

517.9+532.59

## КАУСТИКИ, КАТАСТРОФЫ И ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ

Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	591
2. Каустики как особенности дифференцируемых отображений (катастрофы)	594
а) Лучевая поверхность и лагранжево многообразие (594). б) Принцип классификации структурно устойчивых каустик (598). в) Каутические поверхности низкой коразмерности (семь катастроф Тома) (599). г) Каустики высокой коразмерности (602). д) Каустики в некоторых физических задачах (605).	
3. Асимптотические представления волнового поля для структурно устойчивых каустик	607
а) Эталонные интегралы. Локальная асимптотика поля (607). б) Ширина каутической зоны и степень фокусировки поля на каустиках (610). в) Равномерная асимптотика поля с использованиемetalлонных интегралов (612). г) Общие замечания о локальных и равномерных асимптотиках волнового поля (615).	
4. Полутеневые каустики и полутеневые поля	616
а) Полутеневые каустики и краевые катастрофы (616). б) Равномерные асимптотики поля в случае полутеневых каустик (618).	
5. Другие типы каустик иetalлонных интегралов	619
а) Эталонные интегралы с произвольной фазовой функцией (619). б) Эталонные интегралы для структурно неустойчивых каустик (620). в) Контурныеetalлонные интегралы (620). г) Эталонные интегралы с амплитудной коррекцией. Размытые каустики (621). д) Каустики с просачиванием и волноводные каустики (621). е) Эталонные функции, порожденные обычновенными дифференциальными уравнениями (622).	
6. Дополнительные вопросы	622
а) Пространственно-временные каустики (623). б) Каустики векторных полей (623). в) Каустики в анизотропных средах и средах с пространственной дисперсией (623). г) Комплексные каустики (623). д) Каустики с аномальным сдвигом фазы (623). е) Случайные каустики (624). ж) Каустики в квантовомеханических задачах (624).	
Цитированная литература	624

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Постоянный интерес к каустикам, прослеживаемый на всех этапах развития физики, начиная с древности, определяется тем, что на каустиках происходит заметная концентрация (фокусировка) поля. Во многих случаях концентрация волнового поля — звукового, светового, электромагнитного, сейсмического и т. д. — может быть зарегистрирована физическими приборами, или, в случае света, — визуально. Отчетливее всего она выражена в фокальной плоскости обычной линзы, когда каутическая поверхность вырождается в идеальном случае в точку. Достаточно высокая степень концентрации поля и может наблюдаться и в ряде других ситуаций, например, в окрестности простой (неособой) каустики, как это схематически показано на рис. 1.

Проблема описания фокусировки волновых полей при наличии каустик жизненно важна для многих разделов физики, но особенно остро она стоит в радиофизике и акустике природных сред. С фокусировочными и каустическими явлениями постоянно приходится считаться при распространении радиоволн в тропосфере и ионосфере Земли, при прохождении радиоволн через межпланетную и околосолнечную плазму, при распространении света в турбулентной атмосфере и звука в океане и т. д.

Ограничимся только тремя примерами. На рис. 2 показано семейство радиолучей в ионосфере, возбуждаемое наземным источником. На этом рисунке, заимствованном из<sup>1</sup>, отчетливо видны как области тени, так и области фокусировки электромагнитного поля. Не менее сложная картина фокусировок наблюдается и при распространении звука в глубоком

океане (рис. 3), заимствованный из работы<sup>3</sup>, а также лучевые картины в<sup>2</sup>. Приведем еще полученную Б. С. Аграповским и А. С. Гурвичем фотографию распределения интенсивности световой волны, прошедшей через

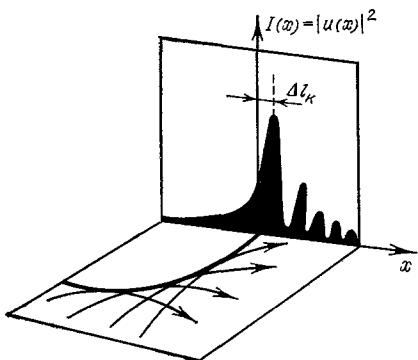


Рис. 1. Распределение интенсивности поля в окрестности неосообщей каустики.

океан (рис. 3), заимствованный из работы<sup>3</sup>, а также лучевые картины в<sup>2</sup>. Приведем еще полученную Б. С. Аграповским и А. С. Гурвичем фотографию распределения интенсивности световой волны, прошедшей через

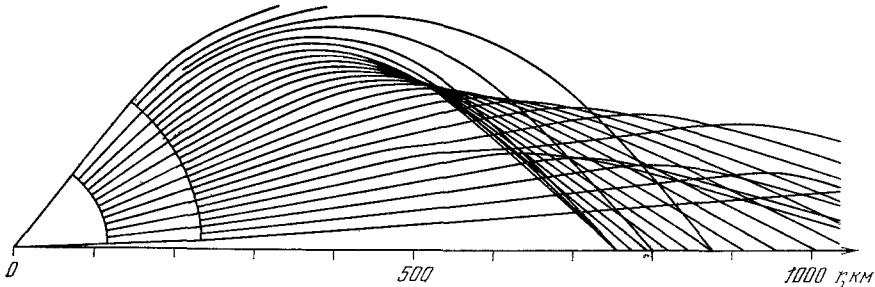


Рис. 2. Лучевая картина в случае наземного точечного источника радиоволн, облучающего ионосферу (по<sup>1</sup>).

турбулентную жидкость (рис. 4). На этом рисунке отчетливо выражены каустические пятна, обусловленные случайными фокусировками<sup>4</sup>.

Нахождение прикаустических полей важно также для задач рассеяния света и частиц (достаточно упомянуть, например, явление радуги в оптике и атомной физике), для инструментальной оптики и для техники зеркальных радиоантенн, для теории гравитационных линз, для нелинейной оптики (самофокусировка) и для многих других применений.

Данный обзор направлен на то, чтобы обрисовать нынешнее состояние проблемы нахождения каустических полей. У этой проблемы имеются два аспекта — геометрический и полевой, и по каждому из них в последние годы достигнут значительный прогресс. Перечислим кратко полученные здесь результаты с указанием тех разделов в обзоре, где будут затронуты соответствующие вопросы.

Говоря о геометрической стороне вопроса, прежде всего следует отметить разработку принципиально нового взгляда на каустики как на особенности определенных отображений, осуществляемых семейством лу-

чей. Теория особенностей дифференцируемых отображений — это новый раздел математики, который позволил установить общие свойства отображений тех или иных многообразий на пространства различной размерности.

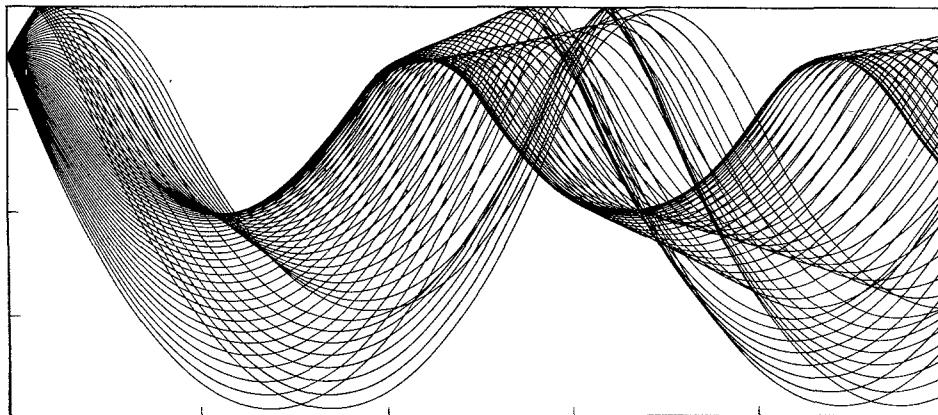


Рис. 3. Пример лучевой картины в океаническом звуковом канале <sup>3</sup>.

В создание этой теории существенный вклад внесли В. И. Арнольд, Х. Уитни, Р. Том и др.

С легкой руки Р. Тома теорию особенностей отображений стали называть также «теорией катастроф». Основанием для введения этого

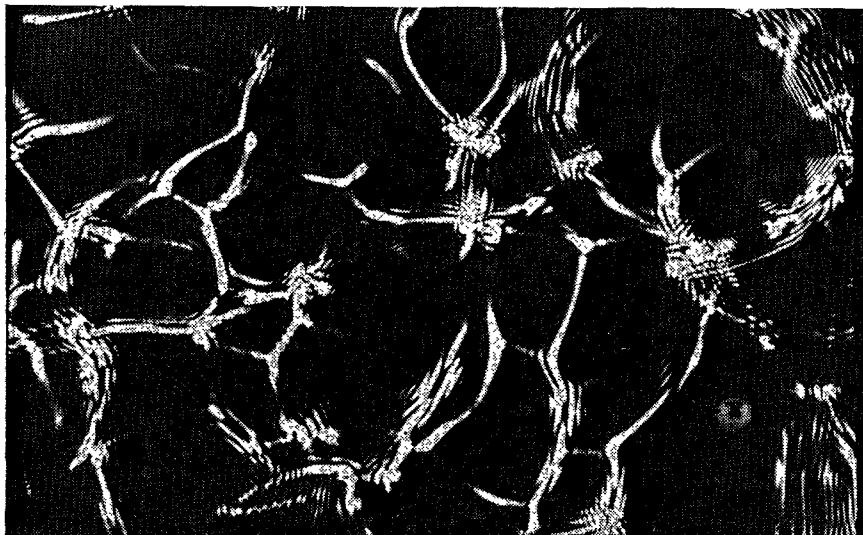


Рис. 4. Негативное изображение распределения интенсивности в поперечном сечении светового пучка, прошедшего кювету с турбулентной жидкостью <sup>4</sup>.

Отдельные световые пятна со следами интерференционной картины отвечают случайным каустикам и фокусам, образовавшимся в световом пучке. (Фотография любезно предоставлена Б. С. Аграновским и А. С. Гурвичем.)

термина послужило то, что при пересечении геометрического места особенностей, отвечающих данной системе, происходит качественное, скачкообразное изменение — «катастрофа» — состояния системы. В случае геометрической оптики скачкообразное изменение состояния при пересече-

чении каустической поверхности выражается в изменении числа лучей, приходящих в данную точку пространства. Несмотря на известные недостатки термина «теория катастроф», связанные прежде всего с неоправданно широким его толкованием (см. по этому поводу<sup>5,6</sup>), мы отнюдь не будем избегать его в данном обзоре, рассматривая теорию катастроф просто как синоним теории особенностей дифференцируемых отображений. Важнейшая роль теории особенностей в плане обсуждаемых здесь вопросов состоит в том, что на ее основе удалось полностью проклассифицировать каустики структурно устойчивого типа. Сведения о структурно устойчивых каустиках, т. е. сведения о «зоологии» каустик, даны в гл. 2. Там же приведены некоторые примеры каустик, изученных к настоящему времени. Эта часть обзора написана в основном по материалам работ<sup>5-9</sup> с привлечением сведений из книг<sup>10-12,134</sup>.

Что же касается основного для нас полевого аспекта каустической проблемы, то здесь надо выделить несколько моментов.

Во-первых, наряду с классификацией каустик теория катастроф решала также задачу классификации эталонных интегралов, описывающих дифракцию полей вблизи структурно устойчивых каустик. Тем самым созданы условия для фундаментального решения задачи построения локальных и равномерных асимптотик поля при наличии каустик. Этот круг вопросов мы рассмотрим в гл. 3.

Во-вторых, за последнее время существенно расширен список эталонных функций и интегралов, предназначенных для описания различных видов каустических полей. В частности, предложены эталонные интегралы для полутеневых каустик, образующихся вблизи границы свет — тень (этот вопрос вынесен в гл. 4), для некоторых типов структурно неустойчивых каустик, например, для случая аксиальной симметрии, и для ряда других каустик, которые перечислены в гл. 5.

Далее, в-третьих, предложены простые способы оценки ширины каустической зоны и величины поля непосредственно на каустиках, опирающиеся лишь на законы геометрической оптики<sup>12,51</sup>. Качественная теория позволила также решить вопрос о реальности (наблюдаемости) каустик. Основы качественной теории изложены в гл. 3, п. 6).

Наконец, в-четвертых, за последние годы существенно расширилась «география» каустик, т. е. расширился список задач, где встречаются каустики: это пространственно-временные каустики, каустики в нелинейных и анизотропных средах, а также в средах с пространственной дисперсией, комплексные каустики и т. д. Кроме того, расширился и круг прикладных проблем, где надо считаться с присутствием каустик (гл. 6) \*).

В соответствии с намеченной программой обратимся сначала к классификации каустик на основе теории катастроф.

## 2. КАУСТИКИ КАК ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ (КАТАСТРОФЫ)

### а) Лучевая поверхность и лагранжево многообразие

Рассмотрим прежде всего вопрос о связи теории каустик с теорией отображений. Для этого запишем уравнение семейства лучей, покидающих начальную поверхность  $S^0$ :

$$x = x(\xi, \eta, \tau), \quad y = y(\xi, \eta, \tau), \quad z = z(\xi, \eta, \tau), \quad (2.1')$$

\*) Отметим, еще, что в последнее время усилился интерес к «некатастрофическим» особенностям волновых полей, в частности, к дислокациям. По этому поводу см. работы<sup>118-122</sup>.

или, короче,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi), \quad \xi = (\xi, \eta, \tau); \quad (2.1'')$$

здесь  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — декартовы координаты,  $\xi$  и  $\eta$  — параметры на  $S^0$ , а  $\tau$  — параметр вдоль луча (рис. 5). Совокупность параметров  $\xi = (\xi, \eta, \tau)$  называют лучевыми координатами. При  $\tau = 0$  уравнения (2.1) описывают начальную поверхность  $S^0$ . Если все функции, характеризующие задачу (уравнение начальной поверхности  $S^0$ , закон изменения параметров среды в пространстве) непрерывны вместе со всеми производными,

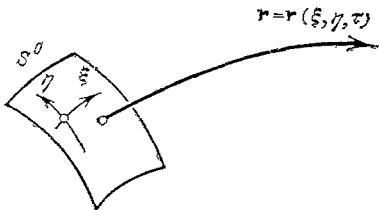


Рис. 5. Траектория луча с указанием лучевых координат.

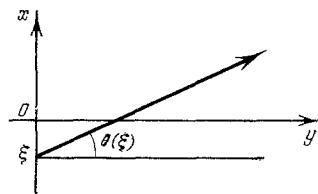


Рис. 6. Траектория луча в плоскости  $\{x, y\}$  в однородной среде.

то в уравнениях (2.1) мы имеем дело с бесконечно дифференцируемыми функциями, которые описывают гладкую трехмерную гиперповерхность  $F$  в расширенном шестимерном пространстве  $\{\mathbf{r}, \xi\} = \{x, y, z; \xi, \eta, \tau\}$ . Эту поверхность  $F$  мы будем называть лучевой поверхностью.

При проектировании (отображении) лучевой поверхности  $F$  из расширенного пространства  $\{\mathbf{r}, \xi\}$  на трехмерное физическое (конфигурационное) пространство  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  могут возникнуть особенности, которые естественно отождествить с каустиками, поскольку на этих особенностях обращается в нуль якобиан перехода от декартовых координат к лучевым:  $\mathcal{D} = \partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \tau) = 0$ , что и отвечает уравнению каустики (см. 12'). Переход через каустику, т. е. через геометрическое место точек, в которых отображение  $F$  на пространство  $\{x, y, z\}$  имеет особенности, отвечает появлению или исчезновению некоторого четного числа лучей, достигающих точки наблюдения  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Скачкообразное появление (исчезновение) пар лучей с точки зрения теории отображений интерпретируется как катастрофа, в данном случае — как качественное изменение картины лучей при переходе от точки к точке. Например, при переходе через простую каустику из области тени в область света рождаются два луча.

