

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

517.9+532.59

ОСОБЕННОСТИ, БИФУРКАЦИИ И КАТАСТРОФЫ**В. И. Арнольд**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Особенности волновых фронтов	571
2. Особенности каустик	572
3. Особенности коротковолновых асимптотик	573
4. Метаморфозы фронтов и каустик	574
5. A-, D-, E-классификация	577
6. Монодромия	578
7. Исчезающие циклы	579
8. Версальные деформации	580
9. Иерархия особенностей	582
10. Группы отражений и волновые фронты	583
11. Теория бифуркаций	585
12. Бифуркации равновесий	586
13. Потеря устойчивости	588
Цитированная литература	590

Теория особенностей гладких отображений — молодая область математики, являющаяся далеким обобщением исследования функций на максимум и минимум. В этой теории функции заменены отображениями, т. е. наборами любого числа функций любого числа переменных.

Критические точки типичной функции одной переменной — минимумы и максимумы, причем невырожденные (вторая производная не нулевая). В окрестности невырожденного минимума или максимума функцию одной переменной можно привести к виду $y = \pm x^2 + c$ подходящей гладкой заменой независимой переменной. (Слово гладкий здесь и далее означает «дифференцируемый нужное число раз»; малыми шевелениями называются деформации, мало меняющие рассматриваемые функции и их производные требуемого порядка.)

Типичная гладкая функция n переменных приводится к виду

$$y = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2 + c$$

подходящей гладкой заменой независимых переменных.

Нетипичная функция, например $y = x^3$, превращается в типичную при сколь угодно малом шевелении, например $y = x^3 - \varepsilon x$.

Слова «типичная функция» означают здесь «функция, не принадлежащая некоторому тощому множеству в пространстве всех функций». Тощее множество нетипичных функций выделяется в функциональном пространстве алгебраическим соотношением между коэффициентами Тейлора функции, не выполняющимся тождественно. Поэтому тощее множест-

во расположено в функциональном пространстве как гиперповерхность (подмногообразие коразмерности один, аналогичное поверхности в обычном трехмерном пространстве или кривой на плоскости).

Дополнительное к тощему множеству нетипичных функций множество называется множеством функций «общего положения». Таким образом, всякая функция может быть «приведена в общее положение» сколь угодно малым шевелением.

Аналогичным образом выделяются тощее множество «нетипичных» объектов и массивное множество объектов «общего положения» в других ситуациях. Например, плоская кривая общего положения не касается никакой прямой более чем в двух точках (а поверхность — более чем в четырех). «Правило фаз» Гиббса утверждает, что в системе общего положения с n параметрами встречаются вместе не более чем $n + 1$ фаза. Векторное поле общего положения на плоскости может иметь особые точки типа узел, седло или фокус, но не типа центр.

Ограничение объектами общего положения позволяет строить простейшие модели явлений, в которых изучаемые эффекты уже наблюдаются. На математическом языке такие модели обычно описываются как нормальные формы (вроде приведенных выше для критических точек функций).

В настоящей статье содержится краткий и рассчитанный на неспециалиста обзор некоторых приложений современной теории особенностей. Среди этих приложений — исследование типичных особенностей волновых фронтов, каустик, решений уравнений эйконала или Гамильтона — Якоби, а также их метаморфоз в однопараметрических семействах общего положения. С волновой или квантовой точки зрения речь идет об особенностях асимптотик многомерных осциллирующих или перевальных интегралов при слиянии нескольких точек стационарной фазы или нескольких точек перевала. Классификация особенностей в этом случае доставляет исследование асимптотик многомерных обобщений функций Эйри и родственных им интегралов.

Исследование асимптотик этих интегралов связано с геометрией многомерных калейдоскопов (так называемых кристаллографических групп, порожденных отражениями). Простейшие особенности волновых фронтов, каустик, асимптотик интегралов нумеруются простыми группами Ли $A_k \approx SU_{k+1}$, $D_k \approx O_{2k}$, появляющимися в этих задачах совершенно неожиданным образом.

Связь между асимптотиками интегралов метода стационарной фазы и системами корней простых групп Ли объясняется топологией комплексных многообразий уровня фазовой функции (римановых поверхностей и их многомерных обобщений). Эту топологию описывают теории исчезающих циклов и монодромии, изучающие поведение циклов на этих римановых поверхностях и интегралов по ним при подходе комплексной фазы к критическому значению и при обходе вокруг него.

Теория бифуркаций каустик является математической основой теории «блинов» Зельдовича, примененной им в качестве модели образования крупномасштабной структуры Вселенной.

В конце статьи описаны приложения теории особенностей к теории бифуркаций динамических систем, включая теорию потери устойчивости равновесий и автоколебаний с образованием «странных аттракторов».

Термин «теория катастроф», введенный Р. Томом для обозначения теории особенностей, теории бифуркаций и их приложений, связан именно с приложениями последнего типа: плавное изменение параметров способно привести к резкому, скачкообразному изменению состояния или режима движения системы.

Хотя соображения «общего положения», основные в этой теории, постоянно и сознательно использовались многими физиками (например, А. А. Андроновым, Л. Д. Ландау и Я. Б. Зельдовичем), систематическая математическая теория особенностей начинается лишь с работы американского математика Х. Уитни¹, расклассифицировавшего в 1955 г. особенности отображений общего положения поверхностей на плоскость.

Взаимодействие новой математической теории с приложениями примерно такое же, как в случае анализа: хотя в простейших приложениях методы дифференциального и интегрального исчисления могут быть заменены элементарными приемами Гюйгенса, в более сложных ситуациях к цели приводит только развитый анализ.

Примером задачи теории особенностей, в которой невозможно разобраться без серьезной математической техники, является исследование особенностей и метаморфоз волновых фронтов и каустик.

1. ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

Рассмотрим простейший пример: пусть возмущение (свет, звук, эпидемия . . .) распространяется по плоскости со скоростью 1 и в начальный момент имеется вне эллипса (рис. 1). Чтобы построить волновой фронт через время t , нужно отложить на каждой внутренней нормали эллипса отрезок длины t . Пока t мало, полученный волновой фронт будет гладкой кривой, но начиная с некоторого момента на фронте появляются точки возврата. Эти точки возврата устойчивы: при малом гладком шевелении исходного фронта (эллипса) особенности не исчезают, а лишь немного сдвигаются.

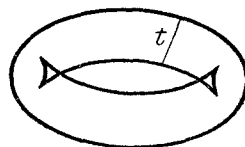


Рис. 1. Возникновение особенностей на волновом фронте.

В окрестности точки возврата фронт общего положения гладкой заменой координат приводится к стандартной «нормальной форме» $x^2 = y^3$. Других особенностей, кроме таких стандартных точек возврата и точек пересечения двух ветвей, фронт общего положения на плоскости не имеет. Все более сложные особенности рассыпаются на особенности указанного типа при малом общем шевелении исходного фронта.

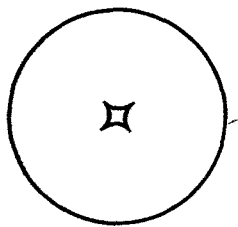


Рис. 2. Волновой фронт кривой, близкой к окружности.

Например, фронт возмущения, распространяющегося внутрь окружности, схлопывается в точку, но если заменить окружность близкой кривой общего положения, то схлопывание в точку заменится схлопыванием фронта в близкую к точке кривую с четным числом точек возврата (рис. 2).

Один из основных выводов теории особенностей состоит в том, что в ситуациях общего положения должны встречаться лишь некоторые стандартные, универсальные образы, которые можно подробно изучить раз навсегда и которые нужно уметь узнавать в разных обликах. Точка возврата полукубического типа ($x^2 = y^3$) — простейший из этих универсальных образов. Следующая по сложности особенность — это поверхность в трехмерном пространстве, называемая *ласточкин хвостом* (рис. 3).

Ласточкин хвост возникает во многих задачах теории особенностей. Например, вернемся к задаче о распространении волнового фронта по плоскости. Процесс распространения можно описать с помощью пространства-времени (в данном случае трехмерного). Движущийся по плоскости

фронт изображается в трехмерном пространстве-времени поверхностью (сечения этой поверхности изохронами $t = \text{const}$ — мгновенные фронты).

Возникновение пары точек возврата на мгновенном волновом фронте изображается на построенной поверхности в пространстве-времени как раз особенностью типа ласточкин хвост. Эта особенность устойчива: при

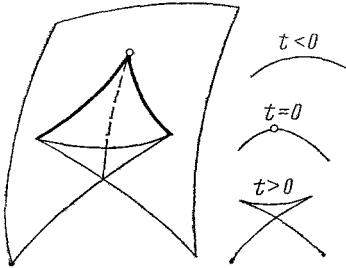


Рис. 3. Ласточкин хвост и три его сечения.

