

518.517.948+539.143.43.+615.47

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТОМОГРАФИЯ
И ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ***В. В. Пикалов, Н. Г. Преображенский***СОДЕРЖАНИЕ**

| | |
|--|-----|
| 1. Введение | 469 |
| 2. Общие принципы томографирования | 470 |
| 3. Классификация томографических задач | 473 |
| а) Линейные задачи ВТ с сильными априорными ограничениями (473). | |
| б) Линейные задачи ВТ со слабыми априорными ограничениями (475). | |
| в) Томографические задачи для криволинейных траекторий (476). | |
| 4. Краткая характеристика алгоритмов восстановления томографических изображений | 477 |
| 5. Вычислительная томография в физике и технике | 481 |
| а) Дефектоскопия (481). б) Микроскопия (483). в) Физика твердого тела (484). г) Геофизика (485). д) Физика атмосферы Земли и планет (486). е) Аэро- и гидродинамика (487). ж) Физика плазмы (490). | |
| 6. Заключение | 492 |
| Цитированная литература | 494 |

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы томографического, т. е. послойного (от греческого *tomos* — слой, сечение) исследования структуры неоднородных объектов самой разнообразной природы, благодаря успехам вычислительной математики и современному аппаратурному оснащению, в последнее десятилетие развивались чрезвычайно интенсивно. Наибольшее признание вычислительная томография (ВТ) завоевала в биологии и медицине. Особенно стремительным был рост популярности рентгенодиагностической ВТ: первая достаточно качественная томограмма головного мозга человека была получена в 1972 г., а уже через семь лет, в 1979 г., серийно выпускаемые многими фирмами томографические установки, несмотря на их внушительную стоимость, превышавшую для некоторых моделей миллион долларов, работали более чем в 2000 клиниках мира. В том же году английскому инженеру-исследователю Г. Хаунсфилду и американскому математику А. Кормаку за выдающийся вклад в развитие рентгеновской ВТ была присуждена Нобелевская премия по медицине (нобелевские лекции опубликованы в ^{1,2}).

В то же время быстрый прогресс медицинской томографии сопровождался зарождением и развитием многих других приложений этого весьма универсального и информативного метода интроскопии (внутривидения). Методы ВТ стали все глубже проникать в технику лабораторного физического эксперимента, в геофизику, физику космоса, астрономию, аналитическую химию, внесли кардинальные перемены в дефектоскопию про-

мышленных изделий и т. д. При этом следует иметь в виду, что основные идеи и принципы томографической реконструкции неоднородных объектов были, вообще говоря, известны физикам, и притом в разных вариантах, задолго до того, как их взяли на вооружение биология и медицина. Так, первые работы по восстановлению локальных характеристик осесимметричных объектов относятся еще к прошлому веку³; в 50-х годах Брейсуэлл⁴, реконструировавший по полосовым суммам карты СВЧ излучения Солнца, применял уже чисто томографическую расчетную технику в современном смысле слова. Тем не менее не следует отрицать того факта, что крупные достижения диагностической ВТ последних лет явились мощным стимулом для развития приложений в различных областях естествознания и техники.

Обзорная литература по ВТ уже довольно обширна. Укажем прежде всего на монографии^{5, 6, 179} и на сборник работ⁷. Популярное изложение принципов ВТ содержится в уже упомянутых лекциях^{1, 2}, а также в статьях⁸⁻¹¹. Однако в обзорах более специального характера акцент сделан либо на медико-биологических задачах¹²⁻¹⁶, либо на чисто вычислительной стороне проблемы реконструкции послойных изображений¹⁷⁻²³. Физические аспекты томографии обычно затрагиваются лишь вскользь; в обзорных статьях авторов^{24-26, 180} речь идет преимущественно о частном классе задач ВТ, важных для физики плазмы и динамики нагретого газа. Недавние обзоры^{27, 181, 182} посвящены ЯМР-интроскопии, использующей среди прочих и томографические методы исследования объектов.

В связи со сказанным представляется полезным и своевременным систематизировать основные результаты и важнейшие направления развития ВТ, непосредственно относящиеся к физике и технике.

Обзор включает работы, опубликованные в основном до середины 1982 г.

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТОМОГРАФИРОВАНИЯ

Современную томографию можно без преувеличения считать всеволновой. В зависимости от характера конкретной задачи восстановление структуры объекта может основываться на регистрации пучков электронов, ионов (в том числе протонов и альфа-частиц), нейтронов, фотонов во всем диапазоне электромагнитного спектра, звуковых волн. Высказаны даже экзотические проекты нейтринной томографии²⁸.

Исследуемый объект при этом облучается извне или сам является излучателем. Просветивающие источники могут быть когерентными (в ряде задач это обстоятельство чрезвычайно важно) и некогерентными. Детектироваться могут как широкие, так и узкие (приближенно-мономатические) участки спектров испускания, поглощения, рассеяния. Измеряются также фазовые искажения фронта волны (шлирен-, теневые и интерферометрические методы), сигналы свободной индукции (ЯМР-интроскопия), углы поворота плоскости поляризации (ВТ, основанная на эффекте Фарадея) и т. п. В последнее время все шире используется эффект электрон-позитронной аннигиляции с применением схемы совпадений.

Казалось бы, при таком разнообразии средств и методов получения данных не может существовать сколько-нибудь универсальной процедуры, позволяющей перейти от измеряемых величин к элементам внутренней структуры объекта. Однако указанный комплекс обратных задач все же содержит некий единый стержень.

Возьмем для определенности случай несамосветящегося и недоступного для визуального изучения объекта, просветить который мы можем, например, с помощью рентгеновских лучей.

Недостатки обычной рентгенограммы, представляющей собой двумерную теневую проекцию реальной трехмерной структуры, хорошо известны. Это прежде всего — низкий контраст, невысокое отношение сигнал/шум, неизбежные наложения структурных элементов, невозможность количественного сопоставления отдельных локальных фрагментов тела по плотности и иным параметрам. Ясно также, что и располагая набором таких рентгенограмм, снятых с разных направлений, исследователь практически немного выиграет с точки зрения количества извлекаемой информации о внутреннем строении объекта, если будет действовать стандартным способом, последовательно разглядывая снимки.

Метод заметного повышения информативности рентгенограммы предложил еще в 20-х годах французский врач Бокаж²⁹, а его идею вскоре реализовал на практике итальянский инженер Валлебона, назвавший созданный им аппарат томографом. Суть идеи непосредственно видна из рис. 1. Если во время съемки рентгенограммы перемещать в параллельных плоскостях любые два из трех участвующих в ней компонента (рентгеновская трубка, объект, фотопленка), оставляя неподвижным третий, то на пленке даст четкое изображение только один слой, а элементы остальных слоев размажутся. Регулируя скорости перемещений, можно выделять различные слои и тем самым последовательно изучать структуру трехмерного объекта.

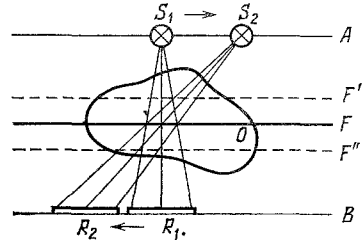


Рис. 1. Схема томографии по Бокажу.

Источник S_1 перемещается в положение S_2 в плоскости A , в то время как рентгеновская пленка R_1 переходит в положение R_2 (плоскость B). Резко воспроизводится плоскость F , детали объекта O , соответствующие плоскостям F' и F'' , размываются.

Рентгеновская томография по Бокажу (иначе — томография фокальной плоскости, планиграфия, биотомия) сыграла важную роль в медицинской рентгенологии. Наибольшее практическое применение она получила в клинике легочных заболеваний (диагностика туберкулезных каверн, глубоко лежащих туберкулезных очагов и инфильтратов, хронических абсцессов, рака легкого). Прочное место томография заняла в диагностике заболеваний гортани, поскольку на обычной рентгенограмме гортань почти неразличима из-за накладывающихся на нее теней позвонков³⁰.

Тем не менее легко понять, что принцип последовательного выделения сечений тела за счет взаимных смещений компонентов диагностической установки нельзя считать сколько-нибудь универсальным. Если иметь в виду даже только медицинскую рентгенологию, то и в этом случае значительного увеличения контраста различных органов достигнуть не удастся: этому препятствует неизбежная паразитная засветка от других, расфокусированных сечений тела. Последовательный перебор одного сечения за другим сопряжен с большими дозами облучения; как и в обычной рентгенодиагностике, в основном приходится довольствоваться лишь качественным сравнением плотностей почернений различных участков и т. п. Что же касается томографирования самосветящихся объектов (физика плазмы, высокотемпературная газодинамика), применений в электронной микроскопии, геофизике, атмосферных и космических исследованиях, то здесь описанный выше принцип заведомо неэффективен.

