистическая физика.— М.: Гостехиздат, 1944.
9. Леонтович М. А. О флуктуациях плотности заряда в растворе электролита.— ДАН СССР, 1946, т. 53, с. 115.
10. Леонтович М. А. (совместно с В. И. Бунимовичем). О распределении числа больших отклонений при электрических флуктуациях.— ДАН СССР, 1946, т. 53, с. 21.
11. Леонтович М. А. Введение в термодинамику.— М.: Гостехиздат, 1950 (1-е изд.), 1951 (2-е изд.).
12. Леонтович М. А. О диффузии в растворах вблизи критической точки парообразования.— ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 1624.

13. Леонтович М. А. О предельном коэффициенте полезного действия при прямом использовании излучения.— УФН, **1974**, т. 14, с. 555.
14. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике.— М.: Гостехиздат, 1946.
15. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы.— М.: Наука, 1975.
16. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов.— М.: Наука, 1980.
17. Куни Ф. М. Статистическая физика и термодинамика.— М.: Наука, 1981.
18. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика.— М.: Наука, 1982.
19. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики.— М.: Наука, 1967.
20. Жигулев В. Н. Исследование уравнений Боголюбова для сильнокоррелированных статистических систем.— ТМФ, **1971**, т. 7, с. 106.
21. Tsugé S. Kinetic theory and turbulence Paperinvited at XIII Intern: Symposium on Rarefied Gasdynamics. Novosibirsk, July 4—10, 1982,— To appear in Rarefied Gasodynamics.— Plenum Press, 1983.
22. Кадомцев Б. Б. О флуктуациях в газе.— ЖЭТФ, **1957**, т. 32, с. 943.
23. Callen H., Welton T. Irreversibility and generalized noise.— Phys. Rev., **1951**, v. 83, p. 34.
24. Рытов С. М., Левин М. Л. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике.— М.: Наука, 1967.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Наука, 1976.
26. Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Питаевский Л.П. Вычисление флуктуаций величин, определяемых кинетическими уравнениями.— Тр. ИЗМИРАН, **1960**, в. 17 (27), с. 239.
27. Gantsevich S. V., Gurevich V. L., Katilus R. Theory of fluctuations in Nonequilibrium electron gas.—Riv. Nuovo Cimento, **1979**, v. 2, p. 1.
28. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.—М.: Наука, 1979.
29. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1978.