замене исходного эллипса близкой гладкой кривой ласточкин хвост в пространстве-времени лишь немного перемещается, но не исчезает. Ту же поверхность в пространстве-времени можно описать еще как график многозначной функции — расстояния до исходного фронта по нормали, или как график решения уравнения $(\nabla u)^2 = 1$, т. е. решения уравнения эйконала в оптике или уравнения Гамильтона — Якоби в механике. Таким образом, решения общего положения уравнений эйконала или Гамильтона — Якоби с двумя независимыми переменными имеют особенности, неустранимые малым шевелением начальных условий; график решения вблизи особой точки имеет особенностью ласточкин хвост или ребро возврата.

Ласточкин хвост является также типичной особенностью на волновых фронтах общего положения в трехмерном пространстве. Такой фронт можно получить, например, отложив отрезок длины t на каждой внутренней нормали к трехосному эллипсоиду (или к близкой к нему гладкой поверхности).

Особенности волновых фронтов общего положения — те же, что и особенности преобразований Лежандра гладких функций общего положения. Таким образом, теория особенностей волновых фронтов (называемая также теорией лежандровых особенностей) доставляет одновременно классификацию особенностей термодинамических потенциалов (в предположении, что один из них — гладкая, хотя и не выпуклая, функция).

В математике ласточкин хвост возникает прежде всего как поверхность в пространстве многочленов $x^4 + ax^2 + bx + c$, образованная многочленами с кратными корнями. Что эта поверхность выглядит так, как изображено на рис. 3, легко проверить, рассмотрев ее сечения плоскостями $a = \text{const}$.

Часто полезно и другое математическое описание ласточкиного хвоста: это поверхность, образованная всеми касательными к кривой $A = t^2$, $B = t^3$, $C = t^4$ в трехмерном пространстве с координатами (A, B, C) .

2. ОСОБЕННОСТИ КАУСТИК

Наряду с волновыми фронтами, распространяющиеся возмущения можно описывать при помощи систем лучей. Вблизи гладкого фронта лучи не пересекаются, но на некотором расстоянии от него возникают фокальные точки (точки пересечения бесконечно-близких лучей). Все фокальные точки вместе образуют каустику системы лучей. В случае, когда возмущение распространяется в евклидовом пространстве с постоянной скоростью, фокальные точки — это центры кривизны фронтов. Например, каустика системы нормалей к эллипсу (астроида; рис. 4) имеет четыре точки возврата (полукубического типа).

Эти особенности устойчивы (при замене эллипса близкой гладкой кривой точки возврата не исчезают, а лишь немного сдвигаются). Каустики систем лучей общего положения на плоскости не имеют других особен-

ностей, кроме точек возврата полукубического типа (и точек самопересечения).

Например, каустика системы нормалей к окружности состоит из одной точки (центра). При замене окружности близкой кривой общего положения (например, эллипсом) каустическая точка в центре превращается в кривую (в случае эллипса — в маленькую астроиду).

В трехмерном пространстве каустики общего положения также имеют лишь стандартные особенности, а именно, ребра возврата (полукубического типа), ласточкины хвосты и точечные особенности еще двух видов,

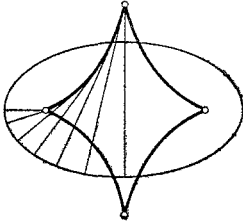


Рис. 4. Каустика системы нормалей к эллипсу.

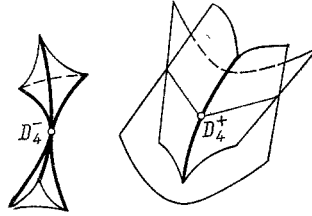


Рис. 5. Пирамида и кошелек — типичные особенности каустик.

называемые *пирамидой* и *кошельком* (они изображены на рис. 5). В самой особой точке пирамиды касаются друг друга три (гладких) ребра возврата. В окрестности особой точки типа кошелек каустика состоит из двух поверхностей с одинаковыми особенностями, пересекающихся по двум кривым; ребра возврата обеих поверхностей оставляют одну гладкую кривую, продолжая друг друга.

Перечисленные особенности устойчивы. Например, касание трех ребер возврата каустики в вершине пирамиды невозможно устранить малым шевелением исходной системы лучей. Все более сложные особенности каустик в трехмерном пространстве распадаются на особенности перечисленных типов при малом шевелении общего положения.

3. ОСОБЕННОСТИ КОРОТКОВОЛНОВЫХ АСИМПТОТИК

Особенности каустик можно также описывать как особенности асимптотик интегралов от быстро осциллирующих функций (Френеля, Эйри и т. д.),

$$I_{\lambda}(h) = \int e^{iF(x,\lambda)/h} a(x,\lambda) dx, \quad h \rightarrow 0;$$

здесь малый параметр h — длина волны, фаза *) F — вещественная функция; гладкая амплитуда a отлична от нуля лишь в ограниченной области.

Согласно принципу стационарной фазы, основной вклад в асимптотику при $h \rightarrow 0$ дают стационарные точки фазы ($\partial F/\partial x = 0$). Для λ общего положения эти стационарные точки фазы будут невырожденными ($\det \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j \neq 0$). В окрестности такой точки интеграл заменой переменной сводится к интегралу типа Френеля и потому убывает при $h \rightarrow 0$ как $h^{n/2}$, где n — размерность x -пространства.

Типичная фазовая функция, как функция точки x , не имеет вырожденных критических точек. Если, однако, мы рассматриваем не индивидуальную фазовую функцию точки x , а семейство, зависящее от одного или

*) Можно представлять себе $F(x, \lambda)$ как оптическую длину пути от источника света в точке x до точки наблюдения λ .

нескольких параметров, λ , то при некоторых, исключительных значениях параметров могут встречаться и вырожденные критические точки.

Например, в семействе $x^3 + \lambda x$ функций от x при нулевом значении параметра λ встречается вырожденная критическая точка $x = 0$. Всякое близкое к этому однопараметрическое семейство функций будет иметь при некотором близком к нулю значению параметра подобную же вырожденную критическую точку.

Значения параметра λ , для которых фаза имеет вырожденную критическую точку, называются *каустическими*. Для каустических значений параметра интеграл убывает при $h \rightarrow 0$ медленнее, чем обычно, как $h^{(n/2)-\beta}$.

Возникающие таким образом показатели β характеризуют степень концентрации света у каустики и зависят от характера особенности каустики. Например, для обычной точки каустики $\beta = 1/6$ (асимптотика интеграла Эйри), для обычных точек ребра возврата каустики $\beta = 1/4$, для ласточкиных хвостов $\beta = 3/10$, для вершин кошелев и пирамид $\beta = 1/3$ (см. ²).

4. МЕТАМОРФОЗЫ ФРОНТОВ И КАУСТИК

При движении волнового фронта в трехмерном пространстве особенности фронта (его ребра возврата) скользят по каустике. В моменты прохождения фронта через самые особые точки каустики (через вершины

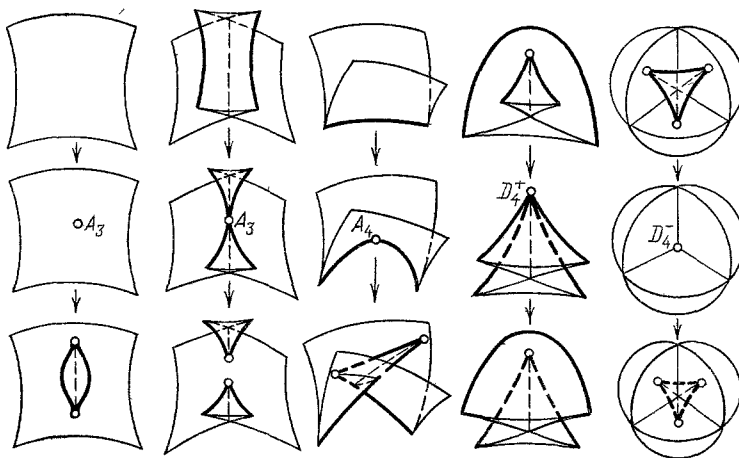


Рис. 6. Метаморфозы волновых фронтов общего положения.

ласточкиных хвостов, пирамид и кошелев) фронт испытывает метаморфозы. Метаморфозы движущихся фронтов общего положения устойчивы и стандартны (рис. 6). От всех более сложных метаморфоз можно избавиться: при малом шевелении исходного фронта такие метаморфозы распадаются на несколько стандартных ^{3,4}.

Каустики также могут испытывать метаморфозы, если они зависят от параметров, например — от времени. Пример ситуации, в которой каустики зависят от времени, доставляет теория Зельдовича ⁵ — образования особенностей плотности в среде из пылевидных частиц. Хотя эта теория призвана объяснить образование крупномасштабных неоднородностей распределения вещества в расширяющейся Вселенной из малых неоднородностей первоначального поля скоростей гравитирующих частиц, сущность

явления проще всего понять в простейшей модели невзаимодействующих частиц, движущихся по инерции в трехмерном евклидовом пространстве.