Современная вычислительная томография использует совершенно иной подход при выделении интересующего нас сечения неоднородного объекта. Поясним его на том же примере, относящемся к рентгеновской диагностике (рис. 2). Излучение рентгеновского источника может быть хорошо сфокусировано: до диаметров пучка порядка одного или нескольких миллиметров, так что возникают достаточно веские основания гово-

речь о просвечивающих лучах. Каждый такой луч, прошедший через тело, характеризуется своей интенсивностью, ослабленной по отношению к исходной. Детектор, стоящий на выходе, фиксирует некоторую интегральную величину этого ослабления — луч-сумму, причем сигнал с помощью аналого-цифрового преобразователя может быть в виде цифрового импульса введен в память ЭВМ. Далее, перемещая луч по определенному закону в выбранной плоскости (например, параллельно самому себе или веером с некоторым углом раствора), получаем набор луч-сумм, определяющий одномерную проекцию. Будем для определенности говорить о параллельном смещении зондирующих лучей; тогда одной проекции соответствует некоторый угол относительно выбранной системы отсчета. Поворачивая

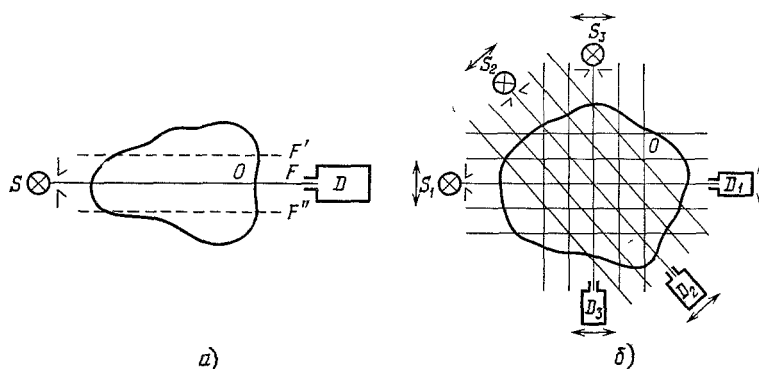


Рис. 2. Схема вычислительной томографии.

а) Коллимированный пучок лучей проходит в плоскости F , ослабляется объектом O и регистрируется детектором D ; влияние плоскостей F' и F'' полностью устранено. б) Вид на плоскость F сверху: источник и детектор перемещаются, образуя набор луч-сумм и формируя проекцию. Затем происходит поворот на некоторый угол. Показано получение трех проекций.

затем луч в той же плоскости на малый угол, повторяем процесс регистрации луч-сумм и получаем новую проекцию и т. д. Процесс сканирования по углу продолжается до тех пор, пока полный угол поворота не составит 180° . В результате в памяти ЭВМ накапливается необходимая исходная информация для реконструкции изображения в выделенной плоскости (сечении). При этом отсутствуют какие-либо помехи в виде размытых элементов изображения, соответствующих другим плоскостям, и теоретически можно ожидать весьма высокого контраста томограммы⁶. Возможность количественной оценки плотностей структурных элементов при использовании ЭВМ очевидна. Нетрудно убедиться, что метод пригоден также при исследовании излучающих и рассеивающих объектов, хорошо сочетается с техникой голографической интерферометрии, ЯМР и ЭПР, поляризационных измерений и т. п.

Описанный принцип томографирования в начале 60-х годов одним из первых применил А. Кормак в модельных экспериментах, ориентированных на медицинскую рентгенодиагностику³¹. Кул и Эдвардс примерно одновременно создали устройство для поперечного сканирования тела пациента³²; несколько раньше аналогичную попытку предпринял Олдендорф³³. Однако, как уже отмечалось выше, ВТ приобрела статус реального диагностического метода лишь в начале 70-х годов, после создания под руководством Г. Хаунсфилда ЕМІ-сканера, оснащенного специализированной ЭВМ, для восстановления с высоким контрастом отдельных сечений головного мозга человека³⁴. Вскоре после этого Ледли разработал устройство, позволяющее сканировать любую часть человеческого тела или все тело в полном объеме. Фактически к тому же времени отно-

сится и начало процесса интенсивного использования для целей ВТ иной техники, уже не связанной с поглощением рентгеновских лучей, а также проникновения идей ВТ в различные области естествознания.

Уместно подчеркнуть, что к описанной выше схеме получения томограммы отнюдь не следует относиться как к неизбежной и единственно возможной. Так, применение ЭВМ для восстановления изображений по проекциям в принципе не является ни необходимым, ни присущим именно томографии: задачу зачастую удается решить (при том дешевле и быстрее) с помощью оптических процессоров⁶. В последнее время все более условным становится и сам термин «томография», ибо трехмерный объект, вообще говоря, нет нужды непременно исследовать послойно. В частности, набор двумерных проекций, регистрируемых при помощи нескольких обскур-камер (см. гл. 5) или иными способами, позволяет сразу, без разделения на слои, восстанавливать реальную объемную структуру тела. Кроме того, в постановке того или иного томографического эксперимента весьма важную роль может сыграть разумный учет свойств симметрии объекта.

Исключительная гибкость метода ВТ порождает, с одной стороны, большое разнообразие применяемых при получении томограмм физических, технических и расчетно-математических решений, с другой стороны, обеспечивает методу чрезвычайно широкое поле приложений.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Процедура восстановления структуры объекта по измеренным проекциям является важнейшей частью любого томографического эксперимента. С математической точки зрения, это типичная задача интегральной геометрии³⁵, формулируемая обычно следующим образом. Пусть $g(x)$ и $R(x, y)$ — достаточно гладкие функции, определенные соответственно в n -мерном и $(n + k)$ -мерном пространствах, $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_k)$ — векторы, $\{M(y)\}$ — некоторое семейство гладких многообразий. Известны интегралы

$$\int_{M(x)} R(x, y) g(y) d\sigma = f(y) \quad (1)$$

и весовые функции R , $d\sigma$ — элемент меры на $M(x)$. Требуется найти $g(x)$. Сразу же заметим, что в большинстве задач ВТ $n = 2$ или 3 , $k = 1$ или 2 , $R = 1$, многообразие M — точки на прямолинейной или криволинейной траектории. Однако, поскольку не исключаются и более общие постановки задач, полезно в качестве исходного рассматривать многомерное интегральное уравнение (1). Представляется удобным при классификации задач ВТ выделить три большие группы этих задач по степени возрастающей сложности их решения.

а) Л и н е й н ы е з а д а ч и В Т с с и л ь н ы м и а п р и о р н ы м и о г р а н и ч е н и я м и

В данном случае траектории лучей, пронизывающих объект в выделенной плоскости, считаются строго прямолинейными, а априорная информация относительно искомой функции $g(x)$ обычно бывает следующей.

В наиболее простом случае может быть задан функциональный вид $g(x)$, и тогда остается определить лишь несколько неизвестных параметров, входящих в задачу. Как известно, предварительный анализ информационной обеспеченности такой задачи (расчет матрицы Фишера) и поиск параметров (метод максимума правдоподобия) — процедуры хорошо разработанные и широко известные. Отметим, что такого рода постановки томографических задач часто встречаются в различных приложениях теории переноса γ -излучения³⁶ и нейтронов³⁷, в физике кристаллов³⁸, в спектроскопии плазмы³⁹ и газовой динамике⁴⁰.

Далее, может считаться известной форма кривых, на которых искомое двумерное распределение $g(x)$ принимает постоянное значение (изолинии). Простейший и наиболее полно исследованный случай — это изолинии в виде концентрических окружностей, когда объект неоднороден лишь в радиальном направлении и для восстановления $g(x)$ (x — радиальная переменная) нужна всего одна проекция $f(y)$. Уравнение (1) при $R = 1$ вырождается в этом случае в классическое уравнение Абеля

$$\int_0^y (y-x)^{-1/2} g(x) dx = f(y), \quad (2)$$

имеющее для непрерывной дифференцируемой функции $f(y)$ единственное непрерывное решение

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-y)^{-1/2} f(y) dy. \quad (3)$$

Большое число примеров физических задач, приводимых к уравнению Абеля, рассмотрено в обзоре ²⁵. Отметим, что если осесимметричный объект является самосветящимся, то уравнение (2) справедливо только в пределе, когда реабсорбцией изучения можно пренебречь. В более общем случае ^{41,42} решение задачи разбивается на серию последовательных этапов абелевой инверсии типа (3).

Важно помнить, что наличие простой формулы обращения (3), на первый взгляд полностью решающей задачу, на самом деле вовсе не означает, что погрешность восстановления $g(x)$ будет того же порядка, что и погрешность измерения проекции $f(y)$. В самом деле, задача относится к классу некорректных (неустойчивых) ⁴³ и любой алгоритм численного восстановления $g(x)$ нуждается в регуляризации, т. е. в использовании дополнительных ограничений на функцию $g(x)$, согласованных со случайной ошибкой измерений $f(y)$. Сравнение эффективности нескольких регуляризованных алгоритмов абелевой инверсии произведено в работе ⁴⁴.

Изучался и ряд более сложных ситуаций. Так, в работах авторов ⁴⁵⁻⁵¹, а также в статье ⁵² описаны методы извлечения локальных характеристик неоднородных объектов (преимущественно плазменных) по минимальному числу проекций — одной или двум, когда в выбранном сечении изолинии представляют собой систему неконцентрических окружностей, подобных эллипсов, а также эллипсов с регулярным смещением друг относительно друга. Помимо этого, исследовалась возможность факторизации искомой двумерной функции распределения. Рассматривались схемы просвечивания объекта параллельными лучами, а также веерные проекции; учитывалась оптическая плотность излучателя.