Не имея возможности изобразить шестимерное пространство  $\{\mathbf{r}, \xi\}$ , рассмотрим для иллюстрации упрощенную модель лучевой поверхности в трехмерном пространстве параметров  $\{x, y, \xi\}$ . Пусть  $\xi$  — точка выхода, а  $\theta(\xi)$  — угол выхода луча из поверхности  $y = 0$  (рис. 6). Тогда уравнение семейства лучей в плоскости  $\{x, y\}$  запишется в виде

$$x = \xi + y \operatorname{tg} \theta(\xi). \quad (2.2)$$

В расширенном трехмерном пространстве  $\{x, y, \xi\}$  этому уравнению отвечает двумерная лучевая поверхность  $F$ :  $\xi = \xi(x, y)$ , описываемая уравнением (2.2). Примерный вид этой поверхности для случая, когда тангенс угла наклона лучей меняется по закону  $\operatorname{tg} \theta(\xi) = \beta \xi/(\xi^2 + a^2)$ , показан на рис. 7, a.

При проектировании лучевой поверхности  $F$  на физическую плоскость  $\{x, y\}$  возникают каустики, отвечающие особенностям отображения. В дан-

ном случае (рис. 7, б) каустика имеет форму клюва, а соответствующая особенность поверхности  $F$  называется сборкой. При переходе через каустику внутрь «клюва» число лучей увеличивается от одного до трех.

Аналогичный взгляд на каустики дает и рассмотрение лучей в шестимерном фазовом пространстве  $\{r, p\} = \{x, y, z; p_x, p_y, p_z\}$ , где  $p = \nabla\psi$  — градиент эйконала, выступающий в качестве импульса. Вместо лучевой поверхности в этом случае говорят о лагранжевом многообразии<sup>1,10,11</sup>.

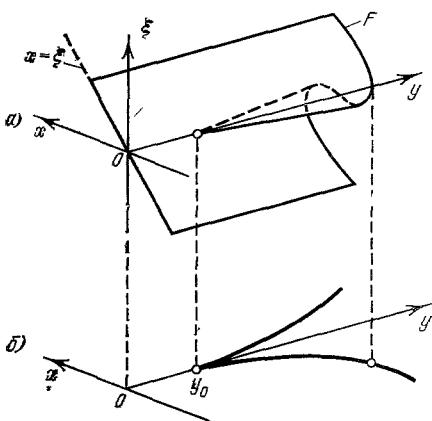


Рис. 7. Лучевая поверхность  $F$  в расширенном пространстве  $\{x, y, \xi\}$  (а) и особенности ее отображения «клюв» на физическую плоскость  $\{x, y\}$  (б).

Каустики выступают как особенности отображения лучевой поверхности  $F$  на какое-либо подпространство меньшей размерности. Чаще всего интересуются отображением  $F$  на физическое пространство  $\{x, y, z\}$  или на какие-либо плоскости в этом пространстве. Однако в ряде случаев приходится обращаться к отображениям на плоскости иных параметров, существенных для данной задачи, особенно если имеются подозрения, что малые изменения одного из параметров  $\alpha_j$  приведут к появлению новых особенностей в конфигурационном пространстве  $\{x, y, z\}$ .

### б) П р и н ц и п к л а с с и ф и к а ц и и с т р у к т у р н о у с т о й ч и в ы х к аустик

Как уже было сказано, теория катастроф позволила дать классификацию структурно устойчивых каустик. Классификация основана на том, чтобы при помощи локального (в окрестности некоторой особой точки отображения  $w_0$ ) преобразования переменных  $w \rightarrow w'$  придать уравнению поверхности  $F$  одну из типичных (нормальных) полиномиальных форм, используя гладкие преобразования переменных, включающие операции поворота осей, трансляции и изменения масштабов.

Существо дела можно проиллюстрировать на примере простейшей — одномерной задачи проектирования гладкой кривой  $f(x, y) = 0$  на горизонтальную ось  $x$ . Для простоты примем, что эта кривая проходит через начало координат, т. е.  $f(0, 0) = 0$ . Если зависимость  $y = y(x)$  в окрестности нуля монотонная (верхний рис. 8, а), то при помощи гладкого преобразования  $y_1 = \beta(y)$ ,  $x_1 = \gamma(x)$ , изменяющего лишь масштабы по осям  $x$  и  $y$ , кривую  $f(x, y) = 0$  можно «выпрямить», т. е. свести ее к прямой линии  $f_1(x_1, y_1) = y_1 - x_1 = 0$  (нижний рис. 8, а). В этом случае отобра-

Параметрическое уравнение лагранжева многообразия  $r = r(\xi, \eta, \tau)$ ,  $p = p(\xi, \eta, \tau)$  может быть получено из уравнений лучей, записанных в гамильтоновой форме

Более общий взгляд на каустики достигается при задании лучевой поверхности в пространстве  $\{r, \alpha\}$ , размерность которого увеличена за счет всех параметров  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , существенных для данной задачи. Так, параметры  $\alpha_j$  могут характеризовать положение источника, точку выхода луча из  $S^0$ , производные показателя преломления по тем или иным направлениям, форму начальной поверхности  $S^0$  и т. д. Общее числоарьиуемых параметров  $N$  вместе с тремя декартовыми координатами образуют расширенное пространство  $w = \{r, \alpha\}$  размерности  $N + 3$ , при этом кау-

жение кривой  $f(x, y) = 0$  на ось  $x$  взаимно-однозначно и особенностей не имеет.

При двузначной зависимости  $y$  от  $x$  (верхний рис. 8, б) функцию  $f(x, y)$  локально можно преобразовать к виду  $f_2(x_1, y_1) = x_1 + y_1^2$  (нижний рис. 8, б). В этом случае имеется лишь одна особая точка ( $x' = 0$ ) отображения кривой  $f(x, y) = 0$  на ось  $x$ . В этой точке  $|dy/dx| = \infty$ , т. е. кривая  $f(x, y) = 0$  имеет вертикальную касательную. Если же зависимость  $y$  от  $x$  трехзначна (верхний рис. 8, в), то отображение имеет две

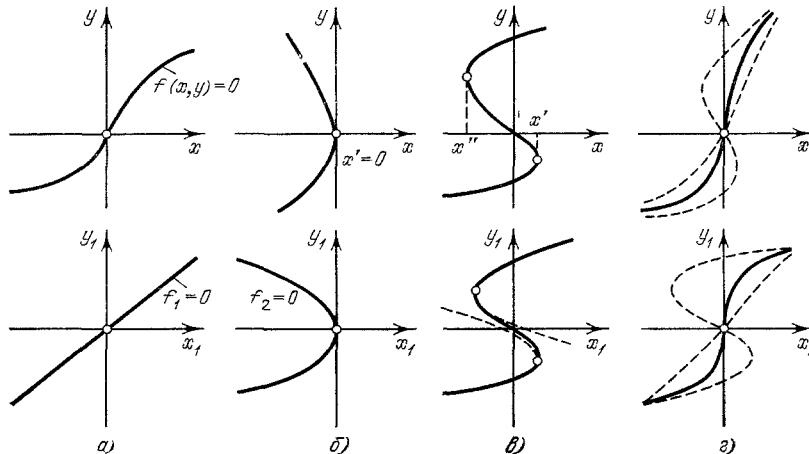


Рис. 8. Простейшие типичные ситуации, возникающие при отображении гладкой кривой  $f(x, y) = 0$  на горизонтальную ось.

а) Взаимно однозначное отображение; б) отображение с одной особой точкой; в) отображение с двумя особыми точками; г) структурно неустойчивая (нетипичная) ситуация (сплошные линии), которая при малых шевелениях (штриховые линии) сводится либо к случаю рис. а), либо к случаю рис. в).

особые точки  $x'$  и  $x''$ , в которых  $|dy/dx| = \infty$ . При пересечении этих точек происходят катастрофы, заключающиеся в том, что скачком меняется число ветвей, однозначно проектируемых на ось  $x$ . При наличии двух особых точек функцию  $f(x, y)$  гладким преобразованием удается локально свести к двум полиномам второго порядка, «привязанным» к особым точкам (нижний рис. 8, в).

Линейный ( $f_1$ ) и квадратичный ( $f_2$ ) полиномы, о которых шла речь выше, служат примерами так называемых нормальных (типов) форм, к которым можно локально привести практически все кривые на плоскости  $\{x, y\}$  или, как говорят в теории катастроф, все кривые «общего положения». Исключение составляют лишь некоторые вырожденные случаи, которые отвечают структурно неустойчивым отображениям.

Примером структурно неустойчивого отображения служит верхний рис. 8, г, где изображена кривая, у которой точка с вертикальной касательной одновременно является и точкой перегиба. Локально эта кривая сводится к виду  $f_3 = x_1 - y_1^3 = 0$  (нижний рис. 8, г). Если при малых вариациях параметров задачи кривая  $f(x, y) = 0$  принимает вид одной из двух штриховых кривых на верхнем рис. 8, г, то эта кривая приводится либо к линейной функции (см. рис. 8, а), либо к двум квадратичным полиномам, локально подогнанным к особым точкам, как на нижнем рис. 8, в.

В математике рассматривают объекты разнообразной природы — кривые, функции, семейства функций, отображения, каустики и т. д. Вместо того чтобы анализировать каждый объект по отдельности, например каждую кривую или функцию, Пуанкаре еще в конце прошлого века

предложил проводить анализ на основе понятия эквивалентности, введенного подходящим образом в данном классе объектов. Например, две функции можно считать эквивалентными, если одна из них получается из другой гладкой заменой переменных. Если нам удастся расклассифицировать объекты относительно этой эквивалентности, то мы будем иметь значительную информацию о всех объектах данной природы, изучив досконально лишь по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Именно эти соображения и лежат в основе теории особенностей дифференцируемых отображений, которая сформировалась в последние 10—15 лет.

Как в физике, так и в математике, наибольший интерес представляют устойчивые объекты, которые слабо меняются под действием тех или иных возмущений. В теории катастроф объект считается устойчивым, если все близкие объекты той же природы ему эквивалентны. Близкие объекты отличаются от исходного малыми возмущениями, которые в теории катастроф принято называть «малыми шевелениями». Если рассматриваемые объекты имеют аналитическую природу — функции, отображения и т. д., то малые шевеления предполагают близость не только самих функций, но и их производных.

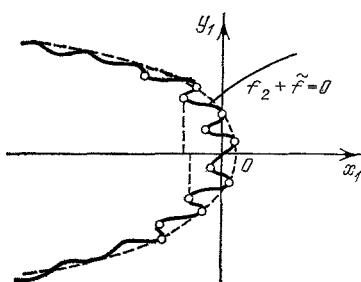
Понятие структурной устойчивости, одно из основных в теории катастроф, родственно понятию грубости, которое было введено в теорию динамических систем А. А. Андроновым<sup>13</sup>. Переходы от одной нормальной формы к другой через структурно неустойчивое состояние в теории динамических систем отвечают бифуркациям. Так, переход от однолучевого режима к трехлучевому, наблюдаемый при увеличении  $y$  на оси  $x$  (см. рис. 4), происходит при бифуркационном значении  $y = y_0$ .

Рис. 9. Появление множества особых точек при отображении на ось  $x_1$  гладкой кривой  $f_2 = x_1 + y_1^2 = 0$ , возмущенной малым синусоидальным слагаемым  $\tilde{f} = a \sin xy_1$ .

Если все особенности отображения кривой  $f(x, y) = 0$  на ось  $x$  классифицируются в рамках обычного матанализа, то в многомерном случае решение задачи классификации существенно осложняется тем, что типичные полиномы тоже оказываются многомерными. Последовательная классификация структурно устойчивых особенностей потребовала привлечения идей из топологии и дифференциальной геометрии и, как обнаружил В. И. Арнольд, оказалась тесно связанной с теорией групп Ли (сведения по истории вопроса и ссылки на оригинальные работы читатель сможет найти в работах<sup>5—9</sup>, а также в книгах<sup>14—16, 134</sup>).

В настоящее время выявлены все типичные формы гиперповерхностей  $F$  в многомерных пространствах до размерности  $m = 10$ , получены аналитические выражения для структурно устойчивых особенностей отображения  $F$  на пространства иной размерности и, что очень важно, показано, что других особенностей, кроме выявленных, не существует. Ниже мы изложим лишь рецептурную сторону вопроса, избегая математических тонкостей и придерживаясь универсальной классификации, разработанной В. И. Арнольдом<sup>5</sup>.

Единственное замечание, которое мы считаем здесь уместным сделать, касается содержания термина «малые шевеления». Этот термин, которым оперируют в теории катастроф, сродни термину «малые возмущения», которым пользуются в физике, но не тождествен ему.



Отличие состоит в том, что «малые шевеления» подразумевают малость не только самого возмущения  $\tilde{f}$ , но и его производных.

Для того, чтобы продемонстрировать эту особенность малых шевелений, укажем, что синусоидальное возмущение  $\tilde{f} = a \sin \kappa y_1$ , может служить малым шевелениям не только при малом значении  $a$ , но и при малом значении  $\kappa$ , с тем, чтобы была малой производная  $|\tilde{f}'| \sim a\kappa$ . Если же параметр  $\kappa a$  будет чрезвычайно большим,  $\kappa a \gg 1$ , то возмущение уже не может рассматриваться как малое шевеление. В этом случае возмущенная кривая

$$f_2(x_1, y_1) + \tilde{f}(x_1, y_1) = x_1 + y_1^2 + a \sin \kappa y_1 = 0$$

может приобрести много дополнительных особых точек (рис. 9), число которых оценивается как  $\kappa a$ . Этот пример показывает, что малые шевеления и связанные с ним представления о структурной устойчивости в математике трактуются иначе, чем малые возмущения в физике.

в) Каустические поверхности низкой коразмерности  
(семь катастроф Тома)

Наиболее экономный способ классификации каустик основан на введении производящих функций вида

$$\varphi(\zeta, \tau) = \varphi_0(\zeta) + \sum_{p=1}^m \zeta_p \varphi_p(\tau), \quad (2.3)$$

где  $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$  — так называемые внешние параметры задачи, получившиеся в результате локального преобразования (поворотов,

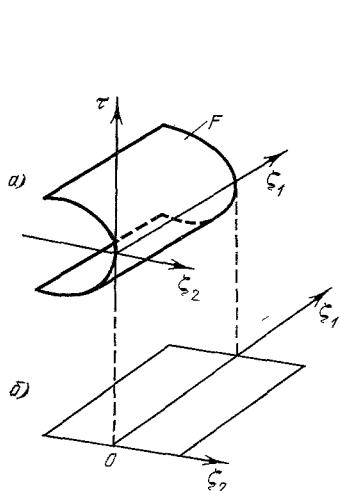


Рис. 10. Простейшая особенность  $A_2$  (складка  $m=1, l=1$ ), отвечающая неособой каустике.

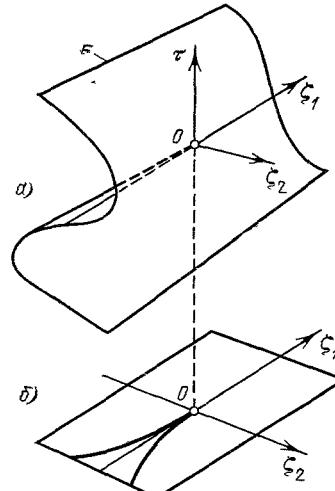


Рис. 11. Возникновение каустического клюва при проектировании лучевой поверхности  $F$ , имеющей особенность типа сборки  $A_3$  ( $m=2, l=1$ ).

трансляций и растяжений) исходных параметров  $w = \{r, \alpha\}$ , а  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$  — вспомогательные внутренние параметры. Число существенных для данной задачи внешних параметров  $m$  называется коразмерностью каустик, а число внутренних параметров  $l$  — корантом каустики.

Производящие функции (2.3) выбираются так, чтобы они могли служить фазовыми функциями в дифракционных интегралах вида  $\int \exp(i\varphi) d^l \tau$ , которые мы рассмотрим в гл. 3. Коранг  $l$  отвечает кратности дифракционных интегралов, описывающих поле в окрестности каустик, при этом внутренние переменные  $\tau_k$  выступают в качестве переменных интегрирования. Число стационарных точек в таких интегралах определяет число лучей для каустики данного вида. Таким образом, последовательная классификация чисто геометрических объектов — каустики с самого начала содержит в себе предпосылки построения волнового поля.