За время t частица из точки q переходит в точку $q + tv(q)$, где v — начальное поле скоростей. Это поле предполагается потенциальным, $v = \partial S/\partial q$ (физически предположение потенциальности обосновывается более быстрым ростом потенциальных возмущений по сравнению с вихревыми в расширяющейся Вселенной).

График поля скоростей $p = v(q)$ является трехмерным подмногообразием в шестимерном фазовом пространстве $\{(p, q)\}$ (рис. 7).

Потенциальность поля означает, что интеграл действия $\int p dq$ зависит лишь от концов пути интегрирования и не меняется при деформации самого пути, лишь бы этот путь оставался на указанном многообразии. Подмногообразия фазового пространства, обладающие этим свойством, называются *лагранжевыми*. Таким образом, потенциальное начальное поле скоростей изображается лагранжевым многообразием в фазовом пространстве.

Преобразованием фазового потока любого гамильтонова дифференциального уравнения переводят лагранжевы подмногообразия фазового пространства в лагранжевы. Это относится, в частности, к фазовому потоку уравнения свободной частицы. Следовательно, поле скоростей среды будет оставаться потенциальным, если оно было потенциальным в начальный момент, и силы потенциальны.

Начальное поле скоростей изображается подмногообразием фазового пространства, невырожденно проектирующимся на конфигурационное пространство (на рис. 7 касательная к графику не вертикальна).

Под действием преобразований гамильтонова фазового потока начальное лагранжево многообразие остается лагранжевым, но, вообще говоря, теряет (при достаточно больших t) свойство неvertикальности: проектирование на конфигурационное пространство перестает быть взаимно-однозначным. Точки вертикальности называются *особенностями* проектирования лагранжева многообразия на конфигурационное пространство. Проекции этих особенностей на конфигурационное пространство называются *каустиками*.

Возникновение каустик связано с тем, что вследствие неоднородности первоначального поля скоростей, частицы начинают обгонять друг друга. Каустика в момент t состоит из точек, где сталкиваются в момент t частицы, вышедшие из бесконечно-близких точек пространства. Плотность распределения частиц на каустике бесконечна.

Название каустика, взятое из оптики, применено здесь потому, что с математической точки зрения речь в обоих случаях идет об одном и том же: о критических значениях лагранжева отображения, т. е. отображения проектирования лагранжева подмногообразия фазового пространства на конфигурационное. В оптической задаче лагранжево многообразие определяется условием $p = \partial u/\partial q$, где u — решение уравнения эйконала $(\nabla u)^2 = 1$, быть может многозначное. Иными словами, лагранжево многообразие, соответствующее данной системе лучей (скажем выходящих из точечного источника, линии или поверхности) образовано «векторами медлительности фронта» во всех точках среды.

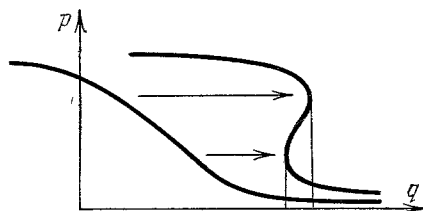


Рис. 7. Возникновение особенности лагранжева отображения при перемещении лагранжева многообразия фазовым потоком.

После образования каустики движение частиц становится многопоточным: через одну точку пространства проходит несколько потоков (вначале обычно три). Понятие лагранжева многообразия является математическим эквивалентом физического «многопоточного потенциального течения».

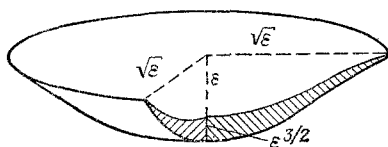


Рис. 8. Новорожденная каустика («блин» Зельдовича).

С математической точки зрения движение частиц задает, таким образом, однопараметрическое семейство лагранжевых отображений трехмерных пространств: значению параметра t отвечает отображение, переводящее точку q в точку $Q = q + tv(q)$. Критические точки этого отображения определяются условием $\det \partial Q / \partial q = 0$. Критические значения (образы критических точек) образуют каустику. В каждый фиксированный момент времени каустика — это поверхность в конфигурационном пространстве.

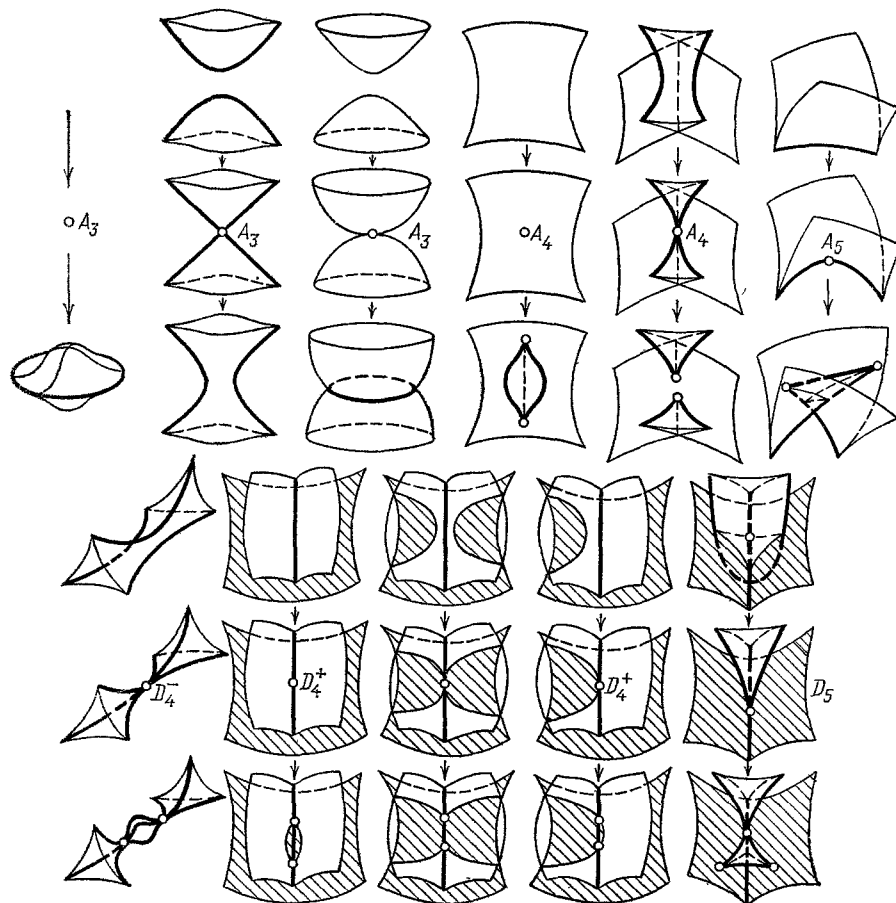


Рис. 9.

При изменении параметра t каустика движется и может испытывать метаморфозы. Первая из метаморфоз — рождение каустики. Я. Б. Зельдович назвал новорожденную каустику *блином*. Действительно, через малое

время ε после рождения новорожденная каустика имеет вид эллиптического блюдца (рис. 8) с осями порядка $\varepsilon^{1/2}$, глубиной порядка ε и толщиной порядка $\varepsilon^{3/2}$. Оптические каустики в рассеивающей среде могут стать видимыми, наблюдатели могут воспринимать их как летающие блюдца (В. М. Закалюкин).

После образования блинов каустики могут испытывать еще другие метаморфозы (рис. 9). Чтобы в них разобраться, приходится привлекать довольно сложный математический аппарат теории лагранжевых и лежандровых особенностей (особенностей преобразований Лежандра) ^{4,6,7}.

5. A- D-, E-КЛАССИФИКАЦИЯ

Удивительным образом классификация особенностей во всех перечисленных (и многих других) задачах оказывается связанной с классификацией на вид никак не связанных с ними объектов: например, правильных многогранников в евклидовом пространстве и простых групп Ли (так, ласточкин хвост на каустике отвечает группе SU_5 , а кошелек — группе ортогональных матриц O_8).

Причины связей между столь далекими друг от друга теориями еще не поняты до конца, но использование этих связей оказалось чрезвычайно мощным инструментом исследования особенностей. Приведенные выше классификации особенностей и метаморфоз каустик и фронтов удалось получить лишь благодаря изобретению этой техники.

Неожиданным выводом из всех этих классификаций является универсальность небольшого списка простых объектов, повторяющегося в разных обликах (групп Ли, правильные многогранники, каустики, волновые фронты, римановы поверхности и т. д.). Список состоит из двух бесконечных серий и трех исключительных объектов (рис. 10).