Априорные ограничения на функцию $g(x)$ могут быть также связаны и с использованием в алгоритме свойств симметрии объекта, выраженных не через заданную конфигурацию изолиний, а непосредственно на языке теории групп. В частности, многие биомолекулы, их комплексы, а также различные типы вирусов, бактериофагов, белковых кристаллов обладают спиральной, диэдрической, икосаэдрической и т. п. симметрией. Эффективные способы трехмерной реконструкции такого рода биологических структур, изучаемых с помощью электронной микроскопии, были разработаны в Институте кристаллофизики АН СССР под руководством Б. К. Вайнштейна ^{12,53}, а также сотрудниками Кембриджской лаборатории молекулярной биологии ^{54,55}.

Отметим еще, что в работе ⁵¹ исследована весьма общая по постановке томографическая задача с изолиниями, когда последние описываются заданной системой произвольных выпуклых замкнутых кривых без самопересечений.

б) Линейные задачи ВТ со слабыми априорными ограничениями

Следующим по уровню сложности является класс задач двух- и трехмерной томографии в прямом смысле этого слова, когда исследуемый объект асимметричен, параметризации или учета формы изолиний не производится, а вводимые (слабые) априорные ограничения на $g(x)$ связаны лишь с регуляризацией решения. Траектории лучей по-прежнему считаются заданными и прямолинейными.

Обратимся снова к исходному уравнению (1), положим в нем $R = 1$, а в качестве $\{M(y)\}$ рассмотрим семейство всевозможных гиперплоскостей в n -мерном пространстве. В такой постановке задача отыскания $g(x)$ была решена одним из основоположников интегральной геометрии австрийским математиком Й. Радоном в 1917 г. ⁵⁶. Рис. 3 поясняет результаты инверсии Радона в двумерном случае. Пусть L — луч, пересекающий объект, s — измеряемое вдоль него расстояние, O — начало некоторой системы координат, φ — угол между базисной линией OM , лежащей в выбранной плоскости, и перпендикуляром, опущенным из O на L , p — кратчайшее расстояние от O до L , n — орт, определяемый тем же углом φ . В этих обозначениях вместо (1) следует записать

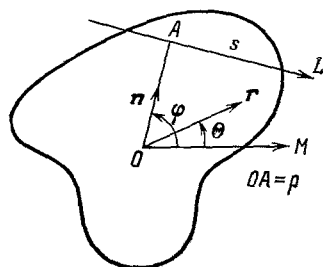


Рис. 3. К определению смысла переменных, используемых в формулах (4) и (5).

Пояснения в тексте.

$$\int_L g(r) ds = f(p, n), \quad (4)$$

где двумерный вектор r , повернутый относительно OM на угол θ , характеризует положение на плоскости той точки, в которой отыскивается распределение g . Как показано Радоном,

$$\begin{aligned} g(r) &= -\frac{\nabla^2}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} f(p, n) \ln |p - rn| dp = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 f(p, n)}{\partial p^2} \ln |p - rn| dp = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(p, n)}{\partial p} \frac{dp}{p - rn} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(p, n) dp}{(p - rn)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для расчетов можно (конечно, после соответствующей регуляризации, так как задача остается некорректной) использовать любое из выражений (5); во внутренних интегралах подразумеваются главные значения в смысле Коши.

Решение Радона в случае $n = 3$ имеет вид

$$g(\mathbf{r}) = -\frac{V^2}{8\pi^2} \int_{S_0} f(\mathbf{rn}, \mathbf{n}) d\Omega, \quad (6)$$

где S_0 — поверхность единичной сферы, $d\Omega$ — элемент телесного угла, определяемого ортом \mathbf{n} , а функция $f(\mathbf{rn}, \mathbf{n})$ представляет собой поверхностный интеграл от функции g , взятый в плоскости, проходящей через точку \mathbf{r} и нормальной к \mathbf{n} .

В работе ⁵⁰ рассмотрен случай восстановления двумерного распределения коэффициента испускания светящегося оптически плотного объекта; при этом в (1) $R \neq 1$ и является функцией, находимой из дополнительного эксперимента.

в) Томографические задачи для криволинейных траекторий

Переход к криволинейным траекториям лучей, что в первую очередь может быть обусловлено учетом рефракции исследуемой среды, выделяет новый, еще более сложный и весьма разнообразный по постановкам класс задач ВТ. В ряде геофизических приложений вид криволинейных траекторий оказывается заранее известным (гравиметрия, обратная кинематическая задача сейсмоки, изучавшаяся еще в начале века Г. Герглотцем и Э. Вихертом и др.). В этой области получено много важных аналитических результатов, созданы эффективные численные алгоритмы (см., например, ⁵⁷).

Осесимметричные оптические неоднородности, а также неоднородности в плоском слое, обязанные сильной рефракции лучей, изучались рядом авторов ⁵⁸⁻⁶². В этих работах, как правило, используется эйконоальное приближение. Любопытно, что в условиях аксиальной симметрии, несмотря на изгиб лучей, вновь получается интегральное уравнение Абеля, хотя входящие в него переменные имеют совсем иной смысл, нежели в случае прямолинейных траекторий.

Когда форма криволинейных траекторий заранее не известна, а объект асимметричен, мы даже в простейшем приближении геометрической оптики приходим к нелинейной томографической задаче. Неоднократно предпринимались попытки решать такую задачу с помощью итерационных схем ⁶³⁻⁶⁷. Определенные успехи на этом пути достигнуты ^{65, 66}, но в целом проблема еще далека от завершения, поскольку не изучены вопросы сходимости итерационного процесса, в котором многократно решается уравнение Радона и на каждом шаге поле показателя преломления и траектории «подправляются» под измеренные проекции. Кроме того, вследствие эффекта мнимого пересечения лучей ^{61, 68}, явлений типа «рыбьего глаза» Максвелла ⁶⁷ здесь есть опасность утраты существования и единственности решения задачи.

Хотя в рамках эйконоального приближения часто и удается избавиться от некоторых, наиболее грубых артефактов рефракционной природы, разрешающая сила восстанавливаемого изображения может оставаться недопустимо низкой. Дальнейшее продвижение вперед в этом направлении, как показано в ²⁰, связано уже с учетом дифракционных эффектов, т. е. с решением полного волнового уравнения либо уравнения Гельмгольца. Сами эти решения обычно находятся с использованием приближения Борна или путем преобразования волнового уравнения в уравнение Риккати (приближение Рытова) ⁶⁹. Теория соответствующих задач ВТ лишь начинает развиваться.

Наконец, упомянем некоторые математические разработки методов решения задач нелинейной ВТ, осуществленные школой М. М. Лаврентьева и содержащие важные общие результаты, которые касаются единственности и устойчивости решений^{70,71}. Правда, до конкретных расчетных алгоритмов и программ дело здесь еще предстоит довести.

В заключение следует заметить, что предложенная выше классификация ни в коем случае не должна рассматриваться как охватывающая все мыслимые типы прикладных задач ВТ. Например, распространение принципов томографирования на методы лазерного рассеяния могло бы позволить сразу восстанавливать функции распределения частиц газа или плазмы в 6-мерном фазовом пространстве. Многочисленные разновидности задач ВТ возникают с применением сильных когерентных полей в условиях проявления нелинейно-оптических эффектов типа самофокусировки, самодифракции, явления Фредерикса в жидких кристаллах и т. п. Поскольку, однако, постановки таких обратных задач еще не подкреплены сколько-нибудь основательным экспериментальным материалом, их пока приходится считать лишь умозрительными, а соответствующую классификацию — преждевременной.

4. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Литература по ВТ изобилует описанием многочисленных алгоритмов, применяемых при реконструкции изображений. Это связано как с исключительным разнообразием самих постановок томографических задач и способов их экспериментальной реализации, так и с непрекращающимися усилиями специалистов разработать такой алгоритм, который превосходил бы имеющиеся хотя бы по одному-двум практически важным параметрам задачи: быстрейшему воздействию, требованиям к машинной памяти, разрешающей способности, контрасту, количеству необходимых проекций и т. п. В данном обзоре нет возможности (да и необходимости) сколько-нибудь подробно описывать, иллюстрировать примерами и сопоставлять друг с другом различные алгоритмы. Поэтому мы лишь перечислим важнейшие из них и дадим самые краткие комментарии качественного характера. Кроме того, ограничимся лишь алгоритмами решения задач, которые по классификации предыдущего раздела были отнесены ко второй группе (асимметричные объекты, прямолинейные траектории) и чаще всего применяются на практике.

Рассмотрим прежде всего элементарный пример реконструкции двумерного объекта, когда сам объект предельно прост, алгоритмический «механизм» совершенно прозрачен, а привлечения ЭВМ вообще не требуется.

Возьмем в качестве такого объекта квадрат $ABCD$ (рис. 4), разделенный на 9 равных клеток (ячеек). Числа от 1 до 9, разбросанные по клеткам, соответствуют плотности или какой-нибудь другой характеристике, находимой томографически. Пусть известны 4 проекции, определяемые направлениями сторон квадрата AB и AD и его диагоналей AC и BD . Если в каждой проекции взять по 3 луч-суммы, то в первых двух случаях вклад внесут все клетки, а в двух других лишь по 7 клеток из 9. Таким образом, мы исходим из 12 значений луч-сумм и ищем 9 структурных элементов объекта, т. е. решаем переопределенную задачу.

Выберем для восстановления алгоритм, основанный на схеме «выравнивания проекций», которая является частным случаем довольно универсального итерационного метода решения линейных обратных задач⁷².