Производящая функция (2.3) линейна по внешним параметрам  $\zeta_p$ , а функции  $\varphi_p$  представляют собой «момоны», т. е. произведения степеней вспомогательных параметров  $\tau_k$ :

$$\varphi_p(\tau) = c_p \prod_{k=1}^l (\tau_k)^{s_{pk}}, \quad s_{pk} \geq 0, \quad p \geq 1. \quad (2.4)$$

Каждый тип каустик характеризуется своими значениями  $l$ ,  $m$  и своими универсальными функциями  $\varphi_p(\tau)$ .

Типичные (нормальные) формы лучевой поверхности  $F$  получаются дифференцированием производящей функции  $\varphi$  по вспомогательным параметрам

$$F: \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad (2.5)$$

а уравнение геометрического места особенностей получается приравнива-

Таблица I  
Простейшие типы каустик («семь катастроф Тома»)

Символ и наименование	Производящая функция $\varphi(\zeta, \tau)$	Уравнение лучевой поверхности $F$	Индексы каустических зон	Индекс фокусировки $\delta$
$A_2$ — складка	$\frac{1}{3} \tau_1^3 + \zeta_1 \tau_1$	$\tau_1^2 + \zeta_1 = 0$	2/3	1/6
$A_3$ — сборка	$\pm \frac{1}{4} \tau_1^4 + \zeta_1 \tau_1 + \frac{1}{2} \tau_1^2 \zeta_2$	$\pm \tau_1^3 + \zeta_1 + \zeta_2 \tau_1 = 0$	3/4; 1/2	1/4
$A_4$ — ласточкин хвост	$\frac{\tau_1^5}{5} + \zeta_1 \tau_1 + \frac{\zeta_2 \tau_2^2}{2} + \frac{\zeta_3 \tau_1^3}{3}$	$\tau_1^4 + \zeta_1 + \zeta_2 \tau_1 + \zeta_3 \tau_1^2 = 0$	4/5; 3/5; 2/5	3/10
$D_4^-$ — гребень волнны	$\pm \tau_2^3 \tau_1^2 + \zeta_1 \tau_1 + \zeta_2 \tau_2 + \zeta_3 \tau_3^2$	$\mp 3\tau_2^2 + \zeta_2 + 2\zeta_3 \tau_2 = 0$ $2\tau_1 \tau_2 + \zeta_1 = 0$	2/3; 2/3; 1/3	1/3
$D_4^+$ — волосок				
$A_5$ — бабочка	$\pm \frac{\tau_1^6}{6} + \zeta_1 \tau_1 + \frac{\zeta_2 \tau_1^2}{2} + \frac{\zeta_3 \tau_1^3}{3} + \frac{\zeta_4 \tau_1^4}{4}$	$\pm \tau_1^5 + \zeta_1 + \zeta_2 \tau_1 + \zeta_3 \tau_1^2 + \zeta_4 \tau_1^3 = 0$	5/6; 2/3; 1/2; 1/3	1/3
$A_5$ — гриб (парabolический омбилик)	$\pm \tau_2^4 + \tau_1^2 \tau_2 + \zeta_1 \tau_1 + \zeta_2 \tau_2 + \zeta_3 \tau_2^2 + \zeta_4 \tau_2^3$	$2\tau_1 \tau_2 + \zeta_1 = 0$ $\pm 4\tau_2^3 + \tau_1^2 + \zeta_2 + 2\zeta_3 \tau_2 + 3\zeta_4 \tau_2^2 = 0$	5/8; 3/4 1/2; 1/4	3/8

нием нулю определителя, составленного из вторых производных  $\phi$ :

$$\det \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau_j \partial \tau_k} \right| = 0. \quad (2.6)$$

Проектирование (отображение) производится из пространства  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m; \tau_1, \dots, \tau_l\}$  всех параметров задачи на пространство  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$  внешних параметров.

В табл. I сведены типичные производящие функции  $\phi$  и уравнения лучевой поверхности  $F$  для простейших типов особенностей (так называемые семь элементарных катастроф Тома<sup>14)</sup> с их классификацией по Арнольду, основанной на родстве отображений с определенными группами Ли. Возникновение особенностей в результате отображений наглядно

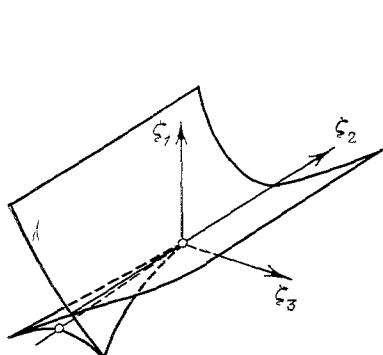


Рис. 12. Каустическая поверхность  $A_4$  — «ласточкин хвост» ( $m = 3, l = 1$ ).

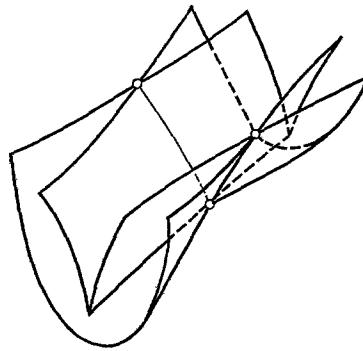


Рис. 13. Каустическая поверхность омбилического типа  $D_4^+$  — «кошелек» ( $m = 3, l = 2$ ).

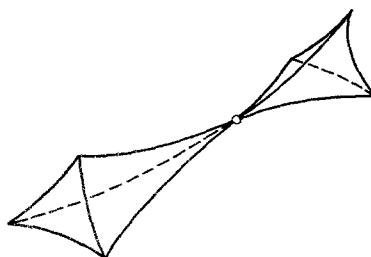


Рис. 14. Каустическая поверхность омбилического типа  $D_4^-$  — «пирамида» ( $m = 3, l = 2$ ).

можно пояснить только на двух примерах — складки ( $m = 1, l = 1$ , особенность  $A_2$ ) и сборки ( $m = 2, l = 1$ , особенность  $A_3$ ). Особенности типа складки отвечает простая (неособая) каустика (рис. 10), тогда как сборке соответствует каустический клюв, имеющий одну точку возврата (рис. 11).

Следующая по сложности особенность — ласточкин хвост (тип  $A_4$ ,  $m = 3, l = 1$ ) имеет уже вид трехмерной поверхности (рис. 12). Трехмерными поверхностями изображаются также каустики омбилического типа:  $D_4^+$  — волновой гребень или кошелек (гиперболический омбилик рис. 13) и  $D_4^-$  — волосок или пирамида (эллиптический омбилик рис. 14). Эти каустики имеют коразмерность  $m = 3$  и корант  $l = 2$ . Каустики более

высокой коразмерности  $m > 3$  можно отобразить только сечениями теми или иными плоскостями. Так, на рис. 15, *a* изображено трехмерное сечение

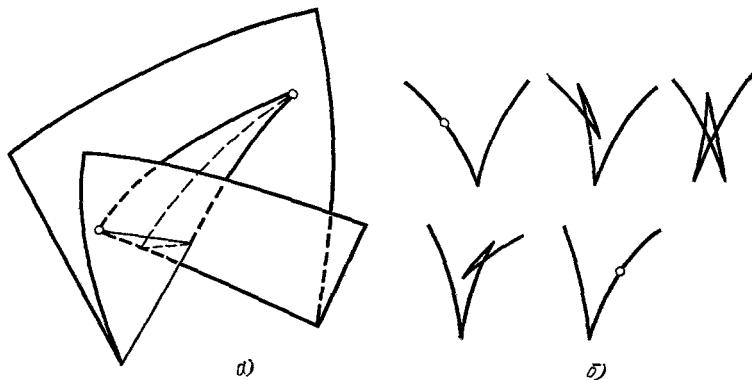


Рис. 15. Трехмерное (*a*) и некоторые двумерные (*b*) сечения каустической поверхности  $A_5$  («бабочка»,  $m = 4$ ,  $l = 1$ ).

каустики типа  $A_5$  ( $m = 4$ ,  $l = 1$ ), которую называют бабочкой, а на рис. 15, *b* — двумерные сечения этой каустики. Для всех этих каустик максимальное число лучей определяется коразмерностью и равно  $m + 1$ .

### г) Каустики высокой коразмерности

Перечисленные выше каустики коразмерности  $m \leq 4$ , отвечающие числу лучей  $m + 1 \leq 5$ , охватывают весьма значительную часть всех практически интересных случаев. Тем не менее полезно кратко представить «зоологию» каустик высшей коразмерности.

1) **Простые (нульмодальные) каустики высшей коразмерности.** Описанные в п. в) каустики характерны тем, что отвечающие им производящие функции  $\varphi(\zeta, t)$  не содержат произвольных констант (модулей). Поэтому их называют нульмодальными или простыми. Полный перечень нульмодальных каустик включает в себя две бесконечные серии  $A_{m+1}$  ( $m \geq 1$ ,  $l = 1$ ) и  $D_{m+1}$  ( $m \geq 3$ ,  $l = 2$ ), а также три внесерийные каустики  $E_6$ ,  $E_7$  и  $E_8$  (соответственно  $m = 5, 6, 7$ ,  $l = 2$ ). Параметры этих каустик приведены в табл. II.

2) **Унимодальные каустики.** Унимодальные каустики отличаются тем, что в производящей функции содержится только одна неизстранимая произвольная константа. Согласно<sup>5</sup> класс унимодальных каустик полностью исчерпывается одной бесконечной трехиндексной серией (по комплексной классификации)  $T_{p,q,r}$  ( $4 \leq p \leq q \leq r$ ,  $m = p + q + r - 3 \geq 9$ ) и 14 исключительными (внесерийными) типами каустик:  $K_{12,13,14}$ ,  $Z_{11,12,13}$ ,  $W_{12,13}$ ,  $Q_{10,11,12}$ ,  $S_{11,12}$  и  $U_{12}$ . По вещественной классификации принято выделять параболические особенности  $X_9 = T_{2,4,4}$ ,  $J_{10} = T_{2,3,6}$ ,  $P_8 = T_{3,3,3}$  и серии гиперболических особенностей  $J_{m+2}$  ( $m \geq 9$ ),  $X_{m+2}$  ( $m \geq 8$ ),  $Y_{p,q}$  ( $5 \leq p < q$ ,  $m = p + q - 1 \geq 9$ ),  $P_{m+2}$  ( $m \geq 7$ ),  $R_{p,q}$  ( $4 \leq p \leq q$ ,  $m = p + q \geq 8$ ).! Параметры унимодальных каустик коразмерности  $m \leq 11$  и коранга  $l = 2$  указаны в табл. III.

Число лучей для унимодальных каустик равно  $m + 2$  и для большинства каустик служит индексом. Так, каустике  $J_{11}$  отвечает одиннадцать лучей. В общем случае каустик модальности  $\mu$  (т. е. при наличии  $\mu$  неустра-

Таблица II  
Классификация простых (пуль-модальных) каустик

Тип каустики	Коразмерность	$\varphi(\xi, \tau)$	Индексы каустических зон $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$	Индекс фокусировки $\delta$
$A_{m+1}$	$m \geq 1$	$\pm \frac{1}{m+2} \tau^{m+2} + \sum_{p=1}^m \zeta_p \frac{\tau^p}{p}$	$\frac{m+1}{m+2}, \frac{m}{m+2}, \dots, \frac{2}{m+2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}$
$D_{m+1}$	$m \geq 3$	$\pm \tau_2^m + \tau_1^2 \tau_2 + \zeta_1 \tau_1 + \sum_{p=2}^m \zeta_p \tau_2^{p-1}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}, \frac{m-1}{m}, \dots, \frac{1}{m}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$
$E_6$	5	$\tau_1^3 \pm \tau_2^4 + \zeta_1 \tau_1 + \zeta_2 \tau_2 + \zeta_3 \tau_2^2 + \zeta_4 \tau_1 \tau_2 + \zeta_5 \tau_1 \tau_2^2$	$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
$E_7$	6	$\tau_1^3 + \tau_1 \tau_2^3 + \zeta_1 \tau_1 + \sum_{p=2}^5 \zeta_p \tau_2^{p-1} + \zeta_6 \tau_1 \tau_2$	$\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
$E_8$	7	$\tau_1^3 + \tau_2^5 + \zeta_1 \tau_1 + \sum_{p=2}^4 \zeta_p \tau_2^{p-1} + \zeta_5 \tau_1 \tau_2 + \tau_6 \tau_1 \tau_2^2 + \zeta_7 \tau_1 \tau_2^3$	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$

Таблица III  
Унимодальные каустики коразмерности  $m \leq 11$  и коранга 2

Тип каустики	Коразмерность	$\varphi_0(\tau)$	$\varphi_p(\tau)$	Индекс фокусировки $\delta$
$X_{m+2}$	$m \geq 8$	$\tau_1^4 + \tau_1^2 \tau_2^2 + a \tau_2^{m-3}$	$\tau_1, \tau_1^2, \tau_1^3, \tau_1, \tau_2 \tau_2, \dots, \tau_2^{m-4}$	1/2
$J_{m+2}$	$m \geq 9$	$\tau_1^3 + \tau_1^2 \tau_2^2 + a \tau_2^{m-2}$	$\tau_1, \tau_1 \tau_2, \tau_1 \tau_2^2, \tau_2, \dots, \tau_2^{m-3}$	1/2
$Y_{p, q}$	$m = p + q - 1 \geq 9$	$\tau_1^p + \tau_1^2 \tau_2^2 + a \tau_2^q$	$\tau_1, \dots, \tau_1^{p-1}, \tau_1 \tau_2, \tau_2, \dots, \tau_2^{q-1}$	1/2
$Z_{11}$	9	$\tau_1^3 \tau_2 + \tau_2^5 + a \tau_1 \tau_2^4$	$\tau_1, \tau_1^2, \tau_1 \tau_2, \dots, \tau_1 \tau_2^3, \tau_2, \dots, \tau_2^4$	8/15
$Z_{12}$	10	$\tau_1^3 \tau_2 + \tau_1 \tau_2^4 + a \tau_1^2 \tau_2^3$	$\tau_1, \tau_1^2, \tau_1 \tau_2, \dots, \tau_1 \tau_2^3, \tau_1^2 \tau_2^2, \tau_1^2 \tau_2^3, \tau_2, \dots, \tau_2^3$	6/11
$Z_{13}$	11	$\tau_1^3 \tau_2 + \tau_2^6 + a \tau_1 \tau_2^5$	$\tau_1, \tau_1^2, \tau_1 \tau_2, \dots, \tau_1 \tau_2^4, \tau_2, \dots, \tau_2^5$	5/9
$W_{12}$	10	$\tau_1^4 + \tau_2^5 + a \tau_1^2 \tau_2^3$	$\tau_1, \tau_1^2, \tau_1 \tau_2, \dots, \tau_1 \tau_2^3, \tau_1^2 \tau_2, \tau_1^2 \tau_2^2, \tau_2, \dots, \tau_2^3$	11/20
$W_{13}$	11	$\tau_1^4 + \tau_1 \tau_2^4 + a \tau_2^6$	$\tau_1, \tau_1^2, \tau_1 \tau_2, \tau_1 \tau_2^2, \tau_1 \tau_2^3, \tau_1^2 \tau_2^2, \tau_1^2 \tau_2^3, \tau_2, \dots, \tau_2^5$	9/16
$K_{12}$	10	$\tau_1^3 + \tau_2^7 + a \tau_1 \tau_2^5$	$\tau_1, \tau_1 \tau_2, \dots, \tau_1 \tau_2^4, \tau_2, \dots, \tau_2^5$	11/21
$K_{13}$	10	$\tau_1^3 + \tau_1 \tau_2^5 + a \tau_2^8$	$\tau_1, \tau_1 \tau_2, \dots, \tau_1 \tau_2^3, \tau_2, \dots, \tau_2^7$	8/15

Таблица IV

Классификация каустик коразмерности  $m \leq 11$  ( $l$  — коранг каустики)

$m$	$A_2$	$D_4^{\pm}$	$E_6$	$X_8$	$X_{10}$	$Y_{5,5}$	$Z_{11}$	$W_{12}$	$P_8$	$P_9$	$R_{4,4}$	$R_{4,5}$	$T_{4,4,4}$	$Q_{10}$	$Q_{11}$	$S_{11}$	$U_{12}$	$O_{16}$
1	$A_2$																	
2	$A_3$																	
3	$A_4$	$D_4^{\pm}$																
4	$A_5$	$D_5$																
5	$A_6$	$D_6$	$E_6$															
6	$A_7$	$D_7$	$E_7$															
7	$A_8$	$D_8$	$E_8$															
8	$A_9$	$D_9$		$J_{10}$	$X_{10}$													
9	$A_{10}$	$D_{10}$		$J_{11}$	$X_{11}$	$Y_{5,5}$												
10	$A_{11}$	$D_{11}$		$J_{12}$	$K_{12}$	$X_{12}$	$Y_{5,6}$											
11	$A_{12}$	$D_{12}$		$J_{13}$	$K_{13}$	$X_{13}$	$Y_{5,7}$	$Y_{6,6}$										
	Простые		Унимодальные												Бимодальные		3 мод	5 мод
	$l=1$		$l=2$				$l=3$						$l=4$					

нимых констант в производящей функции) число лучей равно  $m + \mu + 1 \equiv M + 1$ ).