В теории правильных многогранников A_n отвечают правильным многоугольникам, D_n — диэдрам (двугранникам), E_6 — тетраэдру, E_7 — октаэдру, E_8 — икосаэдру. Таким образом, каждому правильному многограннику отвечает своя особенность волнового фронта, своя особенность каустики, свой осциллирующий интеграл типа Эйри и т. д.

На рис. 10 все эти объекты представлены графами, называемыми *диаграммами Дынкина*. Эти диаграммы истолковываются совершенно по-разному в зависимости от характера изучаемых объектов. Но они присутствуют при любой трактовке и всегда играют важную роль. Например, все возможные распады особенностей волновых фронтов описываются в точности распадами соответствующих диаграмм Дынкина. Чтобы объяснить, как сложные особенности каустик, фронтов, интегралов метода стационарной фазы и метода перевала составляются из элементарных, простейших особенностей, нам потребуются некоторые сведения из геометрии комплексных многообразий. Ибо большая часть путей от каустик, фронтов и осциллирующих интегралов к группам Ли, диаграммам Дынкина и правильным многогранникам ведет через теорию критических точек голоморфных функций, т. е. через геометрию римановых поверхностей и их многомерных обобщений. В приложениях к оптике голоморфная функция, о которой идет речь, — фаза, т. е. оптическая длина пути. Но в других приложениях (например, термодинамических) физический смысл этой функции может быть совсем иным.

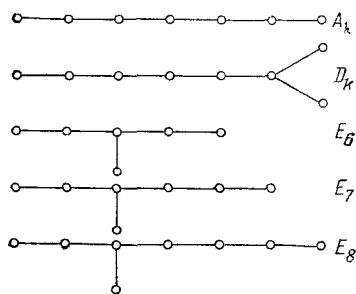


Рис. 10. Диаграммы Дынкина.

Поэтому мы начнем прямо с голоморфной функции (скажем, многочлена) нескольких комплексных переменных, $f(z_1, \dots, z_n)$. Оказывается, на асимптотики интегралов, связанных с такой функцией (например, вида $\int e^{if/h} dz$) и на геометрию особенностей, связанных с ней (фронтон, каустик и т. д.) существенное влияние оказывает топология комплексного многообразия уровня $f(z_1, \dots, z_n) = c$ (в случае функции всего двух переменных — топология римановой поверхности $f(z_1, z_2) = c$).

6. МОНОДРОМИЯ

Многообразие (линия, поверхность) уровня вещественной функции испытывает топологические перестройки при прохождении значения функции через критические значения (так называемые перестройки Морса).

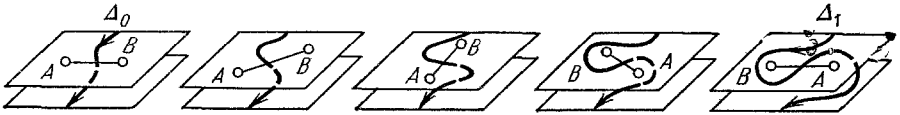


Рис. 11. Монодромия: преобразование пути Δ_0 в Δ_1 при полуобороте пары точек ветвления.

Например, гиперболы $x^2 - y^2 = c$ обмениваются ветвями при прохождении c через критическое значение нуль. В комплексном случае критические значения не делят плоскость значений функции, поэтому комплексное многообразие уровня меняется лишь в мгновение прохождения через критическое значение (становится особым), после же прохождения многообразия уровня мгновенно возвращается в прежнее состояние.

Зато в комплексном случае, вместо того чтобы *проходить* через критическое значение, можно *обойти* вокруг него. При непрерывном изменении значения функции многообразие уровня также непрерывно меняется. После возвращения значения к исходной точке плоскости значений функции многообразие уровня, непрерывно меняясь, также возвращается в первоначальное положение. Но по дороге оно способно «перевернуться», так что каждая отдельная точка многообразия уровня возвращается, вообще говоря, в другую точку того же многообразия (подобно тому, как переворачивается отрезок при склеивании листа Мебиуса из прямоугольника).

Возникающее таким образом отображение многообразия неособого уровня функции в себя называется *монодромией*. Наряду с топологией многообразия уровня, монодромия несет значительную информацию об особенностях при подходе к критическому значению (об асимптотиках интегралов и т. д.). Современная математическая техника дает возможность детально изучить всю эту топологию и извлечь из нее нужную информацию об асимптотиках (так называемая теория смешанных структур Ходжа, являющаяся многомерным обобщением теории эллиптических интегралов Лежандра первого, второго и третьего родов).

Некоторое представление о геометрии возникающих комплексных объектов дает следующий пример (играющий в этой теории роль $1/z$ в элементарной теории вычетов).

Пусть $f = z_1^2 + z_2^2$. Многообразие уровня $z_1^2 + z_2^2 = c$ представляет собой двулистную риманову поверхность $z_2 = \sqrt{c - z_1^2}$ с двумя точками ветвления (A, B , рис. 11). При полном обходе не критического значения c

вокруг критического значения $c = 0$ пара точек ветвления совершает поворот, и риманова поверхность $f = c$ возвращается к прежнему положению.

Топологически «комплексная окружность» $z_1^2 + z_2^2 = c$, $c \neq 0$, представляет собой цилиндр (разрезы, соединяющие точки ветвления на обоих листах, изображаются однократно обходящей цилиндр окружностью, рис. 12). Последовательное изменение римановой поверхности при изменении c изображено на рис. 11. Его можно осуществить так, чтобы вне достаточно большого (по сравнению с \sqrt{c}) шара точки поверхности почти не сдвигались. В результате путь Δ_0 на исходной поверхности, постепенно деформируясь, превратится в конце концов в путь Δ_1 . На рис. 12 видно, что монодромия перекручивает наше многообразие уровня (цилиндр) так, что одно основание поворачивается относительно другого на 2π (промежуточные параллели поворачиваются на промежуточные углы).

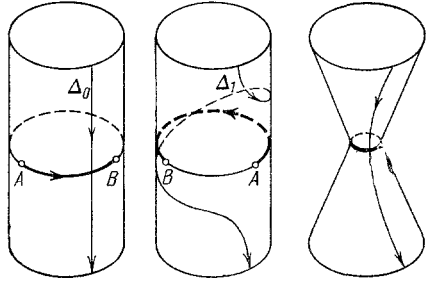


Рис. 12. Перекручивание цилиндра монодромией и стягивание исчезающего цикла при обходе критического значения и при подходе к нему.

7. ИСЧЕЗАЮЩИЕ ЦИКЛЫ

При приближении значения c к критическому значению нуль центральной параллель ABA цилиндра $z_1^2 + z_2^2 = c$ (рис. 12) стягивается в точку (эта окружность образована вещественными корнями уравнения $z_1^2 + z_2^2 = c > 0$).

Цикл на многообразии уровня, стягивающийся в точку при подходе значения функции к критическому значению, называется *исчезающим* в данной критической точке (у нас в точке $x = 0$).

Для функции двух переменных с несколькими критическими точками (в предположении, что каждая из этих критических точек невырождена) на римановой поверхности неособого уровня возникает несколько исчезающих циклов. Чтобы их определить, нужно двигаться по плоскости значений функции от исходного некритического значения к каждому из критических. Если же, вместо того чтобы подходить вплотную к критическим значениям, обходить вокруг них (скажем, по маленьким окружностям), то многообразие неособого уровня будет каждый раз возвращаться на старое место, по-новому вывернувшись. Таким образом, вместо одного преобразования монодромии возникает целая *группа монодромии*.

Рассмотрим, например, функцию $f = z_1^3 - 3z_1 + z_2^2$. Многообразие уровня $f = c$ неособо, исключая две точки, $c = \pm 2$, на плоскости комплексной переменной c . Начнем, скажем, с неособого многообразия уровня $f = 0$. Это двулистное накрытие плоскости $z_2 = \sqrt{3z_1 - z_1^3}$, топологически представляет собой тор с дырой (а, рис. 13). При приближении значения c к одному из критических значений ($c = 2$) сближается одна из пар точек ветвления (AB) и, следовательно, исчезает меридиан тора (ξ на рис. 13).

При приближении c к другому критическому значению, $c = -2$, сближаются точки другой пары (BC). В этом случае исчезающим циклом оказывается параллель (η , рис. 13).

Группу монодромии в этом примере также нетрудно вычислить.

Любой цикл на нашем многообразии уровня $c = 0$ (торе с дырой) гомологичен *) линейной комбинации $p\xi + q\eta$ меридиана и параллели с целыми коэффициентами. При обходе значения c вокруг точки $c = -2$ тор

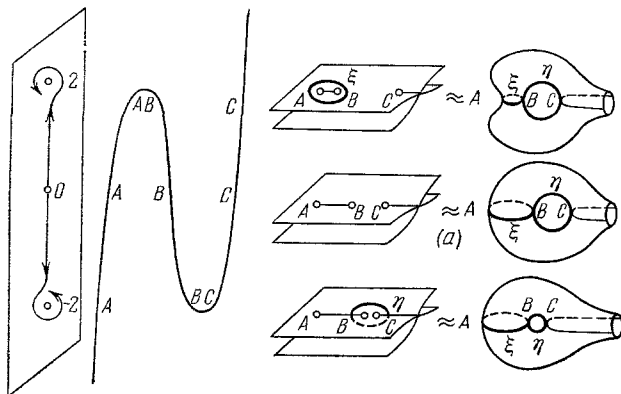


Рис. 13. Базис исчезающих циклов ξ , η на римановой поверхности.