Начнем с проекции, образованной лучами, параллельными стороне AB . Каждое значение луч-суммы разделим на число пересекаемых клеток и припишем этим клеткам найденную величину (в данном случае 5). Удеем считать полученный результат первой итерацией (рис. 5, а). Как видим, в нашем случае для взятой проекции объект представляется совершенно однородным; если погрешность восстановления оценивать по

формуле

$$\sigma_i = \left(\sum_{k=1}^9 (g_k^{(i)} - g_k^{(0)})^2 / \sum_{k=1}^9 k^2 \right)^{1/2} \cdot 100\%, \quad (7)$$

где индекс k нумерует клетки, i обозначает номер итерации, $g_k^{(0)}$ — исходные значения на рис. 4, то $\sigma_1 = 45,8\%$.

Перейдем к следующей проекции (лучи идут вдоль AD). Теперь для каждого луча следует скорректировать сумму чисел, получаемых после первой итерации, на известную луч-сумму данной проекции. Так, сумму в первом столбце (15) следует, очевидно, уменьшить на 2 и вычесть из каждого числа по $2/3$; в третьем столбце нужно, наоборот, добавить в каждую клетку по $2/3$; во втором столбце изменений нет. Видно, что в нашем примере вторая итерация фактически оказывается неинформативной: предыдущее однородное распределение лишь слегка деформируется, создавая небольшой градиент вдоль AB и совершенно не выявляя сложной структуры объекта (рис. 5, б). Погрешность восстановления

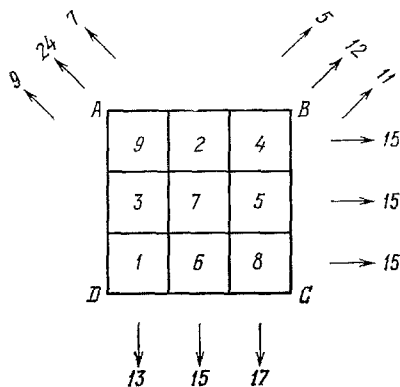


Рис. 4. Тест-объект из девяти элементов.

Стрелками указаны 12 используемых луч-сумм в четырех проекциях.

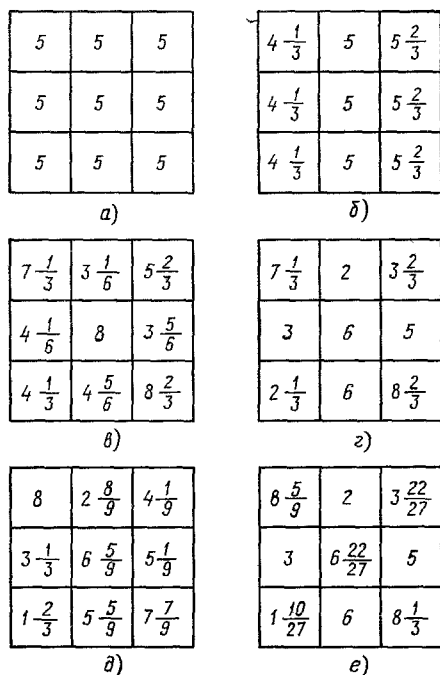


Рис. 5. Различные стадии (а — е) восстановления тест-объекта, изображенного на рис. 4, итерационным методом «выравнивания проекций». См. подробные пояснения в тексте.

ния, оцениваемая по (7), даже несколько возрастает по сравнению с первой итерацией: $\sigma_2 = 48,7\%$.

Третья итерация (рис. 5, в, лучи идут параллельно диагонали AC) уже резко меняет дело, поскольку в значениях луч-сумм неоднородность объекта проявляется отчетливо. Принцип выравнивания остается прежним, только соответствующие разности следует равномерно распределять по двум или трем клеткам в зависимости от того, какая луч-сумма принята в расчет; $\sigma_3 = 28,7\%$. Аналогичная ситуация имеет место и с четвертой итерацией (рис. 5, д), завершающей первый цикл процедуры; теперь объект уже напоминает исходный, $\sigma_4 = 14,6\%$.

Далее можно вновь привлечь первую проекцию и начать, таким образом, второй цикл выравнивания. На рис. 5, е показаны результаты, получаемые после шестой ($\sigma_6 = 9,94\%$) и восьмой ($\sigma_8 = 4,25\%$) итераций. Процесс можно было бы, конечно, продолжать и дальше (согласно ⁷² его сходимость гарантирована), но уже и из приведенных выкладок ясно, что 7—8 итераций позволяют получить неплохой результат восстановления.

Читателю, желающему лучше почувствовать роль различных факторов, влияющих на качество реконструкции томографического изображения, можно рекомендовать вооружиться простейшим калькулятором и самостоятельно поработать с квадратом, разделенным, например, на 16 клеток. При этом расчеты усложняются не слишком сильно, но возможности вычислительного эксперимента возрастают существенно. Так, можно варьировать число проекций и количество луч-сумм в них, решать как

переопределенные, так и недоопределенные задачи, выбирать различные исходные распределения элементов и менять «контраст» в этих распределениях, имитировать реальный эксперимент, вводя в значения луч-сумм случайные и систематические ошибки, и т. д. Открываются возможности и для опробования различных итерационных схем восстановления.

Какова же вкратце ситуация с алгоритмами, применяемыми при решении реальных задач ВТ? Несколько условно их можно разбить на две категории. К первой уместно отнести те из них, которые непосредственно базируются на общих, широко известных методах вычислительной математики. Вторую составляют алгоритмы специального типа, созданные применительно именно к задачам ВТ.

Говоря об алгоритмах, относимых к первой категории, прежде всего следует упомянуть классические способы прямого обращения матриц (см., например, ⁷³), итерационные алгоритмы ART (algebraic reconstruction technique) ⁷⁴ и SIRT (simultaneous iterative reconstruction technique) ⁷⁵, в том числе с привлечением техники метода конечных элементов ⁷⁶, метод максимума энтропии (MENT) ⁷⁷⁻⁷⁹, метод Монте-Карло ^{80,81}, а также способы редукции задач ВТ к задачам деконволюции свертки с последующим применением метода регуляризации А. Н. Тихонова ^{82,83}.

Процедура прямого обращения матриц, применявшаяся на ранних этапах развития ВТ довольно часто, в настоящее время почти единодушно признается неконструктивной и фактически уже не используется. Остальные из указанных алгоритмов, имеющие свои достоинства и недостатки, находят многочисленные применения и продолжают развиваться в теоретическом плане. Особенно часто применяется итерационный алгоритм ART, который успешно зарекомендовал себя еще в первом медицинском томографе Хаунсфилда, а затем в электронной микротомографии. Отличительной чертой алгоритма MENT является возможность использования его в трехмерной томографии и обходиться при этом весьма небольшим числом проекций, когда другие алгоритмы порождают неприемлемые артефакты. С методом Монте-Карло многие специалисты связывают надежды успешного решения задач ВТ высокой размерности и даже нелинейных; кроме того, предполагается, что статистическое моделирование позволит более экономно, чем, например, при использовании итерационных методов, размещать данные в памяти ЭВМ. Алгоритм, основанный на тихоновской регуляризации, заложен в систему математического обеспечения первого отечественного рентгеновского томографа СРТ-1000, предназначенного для исследования головного мозга человека ⁸². Уже накопленный опыт эксплуатации этого прибора подтверждает высокое качество восстановления тонких деталей двумерного изображения в выбранном сечении.

Среди многочисленных специализированных алгоритмов ВТ особый интерес представляют схемы послойного расщепления ^{26,46,51,84}, техника полиномиальных разложений ^{31,45,85}, алгоритмы Фурье-синтеза ^{6,86}, обратного проецирования с фильтрацией (FBR) ^{6,19,87}, а также непосредственного использования преобразования Радона (5) ^{23,88-91}.

Послойное расщепление, часто называемое еще «обдиркой луковицы» (onion peeling), можно в известном смысле рассматривать как удачную томографическую версию метода конечных элементов. В результате возникает возможность решать, вместо исходной двумерной задачи, серию одномерных интегральных уравнений (Вольтерры I рода), что дает ряд крупных вычислительных преимуществ. Кроме того, метод обобщается на сложные физические ситуации: наличие непрозрачного тела, перекрывающей часть лучей, оптически плотный излучатель и т. п.

Применение полиномиальных разложений издавна популярно среди физиков-экспериментаторов. В используемых особенно часто разложениях

Кормака и Мальдонадо ^{31,85} фигурируют полиномы Чебышёва, Лагерра, Эрмита и Цернике, причем Кормак свел задачу к сравнительно компактной системе линейных алгебраических уравнений, а авторы ⁴⁵ разработали регуляризованную версию алгоритма Мальдонадо с ограничением числа членов ряда на основе критерия невязки.

Достоинства алгоритма фурье-синтеза обусловлены прежде всего возможностью использования широко известной схемы Кули-Тьюки (быстрого преобразования Фурье). Помимо этого, алгоритм легко реализуется в аналоговом виде ⁶ и позволяет эффективно учитывать априорную информацию, касающуюся симметрии объекта. Быстрое преобразование Фурье с успехом применяется и в ЯМР-интроскопии, когда градиент внешнего магнитного поля в течение спада сигнала свободной индукции (после импульсного воздействия на образец резонансным РЧ полем) последовательно ориентируется вдоль каждой из трех взаимно ортогональных координатных осей ¹⁸³. В этом случае сразу достигается восстановление всей трехмерной структуры объекта ¹⁸², хотя необходимо считаться с тем, что быстрое переключение градиентов поля может приводить к появлению нежелательных индукционных токов.