3) Каустики высшей модальности. Начиная с коразмерности  $m = 10$  в списке особенностей появляется пятимодальная каустика  $O_{16}$ , а при  $m = 11$  — также бимодальные каустики  $Q_{14}$ ,  $S_{14}$ ,  $U_{14}$  и трехмодальная каустика  $V_{15}$ .

Сводка каустик коразмерности  $m \leq 11$  дана в табл. IV, в которой указан также коранг и модальность каустик. Согласно этой таблице, наименьшая коразмерность, начиная с которой возникают каустики коранга  $l = 3$ , составляет  $m = 6$ . Унимодальные каустики появляются тоже начиная с  $m = 6$ , каустики высшей модальности — с  $m = 10$  (число лучей  $M + 1 = m + \mu + 1$  составит соответственно 8 и 16). Лучевые картины с таким числом лучей в конкретных исследованиях встречаются довольно редко и очень сложны для анализа. Поэтому не удивительно, что в практических исследованиях до сих пор еще не удалось идентифицировать ни каустики коранга  $l = 3$ , ни унимодальные каустики, ни тем более каустики высшей модальности. Приводимая здесь итоговая таблица IV вселяет надежду на более целенаправленный поиск каутических структур, предсказанных теорией катастроф. Дело в том, что при заданной коразмерности  $m$  число типов каустик растет не очень быстро, по крайней мере, до  $m = 7-8$ , как это видно из табл. V, которая составлена на основе

Таблица V  
Число типов каустик при заданной коразмерности

Коразмерность $m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Число типов каустики	1	1	2	2	3	4	5	7	11	16	18
Из них коранга $l \leq 2$	1	1	2	2	3	3	4	4	6	8	9

табл. IV. В самом деле, при  $m = 7$  существует всего лишь 5 типов существенно различных каутических структур, а при  $m = 8$  — семь типов структур.

В заключение этого пункта отметим, что между более простыми и более сложными каустиками имеются определенные отношения, которые могут быть выражены в виде графов «субординации» или «примыкания» каустик. Эти графы позволяют предвидеть, как может выродиться данный тип каустик при изменении тех или иных параметров. Списки важнейших примыканий имеются в <sup>5,9,15,16</sup>.

#### д) Каустики в некоторых физических задачах

Несмотря на то, что каустики возникают во множестве задач волновой теории, обстоятельный расчеты, демонстрирующие изменение формы каутической поверхности при вариациях тех или иных параметров при реалистичных условиях, встречаются на удивление редко. Ниже для иллюстрации эволюции формы каустик с изменением параметров задачи приведены результаты подробных расчетов <sup>17-21</sup>, выполненных преимущественно еще до появления теории катастроф (частично они отражены в монографии <sup>12</sup>).

Первый пример описывает отражение лучей от неоднородного полупространства  $z > 0$  с линейным законом изменения проницаемости  $\epsilon(z) = 1 - \epsilon_1 z$  (рис. 16). Обнаруженная в работах<sup>17, 18</sup> отличительная особенность семейства каустик, отвечающих разным положениям источника

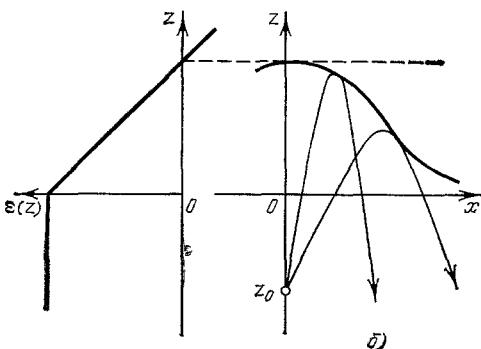


Рис. 16. Профиль электрической проницаемости в плазменном слое (а) и траектории лучей (б), описывающих отражение электромагнитных волн от такого плазменного слоя.

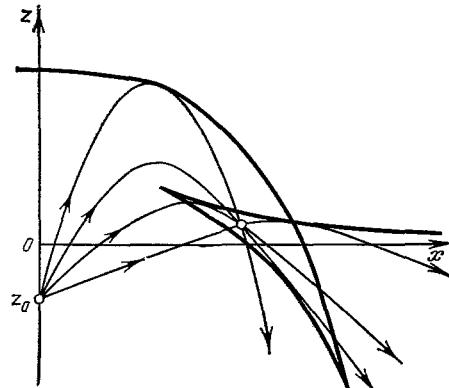


Рис. 17. Образование каустической петли (след «ласточкиного хвоста») при отражении сферической электромагнитной волны от плазменного слоя с линейным профилем проницаемости.

$z_0$ , заключается в том, что в интервале значений  $(-2/3, 1/9)$  параметра  $\zeta = \epsilon_1 z_0$  на каустике возникает петля, через каждую точку внутри которой проходят четыре луча (рис. 17). Эволюция каустики при изменении параметра  $\zeta$  показана на рис. 18. Глядя на эту серию рисунков, можно

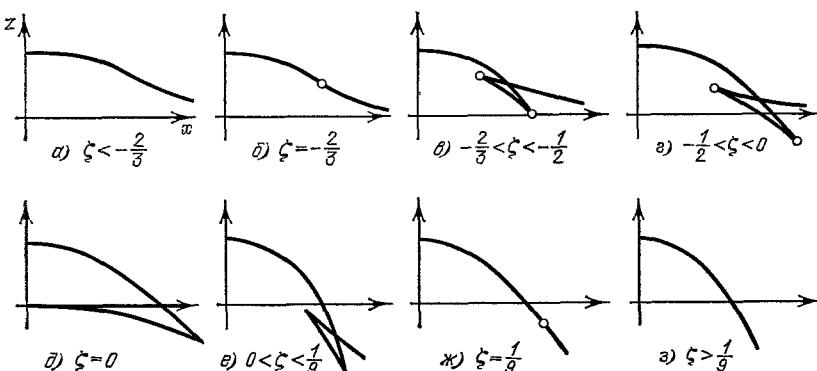


Рис. 18. Эволюция формы каустики в линейном плазменном слое.

предположить, что каустическая петля, состоящая из двух близко расположенных клюев, может являться следом ласточкиного хвоста, существующего в пространстве большей размерности. И действительно, если развернуть эту серию сечений по параметру  $\zeta$ , то мы получим характерную фигуру ласточкиного хвоста в расширенном пространстве  $\{x, z, \zeta\}$  (см. рис. 19, где для наглядности показана только часть результирующей фигуры при  $\zeta > 0$ ).

Второй пример описывает пятилучевую ситуацию в параболическом плазменном слое с проницаемостью

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{2z - z_m}{z_m} \right)^2 \right], \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$$

при  $0 < z < z_m$  и  $\epsilon = 1$  при  $z < 0$  и  $z > z_m$ .

Различные конфигурации каустики на плоскости параметров  $\{ |z_0/z_m|, \omega/\omega_{kp} \}$ , где  $z_0$  — высота расположения источника, а  $\omega_{kp} = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$  — плазменная частота, показаны на рис. 20<sup>19, 20</sup>. По характерной форме и по наблюдаемым особенностям эволюции ветвей эту каустику следует классифицировать как особенность типа  $A_5$  (бабочка, рис. 15).

Следующий пример<sup>21</sup> — эволюция каустики, образованной в линейном слое с проницаемостью  $\epsilon = 1 - \epsilon_1 z$  излучением сфокусированной антенны, у которой фаза меняется вдоль оси  $x$  по квадратичному закону  $\phi^0(x) = -\beta x^2$  (рис. 21). Выпуклая часть каустики при  $z > 0$  и ориентированный вверх клюв ведут себя при изменении параметра  $\beta/\epsilon_1$  так, как это должно происходить в случае особенности  $D_4^+$  (кошельк, рис. 13).

В литературе имеются также и другие примеры каустик, встречающихся при исследовании реальных волновых задач. Из недавних примеров упомянем работу<sup>17</sup>, которая иллюстрирует аналогию между оптическими каустиками и особенностями распределения плотности вещества в процессе эволюции Вселенной.

Приведенные примеры демонстрируют пользу универсальной классификации каустик: то, что ранее представлялось набором несвязанных экзотических явлений, обрело теперь внутреннюю логику. Выработав некоторые навыки, по отдельным фрагментам можно восстанавливать недостающие детали и предсказывать эволюцию каутической картины в целом. Особенно важно это для нахождения волновых полей, которым посвящены последующие главы.

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ КАУСТИК

#### а) Эталонные интегралы. Локальная асимптотика поля

Как уже было сказано выше, теория катастроф навела порядок не только в геометрических формах каустик, но и позволила весьма радикально решить вопрос о типичных дифракционных интегралах, описывающих поле вблизи каустик. По аналогии с известными ранее интегральными представлениями поля в случае простых каустик, на основе теории катастроф удалось проklassифицировать эталонные дифракционные интегралы вида

$$I(\zeta) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d^l \tau \exp [ik\varphi(\zeta, \tau)]. \quad (3.1)$$

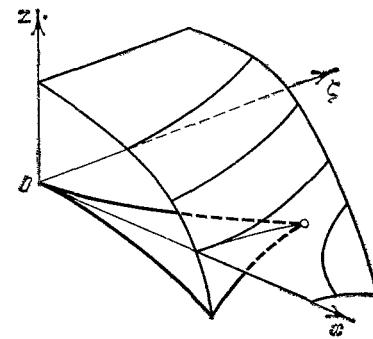


Рис. 19. Форма каутической поверхности (касточкин хвост) в расширенном пространстве  $\{x, z, \zeta\}$  в случае точечного источника, облучающего линейный плазменный слой.

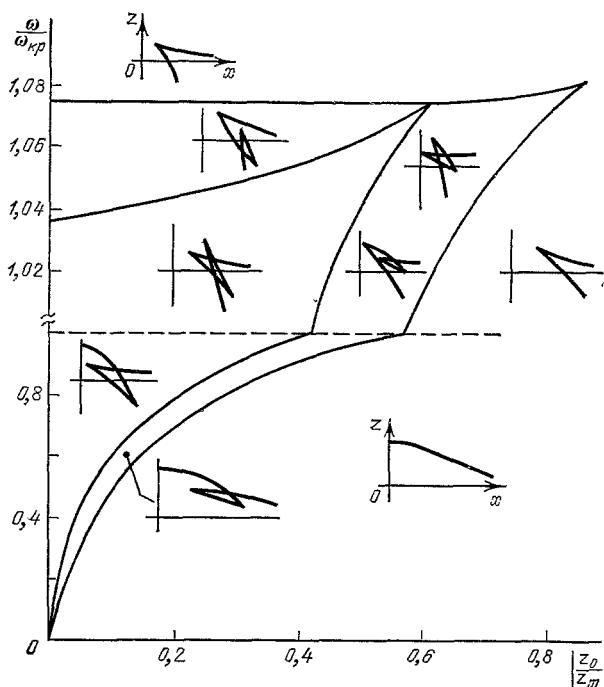


Рис. 20. Перестройка каустической картины (двумерные сечения бабочки) на плоскости параметров  $\omega/\omega_{kp}$  и  $|z_0/z_m|$  в случае параболического слоя с профилем проницаемости из гл. 2, п. д).

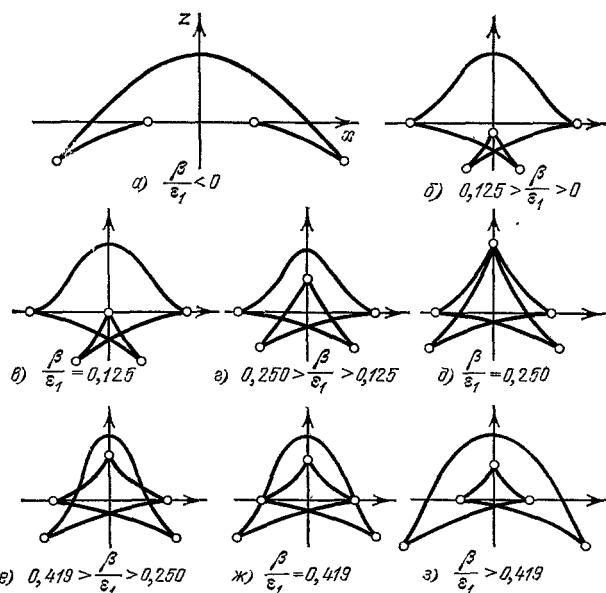


Рис. 21. Эволюция формы каустики, возникающей в линейном плазменном слое при облучении волной с квадратичным изменением фазы в плоскости  $z = 0$ .

В качестве фазовых функций  $\varphi(\zeta, \tau)$  здесь выступают те же самые полиномиальные производящие функции, которые используются при классификации каустик, при этом кратность интеграла  $l$  определяется корантом каустики<sup>5, 9, 22–24, 131–133</sup>. Под  $k$  здесь понимается волновое число  $k = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$ , а под  $\zeta$  — совокупность внешних параметров  $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m\}$ , где  $m$  — коразмерность каустики.

Такое представление поля является естественным, так как стационарные точки интеграла (3.1), отвечающие геометро-оптическому приближению, лежат на лучевой поверхности (2.5),

$$F: \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

а области слияния двух или более стационарных точек как раз и лежат на каустиках, на которых обращается в нуль определитель (2.6).

К интегралам вида (3.1) локально можно свести практически все дифракционные интегралы в бесконечных пределах, с которыми приходится иметь дело в волновой теории, в частности: интегралы Кирхгофа, представляющие поля в виде суперпозиции сферических волн; интегралы релеевского типа, дающие разложение поля по плоским волнам; канонические интегральные представления Маслова<sup>10, 11</sup> и т. д. Во всех этих случаях кратность интегрирования  $l$  равна либо единице, либо двум.

В качестве примера рассмотрим, например, локальную асимптотику поля в окрестности каустического клюва, возникающего при цилиндрической aberrации (аналог сферической aberrации в двумерной задаче).