перекручивается, испытывая монодромию. Матрица этого оператора монодромии в базисе (ξ, η) имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Обходу значения c вокруг точки -2 отвечает матрица монодромии $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вся группа монодромии в нашем примере состоит из всевозможных произведений этих двух матриц и обратных им. Это — группа $SL_2(\mathbb{Z})$ всех целочисленных матриц второго порядка с определителем единица.

В n -мерном случае многообразия уровня $f(z_1, \dots, z_n) = c$ имеет в n -мерном комплексном (т. е. $2n$ -мерном вещественном) пространстве вещественную размерность $2n - 2$. Исчезающие циклы имеют половинную размерность (равную $n - 1$). Например, в невырожденной критической точке O функции $z_1^2 + \dots + z_n^2$ исчезает при $c \rightarrow 0$ вещественная сфера S^{n-1} , образованная вещественными решениями уравнения $z_1^2 + \dots + z_n^2 = c > 0$ (подробнее см. ⁸⁻¹⁰).

8. ВЕРСАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим теперь вырожденную критическую точку функции, скажем $f = z^4$. Особенность такого вида не встречается ни в семействах функций общего положения, ни в общих однопараметрических семействах функций. Однако в двухпараметрическом семействе функций

$$F(z, \lambda) = z^4 + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 z$$

эта особенность встречается при нулевых значениях параметров λ , и во всяком близком семействе при некотором близком значении параметров

*) Два одномерных ориентированных цикла называются гомологичными, если их разность служит ориентированной границей двумерной пленки. Это определение мотивировано тем, что интегралы замкнутых форм (циркуляции локально потенциальных полей) по таким циклам одинаковы. Аналогичные определения даются в многомерном случае.

встретится такое же вырождение. Более точно, всякое близкое к F семейство $G(z, \lambda)$ приводится к виду

$$G(z, \lambda) \equiv F(h(z, \lambda), \varphi(\lambda)) + c(\lambda),$$

т. е. сводится к семейству F гладкой заменой переменной, гладко зависящей от параметров, и гладкой заменой параметров¹¹. Такая деформация, к которой сводится указанными заменами любая другая деформация функции f , называется *версальной*. Термин версальный образован из «универсальный» и «трансверсальный». Приставка «уни» отброшена потому, что такая деформация обычно не единственна. Трансверсальной же версальной деформация оказывается в следующем смысле.

Рассмотрим какую-либо классификацию каких-либо объектов (например, функций, дифференциальных уравнений, векторных полей, матриц, тензоров, каустик, волновых фронтов и т. п.). Многообразие всех возможных объектов данного типа (скажем, пространство функций или матриц) разбивается на части, соответствующие объектам разных классов (скажем, матриц разных рангов). Граничные гиперповерхности имеют коразмерность один, т. е. определяемы одним уравнением в (вообще говоря, бесконечномерном, функциональном) пространстве всех интересующих нас объектов (рис. 14).

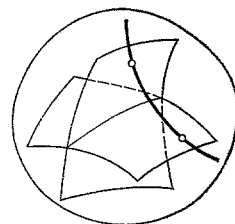


Рис. 14. Однопараметрическое семейство общего положения, трансверсально пересекающее многообразие вырождений.

Объекты общего положения не попадают на различные гиперповерхности (скажем, функции общего положения не имеют вырожденных критических точек). Однако в однопараметрических семействах объектов уже могут неустранимо встречаться простейшие вырожденные объекты. Действительно, однопараметрическое семейство изображается кривой в функциональном пространстве, и эта кривая может трансверсально (под ненулевым углом) пересекать граничную гиперповерхность. В таком случае во всяком близком семействе встречается подобное же вырождение. Ибо всякая близкая кривая по-прежнему пересекает граничную гиперповерхность.

Функции с критическими точками типа z^4 не встречаются и в однопараметрических семействах общего положения. Действительно, функции с критическими точками этого типа образуют в функциональном пространстве всех функций подмногообразие коразмерности два. Однопараметрическое же семейство изображается в функциональном пространстве кривой. Малым шевелением этой кривой можно снять ее с подмногообразия коразмерности два подобно тому, как одну кривую в трехмерном пространстве можно избавить от пересечений с другой малым шевелением. Однако в типичных *двухпараметрических* семействах функции с особенностями типа z^4 уже неустранимы. Ибо изображающая это семейство двумерная поверхность в функциональном пространстве трансверсально пересекает многообразие (коразмерности 2) функций с особенностью типа z^4 .

Именно это свойство трансверсальности семейства к многообразию в функциональном пространстве и обеспечивает версальность деформации функции, т. е. возможность свести любую малую деформацию функции к версальной подходящими заменами координат и параметров.

Хотя простейшие частные случаи рассуждений этого типа давно использовались физиками, систематическое их развитие — математическое достижение последних лет.

Оказывается, конечнопараметрические версальные деформации есть у функций любого числа переменных с конечнократными критическими

точками, т. е. с такими критическими точками, которые образовались при слиянии конечного числа элементарных, невырожденных. Например, критическая точка функции одной переменной z^3 имеет кратность 2 (образовалась при слиянии двух элементарных; см. рис. 13). Она имеет однопараметрическую версальную деформацию $F(z, \lambda) = z^3 + \lambda z$ (то, что это — как раз фаза интеграла Эйри — не случайность). В общем случае число параметров версальной деформации критической точки функции на 1 меньше кратности (числа элементарных критических точек, на которые распадается данная сложная критическая точка). Кратность критической точки называется также числом Милнора и обычно обозначается буквой μ . Например,

$$\mu(z^a) = a - 1, \quad \mu(z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}) = (a_1 - 1) \dots (a_n - 1).$$

9. ИЕРАРХИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ

Сложные критические точки функций образуют иерархию (более простая точка может образоваться при распадении более сложной). В настоящее время эта иерархия вычислена до кратности $\mu = 16$ (т. е. описаны все

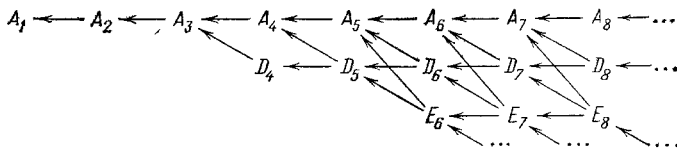


Рис. 15. Иерархия критических точек функций, особенностей каустик и особенностей волновых фронтов.

критические точки, образовавшиеся при слиянии не более 16 элементарных; см. ¹¹). Начало иерархии комплексных критических точек дается иерархией диаграмм Дынкина (рис. 15). Здесь буквами обозначены функции

$$A_k = x^{k+1}, \quad D_k = x^2y + y^{k-1}, \quad E_6 = x^3 + y^4, \\ E_7 = x^3 + xy^3, \quad E_8 = x^3 + y^5$$

или функции большего числа переменных, полученные дописыванием невырожденных квадратичных форм дополнительных переменных (например, $z_1^4 + z_2^2 + z_3^2$ имеет тип A_3 , см. ⁶).

Диаграммы Дынкина описывают различные способы составления сложных критических точек комбинированием элементарных. Поясню, как это делается, на простейшем примере версальной деформации функции A_3 :

$$F(x, y, \lambda) = x^4 + y^2 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x.$$

Значение параметров (точка плоскости λ_1, λ_2) называется *бифуркационным*, если соответствующая функция переменных (x, y) имеет неэлементарные критические точки. В нашем примере бифуркационные значения образуют полукубическую параболу $8\lambda_1^3 + 27\lambda_2^2 = 0$ (рис. 16). Выберем общую, небифуркационную точку на плоскости λ . Соответствующая функция имеет $\mu = 3$ критические точки. Выберем многообразие не критического уровня (топологически это в данном случае тор с двумя дырами). Будем последовательно устремлять значение функции к трем критическим значениям.

В результате на многообразии некритического уровня будут исчезать три различных цикла. Чтобы построить диаграмму Дынкина, нужно каждому исчезающему циклу сопоставить точку и соединить эти точки в случае, когда соответствующие циклы пересекаются (подробнее см. ¹⁰).

В нашем примере получится диаграмма $\cdot\text{---}\cdot\text{---}\cdot$, т. е. диаграмма Дынкина для A_3 .