Обратное проецирование с фильтрацией используется в большинстве современных рентгенодиагностических томографов и, таким образом, с чисто утилитарной точки зрения играет особую роль. Располагая набором фильтров, можно подчеркивать либо ослаблять те или иные детали изображения. Кроме того, алгоритм допускает так называемую «конвейерную» обработку измерений, когда в процессе расчета на некотором его этапе используется только часть данных о проекциях, а сканирование по углам еще продолжается.

Применение формул инверсии Радона, хотя и сопряжено обычно с повышенными затратами машинного времени, тем не менее позволяет добиться хорошего качества восстановления структуры при ограниченном наборе дискретных значений угла сканирования. При этом, как показано авторами ⁹¹, существенную роль может играть использование сглаживающих сплайнов, а также деформируемой сетки.

В приведенном кратком перечне алгоритмов ВТ не затронуты разнообразные комбинированные варианты восстановления изображений, методы интерпретации данных, получаемых при веерном сканировании луча, специальные приемы мультиплексной томографии ⁶ и т. п. Тем не менее общий вывод, который может быть сделан из всего сказанного, сводится к тому, что практически каждый из упомянутых алгоритмов, за исключением тех, которые основаны на прямом обращении матриц, имеет свои положительные качества (а также, естественно, и слабые стороны). Поэтому было бы неверным отдать безусловное предпочтение какому-то одному или двум из них, объявив остальные неэффективными и не заслуживающими дальнейшего развития. Как уже подчеркивалось, большое разнообразие экспериментальных постановок томографических задач выдвигает в тех или иных случаях на первый план и различные требования к алгоритмам.

Важной стороной деятельности специалистов, разрабатывающих и совершенствующих алгоритмы ВТ, является тщательная проверка предлагаемых новых версий на стандартных, унифицированных тест-объектах (гетерогенных фантомах). Довольно широкую известность применительно к задачам медицинской радиологии получили в последнее время фантомы Кормака ⁹² и Чо ⁹³. На рис. 6, а изображено сечение простейшего фантома Кормака; в данном случае компоненты фантома изготавливаются из алюминия (заштрихованные области) и люсита (незаштрихованная внутренность круга). Отношение коэффициентов поглощения алюминия и люсита для просвечивающих γ -лучей, испускаемых изотопами ^{60}Ni или ^{60}Co , равно примерно 3, что имитирует ситуацию, имеющую место при эмиссионной рентгенодиагностике опухоли головного мозга (алюминию ставят в соответствие кости черепа и пораженные участки, люси-

ту — здоровый мозг). На рис. 6, б — г сплошными линиями изображены зависимости коэффициента поглощения от радиальной координаты, измеряемой по направлениям OA , OB и OC . Ширина пучка d предполагается конечной, а сечение пучка — прямоугольным.

С фантомом можно ставить как реальный, так и чисто вычислительный эксперимент. Результаты реального эксперимента, выполненного еще в 1963 г. Кормаком и Хеннажем, в котором измерялось по 19 луч-сумм в 25 проекциях с погрешностью не хуже 1%, обрабатывались затем с помощью алгоритма, основанного на полиномиальных разложениях (вариант Кормака). Штриховой линией на рисунке изображен

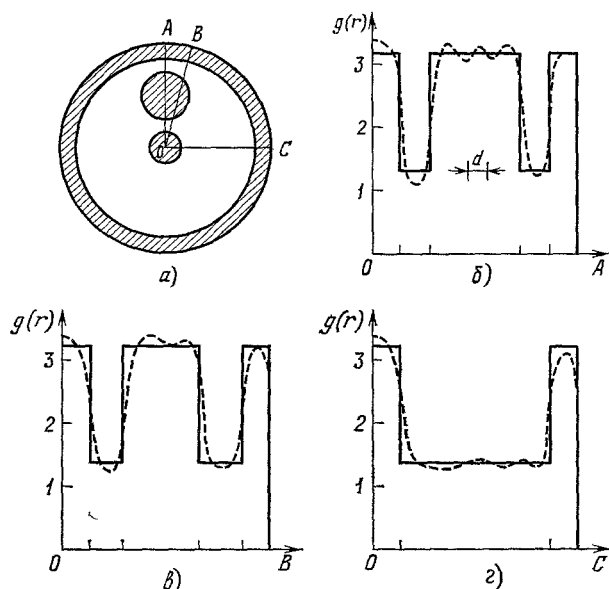


Рис. 6. Фантом Кормака ⁹² и типичные результаты его реконструкции в трех сечениях: по линиям OA , OB и OC .

Значения плотности в отн. ед., масштаб по оси абсцисс на рис б — г) по сравнению с рис а) удвоен d — ширина просвечивающего пучка

типичный результат восстановления. При математическом моделировании той же задачи по замкнутому циклу (расчет луч-сумм и проекций, ввод в данные случайной ошибки, решение обратной задачи) получаются результаты, практически не отличимые от приводимых на рис. 6; второстепенную роль до определенных пределов играет и учет ширины пучка. При этом можно, конечно, использовать различные алгоритмы восстановления и сопоставлять их друг с другом по различным характеристикам. Расчеты показывают, что существенного улучшения качества реконструкции можно добиться, привлекая дополнительную априорную информацию о структуре фантома (знакоположительность функции, существование разрывов производных ⁹⁴ и т. п.), т. е. применяя так называемую дескриптивную регуляризацию. Такого рода регуляризацию проще всего реализовать в рамках методов SIRT, MENT, а также Монте-Карло.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТОМОГРАФИЯ В ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ

В этом разделе мы не будем касаться приложений, относящихся к медицинской диагностике, и сосредоточим внимание на применениях ВТ к физическим и физико-техническим проблемам. Здесь, как и в медицине, получено немало важных и ярких результатов, хотя степень проникновения идей и методов ВТ в те или иные области физики различна. В одних случаях налицо уже вполне осязаемые плоды и быстро расширяющийся фронт исследований; в других — в основном еще только намечается постановка будущих экспериментов и проводятся пока лишь модельные расчеты.

а) Дефектоскопия

Роль ВТ как эффективного и весьма универсального метода неразрушающего контроля промышленных изделий, всевозможных материалов и даже пищевых продуктов с каждым годом становится все более значи-

тельной. Фактически любая радиационная (просвечивающая) методика нетомографического типа сталкивается с теми же трудностями, что и классическая медицинская рентгенодиагностика: наложением структурных деталей в теневом изображении, низким контрастом, недостаточной разрешающей способностью, фоновыми помехами, отсутствием приемлемой

количественной меры конфигурации, глубины залегания и свойств дефектов и т. п. Применение ВТ радикально меняет положение дел, хотя нельзя забывать, что томографическая дефектоскопия, помимо повышенной стоимости необходимого оборудования и непривычности для лиц, осуществляющих радиационный контроль, сопряжена с необходимостью преодоления и ряда трудностей принципиального порядка. В первую очередь — это корректировка данных измерений на рэлеевское и комптоновское рассеяние, а также на эффект «ужесточения луча»^{19,25}, обязанный фильтрующему воздействию многих исследуемых сред на фотоны низких энергий.

В работе⁹⁵ обсуждаются особенности γ -лучевого контроля с энергией просвечивающего излучения от 310 до 662 кэВ изделий из дерева, пластмассы, а также качества сварных швов, пустот и трещин в бетоне, радиотехнических блоков. В частности, томограмма ствола пихты диаметром порядка 40 см дает отчетливую картину колец роста, червоточин, внутренних уплотнений.

В ряде работ объектом исследования являются трудно доступные и вместе с тем наиболее уязвимые элементы конструкции ядерного реактора: тепловыделяющие элементы (твэлы), охладители и т. п.^{96–99}. На рис. 7 воспроизведены результаты томографирования гексагональной решетки из 37 твэлов, в которой недостает трех элементов, а в четырех имеются пустоты⁹⁷. Восстановление производилось с помощью алгоритма MENT по 3, 6 и 18 проекциям. Сделан вывод, что даже шести проекций оказалось бы достаточно для решения поставленной дефектоскопической задачи, а трех хватит для идентификации отсутствующего либо непригодного для эксплуатации твэла, если априори известно, что дефект имеется только в одном месте решетки. Обратим внимание, что в⁹⁸ аналогичная задача решается с привлечением фантома при просвечивании последнего пучком нейтронов с энергией 24 кэВ.

Освоен томографический контроль узлов реактивных двигателей и турбин¹⁹, неметаллических элементов конструкции вертолета¹⁰⁰, конденсаторов, рассчитанных на большие токи и напряжения¹⁰¹. Целый ряд очень интересных результатов получен в НИИ интроскопии (Москва)¹⁰². Так, в слое диэлектрического изделия диаметром 240 мм легко обнаруживается наличие медной проволоки диаметром 15 мкм; получается весьма четкая картина поперечного сечения трубы, которая, помимо тонкой наружной оболочки, содержит три ряда плотно упакованных металлических трубок, а во внутренней полости — спиральную конструкцию, насчитывающую шесть слоев металла с диэлектрической прослойкой.