В окрестности фокуса ( $z = F$ ,  $x = 0$ ) дифракционное поле  $u(x, z)$  выражается через начальное поле  $u^0(x) \equiv u(x, 0)$ , заданное в плоскости  $z = 0$ , интегралом Кирхгофа

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} u^0(x') \exp [ik\sqrt{z^2 + (x - x')^2}] dx'. \quad (3.2)$$

Если начальное поле  $u^0(x')$  имеет вид

$$u^0(x') = e^{-4kx'^2/2F},$$

то в окрестности фокальной точки  $z = F$  образуется каустический клюв, т. е. каустика типа  $A_3$ . Вводя переменные  $\zeta_1 = -x(2/F)^{1/4}$ ,  $\zeta_2 = (z - F) \times (2/F)^{1/2}$ ,  $\tau = x'(2F^3)^{-1/4}$ , локально (в окрестности вершины клюва) поле можно выразить через эталонный интеграл

$$I_P(\zeta, \zeta_2) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ ik \left( -\frac{1}{4} \tau^4 + \zeta_1 \tau + \frac{1}{2} \zeta_2 \dot{\tau}^2 \right) \right] d\tau, \quad (3.3)$$

который соответствует каустике  $A_3$  ( $m = 2$ ,  $l = 1$ ). В физической литературе этот интеграл носит название интеграла Пэрси<sup>25</sup>.

Таким образом, локально

$$u(x, z) = \left( \frac{i}{z} \right)^{1/2} \exp \left[ ik \left( z + \frac{x^2}{2F} \right) \right] (2F^3)^{1/4} I_P(\zeta_1, \zeta_2).$$

Другие примеры использования эталонного интеграла Пэрси для описания локальных асимптотик поля рассмотрены в работах<sup>26–29</sup>.

Чаще всего в приложениях возникает интеграл Эйри

$$I_{Ai}(\zeta_1) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ ik \left( \frac{1}{3} \tau^3 + \zeta_1 \tau \right) \right] d\tau = \sqrt{2} k^{1/6} v(k^{2/3} \zeta_1) \quad (3.4)$$

$v(x)$  — функция Эйри в обозначении В. А. Фока<sup>30</sup>), описывающий поле вблизи простой каустики (см., например, <sup>31-34 128</sup> и др.). Кроме того, изучены локальные асимптотики поля для каустик серии  $A_{m+1}$  и некоторые каустики омбилического типа.

Наиболее важные интегралы — для каустик типа  $A_4$ ,  $D_4^\pm$  и др. в настоящее время табулируются — см., например, <sup>48, 123-127</sup> (интегралы Эйри и Пэрси протабулированы уже давно).

Полезность общей классификации эталонных интегралов можно продемонстрировать на следующем примере. В работе <sup>49</sup> была проанализирована асимптотика поля для случая, когда простая ветвь каустики проходит вблизи каустического клюва, и с этой целью была введена новая функция

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-i\gamma t^{2/2}} \cos \left( \frac{t^3}{12} - \alpha t - \frac{\beta^2}{t} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Между тем в <sup>50</sup> было отмечено, что рассмотренная в <sup>49</sup> каустика классифицируется как гиперболический омбилик  $D_4^+$ , а если это так, то поле должно описываться соответствующим эталонным интегралом с фазовой функцией из табл. I (множитель  $k/2\pi$  не выписываем)

$$\Phi_+(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\tau_1 d\tau_2 \exp [i(\tau_2^2 \tau_1 + \tau_1^3 + \zeta_1 \tau_1^2 + \zeta_3 \tau_2)].$$

Вряд ли можно допустить, чтобы одно и то же поле описывалось двумя различными функциями  $G$  и  $\Phi_+$ . И действительно, в <sup>50</sup> было установлено однозначное соответствие между этими функциями:

$$\Phi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 2\sqrt{\pi} (12)^{-1/6} G \left[ -\zeta_2 (12)^{-1/3}, \frac{1}{2} \zeta_1 (12)^{1/6}, \zeta_3 (18)^{-1/3} \right].$$

### б) Ширина каустической зоны и степень фокусировки поля на каустиках

В табл. I—III были указаны два индекса  $\alpha$  и  $\delta$ , которые вычислялись по определенным правилам, в достаточной мере сложным, чтобы излагать их в данном обзоре. Истинный смысл этих индексов раскрывается при рассмотрении околоваутических полей. Индекс каустических зон  $\alpha$  характеризует ширину каустических зон, окружающих те или иные ветви каустики данного типа.

Именно, пусть  $\lambda_0 = 2\pi\lambda_0$  — длина волны, а  $\mu = (k_0 L)^{-1} = \lambda_0/L$  — безразмерный малый параметр, равный отношению длины волны  $\lambda_0$  к характерному масштабу задачи  $L$ . Тогда по порядку величины ширина каустической зоны  $\Delta l_k$  определяется как

$$\Delta l_k \sim L \mu^{-\alpha} \sim L^{1-\alpha} k_0^{-\alpha}. \quad (3.5)$$

Так, в случае простейшей каустики  $A_2$ , для которой  $\alpha = 2/3$  (см. табл. I), имеем

$$\Delta l_k \sim \left( \frac{L}{k_0^2} \right)^{1/3}.$$

Этот масштаб по порядку величины характеризует расстояние от каустики до первого нуля функции Эйри (см. рис. 1).

Более точно ширину каустической зоны можно найти непосредственно из анализа дифракционных интегралов, но имеется и другой — гео-

метрический подход, предложенный в нашей работе <sup>51</sup> (см. также <sup>12</sup>). Согласно <sup>51</sup>, ширину каустической зоны целесообразно определить как расстояние, на котором разность фаз между любыми двумя лучами не меньше  $\pi$ :

$$\min k |\psi_j - \psi_m| \geq \pi. \quad (3.6)$$

Оценки, полученные при помощи этой формулы, хорошо согласуются с характерными масштабами изменения эталонных интегралов и не противоречат более грубым оценкам по формуле (3.5).

Умение оценивать ширину каустической зоны  $\Delta l_k$  полезно для решения нескольких задач. Прежде всего, если рассматривать каустику как физический объект, т. е. как область, где происходит фокусировка поля, то зная  $\Delta l_k$  можно решить вопрос о «реальности» каустик <sup>12</sup>, <sup>51</sup>, т. е. о возможности раздельно наблюдать ветви каустик. Фактически каустические ветви можно считать разделившимися, если расстояние между ними превышает  $\Delta l_k$ .

В тесной связи с вопросом о реальности каустик находится и вопрос о выборе подходящего эталонного интеграла. Так, для каустики  $A_3$  (каустический клюв, рис. 7) волновое поле в области разделения каустических ветвей целесообразно описывать функциями Эйри, и только в области сближения ветвей необходимо прибегать к полному описанию при помощи интеграла Пэрси.

Наконец, сведения о ширине каустической зоны позволяют оценить поле непосредственно на каустике, используя лишь результаты геометрических расчетов <sup>12</sup>, <sup>51</sup>. Здесь возможны три различных подхода. Наиболее простой способ — подойти к каустике максимально близко, т. е. на расстояние порядка  $\Delta l_k$ , и воспользоваться значением лучевого поля на границе каустической зоны. Другой способ основан на соображениях сохранения потока энергии в лучевой трубке конечного сечения; если  $\Delta S_{\text{кауст}}$  — сечение лучевой трубки, охватывающей каустическую зону, а  $\Delta S^0$  — отвечающее ей начальное сечение, то амплитуда поля оценивается по формуле

$$A_{\text{кауст}} \sim A^0 \sqrt{\frac{n^0 \Delta S^0}{n_k \Delta S_{\text{кауст}}}}, \quad (3.7)$$

где  $n^0$  и  $n_k$  — значения коэффициентов преломления.

Еще один способ опирается на понятие френелевского объема луча <sup>51</sup> и тоже использует энергетические соображения. Пусть  $\Delta S_{\text{фр}}$  — начальное сечение лучевой трубки, равное френелевскому сечению луча, а  $\Delta S_{\text{кон}}$  — конечное сечение трубки вблизи каустики. Тогда

$$A_{\text{кауст}} \sim A^0 \sqrt{\frac{n^0 \Delta S_{\text{фр}}}{n_k \Delta S_{\text{кон}}}}. \quad (3.8)$$

Все три способа дают сравнимые значения поля, которые, как показывают расчеты <sup>51</sup>, отличаются от точных значений не более, чем на 30—50%.

Более грубые оценки поля можно получить также при помощи индекса фокусировки  $\delta$  <sup>130</sup>, значения которого приведены в табл. I—III, а именно, с его помощью можно сравнивать плотность потока энергии на каустике  $S_k$  с плотностью потока несфокусированного излучения  $S^0$ :

$$\frac{S_k}{S^0} \sim \mu^{-2\delta} \sim (kL)^{2\delta}. \quad (3.9)$$

Согласно табл. I, для простой каустики  $\delta = 1/6$ , для каустического клюва  $\delta = 1/4$ , для острия ласточкина хвоста —  $\delta = 3/10$ . Пользуясь этими циф-

рами, по формуле (3.9) можно оценить изменение степени фокусировки при стягивании каустической петли, показанной на рис. 18, в точку. Пусть, например,  $kL = 6 \cdot 10^4$ , что отвечает отражению электромагнитной волны длиной  $\lambda_0 = 10$  м от ионосферы с характерным масштабом  $L = 100$  км. Тогда для каустической петли (рис. 18, *б*) имеем  $S_h/S^0 \approx 250$ , для петли, стянутой в точку (рис. 18, *б*)  $S_h/S^0 \approx 740$ , а для простой каустики (рис. 18, *а*)  $S_h/S^0 \approx 40$ .

Из этого примера видно, что степень фокусировки в целом увеличивается с ростом коразмерности. Предельное значение индекса фокусировки равно 1 (сфокусированная сферическая волна), для идеальной цилиндрической фокусировки  $\delta = 1/2$ . В дополнение к данным табл. I—III в табл. VI приведены значения индекса фокусировки для остальных типов

Таблица VI  
Значения индекса фокусировки  $\delta$  для сложных каустик, упомянутых в табл. IV

Тип каустики	$P_{m+2}$	$R_{p, q}$	$T_{p, q, r}$	$Q_{10}$	$Q_{11}$	$Q_{12}$	$Q_{14}$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{14}$	$U_{12}$	$U_{14}$	$V_{15}$	$O_{16}$
$\delta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$

каустик, приведенных в табл. IV. При помощи этих данных легко указать каустику данной коразмерности, которая обладает наибольшим значением  $\delta$ .

Увеличение индекса фокусировки для каустик более сложных типов связано как с увеличением числа лучей, сходящихся на каустиках, так и с увеличением плотности сфокусированных лучей.

После описания результатов качественной теории обратимся теперь к построению равномерных асимптотических разложений поля при наличии каустик.

### в) Равномерная асимптотика поля с использованием эталонных интегралов

Равномерную асимптотику поля можно построить, используя идеи метода эталонных функций. В случае полей, имеющих лучевую структуру, можно надеяться на то, что качественно подобным лучевым и каустическим конфигурациям будут соответствовать и подобные поля, а поскольку дифракционные интегралы (3.1) отвечают вполне определенным каустикам, то именно их и следует использовать в качестве эталонных функций.

Первоначально метод эталонных функций был разработан для одномерных задач <sup>52, 53</sup>. Локальная асимптотика поля для случая простой каустики  $A_2$  в трехмерно-неоднородной среде была построена в работах <sup>31–34</sup>. Равномерная же асимптотика (для скалярного и электромагнитного полей) с использованием функции Эйри (3.4) и ее производной была предложена в работах <sup>54</sup> и <sup>55</sup>. Эта процедура изложена также в монографиях <sup>56</sup> и <sup>57</sup>. Равномерная асимптотика для так называемых «вакуумнообразных» каустик, которые теперь отождествлены с серией  $A_{m+1}$ , была предложена Д. Людвигом <sup>58</sup> для однородных сред и распространена на неоднородные среды в работе <sup>59</sup>.

Эффективность метода эталонных функций, сформулированного в <sup>54, 55, 58, 59</sup> (построение поля с использованием не только самих эталонных функций, но и их производных) была продемонстрирована затем на многих задачах (о части их будет сказано ниже), но общая теория построена не

была из-за отсутствия «джентльменского набора» эталонных функций. Сейчас такой набор появился (это интегралы вида (3.1)), и здесь мы кратко опишем процедуру построения равномерной асимптотики для каустик произвольного вида в общем случае плавно неоднородной среды.

Пусть из уравнений геометрической оптики

$$(\nabla\psi)^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad 2\nabla U \nabla\psi + U\Delta\psi = 0 \quad (3.10)$$

найдены  $M+1$  значений эйконала  $\psi_j$  и  $M+1$  значений амплитуды нулевого приближения  $U_j$  и определен тип каустики, т. е. установлена ее ко-размерность  $m$  и модальность  $\mu$ , в сумме дающие  $M$ :  $m+\mu=M$ . Геометрическое решение<sup>53</sup>

$$u_i(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{M+1} U_j(\mathbf{r}) \exp[ik\psi_j(\mathbf{r})] \quad (3.11)$$

справедливо только на удалении от каустик, тогда как на самих каустиках амплитуды  $U_j$  обращаются в бесконечность.

Равномерную асимптотику поля, которая дает конечные значения поля всюду, в том числе и на каустиках, можно выразить через эталонный интеграл (3.1), соответствующий данному типу каустики, и через его производные по аргументам  $\zeta_p$ , в число которых для сокращения записи включены (под номерами  $m+1, \dots, m+\mu \equiv M$ ) неустранимые модули  $a_j$ ,  $j=1, 2, \dots, \mu$ :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) = e^{ik\theta} \left[ I_s(\zeta) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^{(s)}}{(ik)^s} + \frac{1}{ik} \sum_{p=1}^{M_s} \frac{\partial I(\zeta)}{\partial \zeta_p} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_p^{(s)}}{(ik)^s} \right] = \\ = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{[1]_{ik}}{(ik)^s} \int_{-\infty}^{\infty} d^l \tau g^{(s)}(\mathbf{r}, \tau) e^{ikf(\mathbf{r}, \tau)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$g^{(s)}(\mathbf{r}, \tau) = A^{(s)} + \sum_{p=1}^M B_p^{(s)} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_p}, \quad (3.13)$$

$$f(\mathbf{r}, \tau) = \theta(\mathbf{r}) + \Phi(\zeta, \tau).$$

Входящие сюда  $M+1$  неизвестных величин  $\theta, \zeta_p, p=1, 2, \dots, M$ , и  $M+1$  неизвестных амплитуд  $A^{(s)}, B_p^{(s)}, p=1, 2, \dots, M$  (коэффициенты при  $(ik)^{-s}$ ) считаются функциями координат и подлежат определению.

Подставляя (3.12) в уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 n^2(\mathbf{r}) u = 0, \quad (3.14)$$

приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $k$  величинам, пропорциональным  $\partial f / \partial \tau$  (эта величина в дальнейшем заменится). Последующее интегрирование по частям приводит к системе уравнений для  $\theta, \zeta_p, A^{(s)}$  и  $B_p^{(s)}$ , которую мы выпишем лишь частично для низших порядков по  $k$ :

$$[\nabla f(\mathbf{r}, \tau)]^2 - n^2(\mathbf{r}) = T(\tau) \frac{\partial f(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau}, \quad (3.15)$$

$$2\nabla g^{(0)} \nabla f + g^{(0)} \Delta f - \frac{\partial}{\partial \tau} (g^{(0)} T) = R^0(\tau) \frac{\partial f(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau}. \quad (3.16)$$

Входящие сюда  $l$ -компонентные величины  $T(\tau)$  и  $R^0(\tau)$  находятся из условия, чтобы уравнения (3.15) и (3.16) удовлетворялись тождественно по  $\tau$  (описание частных случаев этой процедуры см. в работах<sup>58-61</sup>).

Уравнения (3.15) и (3.16) надлежит решать при выполнении условия  $\partial f / \partial \tau_p = 0$ , или, что то же, условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_p} = 0,$$

которое определяет  $M + 1$  значений параметров  $\tau_j$  (в общем случае комплексных), так как для каустики коразмерности  $m$  и модальности  $\mu$  функция  $\Phi(\zeta, \tau)$  имеет  $M + 1 = m + \mu + 1$  стационарных точек.