Бифуркационные значения параметров версальных деформаций перечисленных выше функций как раз и образуют каустики соответствующих лагранжевых особенностей. Например, A_2 — обычная точка каустики, A_3 — полукубическая парабола плоской каустики или ребро возврата пространственной, A_4 — ласточкин хвост, D_4 — пирамида или кошелек. В комплексной области последние две каустики эквивалентны.

Чтобы получить соответствующие волновые фронты, достаточно расширить пространство параметров версальной деформации функции осью значений и отметить все критические значения функций семейства. Например, критические значения функций версальной деформации A_3 образуют ласточкин хвост (в пространстве λ_1, λ_2, F).

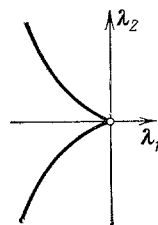


Рис. 16. Полукубическая парабола: многообразии кубических многочленов с кратными корнями.

10. ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ И ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ

Особенности волновых фронтов можно получить прямо из диаграмм Дынкина следующей конструкцией. Каждой диаграмме сопоставляется «калейдоскоп» (называемый в математике «группой, порожденной отражениями в евклидовом пространстве» или «группой Кокстера» ¹²). А именно, каждой вершине диаграммы сопоставляется вектор длины $\sqrt{2}$. Если две вершины соединены ребром, то угол между соответствующими двумя векторами 120° . Если ребра нет, векторы ортогональны.

Например, диаграмма $\cdot\text{---}\cdot$ изображает векторы $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, порождающие плоскость $x + y + z = 0$ в трехмерном евклидовом пространстве. Таким же образом каждая диаграмма Дынкина из μ точек определяет «ежик» из μ (неортогональных) базисных векторов в μ -мерном евклидовом пространстве.

Калейдоскоп строится из проходящих через начало координат зеркал, ортогональных векторам ежика. Например, диаграмме $\cdot\text{---}\cdot$ отвечает пара зеркал на плоскости, образующих угол 60° . Группа, порожденная отражениями в зеркалах любого из калейдоскопов A, D, E , конечна. Это условие конечности — значительное ограничение на расположение зеркал. Все расположения зеркал, при которых группа конечна, найдены — те из них, в которых все углы между зеркалами равны 90° или 120° , исчерпываются порождающими группы отражений A, D, E и их произведениями расположениями зеркал.

По каждой группе отражений A, D, E строится теперь волновой фронт. Это делается так. Рассмотрим набор всех изображений точки в зеркалах калейдоскопа (учитывая кратные отражения). Этот набор называется *орбитой* точки. Орбита называется *регулярной*, если она состоит из наибольшего возможного числа точек (равного числу элементов группы).

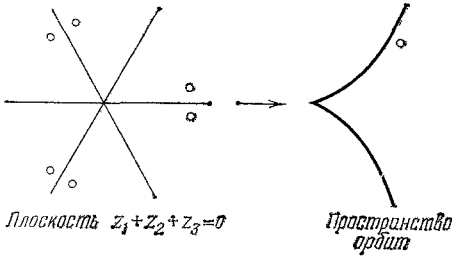
Например, регулярная орбита точки под действием группы отражений A_2 состоит из 6 точек (рис. 17). Если же исходная точка лежит на зеркале, то ее орбита состоит всего из 3 точек (не регулярна).

Аналогичную конструкцию можно провести в комплексной области (комплексифицировав исходное евклидово пространство). Отражения дей-

ствуют и на комплексные точки, орбиты большинства комплексных точек регулярны.

Рассмотрим теперь множество всех орбит группы, порожденной отражениями, действующей в комплексном пространстве. Оказывается, это множество само является комплексным пространством той же размерности.

Например, рассмотрим действие группы A_2 как действие перестановок трех координат z_1, z_2, z_3 на плоскости $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ в трехмерном



(комплексном) пространстве. Орбиты — это неупорядоченные тройки комплексных чисел, в сумме равные нулю. Такая тройка однозначно определяется многочленом $z^3 + \lambda_2 z + \lambda_3$ (как тройка его корней). Многообразие орбит отождествляется поэтому с плоскостью двух (комплексных) переменных (λ_2, λ_3) .

Рис. 17. Отображение Виета, сопоставляющее каждой точке ее орбиту.

Нерегулярные орбиты образуют в многообразии всех орбит гиперповерхность. Например, в разобранном выше примере орбита точки

(z_1, z_2, z_3) нерегулярна, если не все числа z_k различны. Следовательно, многообразие нерегулярных орбит — это множество точек плоскости λ , для которых многочлен с коэффициентами λ имеет кратные корни. Это — полукубическая парабола. Мы получили волновой фронт A_2 из соответствующей группы отражений.

Переход от групп отражений к многообразиям орбит и соответствующим волновым фронтам в общем случае аналогичен: он представляет собой далекое обобщение теоремы Виета и теории симметрических функций. Например, ласточкин хвост получается из группы отражений A_3 . Поскольку соответствующий алгебраический аппарат достаточно хорошо развит, удастся детально исследовать геометрию волновых фронтов и их перестройек, а через них — и геометрию соответствующих каустик.

Сами группы отражений A_n, D_n, E_n просто описываются в терминах особенностей фазовых функций или асимптотик осциллирующих, либо перевальных интегралов: это группы монодромии версальных деформаций фазовых функций (с. 582) от нечетного числа переменных (например, E_8 соответствует функция $x^3 + y^5 + z^2$ и т. д.).

В терминах теории групп Ли группы отражений получаются в качестве так называемых групп Вейля, исчезающие циклы соответствуют простым корням, волновые фронты описывают бифуркации жордановых нормальных форм матриц и т. д.

Обширную теорию, связывающую особенности каустик и волновых фронтов, асимптотики интегралов, группы Ли и группы, порожденные отражениями, нельзя изложить в этом обзоре сколько-нибудь подробно (см. ^{3,11,13}). Укажу лишь, что в настоящее время найдены особенности, соответствующие всем группам, порожденным отражениями, в том числе и некристаллографическим группам, таким как группа симметрий икосаэдра, H_3 .

Например, оказалось, что икосаэдр управляет особенностями семейства эволюент плоской кривой вблизи ее точки перегиба (рис. 18). Появление икосаэдра в этой ситуации кажется столь же удивительным, как его появление в мистическом законе планетных расстояний Кеплера — однако здесь речь идет о строго доказанной теореме.

Эволюенты плоской кривой — это волновые фронты возмущения, распространяющегося в области, ограниченной этой кривой. Рассмотрим

график соответствующей (многозначной) функции времени. Чтобы его построить, нужно просто поднять каждую эвольвенту, вместе с ее аналитическим продолжением, как целое, на свою высоту (эта высота равна длине нити, сматыванием которой образована эвольвента). График многозначной функции времени изображен на рис. 19. Эта поверхность имеет два ребра возврата (порядка $3/2$ над самой кривой и $5/2$ над касательной перегиба). Оказывается, эта поверхность — не что иное, как многообразие нерегулярных орбит группы симметрий икосаэдра (с точностью до гладкой

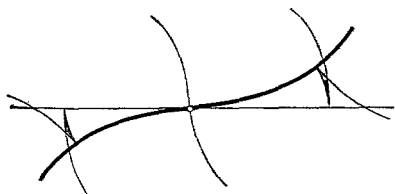


Рис. 18. Семейство эвольвент плоской кривой, имеющей точку перегиба.

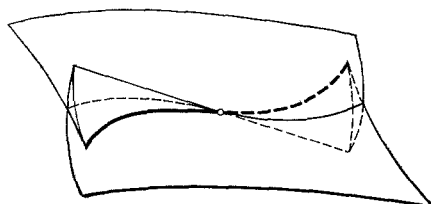


Рис. 19. Поверхность нерегулярных орбит группы симметрий икосаэдра H_3 .

замены переменных). Эту поверхность можно также описать как объединение всех касательных к кривой (t, t^3, t^5) (О. В. Ляшко и О. П. Щербак, 1983 г.).

Подчеркну, что никаких априорных причин для связи между эвольвентами и икосаэдром (волновыми фронтами и группами отражений) не видно. Речь идет о таком же математическом чуде, как, скажем, связь между задачами о касательных и о площадях. Именно поэтому теория особенностей каустик и волновых фронтов была создана не во времена Гюйгенса и Ньютона (которые ею уже занимались), а лишь в течение последнего десятилетия.

11. ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ

Другая большая область приложения идей теории особенностей — теория бифуркаций динамических систем. Начнем с задачи о бифуркациях положений равновесия. Рассмотрим, систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon),$$

заданную векторным полем v в n -мерном фазовом пространстве точек x , зависящим от параметра ε (или, более общо, от l -мерного параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$).