Метод своего рода профилактической дефектоскопии предложили В. Д. Зимин и П. Г. Фрик¹⁰³, которые показали возможность восстановления сложного поля температур над фрагментом радиоэлектронной

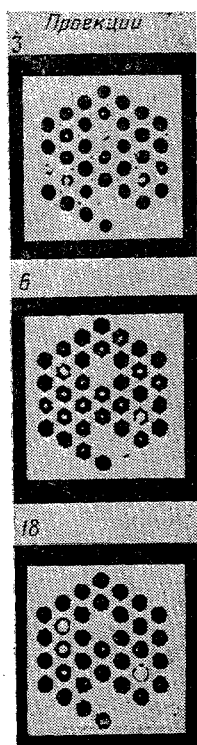


Рис. 7. Пример дефектоскопии гексагональной решетки твэлов⁹⁷. Три элемента отсутствуют, а четыре требуют замены. Восстановление выполнено по 3, 6 и 18 проекциям.

схемы (монтажной платы). Вряд ли каким-либо другим способом, кроме томографического, удалось бы заранее выявить элементы схемы, которым в первую очередь грозит опасность пострадать от перегрева.

Наконец, нельзя не упомянуть о широчайших диагностических возможностях ВТ, основанной на ЯМР-спектроскопии и позволяющей получать 2- и 3-мерные поля времен ядерной спиновой релаксации²⁷. Так, можно осуществлять неинвазивный локальный контроль качества масла, сыра, маргарина и других пищевых продуктов непосредственно в товарной форме, что делалось ранее лишь для большого объема продукта «в среднем»^{104,105}.

б) Микроскопия

Важность использования методов ВТ во многих микроскопических исследованиях определяется главным образом тем, что зачастую фокусировка, выбранного поперечного сечения малой толщины оказывается недостижимой, вследствие чего возникает малоинформативное наложение большого числа двумерных изображений одного или даже нескольких объ-

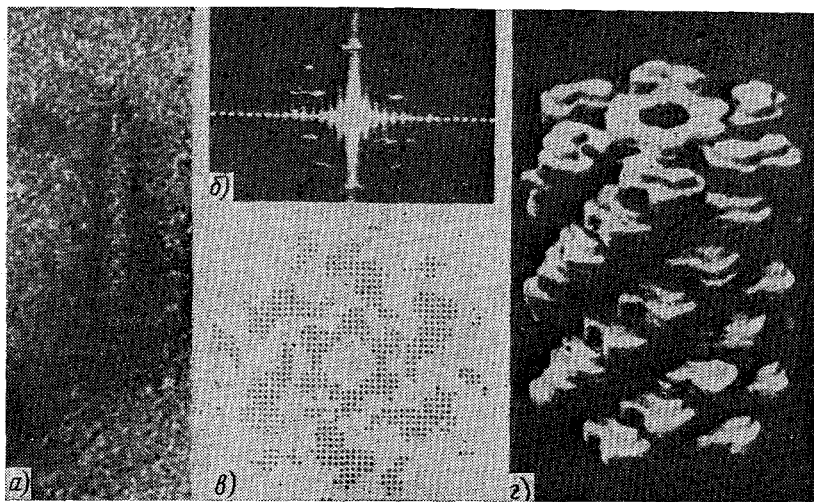


Рис. 8. Микрофотография бактериофага (а), его оптическая дифрактограмма (б), томограмма центрального сечения элементарного диска (в) и пространственная модель бактериофага (г)⁵³.

ектов. В оптической микроскопии такая ситуация обычно имеет место при анализе почти прозрачных образцов, когда фазовый рельеф приходится тем или иным способом преобразовывать в амплитудный^{20,106}. Это касается как простейших приемов реализации фазового контраста (метод темного поля, метод свилей), так и более универсальных методов, использующих четвертьволновую пластинку Цернике, анонтральные и интерференционные схемы¹⁰⁷. Заметим, что Берри и Гиббс¹⁰⁶, развивая методику интерпретации трехмерных фазовых объектов, предвосхитили многие результаты по разработке алгоритмов ВТ (фурье-синтез, использование инверсии Радона при учете и без учета свойств симметрии тела, расчет статистических структурных характеристик), которые затем часто фигурировали в более поздних публикациях без ссылок на¹⁰⁶.

О значении ВТ применительно к электронной микроскопии уже говорилось в разделе 3. Здесь, пожалуй, следует лишь добавить, что альтернативные способы исследования таких объектов, как биомолекулы и их ассоциации (вирусы, рибосомы, белковые кристаллы и т. п.) например, с помощью стереопар или нейтронографии, во всяком случае на сегодняшний день явно уступают по своим возможностям томографический электронной микроскопии. Действительно, стереомикроскопия не позволяет получить количественной оценки глубины и не устраняет взаимного затенения деталей объекта²⁰; что касается обратной структурной задачи рассеяния в нейтронографии, то в общем случае ее решение не единственно¹⁰⁸;

Укажем на некоторые интересные результаты, появившиеся уже после публикации известного обзора Б. К. Вайнштейна¹² по этой тематике. Группа японских авторов на фантомах и реальных ассоциатах (вирусах) детально исследовала возможности восстановления микрообъектов в ограниченном диапазоне углов сканирования ($2/5\pi$ вместо π) и по небольшому числу проекций¹⁰⁹. Применялись алгоритмы ART и MENT, причем предпочтение по качеству реконструкции отдано последнему. На рис. 8 воспроизводятся результаты томографического исследования бактериофага № 5 *Bacillus Megaterium* 337 по данным отечественной работы⁵³; при этом использовался один из вариантов алгоритма FBP и бралось 47×47 узлов квадратной сетки с размерным шагом дискретизации в 6 \AA .

Говоря о роли методов ВТ в электронной микроскопии, нельзя не отметить выдающихся достижений кембриджской группы исследователей, возглавляемой А. Клугом, в области анализа структуры важнейших нуклеопротеидных комплексов. Удачное сочетание техники оптической дифрактометрии с томографией позволило этим исследователям создать весьма универсальный, прецизионный метод для выявления деталей строения транспортных РНК, нуклеосом, входящих в них комплексов гистонов и т. д. Как известно, за эти работы А. Круг был удостоен в 1982 г. Нобелевской премии по химии (см. ¹⁸⁴).

в) Физика твердого тела

Результаты реальных и даже модельных экспериментов по физике твердого тела с привлечением методов ВТ пока еще довольно скромны и немногочисленны, но перспективы в этой области исследований являются весьма многообещающими. С известной долей условности соответствующие работы можно рассматривать как томографическую дефектоскопию высшего уровня сложности, ибо здесь речь идет об идентификации тонких «дефектов» типа усталостных микротрещин, экструзий и интрузий на свободной поверхности остаточных микронапряжений, слабых вариаций плотности или электросопротивления за счет изменения числа дислокаций и т. п.

В уже упоминавшейся работе Каньяссо с соавторами¹⁰⁰ томографирование детали винта вертолета (композиция стекла и эпоксидной резины) позволило четко выявить положение и размеры усталостных микротрещин, а также градиенты плотности, обусловленные процессом полимеризации. Анализ остаточных напряжений можно проводить, привлекая методы как ультразвуковой ВТ²¹, так и голографической томоинтерферометрии⁶⁸. Оригинальные томографические варианты теневых и интерференционных методов для восстановления температурных полей и термоупругих напряжений разработаны в отделе физики полимеров УНЦ АН СССР¹¹¹⁻¹¹³.

Для задач физики твердого тела весьма перспективно сочетание ВТ с современной техникой ЭПР и ЯМР. Хох и Дэй¹¹⁴ с помощью ЭПР-ин-

троскопии (вариант Лаутербура, алгоритм ART) измерили пространственное распределение примеси однозамещенного азота в решетке кристалла алмаза, показав при этом, что пространственное разрешение может достигать нескольких микронов (рис. 9). Мэнсфилд и Греннел¹¹⁵ предложили эффективный метод, позволяющий подавлять дипольную ширину линий ЯМР в твердом теле и сохранять при этом достаточно высокий градиент магнитного поля. Метод проверен в эксперименте с твердой камфорой. Как указывается в ¹¹⁵, если бы градиент поля удалось повысить по срав-

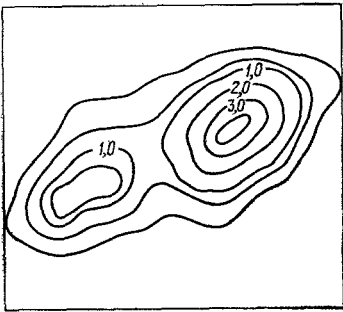


Рис. 9. Изолинии распределения примеси азота в решетке кристаллов двух алмазов ¹¹⁴; томографическая ЭПР-интроскопия.