Как бы сложно не выглядели уравнения (3.15) и (3.16), их решения неожиданным и даже удивительным образом выражаются через решения  $\psi_j$  и  $U_j$  уравнений геометрической оптики. Оказывается, что если  $\theta, \zeta_p, A^{(0)}$  и  $B_p^{(0)}$  удовлетворяют уравнениям (3.15) и (3.16), то комбинации искомых функций

$$\psi_j = \theta(r) + \varphi(\zeta, \tau_j), \quad (3.17)$$

$$U_j = g^{(0)}(r, \tau_j) |\det h(\tau_j)|^{-1/2} e^{i\pi\beta_j/4} \quad (3.18)$$

удовлетворяют уравнениям геометрической оптики (3.10). (Здесь  $h = [h_{pq}]$  — матрица с элементами  $h_{pq} = \partial^2 \Phi / \partial \tau_p \partial \tau_q$ ,  $\beta_j = \operatorname{sgn} h(\tau_j)$  — сигнатура матрицы  $h$  при  $\tau = \tau_j$ ). Обращая соотношения (3.17) и (3.18), в принципе, можно выразить все  $2(m + 1)$  искомых функций  $\theta, \zeta_p, A^{(0)}$  и  $B_p^{(0)}$  через эйконалы  $\psi_j$  и амплитуды  $U_j$ , отвечающие как вещественным, так и комплексным лучам. В итоге решения уравнений (3.15), (3.16) можно найти, в сущности, не решая этих уравнений. Очень важно, что амплитудные факторы  $A^{(0)}$  и  $B_p^{(0)}$  на каустиках будут иметь конечные значения, хотя амплитуды  $U_j$  на каустиках сингулярны. Заметим, что соотношения (3.17) и (3.18) можно было бы получить, спивая асимптотическое представление (3.12) с лучевой асимптотикой поля (3.11) вдали от каустик, но из одного этого факта вряд ли можно было бы предположить сохранение связей (3.17) — (3.18) непосредственно на каустиках, где геометрическая оптика заведомо теряет силу.

В частном случае простой каустики, когда  $\varphi(\zeta, \tau) = \zeta\tau + \tau^3/3$  и  $\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\zeta}$ , из соотношений (3.17) — (3.18) следуют результаты работы <sup>54</sup> (см. также <sup>55-58, 129</sup>):

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2), \quad \zeta = \left[ \frac{3}{4}(\psi_2 - \psi_1) \right], \\ A^{(0)} &= \zeta^{1/4} (A_2 - iA_1) \left( \frac{i}{2} \right)^{1/2}, \quad B_1^{(0)} = \zeta^{-1/4} (A_2 + iA_1) \left( \frac{i}{2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

при этом поле выражается через интеграл Эйри (3.4):

$$\begin{aligned} u &\cong e^{ik\theta} [A^{(0)} I_{Ai}(\zeta) + (ik)^{-1} B_1 \partial I_{Ai}(\zeta) / \partial \zeta] = \\ &= \sqrt{2} k^{1/6} e^{ik\theta} [A^{(0)} v(k^{2/3}\zeta) + ik^{-1/3} B_1^{(0)} v'(k^{2/3}\zeta)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Равномерная асимптотика поля для каустического клюва выражается через интеграл Пэрси (3.3):

$$u \approx e^{ik\theta} \left( A^{(0)} I_p + \frac{B_1^{(0)}}{ik} \frac{\partial I_p}{\partial \zeta_1} + \frac{B_2^{(0)}}{ik} \frac{\partial I_p}{\partial \zeta_2} \right), \quad (3.21)$$

при этом связь между  $\theta, \zeta_{1,2}$  и  $\psi_{1,2,3}$  оказывается уже не такой простой, как для асимптотики Эйри:

$$\theta + \zeta_1 \tau_j + \frac{1}{2} \zeta_2 \tau_j^2 + \frac{1}{4} \tau_j^4 = \psi_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $\tau_j$  — корни кубического уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \zeta_1 + \zeta_2 \tau + \tau^3 = 0.$$

Общий алгоритм (3.12) — (3.18) позволяет провести анализ практически для любых каустик, перенеся центр тяжести вычислений на решение алгебраических уравнений для  $\theta$ ,  $\zeta_p$ ,  $A$ ,  $B_p$ .

г) Общие замечания о локальных и равномерных асимптотиках волнового поля

В этом пункте мы обсудим некоторые вопросы практического применения результатов теории катастроф к вычислению волновых полей. Для того, чтобы придать этим вопросам известную остроту, мы сформулируем их в полемическом плане.

Как далеко можно продвинуться по пути построения каустических асимптотик поля? Несмотря на то, что эталонные интегралы, предложенные теорией катастроф, радикально решают проблему построения локальных и равномерных асимптотик волнового поля для каустик произвольной сложности, реальное нахождение полей сопряжено со значительными трудностями. Во-первых, сложна уже геометрооптическая часть задачи: выделение всех лучей, связанных с данной каустикой, и определение типа каустики. Во-вторых, даже если задача классификации решена, то возникают трудности табулирования соответствующих эталонных интегралов.

Предел, достигнутый к настоящему времени, — это каустики коразмерности 4 и 5. Освоение же более высоких коразмерностей требует значительных усилий. Некоторое упрощение наступает, напротив, при очень большом числе лучей, когда результирующее поле можно считать случайным, что позволяет применять для его анализа методы, развитые в статистической радиофизике<sup>62, 63</sup>, в частности, методы описания так называемых спекл-неоднородных ( пятенных) полей<sup>64</sup>. Видимо, условную границу между детерминированным и статистическим описанием сложных каустических полей следует провести там, где доля площади, занимаемая каустическими зонами, составляет 10—20%.

Существуют ли ласточкины хвосты в пространстве двух измерений и бабочки в трех измерениях? До сих пор мы сознательно уклонялись от формулировки точных математических результатов в отношении типов каустик, допустимых в пространстве данной размерности. Одна из таких теорем, принадлежащая Х. Уитни, утверждает, что при проектировании произвольной гладкой поверхности на плоскость образуются особенности только типа складки  $A_2$  и сборки  $A_3$ , т. е. только линии и клювы (точки возврата линий). Согласно другой теореме, в пространстве трех измерений существуют только особенности  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  и  $D_4^\pm$ , перечисленные в табл. I.

Признавая важность подобного рода теорем для классификации каустик, мы хотели бы обратить внимание на определенные трудности, возникающие при использовании этих теорем для вычисления волновых полей. Рассмотрим два близко расположенных клюва (рис. 22), расстояние между ветвями которого меньше ширины каустической зоны (на рис. 22 она заштрихована). Если в соответствии с теоремой Уитни трактовать каустическую петлю как совокупность двух клювов  $A_3$ , то для описания полей в их окрестности надо использовать интегралы Пэрис (3.3). Между тем, сливание каустических зон клювов делает это невозможным, заставляя нас применять более сложный интеграл  $A_4$ , отвечающий ласточкину хвосту. Но, по теореме Уитни, хвост в двух измерениях существовать не может!

Возникшее противоречие носит, разумеется, терминологический характер: в описанных условиях каустическую петлю следует рассматривать

как след ласточкиного хвоста в расширенном пространстве параметров — две геометрические координаты на плоскости надо дополнить еще одним параметром, «разворачивающим» петлю в ласточкин хвост. Пример такой развертки изображен на рис. 19. Разворачивающим параметром в данном случае служит координата источника  $\zeta = \varepsilon_1 z_0$ . Точно так же бабочки на рис. 20 и кошельки на рис. 21 следуют трактовать как следы этих особенностей при развертке по соответствующему параметру.

Добавление разворачивающего параметра особенно важно тогда, когда имеются подозрения, что система находится вблизи точки бифуркации. Так, если имеются основания ожидать рождения каустической петли (как на серии рисунков 18), целесообразно осуществить развертку по дополнительному параметру, предусмотрительно ориентируясь на осо-

Рис. 22. Слияние каустических зон отдельных ветвей каустической петли  $A_4$  при увеличении длины волны.

бенность  $A_4$  (ласточкин хвост) и на соответствующий эталонный интеграл, а не на функцию Эйри, отвечающую складке  $A_2$ . С этими оговорками мы можем не бояться совершить ошибки в определении полей, связанные с чересчур ригористичным использованием теорем катастроф.

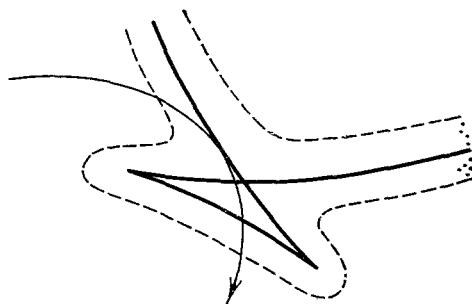
*Почему в физическом трехмерном пространстве возможны каустики коранга три и выше?* Выше мы отметили, что в двух и трех физических измерениях можно говорить о существовании каустик высокой коразмерности ( $m \geq 3$ ), только если иметь в виду наличие дополнительных «разворачивающих» параметров. Несколько иными причинами объясняется возможность существования в физическом пространстве (три измерения) каустик коранга  $l$ , равного или превышающего 3:  $l \geq 3$ . Наиболее употребительные интегральные представления поля имеют вид двумерных интегралов: по поверхности (интеграл Кирхгофа), по двум компонентам волнового вектора (рэлеевское разложение по плоским волнам) или по двум компонентам импульса (канонический оператор Маслова). Откуда же могут появиться дополнительные интегрирования?

Возможная причина появления дополнительных интегралов — сложная структура функций Грина, используемой в интеграле Кирхгофа. В неоднородных средах функция Грина сама может быть представлена дифракционным интегралом, чем и объясняется существование каустик с  $l \geq 3$ . Если исходить из фреймановской картины формирования поля, то в пределе мы придем к континуальным интегралам. Разумеется, для лучевых картин средней сложности реализуются интегралы некоторой компромиссной кратности  $2 \leq l < \infty$ . Используя метод эталонных функций, описанный в п. в., следует заранее использовать интегралы нужной кратности.

#### 4. ПОЛУТЕНЕВЫЕ КАУСТИКИ И ПОЛУТЕНЕВЫЕ ПОЛЯ

##### а) Полутеневые каустики и краевые катастрофы

Полутеневые каустики встречаются в приложениях значительно чаще, чем это могло бы показаться непосвященному. Некоторые примеры появления полутеневых каустик приведены на рис. 23 и 24. В случае,



изображенном на рис. 23, каустика, образованная обычными лучами, обрывается непрозрачным экраном.

Несколько более сложным образом выглядят полутеневые каустики дифракционных лучей. На рис. 24 показаны краевые дифракционные лучи, покидающие освещенную кромку и образующие полутеневую каустику (1) в неоднородной отражающей среде. Границный луч  $PQ$ , разделяющий области света и тени, одновременно касается и каустики краевых дифракционных лучей, и оборванной каустики обычных лучей (2).

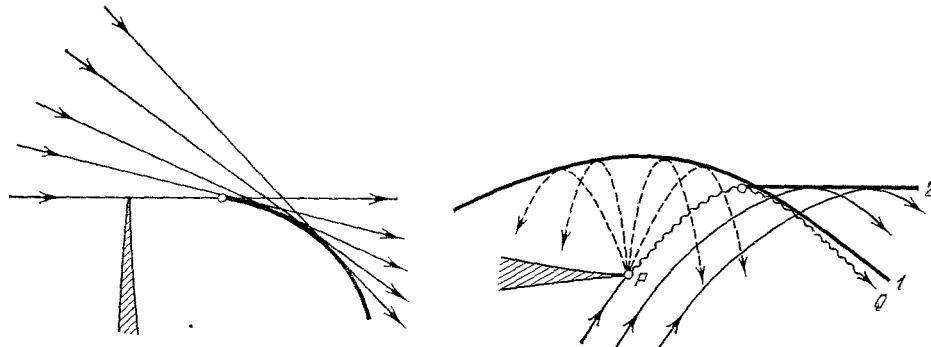


Рис. 23. Оборванная полутеневая каустика, возникающая при экранировке первичной волны в свободном пространстве.

Рис. 24. Полутеневая каустика 1, образованная дифракционными лучами (штриховые линии) в линейном плазменном слое. Границный луч  $PQ$  касается и каустики 1 и оборванной каустики 2, образованной обычными лучами.

Как оказалось, полутеневые каустики тесно связаны с теорией так называемых краевых особенностей<sup>5, 65</sup>. Список этих особенностей отличается от списка катастроф, приведенного в гл. 2. Простые (нуль-модальные) каустики перечислены в табл. VII, которая содержит две бесконеч-

Таблица VII  
Классификация простых (нуль-модальных) полутеневых каустик

Тип каустики	Коразмерность	$\varphi(\zeta, \tau)$	Индексы каустических зон $\alpha$	Индексы фокусировки $\delta$
$B_{m+1}$	$m \geq 2$	$\pm \frac{1}{m+1} \tau_1^{m+1} \pm \tau_2^2 + \sum_{p=1}^m \frac{1}{p} \zeta_p \tau_1^p$	$\frac{m}{m+1}, \dots, \frac{1}{m+1}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}$
$C_{m+1}$	$m \geq 2$	$\tau_1 \tau_2 \pm \frac{\tau_2^{m+1}}{m+1} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{p} \zeta_p \tau_2^p$	$\frac{m}{m+1}, \dots, \frac{1}{m+1}$	0
$F_4$	3	$\pm \tau_1^2 + \frac{1}{3} \tau_2^3 + \zeta_1 \tau_1 + \zeta_2 \tau_2 + \zeta_3 \tau_1 \tau_2$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ные серии  $B_{m+1}$  и  $C_{m+1}$  и внесерийную особенность  $F_4$  (как и ранее, индексы каустик отвечают группам Ли, с которыми они связаны). В табл. VII указан также канонический вид производящей функции  $\varphi(\zeta, \tau)$ , которая естественным образом возникает затем в интегральных представлениях поля.

При коразмерностях  $m = 2$  и  $m = 3$  образуются лишь простые полутеневые каустики. В частности, при  $m = 3$  это каустики пяти типов  $B_3$ ,  $C_3$ ,  $B_4$ ,  $C_4$ ,  $F_4$  (шестой тип  $B_2$ , эквивалентный  $C_2$ , соответствует тени без каустик). Серии  $B_{m+1}$  и  $C_{m+1}$  по фазовой структуре поля подобны сериям  $A_{m+1}$  и  $D_{m+1}$  соответственно.

При  $m \geq 4$ , наряду с простыми, появляются также унимодальные, бимодальные и т. д. полутеневые каустики. Их классификация до коразмерности  $m = 8$  дана в работах<sup>5, 65</sup>.

### б) Равномерные асимптотики поля в случае полутеневых каустик

Равномерные асимптотические формулы для оборванных полутеневых каустик были построены в работах<sup>61, 66, 67</sup> еще до появления теории краевых катастроф. В качестве эталонного интеграла в<sup>61, 67</sup> была использована неполная функция Эйри (см.<sup>69, 70</sup>).

$$I_{A1}(\zeta, \eta) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{\eta}^{\infty} \exp\left[ik\left(\tau\zeta + \frac{\tau^3}{3}\right)\right] d\tau, \quad (4.1)$$

а искомое поле (главный член асимптотического ряда) было представлено в виде (обозначения здесь несколько отличаются от принятых в<sup>69, 70</sup>):

$$u = e^{ik\theta} \left[ A I_{A1}(\zeta, \eta) + \frac{B}{ik} \frac{\partial I_{A1}(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} + \frac{C}{ik} \frac{\partial I_{A1}(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \right]. \quad (4.2)$$

Интеграл  $I_{A1}(\zeta, \eta)$  как бы объединяет в себе свойства двух более простых эталонных функций — интеграла Френеля вблизи области полутени (но вдали от каустики) и функции Эйри вблизи каустики (но вдали от полутиени).