Положения равновесия при фиксированных значениях параметров определяются системой n уравнений с n неизвестными, $v(x, \varepsilon) = 0$. Рассмотрим пространство пар (x, ε) , т. е. произведение фазового пространства и пространства значений параметров. Размерность этого произведения равна $n + l$. Например, для системы с одномерным фазовым пространством, зависящей от одного параметра, речь идет о плоскости (x, ε) (рис. 20).

Уравнение состояний равновесия, $v(x, \varepsilon) = 0$, определяет на этой плоскости кривую (в общем случае — подмногообразие, размерность которого равна числу параметров). Для систем общего положения эта кривая *гладкая* и находится в общем положении относительно проектиро-

вания на ось значений параметра. Если для какой-либо конкретной системы это не так, то сколь угодно малое изменение системы (т. е. модели изучаемого явления) способно качественно изменить характер поведения

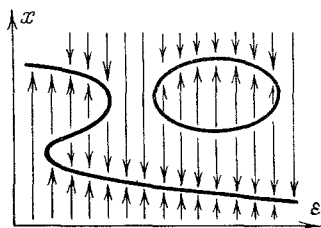


Рис. 20. Бифуркации положений равновесия системы общего положения.

системы (рис. 21). Следовательно, если в какой-либо модели наблюдается бифуркация не общего положения, например, подобная изображенной на рис. 21 слева, то необходимо выяснить, какими особыми обстоятельствами это объясняется. Наиболее обычными обстоятельствами, вызывающими не общие бифуркации, являются симметрия и гамильтоновость уравнений задачи *).

Если нарушения особых обстоятельств (симметрий, гамильтоновости) действительно пренебрежимо малы, то задачу следует рассматривать в рамках теории бифуркации систем соответствующего класса (скажем, симметричных) и сравнивать наблюдаемые бифуркации с теми, которые имеют место в системах общего положения с данной группой симметрий.

Если же вырождение бифуркационной картины — случайное свойство модели, то модель необходимо уточнить, учитывая некоторые из отброшен-

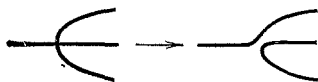


Рис. 21. Приведение бифуркаций в общее положение малым шевелением.

ных при составлении уравнений малых величин — и теория бифуркаций подсказывает, какие именно.

Изложенные выше общие соображения, принадлежащие в основном А. Пуанкаре, показывают, что изучение всевозможных вырождений должно сопровождаться исследованием бифуркаций в семействах с таким числом параметров, что рассматриваемое вырождение становится неустрашимым малым шевелением семейства. Таким образом, при изучении индивидуальных систем достаточно разобрать случаи общего положения, пренебрегая всеми вырождениями. При наличии одного параметра следует изучить вырождения коразмерности 1, т. е. соответствующие подмногообразию, задаваемому одним уравнением в функциональном пространстве всех систем; вырождения коразмерности 2 имеет смысл изучать лишь вместе с бифуркациями в двухпараметрических семействах общего положения и т. д.

12. БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСИЙ

Хотя описанная выше программа Пуанкаре давно известна (в частности она широко пропагандировалась в школах Л. И. Мандельштама и А. А. Андропова), конкретные успехи в ее реализации не очень велики (до сих пор не удалось справиться с математическими трудностями даже в случае всего двух параметров).

Заслуга теории особенностей в этом направлении — прежде всего в том, что она позволяет разобраться в характере бифуркаций положений

*) Поучительный пример: уравнение $u_{xxxx} + Au_{xx} + u_x^2 + u = 0$ имеет при фиксированных $A \approx 2$ целые семейства периодических решений. Причина — симметрия $x \rightarrow -x$.

равновесия (но, увы, не соответствующих фазовых портретов) в системах общего положения с любым конечным числом параметров.

Выше уже отмечалось, что многообразие положений равновесия системы общего положения образует в пространстве (x, ε) гладкое многообразие, размерность которого равна числу l параметров ε_k (см. рис. 20). Рассмотрим проектирование этого l -мерного многообразия на l -мерное пространство параметров ε (вдоль «оси x », т. е. вдоль фазового пространства).

Теория особенностей указывает нормальные формы, к которым это проектирование приводится гладкой локальной заменой координат x (зависящей от параметров ε) и гладкой заменой параметров ε вблизи каждой точки пространства (x, ε) для системы общего положения.

Например, если размерности фазового пространства и пространства параметров равны 1, как на рис. 20, то нормальная форма имеет вид $v(x, \varepsilon) = \pm x^2 + \varepsilon$. Это означает, что в системе общего положения при изменении одного параметра происходят лишь следующие бифуркации: слияние устойчивого положения равновесия с неустойчивым с последующей смертью обоих, либо рождение пары из устойчивого и неустойчивого равновесий.

Разумеется, этот простейший случай был изучен уже в первых работах Пуанкаре. Заслугой современной теории особенностей является изучение аналогичной задачи в старших размерностях.

Например, если число параметров l произвольно, но фазовая переменная x по-прежнему одномерна, то нормальная форма имеет вид (теорема Х. Уитни; см. ^{1,11})

$$v(x, \varepsilon) = \pm x^{k+1} + \varepsilon_1 x^{k-1} + \dots + \varepsilon_k, \quad k \leq l. \quad (*)$$

На рис. 22 изображена поверхность равновесий $v(x, \varepsilon) = 0$ в случае двух параметров. Проекция этой гладкой поверхности на плоскость параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ имеет особенность на линии складок (Γ на рис. 22). Проекция этой линии на плоскость параметров (множество критических значений отображения) — кривая с точкой возврата (кривая Σ на рис. 22). Эта кривая на плоскости параметров называется *бифуркационной кривой* или *линией катастроф*. При приближении точки плоскости параметров к линии катастроф изнутри ограниченной ею области сливаются два из трех имеющих положений равновесия (устойчивое и неустойчивое). В этот момент система обязана перескочить из теряющего устойчивость и умирающего положения равновесия в третье, далекое положение равновесия. Например, если модель описывает какую-либо экономическую систему, то соответствующая устойчивому положению равновесия экономическая система должна скачком перейти в новое, далекое от исходного, состояние. Скачки такого рода побудили французского математика Р. Тома ¹⁴ назвать совокупность теории особенностей, созданной Х. Уитни, теории бифуркаций, созданной А. Пуанкаре и А. А. Андроном и их приложений «теорией катастроф» (подробнее см. ¹⁵). При приближении к линии катастроф устойчивое и неустойчивое равновесия сближаются с бесконечной в конце скоростью. Это объясняет, почему так трудно бороться с катастрофой, когда ее признаки сделались уже заметными.

Особенность проектирования поверхности (см. рис. 22) вблизи самой особой точки, O , называется *сборкой*. Эта особенность устойчива: всякое

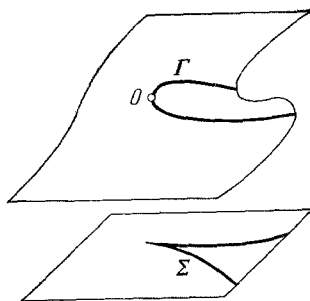


Рис. 22. Отображение сборки Уитни.

близкое отображение имеет в некоторой близкой точке такую же особенность. На плоскости — образе проектирования сборке соответствует точка возврата видимого контура. Уитни¹ доказал, что складки и сборки — единственные особенности проектирований поверхностей общего положения. Таким образом, появление на линии видимого контура проектирования точек возврата — явление общего положения, не разрушаемое малым шевелением проектирования.

Проекция кривой общего положения из трехмерного пространства на плоскость не имеет точек возврата, а имеет лишь точки самопересечения. То, что линия видимого контура имеет точки возврата — проявление общего принципа, согласно которому «особенности притягивают особенности» (ведь линия видимого контура — проекция не произвольной кривой, а кривой особых точек проектирования). Этот принцип объясняет также специальный вид особенностей каустик и волновых фронтов общего положения (по сравнению с особенностями множеств критических значений проектирований общего положения, т. е. особенностей бифуркационных диаграмм положений равновесия общих систем дифференциальных уравнений).

Например, бифуркационные диаграммы трехпараметрических семейств общего положения имеют особенностями лишь ребра возврата и ласточкины хвосты, в то время как на каустиках общего положения встречаются еще пирамиды и кошельки (см. рис. 5). Формула (*) означает, что особенности бифуркационных диаграмм общих l -параметрических семейств дифференциальных уравнений с одномерным фазовым пространством такие же, как у волновых фронтов серии A .

13. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ

В случае, когда фазовое пространство многомерно, потеря устойчивости состояния равновесия не обязательно связана с бифуркацией самого равновесия. Альтернативной возможностью является переход пары собственных чисел линеаризации уравнения в особой точке из устойчивой (левой) полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$ в правую.

Соответствующая бифуркация фазового портрета на плоскости изучена А. А. Андроновым (результаты опубликованы в известной книге Андронова и Хайкина¹⁶ в 1937 г.). В 1942 г. Э. Хопф¹⁷ перенес часть теории Андронова на многомерный случай. Поэтому рассматриваемая бифуркация на Западе сейчас обычно называется бифуркацией Хопфа.