Расстояния между центрами алмазов и их диаметры $\sim 2,5$ мм, пространственное разрешение ~ 300 нм

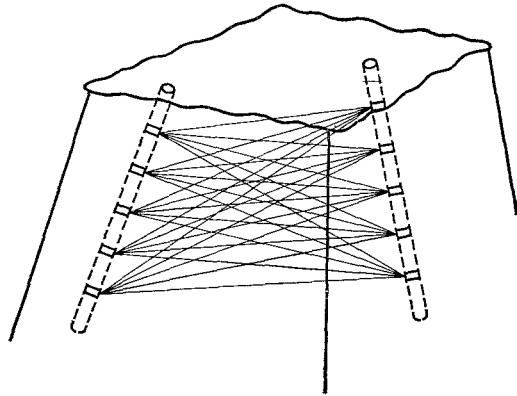


Рис. 10. Схема геотографии с двумя наклонными скважинами. В одной из скважин — источники, в другой — детекторы.

нению с уже достигнутым еще на 4—5 порядков, то открылась бы уникальная возможность визуализировать кристаллическую решетку, выявляя вакансии, тонкую структуру дислокаций и другие детали. Продвижение экспериментаторов в этом направлении продолжается.

г) Геофизика

Как и в физике твердого тела, количество высказанных заманчивых идей и проектов, связанных с использованием ВТ, здесь пока заметно превышает число проведенных реальных исследований. Говоря о геотографии, следует отметить ряд ее специфических черт. Это, прежде всего, большие размеры исследуемых участков и расстояний d от источника до детектора — обычно десятки или сотни метров; использование для просвечивания радиоволн с длиной волны λ порядка нескольких метров (реже — дециметровых и сантиметровых), соответствующее таким значениям λ пространственное разрешение. Возможно применение и сейсмического просвечивания. Далее, это — использование скважин глубиной обычно в несколько десятков метров, в которых располагаются источники и детекторы. Нередко таких скважин всего две, причем они могут быть скошены одна по отношению к другой. Таким образом, сканирование по углу сильно ограничено, и даже в приближении геометрической оптики может не существовать выделенной плоскости, в которой восстанавливается изображение (рис. 10). Наконец, для оправдания допущения о прямолинейном распространении волн согласно ¹¹⁶ необходимо, чтобы: а) $\pi d \gg \lambda$, б)

$\lambda \delta \gg \lambda$ (δ — толщина скин-слоя в среде), ν) показатель преломления среды менялся достаточно плавно.

Приведем несколько примеров геотомографических исследований. В работе ¹¹⁷ изучался ряд тест-объектов, отрабатывался алгоритм восстановления (вариант ART), а затем полученные результаты применялись для интерпретации эксперимента, в котором исследовался характер изменения пород на участке проектируемой линии метрополитена. Скважины были наклонными и имели глубину от 46 до 79 м; частота зондирующих радиоволн равнялась 50 МГц. В ¹¹⁸ с использованием той же рабочей частоты изучались распределения электропроводности в процессе подземной газификации угля, причем мог контролироваться фронт горения. Предпочтение при обработке данных было отдано алгоритмам ART и SIRT. Среди других возможных применений, обсуждаемых в литературе, отметим ¹¹⁷⁻¹²⁰: выявление и оценку запасов нефти при вторичной отработке месторождений, оконтуривание залежей солей, картирование в шахтах при поиске выклинившихся и утерянных залежей, обследование хранилищ отработанного ядерного топлива и др. Можно также ожидать, что методы ВТ кардинально изменят традиционную практику археологических раскопок.

Обсуждая задачи геотомографии, нельзя не отметить их идейную близость к обратным кинематическим задачам взрывной сейсмологии ¹²¹. Общая постановка последних такова: на некоторой поверхности наблюдений x, y дана система годографов различных типов сейсмических волн (отраженных, преломленных, дифрагированных, обменных и т. п.) от серии известных источников; отыскивается закон распределения скоростей соответствующих волн в пространстве x, y, z . Ряд исследований последних лет показывает, что методы глубинного сейсмического зондирования и методы ВТ во многом родственны и в своем развитии удачно дополняют друг друга ⁵⁷.

д) Физика атмосферы Земли и планет

Если исследования земной атмосферы выделить из общего круга геофизических задач, то сегодняшнюю стадию проникновения в арсенал этих исследований идей и методов ВТ, по-видимому, следует считать лишь самой начальной. Тем не менее уже целый ряд томографических проблем атмосферной физики ставится достаточно конкретно.

В работах ¹²²⁻¹²⁴ обсуждается вопрос о восстановлении полей концентраций загрязняющих примесей промышленного происхождения в объемах атмосферы, имеющих характерный размер $\sim 10-20$ км. По сравнению с лидарными и другими дистанционными методами анализа загрязнений ¹²⁵ техника ВТ позволяет сразу строить послойные карты распределения таких компонентов, как NO_2 , NO , CO , O_3 , SO_2 , C_2H_4 и т. п. При этом требования к мощности используемых лазеров существенно снижаются, поскольку для атмосферного томографа отношение сигнал/шум намного выше, чем для лидара.

Правда, авторы упомянутых работ пока ограничились лишь математическим моделированием задач, но теоретически вопрос исследован весьма обстоятельно: варьировались отношение сигнал/шум, мощность лазера (непрерывный и импульсный режимы), размеры и геометрия объектов, способы снятия проекций и их число и т. п. С алгоритмической точки зрения предпочтение отдано обратному проецированию с фильтром Шепша — Логана. Экспериментальная схема, предлагаемая в ¹²⁴, выглядит во всех отношениях более конструктивной, нежели в ¹²²: в ней используется один лазер, система зеркал, обеспечивающих получение всерных пучков, и набор детекторов; зеркала и детекторы располагаются по окружности в выбранной плоскости на нужной высоте, а сам лазер может, вообще говоря, находиться на земле (рис. 11). Вариант FBR с применением всерных проекций разработан Херманом и Напарстеком ¹²⁶.

Интересная разновидность задач ВТ возникает в физике ионосферы при исследовании распространения коротких волн вокруг Земли ¹²⁷. Такие задачи вызваны к жизни существенным прогрессом техники наклонного и возвратно-наклонного зондирования ионосферы ¹²⁸. Результаты работы ¹²⁷ можно рассматривать как расширение инверсии Радона на случай, когда искомая четная непрерывная функция задана на сфере, а измеряются ее интегралы по большим кругам. Предложен и способ регуляризации соответствующей некорректной обратной задачи. Реальный алгоритм сос-

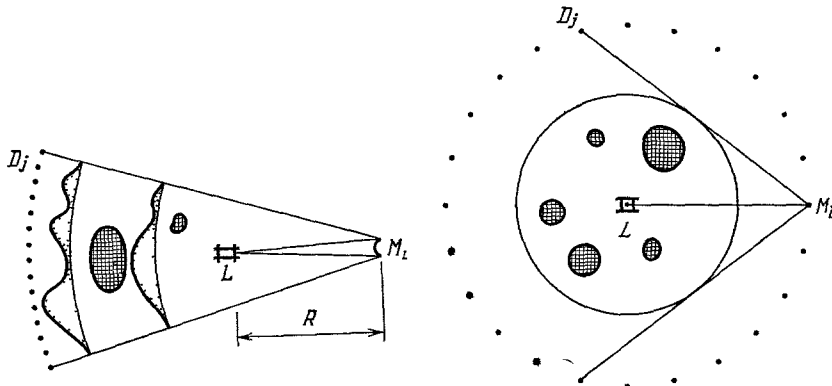


Рис. 11. Возможный вариант атмосферной ВТ с просвечиванием исследуемой области веерным пучком лучей от одного лазера L ¹²⁴.

Системы зеркал M_i и детекторов D_j расположены по окружности. Области атмосферных загрязнений заштрихованы. Также приведены два распределения интенсивности лазерного пучка

тоит в использовании усеченного разложения правой части по собственным функциям оператора задачи (ими являются функции Лапласа) ¹²⁹.

Авторы работы ¹³⁰ изучали структуру температурных неоднородностей земной атмосферы по наблюдениям рефракции света с орбитальной станции «Салют-6». При этом был использован один из вариантов метода расфокусированных диафрагм ¹³¹, т. е., по существу, выполнялись теневые измерения, допускающие чисто томографическую обработку данных.

В качестве примеров исследований структуры атмосферы планет солнечной системы сошлемся на работы ^{132, 133}. В обоих случаях речь идет об атмосфере Юпитера, причем авторы ¹³² существенным образом используют допущение о центральной симметрии задачи, а в ¹³³ развит достаточно общий метод обработки данных радиопросвечивания атмосферы, позволяющий учитывать рефракцию, горизонтальные градиенты показателя преломления и «сплюснутую» форму планеты. В математическом плане обратная задача сводится к решению системы нелинейных уравнений интегральной геометрии.

е) Аэро- и гидродинамика

Особенность применения методов ВТ в задачах динамики жидкости, газа и плазмы, обсуждаемых в этом и следующем пунктах, состоит в том, что довольно часто удается избежать общей двумерной или, тем более, трехмерной постановки. В тех приложениях, о которых шла речь выше, возможности простой параметризации искомой функции либо прямого использования свойств симметрии объекта были, как правило, очень ограниченными. Напротив, при описании потоков жидкости и газа, а также многих плазменных систем введение феноменологических параметров и разно-

го рода безразмерных критериальных величин, характеризующих автомодельность задачи, свойства подобия, является традиционным. В связи с этим весьма важную роль приобретают инверсия Абеля, ее обобщения на случай эллиптических изолиний, покоординатное расщепление, учет плоскостей симметрии восстанавливаемого поля и т. п.²⁴⁻²⁶.