Что же касается полученной в<sup>60, 70</sup> асимптотики поля в случае полутеневой каустики дифракционных лучей (рис. 24), то здесь в качестве эталонного интеграла выступила еще одна обобщенная функция Эйри — «функция Эйри — Френеля»

$$V(\zeta, \eta) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-\infty + i\alpha^2}^{\infty + i\alpha^2} \frac{1}{(\tau - \eta)} \exp\left[ik\left(\frac{1}{3}\tau^3 + \tau\zeta\right)\right] d\tau, \quad (4.3)$$

которая вблизи области полутени переходит в интеграл Френеля. Асимптотическое же представление поля полностью аналогично (4.2).

С появлением классификации краевых катастроф<sup>65, 5</sup> стало ясно, что результаты работ<sup>60, 61, 66, 67, 70</sup> можно обобщить на полутеневые каустики более общего вида. Общая схема вычислений остается такой же, как в гл. 3, но в качестве эталонного интеграла для каустик серий  $B_{m+1}$ ,  $C_{m+1}$  и для  $F_4$  следует взять

$$I(\zeta) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \exp[ik\varphi(\zeta, \tau_1, \tau_2)], \quad (4.4)$$

где  $\varphi(\zeta, \tau_1, \tau_2)$  — нормальные формы производящих функций краевых катастроф. Для особенностей типа  $B_{m+1}$ ,  $C_{m+1}$  и  $F_4$  эти функции представлены в табл. VII.

В случае серии  $B_{m+1}$  эталонный интеграл (4.4) сводится к неполной многомерной функции Эйри

$$I(\zeta, \eta) = \int_{\eta}^{\infty} \exp \left[ ik \left( \frac{\tau^{m+1}}{m+1} + \sum_{p=1}^{m-1} \zeta_p \frac{\tau^p}{p} \right) \right] d\tau, \quad (4.5)$$

которая описывает поле вблизи оборванных каустик<sup>61</sup>, а для серии  $C_{m+1}$  интеграл (4.4) превращается в многомерную функцию Эйри — Френеля

$$V(\zeta, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau - \eta} \exp \left[ ik \left( \frac{\tau^{m+1}}{m+1} + \sum_{p=1}^{m-1} \zeta_p \frac{\tau^p}{p} \right) \right] d\tau, \quad (4.6)$$

которая была введена ранее в работах<sup>60, 61, 70</sup>. Особенность интегралов вида (4.6) заключается в том, что они описывают слабо выраженную фокусировку. Недаром в табл. VII им отвечает нулевое значение индекса б.

Таким образом, классификационные теоремы для краевых особенностей помогли «изобрести» эталонные интегралы, а стандартная техника метода эталонных функций — построить соответствующие равномерные асимптотики поля.

## 5. ДРУГИЕ ТИПЫ КАУСТИК И ЭТАЛОННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Кроме эталонных интегралов, связанных с теорией отображений и обсужденных в двух предыдущих главах, для описания волновых полей используются также иные интегралы и специальные функции. Перечислим кратко имеющиеся здесь возможности.

### а) Эталонные интегралы с произвольной фазовой функцией

Появление полиномов в показателе экспоненты в эталонном интеграле (3.1) обусловлено скорее удобствами классификации, чем необходимостью. Пусть в показателе экспоненты стоит гладкая функция  $\Phi(\zeta, t)$ , имеющая нужное число стационарных точек, а в остальном произвольная. Очевидно, что интеграл

$$\mathcal{Y}(\tau) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [ik\Phi(\zeta, \tau)] d\tau \quad (5.1)$$

при помощи гладкой замены переменных можно асимптотически свести к интегралу (3.1), где  $\varphi(\zeta, \tau)$  — одна из подходящих нормальных форм производящей функции. Поэтому интегралы вида (5.1) пригодны для построения асимптотик поля в той же мере, что и эталонные интегралы (3.1).

Частные виды эталонных каустических интегралов с неполиномиальной фазовой функцией  $\Phi(\zeta, \tau)$  уже неоднократно использовались в волновой теории. Наиболее известный пример — применение функции Ханкеля  $H_0^{(1)}(x)$  вместо функции Эйри для описания поля вблизи неособой каустики (см., в частности, работу<sup>71</sup>). Предложение применить в качестве эталонного одномерный интеграл с фазовой функцией, имеющей необходимое число стационарных точек, равное числу лучей, было сделано Г. В. Пермитиным еще в 1972 г.<sup>72</sup>. Это предложение можно обобщить и на многомерные интегралы. Как показали наши расчеты, использование неполиномиальных фазовых функций по существу не меняет схему метода эталонных функций (гл. 3, п. б)). Меняется только конкретный вид урав-

нений для определения величин  $\zeta_p$ . В то же время использование неполиномиальных фазовых функций может представить определенный практический интерес, если соответствующие им интегралы (5.1) изучены лучше, чем эталонные интегралы вида (3.1), или если такие интегралы обеспечивают более высокое качество аппроксимации.

б) Эталонные интегралы  
для структурно неустойчивых каустик

Возмущения, с которыми приходится иметь дело при рассмотрении физических задач, далеко не всегда укладываются в рамки «малых шевелений» (см. гл. 2, п. 6). Это заставляет проводить отличия математического понятия «структурной устойчивости» от понятия «физической устойчивости», т. е. устойчивости физических характеристик по отношению к малым возмущениям той или иной природы.

В связи с этим естественно возникает вопрос о месте, на которое могут претендовать структурно устойчивые особенности в физических теориях. Тот же вопрос целесообразно поставить и в отношении структурно неустойчивых объектов. В сущности, роль тех и других объектов в физических теориях определяется тем, насколько хорошо они моделируют существенные черты реальных объектов, при этом критерий «насколько хорошо» должен вытекать из физической постановки задачи.

В случае каустик разумно считать ту или иную модель приемлемой, если характерные для данной задачи возмущения начальных условий и параметров среды приводят лишь к малым возмущениям волнового поля, а не самих каустик, поскольку экспериментально фиксируются значения именно волнового поля. Малость же возмущений поля можно гарантировать, если возмущения каустической поверхности малы по сравнению с шириной каустической зоны (см. гл. 3, п. 6). Если под действием того или иного возмущающего фактора каустика выходит за пределы первоначальной каустической зоны, то модель (неважно — обладает ли она свойством структурной устойчивости или нет) следует усложнить, включив возмущающий фактор в число самостоятельных (присущих задаче) параметров.

Таким образом, хотя структурно неустойчивые каустики и не являются типичными с точки зрения теории катастроф, они могут служить приемлемыми моделями тех или иных реальных объектов. В физических задачах структурно неустойчивые образования встречаются весьма и весьма часто, например, плоская, сферическая и цилиндрическая волны — все это примеры структурно неустойчивых образований.

Структурно неустойчивые каустики — точечный фокус и осевая каустика, вообще говоря, требуют специальных эталонных интегралов, не сводимых к (3.1). Наиболее далеко продвинутые результаты получены для осевых (сагиттальных) каустик. В отсутствие азимутальной зависимости в качестве эталонной функции выступает функция Бесселя нулевого порядка  $J_0(x)$ <sup>73-81</sup>, а при наличии азимутальной зависимости — функции Бесселя высших порядков  $J_m(x)$ <sup>82</sup>. Процедура построения равномерной асимптотики в основном такая же, как обычно.

в) Контуры эталонные интегралы

Анализ показывает, что схема построения равномерных асимптотик не изменяется, если эталонный интеграл является контурным:

$$I(\zeta) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_C \exp[ik\Psi(\zeta, \tau)] d\tau. \quad (5.2)$$

Фазовая функция в (5.2) должна обладать нужным числом стационарных точек, а на концах контура  $C$ , т. е. при  $\tau = \tau_{\text{нач}}$ , и  $\tau = \tau_{\text{кон}}$ , должно выполняться условие периодичности. Тогда асимптотика поля дается выражениями из гл. 3, п. в), как в общем методе эталонных функций; при этом фазовая функция  $\Psi$  не обязана быть полиномом по  $\tau$ .

В частном случае, когда  $\Psi(\zeta, \tau) = \zeta \sin \tau - a\tau$ ,  $a > 0$ ,  $\zeta > 0$ ,  $-\pi < \tau < \pi$ , эталонный интеграл (5.2) выражается через функцию Бесселя:

$$I(\zeta) = \sqrt{2\pi k} \Psi_{ka}(k\zeta), \quad (5.3)$$

при этом формулы (3.12) — (3.13) описывают асимптотику аксиально симметричного поля, о которой говорилось в п. б).

г) Эталонные интегралы  
с амплитудной коррекцией.  
«Размытые» каустики

Все эталонные интегралы, о которых говорилось выше, содержали под знаком интеграла только быстро осциллирующую функцию  $\exp[ik\varphi(\zeta, \tau)]$ . Между тем введение под знак интеграла (3.1) или (5.2) амплитудного фактора  $B(\zeta, \tau)$  позволило бы провести амплитудную коррекцию лучей. Такая необходимость возникает, например, при описании ближнего поля неравномерно возбужденной апертуры. Если поле вблизи края апертуры ( $\tau = 0$ ) ведет себя как  $\tau^v$  ( $\tau > 0$ ,  $v > 0$ ), то при наличии каустик естественно возникают интегралы вида<sup>83-85</sup>

$$F_v(\zeta, \eta) = \int_{\eta}^{\infty} (\tau - \eta)^v \exp \left[ ik \left( \frac{\tau^3}{3} + \tau \zeta \right) \right] d\tau, \quad (5.4)$$

которые сочетают свойства функции параболического цилиндра дробного индекса  $D_{-v-1}(\zeta)$  (при целых  $v$  это просто интеграл Френеля и его производные) и функции Эйри.

Полутеневые каустики, образующиеся вблизи размытой границы свет — тень, были проанализированы в работах<sup>83-85</sup> и названы там «размытыми» каустиками. Фокусировка поля на этих каустиках выражена заметно слабее, чем при резкой границе свет — тень. Кроме описания поля в окрестности размытых каустик, функции (5.4) используются для описания боковых волн (в последнем случае  $v = 1/2$ ).

д) Каустики с просачиванием  
и волноводные каустики

Каустики с просачиванием возникают в условиях, когда энергия волны частично просачивается (туннелирует) под потенциальным барьером. Особенность таких каустик состоит в том, что у них имеется «лицевая» ветвь и ветвь, находящаяся за барьером (рис. 25), которая, как указано в<sup>87</sup>, может оказаться и комплексной.

Для описания полей в случае каустики с просачиванием в работе<sup>86</sup> было предложено в качестве эталонной использовать функцию Вебера (функцию параболического цилиндра), которая удовлетворяет уравнению

$$w''(t) + (t^2 - b^2) w(t) = 0, \quad (5.5)$$

следующему по сложности после уравнения гармонического осциллятора  $w'' + w = 0$  и уравнения Эйри  $w'' - tw = 0$ . Если уравнение осциллятора порождает гармоническую функцию  $e^{it}$ , которая выступает как эталонная для геометрической оптики, а уравнение Эйри — эталонную функцию для неособой каустики, то уравнение Вебера (5.5) порождает функции, которые отвечают неполному отражению от каустики и частичному просачиванию через барьер. При надлежащей замене параметров ( $b \rightarrow ib$ ) функции Вебера в состоянии описать и надбарьерное отражение<sup>86</sup>, когда и «лицевая» ветвь каустики становится комплексной.

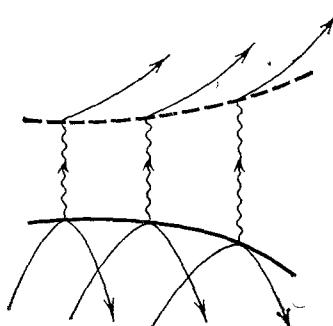


Рис. 25. Каустика с просачиванием.

Нижняя ветвь (сплошная линия) отвечает отраженным лучам, а верхняя ветвь (штриховая линия) — лучам, просочившимся через барьер.

мита с гауссовскими множителями. После работы<sup>86</sup> эти функции часто используются в качестве эталонных при решении задач распространения волн в неоднородных волноводах (см., например,<sup>88-90</sup>). Кроме того, те же функции возникают при описании собственных колебаний типа «прыгающего мячика» в открытых и закрытых резонаторах<sup>91-93</sup>.

е) Эталонные функции,  
порожденные обыкновенными  
дифференциальными уравнениями

Если имеется несколько областей, разделенных барьерами, то эталонное уравнение (5.5) следует еще более усложнить. Общая теория эталонных функций, порожденных уравнением второго порядка

$$w''(t) + f_1(t)w'(t) + f_2(t)w(t) = 0 \quad (5.6)$$

с произвольными функциями  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  была построена в работе<sup>94</sup>. Уравнению (5.6) удовлетворяют многие известные специальные функции: полиномы Лежандра, сферические функции Бесселя, функции Ламэ и т. д. Поэтому развитая в<sup>94</sup> теория позволяет употребить эти хорошо изученные функции для описания каустических полей. Конкретное применение эта теория нашла в работе<sup>95</sup>, где были рассмотрены собственные электромагнитные поля в трехосном эллипсоиде.

В другом частном случае, когда  $f_1 = 0$ , а  $f_2(t) = t^\nu$ ,  $\nu > 1$ , уравнение (5.6) допускает решение через функции Харди — Эйри  $H_\nu(t)$ , которые описывают отражение волн от точки поворота произвольной кратности, причем не только целочисленной ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ), но и дробной кратности.

Анализ эталонных функций для каустик дробной кратности и соответствующих равномерных асимптотик проведен в работе<sup>96</sup>.

## 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

В этом разделе мы кратко коснемся каустик, которые встречаются в различных задачах электродинамики и акустики.

### а) П р о с т р а н с т в е н н о - в р е м е н н ы е к а у с т и к и

Пространственно-временные каустики образуются в диспергирующих средах вследствие того, что отдельные части волнового пакета, отвечающие разным частотам, движутся с разными групповыми скоростями и могут обгонять друг друга. В простейшем случае волновое поле описывается при помощи функций Эйри <sup>97</sup>, но, используя эталонные интегралы из гл. 3, нетрудно построить асимптотику поля и для более сложных каустик <sup>98</sup>.

При распространении импульсов ограниченной длительности в диспергирующей среде могут возникать еще и полутеневые каустики, которые исследованы (наряду с другими вопросами) в работах <sup>99, 100</sup>.

### б) К а у с т и к и в в е к т о р н ы х п о л е й

Векторный характер поля не сказывается на структуре каустик, но отражается на форме уравнений переноса, которым подчиняются векторные амплитуды поля. В частности, в анизотропной среде амплитуды поля удовлетворяют не только закону сохранения потока энергии, но и закону вращения векторов поля Рытова (см. <sup>12</sup>). В целом схема построения равномерной асимптотики для электромагнитного поля или для векторных полей иной физической природы остается такой же, как для скалярного поля. Для простой каустики эта схема впервые была применена в работе <sup>55</sup>. Более сложные каустики, в том числе полутеневые каустики, образующиеся в задачах электродинамики, были изучены в работах <sup>67, 70, 101</sup>.

### в) К а у с т и к и в а н и з о т р о п н ы х с р е д а х и с р е д а х с п р о с т р а н с т в е н н о й д и с п е р с и е й

Специфика каустик в анизотропной среде состоит в том, что лучи теперь не ортогональны фазовым фронтам, как в изотропной среде. Кроме того, каустики могут образовать лучи, отвечающие любой нормальной волне в данной среде. В остальном же для описания каутических полей в анизотропных средах используются математические приемы, описанные выше.

То же можно сказать и относительно сред с пространственной дисперсией: несмотря на наличие нелокального члена в волновом уравнении, каутические поля имеют такую же структуру, как и в среде с локальным откликом <sup>102</sup>.

### г) К о м п л е к с н ы е к а у с т и к и

В отличие от обычных, комплексные каустики образуются комплексными лучами, т. е. лучами, которые приходят в вещественную точку наблюдения из комплексных точек исходной поверхности <sup>103</sup>. Один из примеров комплексной каустики мы уже упоминали выше (гл. 5, п. д)).

Комплексные каустики служат местом сгущения комплексных лучей, и поэтому концентрация поля на них обычно мало заметна.