В этом случае топологическая нормальная форма имеет вид $\dot{z} = (i + \varepsilon)z + cz |z|^2$. В зависимости от знака $\operatorname{Re} c$ бифуркация состоит либо в «мягком» рождении автоколебаний (амплитуда которых пропорциональна корню из надкритичности, $\sqrt{\varepsilon}$, рис. 23), либо в стягивании к нулю области притяжения равновесного режима (с последующей «жесткой» потерей устойчивости и перескоком на другой режим, рис. 24).

Этот новый режим движения может быть новым положением равновесия или автоколебательным режимом (устанавливаются строго периодические колебания), или каким-либо более сложным движением (описываемым притягивающим множеством более сложной природы, чем цикл, в фазовом пространстве, так называемым *странным аттрактором*).

Устойчивость таких сложных «стохастических» движений в детерминированных динамических системах сделалась известной в начале 60-х годов в работах С. Смейла, Я. Г. Синая и Д. В. Аносова^{12,19,20}. Первые попытки приложения этих идей к описанию турбулентности относятся к тому же времени (или даже к 1958—1959 гг., когда А. Н. Колмогоров

объединил исследования по эргодической теории динамических систем и по гидродинамической неустойчивости в одном семинаре). Однако строгих результатов о стохастичности движения по аттракторам уравнений Навье — Стокса и сегодня, по-видимому, все еще нет. Машинные эксперименты (первый из которых принадлежит Лоренцу²¹, 1963), видимо, ука-



Рис. 23. Рождение цикла при мягкой потере устойчивости положения равновесия.

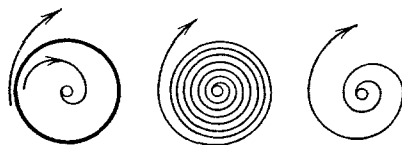


Рис. 24. Стягивание бассейна положения равновесия при жесткой потере устойчивости.

зывают на экспоненциальную неустойчивость движения по меньшей мере по некоторым из аттракторов.

Единственные известные мне строгие результаты в этом направлении касаются оценки размерности аттракторов двумерных уравнений Навье — Стокса в компактной области *сверху*. Эти оценки вначале были получены Ю. С. Ильяшенко²² для периодических граничных условий, а впоследствии перенесены М. И. Вишиком и А. В. Бабиным на более обычные условия прилипания. Они имеют вид $\dim \leq \text{Re}^p$ (в последних теоремах Вишика и Бабина $p = 4$). Не доказано, но и не опровергнуто, что при $\text{Re} \rightarrow \infty$ размерности *всех* аттракторов уравнения Навье — Стокса неограниченно растут. Большинство специалистов верит, что не существует аттрактора ограниченной при $\text{Re} \rightarrow \infty$ размерности, который притягивал бы решения с почти всеми начальными условиями, но и это не доказано.

В случае мягкой потери устойчивости равновесного состояния (скажем, ламинарного течения) образуется устойчивое периодическое движение (автоколебательное). При дальнейшем изменении параметра автоколебательное движение может само терять устойчивость. Теория потери устойчивости автоколебаний — еще один большой раздел общей теории бифуркаций. Здесь также найдены универсальные, не зависящие от вида конкретной системы особенности. Эту теорию невозможно описать здесь подробно (см. ²³), укажу лишь на существенную роль резонансов между самим исходным автоколебательным движением и малыми колебаниями вблизи него. При этом оказывается, что особую роль играют резонансы первых четырех порядков (так называемые *сильные резонансы*). Рациональные числа со знаменателем 5 и выше, (отвечающие *слабым резонансам*) могут в этой задаче рассматриваться как «почти иррациональные», в то время как сильные резонансы приводят к качественно иным «фазовым колебаниям» (рис. 25 отражает различие между фазовыми колебаниями при резонансах 1:3 и 1:5). Потеря устойчивости автоколебания вблизи резонанса 1:2 приводит к удвоению цикла, и обычно (хотя и не обязательно) порождает последовательность универсальных удвоений Фейгенбаума²⁴ *). Путь от ламинарного течения к турбулентному может идти как через цепочку бифуркаций мягкой потери устойчивости (например, удвоенный или бифуркаций Ландау²⁵ рождения n -мерных торов из $n - 1$ -мерных), так и через жесткую, с образованием аттрактора вдали от ламинарного течения — причем с физической точки зрения необязательна даже и потеря устойчивости ламинарного течения, достаточно уменьшение его области притяжения с увеличением числа Рейнольдса.

*) См. также: Фейгенбаум М.— УФН, 1983, т. 141, с. 343.

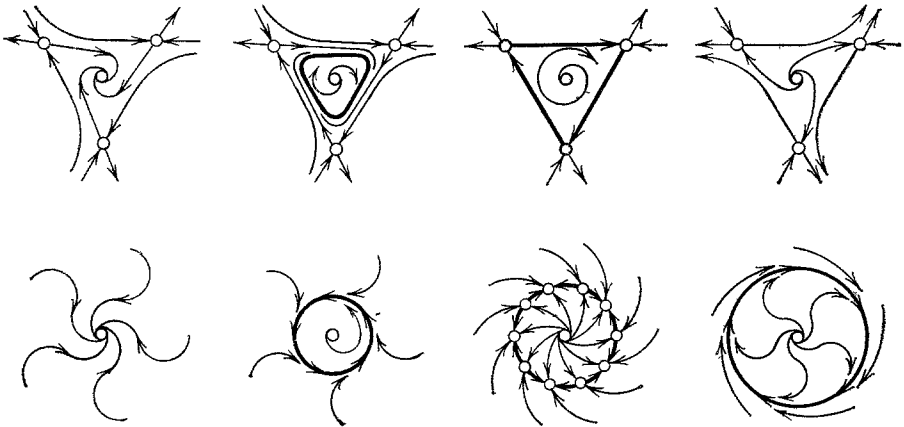


Рис. 25. Типичные последовательности метаморфоз фазовых колебаний при потере устойчивости периодических движений вблизи резонансов третьего и пятого порядков.

Обширные библиографии работ по особенностям, бифуркациям и катастрофам имеются в ^{11,26,27}.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Whitney H. — *Ann. of Math.*, 1955, v. 62, p. 374.
2. Арнольд В. И. — *Функц. анализ.*, 1972, т. 6, вып. 3, с. 61.
3. Арнольд В. И. — *УМН*, 1975, т. 30, вып. 5, с. 3.
4. Arnold V. I. — *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1976, vol. 29, p. 557.
5. Зельдович Я. Б. — *Астрофизика*, 1970, т. 6, с. 319.
6. Арнольд В. И. — *Функц. анализ*, 1972, т. 6, вып. 4, с. 3.
7. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. — М.: Наука, 1974.
8. Милнор Дж. *Особые точки комплексных гиперповерхностей*. — М.: Мир, 1971.
9. Фам Ф. *Введение в топологическое исследование особенностей Ландау*. — М.: Мир, 1970.
10. Гусейн-Заде С. М. — *УМН*, 1977, т. 32, вып. 2, с. 23.
11. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. *Особенности дифференцируемых отображений*. — М.: Наука, 1982.
12. Бурбаки Н. *Группы Ли и алгебры Ли*. — М.: Мир, 1972.
13. Арнольд В. И. — *УМН*, 1983, т. 38, вып. 2, с. 77.
14. Thom R. *Stabilité structurelle et morphogénèse*. — N. Y.: Benjamin, 1972.
15. Арнольд В. И. *Теория катастроф*. — М.: Знание, 1981; М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
16. Андронов А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. — М.: ОНТИ, 1937.
17. Норф Е. — *Ber. Math. Phys. Sachsische Acad. der Wiss. Leipzig*, 1942, Bd. 94, S. 1.
18. Смейл С. — *УМН*, 1970, т. 25, вып. 1, с. 113.
19. Синай Я. Г. — *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, 1961, т. 25, с. 899.
20. Аносов Д. В. *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*. — Труды МИАН СССР, 1967, т. 90.
21. Логенз Е. N. — *J. the Atmos. Sci.*, 1963, vol. 20, p. 130.
22. Ильяшенко Ю. С. — *УМН*, 1981, т. 36, вып. 3, с. 243; *Усп. механики*, 1982, т. 5, вып. 1, с. 31.
23. Арнольд В. И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: Наука, 1978.
24. Feigenbaum M. — *J. Stat. Phys.*, 1979, vol. 2, № 6, p. 669.
25. Ландау Л. Д. — *ДАН СССР*, 1944, т. 44, с. 339.
26. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*. — М.: Мир, 1980.
27. Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения*. — М.: Мир, 1980.
28. R. Gilmore. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. — N.Y.: J. Wiley and Sons, 1981.