### д) К а у с т и к и с а н о м а л ы м с д в и г о м ф а з ы

Как известно, при удалении точки наблюдения от каустики отраженное поле приобретает дополнительный (каутический) сдвиг фазы, который для простой каустики равен  $-\pi/2$ . Между тем, в работе <sup>104</sup> было обнаружено появление иного фазового сдвига, а именно  $+\pi/2$ . Такое изменение

фазового сдвига оказалось связанным с групповой скоростью распространения волн: аномальному сдвигу фазы отвечает случай, когда более длинный путь проходится за более короткое время.

### е) Случайные каустики

Если свет, звук или радиоволна проходят через случайно неоднородную среду с плавными в масштабе длины волны неоднородностями, то в среде образуются случайные каустики, подобные изображенным на рис. 4. Как было показано в <sup>105</sup>, эти каустики возникают там, где наблюдаются сильные флуктуации поля. Случайные каустики образуются также при отражении и преломлении волн на неровной поверхности <sup>29</sup>, <sup>106-108</sup>, при рассеянии на капельках жидкости <sup>109</sup> и в других физических ситуациях.

### ж) Каустики в квантовомеханических задачах

В квантовомеханических задачах каустики встречаются в двух случаях. Во-первых, разнообразные каустики образуются при рассеянии частиц на атомах и молекулах, при этом усиление рассеяния в каустических направлениях получило название «радуги» по аналогии с соответствующим оптическим явлением. Расчеты рассеяния в различных приближениях проводились в работах <sup>27</sup>, <sup>28</sup>, <sup>32-36</sup>, <sup>38-44</sup>, <sup>71</sup>, <sup>73</sup>, <sup>78-80</sup>, <sup>110</sup> (в последней из перечисленных работ установлены границы применимости квазиклассического приближения в трехмерных задачах).

Другая постановка задачи, связанной с каустиками — нахождение собственных функций, сосредоточенных внутри каустической поверхности. Состояние исследований по этому вопросу изложено в работе <sup>111</sup>.

Изложенный перечень каустических проблем является, разумеется, не полным. Можно было бы упомянуть еще каустики в общей теории относительности <sup>112-114</sup>, в теории нелинейных гидродинамических волн <sup>115-116</sup>, в теории гравитационных линз и т. д. Однако и без этих добавлений виден существенный прогресс, достигнутый по проблеме каустик в последние годы.!

Институт общей физики  
АН СССР  
Московский энергетический  
институт

Тяжелая быстротечная болезнь помешала Юрию Ильичу Орлову завершить работу над этой статьей, которую он инициировал и результатами которой он гордился (обобщенный метод эталонных функций, полуценные каустические поля и др.). Испытывая горечь невосполнимой утраты, я хотел бы поблагодарить Н. С. Орлову и С. К. Тропкина за помощь на последнем этапе подготовки статьи к печати, а также В. И. Арнольда, А. Б. Гивенталя и Б. Я. Зельдовича за доброжелательную критику.

Ю. А. Кравцов

### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Сгроф Т. А.— J. Geophys. Res., 1967, v. 72, p. 2343.
- Акустика океана/Под ред. Л. М. Бреховских.— М.: Наука, 1974.
- Тапперт Ф. Д.— В кн. Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Дж. Б. Келлера, Дж. С. Пападакиса.— М.: Мир, 1981.
- Гурвич А. С., Калистратова М. А., Мартвель Ф. Э.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1977, т. 20, с. 1020.

5. Ариольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Наука, 1982.
6. Ариольд В. И. Теория катастроф.— М.: Знание, 1981.— (Сер. «Математика, кибернетика», № 9).
7. Ариольд В. И.— УМН, 1968, т. 23, вып. 1, с. 3; 1974, т. 29, вып. 1, с. 11; вып. 4, с. 243; 1975, т. 30, вып. 5, с. 3.
8. Ариольд В. И. Математические методы небесной механики.— М.: Наука, 1974.— Добавления 11 и 12.
9. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее применения.— М.: Мир, 1980.
10. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965.
11. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
12. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.
13. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Наука, 1981.
14. Thom R. Structural Stability and Morphogenesis.— Massachusetts: W. A. Benjamin, 1975.
15. Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и отображения.— М.: Мир, 1977.
16. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности.— М.: Мир, 1977.
17. Орлов Ю. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1966, т. 9, с. 497, 657.
18. Орлов Ю. И.— Ibid., 1968, т. 11, с. 317.
19. Орлов Ю. И.— Ibid., 1967, т. 10, с. 30.
20. Орлов Ю. И.— Ibid., 1977, т. 20, с. 1669.
21. Орлов Ю. И., Трошкин С. К.— Ibid., 1980, т. 23, с. 1473.
22. Duijstergaat J. J.— Comm. Pure and Appl. Math., 1974, v. 27, p. 207.
23. Веггу M. V.— Adv. Physics, 1976, v. 25, p. 4.
24. Веггу M. V., Upstill C.— Progress in Optics/Ed. E. Wolf.— Amsterdam: North-Holland, 1980.— V. 18, p. 257.
25. Pearcey T.— Phil. Mag., 1946, v. 37, p. 311.
26. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
27. Connell J. N. L., Shild M. S.— Mol. Phys., 1970, v. 18, p. 653.
28. Connell J. N. L.— Ibid., 1973, v. 26, p. 1217.
29. Веггу M. V.— J. Phys. Ser. A, 1975, v. 8, p. 566.
30. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1970.
31. Газарян Ю. Л.— В кн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1961.— Вып. 5, с. 73.
32. Ford K. W., Wheeler J. A.— Ann. of Phys., 1959, v. 7, p. 259, 287.
33. Веггу M. V.— Proc. Phys. Soc., 1966, v. 89, p. 479.
34. Веггу M. V., Moopat K. E.— Rept. Progr. Phys., 1972, v. 35, p. 315.
35. Connell J. N. L., Marcus R. A.— J. Chem. Phys., 1971, v. 55, p. 5636.
36. Connell J. N. L.— Mol. Phys., 1974, v. 27, p. 853.
37. Ursell F.— Proc. Cambr. Phil. Soc., Math. Phys. Sci., 1972, v. 72, p. 49.
38. Connell J. N. L.— Disc. Farad. Soc., 1973, v. 55, p. 51.
39. Connell J. N. L.— Mol. Phys., 1973, v. 25, p. 181; v. 26, p. 137.
40. Connell J. N. L.— Ibid., 1976, v. 31, p. 33.
41. Marcus R. A.— J. Chem. Phys., 1972, v. 57, p. 4903.
42. Miller W. H.— Ibid., 1971, v. 54, p. 4903.
43. Dollo J. D., Miller W. H.— Ibid., 1972, v. 57, p. 5019.
44. Augustin S. D., Miller W. H.— Ibid., 1974, v. 61, p. 3155.
45. Лукин Д. С., Палкин Е. А.— В кн. Теоретическое и экспериментальное исследование распространения декаметровых радиоволн.— ИЗМИРАН, 1976.— С. 149.
46. Лукин Д. С., Палкин Е. А.— В кн. Дифракционные эффекты декаметровых радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1977.— С. 12.
47. Лукин Д. С., Палкин Е. А.— В кн. Распространение декаметровых радиоволн.— ИЗМИРАН, 1980.— С. 37.
48. Дронов И. Ф., Ипатов Е. Б., Лукин Д. С., Палкин Е. А.— В кн. Распространение радиоволн в атмосфере.— ИЗМИРАН, 1978.— С. 57.
49. Грикуров В. Э.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1980, т. 23, с. 1038.
50. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А.— Ibid., 1982, т. 25, с. 1375.
51. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.— УФН, 1980, т. 132, с. 475.
52. Langer R. E.— Trans. Amer. Math. Soc., 1931, v. 33, p. 23.

53. Д о р о д н и ц ы н А. А.— УМН, 1952, т. 7, вып. 1, с. 3.
54. К р а в ц о в Ю. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1964, т. 7, с. 684.
55. К р а в ц о в Ю. А.— Ibid., с. 1049.
56. Б а б и ч В. М., Б у л д ы р е в В. С. Асмптотические методы в задачах дифракции коротких волн.— М.: Наука, 1972.
57. Б о р о в и к о в В. А., К и н б е р Б. Е. Геометрическая теория дифракции.— М.: Сов. радио, 1978.
58. L u d w i g D.— Comm. Pure and Appl. Math., 1966, v. 19, p. 215; 1967, v. 20, p. 103.
59. К р а в ц о в Ю. А.— Акуст. ж., 1968, т. 14, с. 3.
60. О р л о в Ю. И.— Радиотехн. и электрон., 1976, т. 21, с. 62.
61. О р л о в Ю. И.— Ibid., с. 730.
62. Р ы т о в С. М., Т а т а р с к и й В. И., К р а в ц о в Ю. А. Введение в статистическую радиофизику. Т. 2: Случайные поля.— М.: Наука, 1978.
63. А х м а н о в А. С., Д ы я к о в Ю. Е., Ч и р к и н А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.— М.: Наука, 1981.
64. З е л ь д о в и ч Б. Я., Я к о в л е в а Т. В., Ш к у н о в В. В.— В кн. Оптическая голограмма.— М., Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1981.
65. А р н о л ь д В. И.— УМН, 1978, т. 39, вып. 1, с. 91.
66. О р л о в Ю. И.— Радиотехн. и электрон., 1975, т. 20, с. 242.
67. О р л о в Ю. И., В л а с о в С. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1978, т. 21, с. 422.
68. L e w e y L., F e l s e n L. B.— Radio Sci., 1969, v. 4, p. 959.
69. А г р е с т М. М., М а к с и м о в М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения.— М.: Атомиздат, 1965.
70. О р л о в Ю. И., В л а с о в С. А.— Радиотехн. и электрон., 1978, т. 23, с. 17.
71. Х у д я к о в С. В.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 938.
72. П е р м и т и н Г. В.— Автореферат. канд. диссертации.— Горький: ГГУ, 1972.
73. M i l l e r W. H.— J. Chem. Phys., 1968, v. 48, p. 464, 1651.
74. B e g g y M. V.— Sci. Progr. Oxford, 1969, v. 57, p. 43.
75. B e g g y M. V.— J. Phys. Ser. B, 1969, v. 2, p. 381.
76. Т о к а т л ы В. И., К и н б е р Б. Е.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1971, т. 14, с. 761.
77. Г а з а з ы н Э. Д., К и н б е р Б. Е.— Ibid., с. 1219.
78. S t i n e J. R., M a r c u s R. A.— J. Chem. Phys., 1973, v. 59, p. 5145.
79. С о п н о г J. N. L.— Chem. Phys. Lett., 1974, v. 25, p. 611.
80. K r e e k H., E l l i s R. L., M a r c u s R. A.— J. Chem. Phys., 1974, v. 61, p. 4540; 1975, v. 62, p. 913.
81. И в а н я н М. И.— Изв. АН Арм. ССР. Сер. «Физика», 1979, т. 14, с. 33.
82. И в а н я н М. И.— Ibid., 1980, т. 15, с. 444.
83. О р л о в Ю. И., Т р о п к и н С. К.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1981, т. 24, с. 334.
84. О р л о в Ю. И., Т р о п к и н С. К.— Радиотехн. и электрон., 1983, т. 27, с. 140.
85. О р л о в Ю. И., Т р о п к и н С. К.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1983, т. 26, с. 150.
86. К р а в ц о в Ю. А.— Ibid., 1965, т. 8, с. 659.
87. К а л о ш и н В. А., О р л о в Ю. И.— Радиотехн. и электрон., 1973, т. 18, с. 2028.
88. Я и с о н З. А.— В кн. Математические вопросы теории распространения волн.— Л.: Наука, 1970.— Т. 3, с. 218.
89. П о п о в А. В.— ДАН СССР, 1976, т. 230, с. 1322.
90. Б о р о в и к о в В. А., П о п о в А. В.— В кн. Прямые и обратные задачи теории дифракции.— М.: ИРЭ АН СССР, 1979.— С. 167.
91. Б ы к о в В. П.— В кн. Электроника больших мощностей.— М.: Наука, 1965.— № 4, с. 66.
92. В ай н штейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы.— М.: Сов. радио, 1966.
93. Б ы к о в В. П.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1971, т. 14, с. 880.
94. Г а з а з ы н Э. Д., И в а н я н М. И.— В кн. VII Всесоюзный симпозиум по дифракциям и распространению волн.— Ростов-на-Дону, 1977.— Т. 1, с. 78.
95. Г а з а з ы н Э. Д., И в а н я н М. И.— Радиотехн. и электрон., 1976, т. 21, с. 2052.
96. О р л о в Ю. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1981, т. 24, с. 213.
97. К г a v t s o v Yu. A., O s t r o v s k y L. A., S t e r a p o v N. S.— Proc. IEEE, 1974, v. 62 p. 1492.
98. О р л о в Ю. И., А н ю т и н А. П.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1974, т. 17, с. 1369.
99. О р л о в Ю. И., А н ю т и н А. П.— Ibid., 1976, т. 19, с. 335.
100. О р л о в Ю. И.— Цит. в кн.<sup>90</sup>.— С. 5.

101. Орлов Ю. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1974, т. 17, с. 1035.
102. Кравцов Ю. А.— Ibid., 1968, т. 11, с. 1582.
103. Кравцов Ю. А.— Ibid., 1967, т. 10, с. 1387.
104. Орлов Ю. И.— Ibid., 1981, т. 24, с. 224.
105. Кравцов Ю. А.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 798.
106. Берггу М. В., Напанай J. H.— J. Phys. Ser. A, 1977, v. 10, p. 1809.
107. Берггу М. В.— Ibid., p. 2061.
108. Garibaldi U., Levi A. C., Spadacini R., Томмей G. E.— Surf. Sci., 1975, v. 48, p. 649.
109. Нуе J. E.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1978, v. 364, p. 21.
110. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 1603.
111. Берггу М. В., Табор М.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1976, v. 349, p. 101.
112. Маллод Y.— J. Phys. Ser. A, 1976, v. 9, p. L 51.
113. Маллод Y.— Ann. of Phys. Ser. A, 1977, v. 106, p. 407.
114. Маллод Y.— J. Phys. Ser. A, 1977, v. 10, p. 765.
115. Bobbit J. I., Cumberbatch E.— Stud. Appl. Math., 1976, v. 55, p. 239.
116. Smith R. J.— Fluid Mech., 1976, v. 77, p. 417.
117. Зельдович Я. Б., Мамаев А. В., Шандарин С. Ф.— УФН, 1983, т. 139, с. 153.
118. Нуе J. F., Берггу М. В.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1974, v. 336, p. 165.
119. Берггу М. В., Нуе J. F., Wright F. J.— Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1979, v. 291, p. 454.
120. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я., Мамаев А. В., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В.— Письма ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 206; ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1702.
121. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1789.
122. Wright F. J., Нуе J. F.— Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1982, v. 305, p. 339.
123. Крюковский А. С., Лукин Д. С.— Радиотехн. и электрон., 1981, т. 26, с. 1421.
124. Лукин Д. С., Ипатов Е. Б., Палкин Е. А.— В кн. Вопросы дифракции электромагнитных волн.— М.: МФТИ, 1982.— С. 21.
125. Крюковский А. С., Лукин Д. С.— Ibid.— С. 40.
126. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А.— Ibid.— С. 134.
127. Лукин Д. С., Палкин Е. А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах.— М.: МФТИ, 1982.
128. Sachs D. A., Sjibiger A.— J. Acoust. Soc. Am., 1971, v. 49, p. 824.
129. Holford R. L.— Ibid., 1974, v. 55, Suppl. 1, p. 33.
130. Варченко А. Н.— Функц. анализ, 1976, т. 10, с. 13.
131. Васильев В. А.— Ibid., 1979, т. 13, с. 1.
132. Arnald J. M.— Rad. Sci., 1982, v. 17, p. 1181.
133. Starnes J. J.— Optica Acta, 1982, v. 29, p. 823.
134. Gilmore R. Catastrophes Theory for Scientist and Engineers. — N.Y.: Wiley, 1981.