Тем не менее и в этой широкой области исследования по мере усложнения изучаемых объектов значение общих методов ВТ, применимых к асимметричным полям параметров (плотностей, температур, скоростей потока и т. п.), становится определяющим. О примерах такого рода и пойдет речь ниже.

Первые успешные исследования пространственных течений сложной формы были выполнены советскими авторами^{134, 135}. Хотя применявшиеся в этих ранних работах алгоритмы (они подробно описаны в монографии¹³⁶) с позиций сегодняшнего уровня развития расчетных методов ВТ вряд ли стоило бы рекомендовать экспериментаторам, в целом они позволяли решать поставленные конкретные задачи, в основном связанные с обтеканием осесимметричных тел под углами атаки.

Высокую информативность методов ВТ в аэродинамике продемонстрировал Коллинз с сотрудниками¹³⁷⁻¹³⁹. Эксперименты проводились методами импульсной голографической интерферометрии; изучались характеристики наклонной воздушной струи и существенно асимметричные поля плотности вблизи конуса при разных углах атаки, а также в трансзвуковом потоке, обтекающем крыло модели самолета. Близкой по постановке является и работа¹⁴⁰ (конус под углом атаки в сверхзвуковой аэродинамической трубе). При этом использовались различные алгоритмы ВТ: в группе Коллинза — полиномиальные разложения Мальдонадо, в¹⁴⁰ — фурье-синтез.

Методы ВТ успешно применялись рядом авторов при исследовании структуры конвекционных потоков жидкости и газа. Вест с соавторами^{141, 142}, используя голографическую интерферометрию с фазовой решеткой, восстанавливал температурные поля сложной конфигурации в воде над нагретыми телами с погрешностью не хуже $\pm 1^\circ\text{C}$. В. Д. Зимин и П. Г. Фрик¹⁰³ теневыми методами исследовали оптическую неоднородность жидкости, порождаемую температурным полем конвективной турбулентной струи, вытекающей из сопла. Фитцджеральд и Херстер¹⁴³ применили голографическую интерферометрию с компенсацией фазовых искажений для изучения корреляции температурного распределения и давления в лампе, наполненной аргоном. Позднее группа японских авторов осуществила эксперимент со сходным объектом (автомобильная лампочка) на голографической установке с углом обзора, близким к 180° ¹⁴⁴. Восстановление поля показателя преломления производилось с помощью алгоритма ART, более чем по 30 проекциям; исследовался также воздушный конвекционный поток над нагретой вольфрамовой проволокой. Другие примеры, связанные с изучением тепло- и массопереноса, приводятся в монографии⁶⁸. Говоря об этих экспериментах, уместно подчеркнуть их принципиальную значимость для проверки выводов и дальнейшего развития современной теории стохастических автоколебаний, привлекающей понятие странного аттрактора^{145, 146}.

В задачах, связанных с динамикой жидкости и газа, методы ВТ могут сочетаться, конечно, не только с интерферометрической техникой измерений. Так, в исследованиях французских авторов по физике горения¹⁴⁷ восстанавливались поля коэффициентов испускания турбулентного водородно-кислородного пламени на основе чисто эмиссионных данных. В работе¹⁴⁸ предложена и экспериментально опробована методика определения локальных значений излучательной способности среды, облучаемой

пучком дейтронов (энергия ~ 35 Мэв) от линейного ускорителя. Эта методика, основанная на алгоритме MENT, важна как с точки зрения задач дефектоскопии ряда материалов, так и для решения многих диагностических задач динамики разреженного газа, где широко используется техника электронно-пучкового возбуждения выделенной области течения¹⁴⁹.

Работа¹⁵⁰ посвящена применению томографических методов к лазерной абсорбционной диагностике турбулентных струй. На рис. 12, а изображена схема просвечивания объекта излучением одного лазера, позволяющая получать 5 проекций с частотой следования импульсов до 20 кГц. Тем самым восстанавливается пространственно-временная картина, характери-

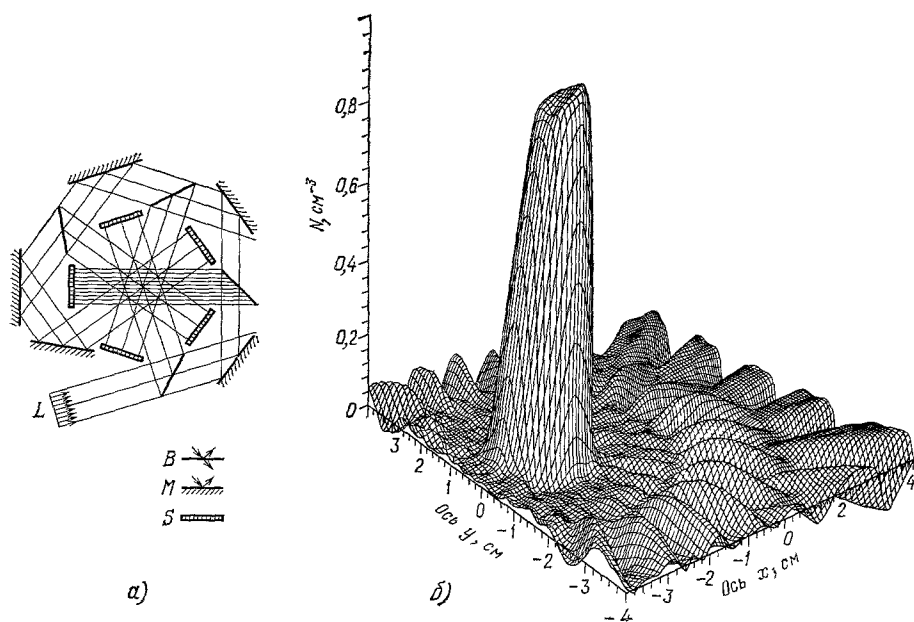


Рис. 12. а) Абсорбционная схема ВТ для исследования нестационарных струйных течений¹⁵⁰. Используется один лазер с большой частотой повторения импульсов (B — полупрозрачные зеркала, M — зеркала, S — детекторы). б) Результаты восстановления поля концентрации поглощающего компонента в одном из сечений.

зующая структуру потока; пример одного из «срезов» такой картины, относящейся к истечению смеси 10% CH_4 — 90% Ar , дан на рис. 12, б. При обработке данных по малому числу проекций (по 100 луч-сумм в каждой) авторы¹⁵⁰ после тщательного предварительного моделирования задачи отдали предпочтение модифицированному алгоритму обратного проецирования с фильтром Шенна — Логана.

Мы не останавливаемся подробно на возможностях сочетания техники ЯМР-спектроскопии и ВТ в применении к восстановлению полей скорости потока жидкости в канале; некоторые примеры такого рода приводятся в обзоре²⁷. Укажем здесь лишь на перспективные исследования Лаутербурга с соавторами, в которых восстанавливались «срезы» пульсирующих потоков жидкости внутри стеклянной трубки, помещенной в неподвижную жидкость той же природы¹⁵¹, а также изучалась проблема реконструкции по проекциям векторных (скоростных) полей¹⁵².

ж) Физика плазмы

Во многих задачах диагностики плазмы процедура получения локальных характеристик должна сочетаться с хорошим временным разрешением, учетом неравновесности, реабсорбции излучения, наличия внутри исследуемого объема сложных по структуре потоков вещества и тепла, присутствия электрических и магнитных полей и т. п. Сканирование по углу и измерение набора проекций часто крайне затруднено (особенно для замкнутых систем, используемых в термоядерных исследованиях, объектов, изучаемых в астрофизике и др.). Все эти факторы являются серьезным препятствием для широкого использования методов ВТ в физике плазмы; ими же во многом объясняется стойкая приверженность ряда специалистов по диагностике плазмы к простым моделям, предполагающим параметризацию искомых распределений, абелеву инверсию или ее простейшие обобщения.

Тем не менее число примеров, убедительно иллюстрирующих возможности томографического исследования асимметричной плазмы, уже сегодня довольно велико. Укажем на некоторые из них.

В нескольких работах, относящихся к физике *низкотемпературной плазмы*, изучались дуговые разряды, осевая симметрия которых была заметно нарушена наложением внешнего магнитного поля или взаимодействием с потоком набегающего газа. По-видимому, первой в этом направлении была работа ¹⁵³, где в двух сечениях с семи направлений восстанавливалось двумерное распределение коэффициента испускания в линии $\text{Ag } \lambda = 696,5 \text{ нм}$ для дугового разряда в магнитном поле при давлении 1,1 атм. Себальд ¹⁵⁴ не только накладывал на дугу магнитное поле, но и помещал ее в азотную, малотурбулентную аэродинамическую трубу. Находилось поле локально-равновесных температур, а также поле скоростей потока нагретого газа, пронизывавшего ядро дуги. Плазма обладала плоскостью симметрии, и ошибка восстановления коэффициента испускания по тем же семи проекциям, что и в ¹⁵³, оценена в 3%. В работе Плессла ¹⁵⁵ магнитным полем приводилась во вращение сама дуга, что в предположении стационарности разряда во вращающейся системе отсчета позволяло сравнительно просто набирать необходимое число проекций. Двумерное поле температуры газа определялось по линии H_β с учетом отклонения состояния плазмы от локального термодинамического равновесия; при этом выявлена сложная структура потока, содержавшего несколько вихрей и точек торможения. Заметим, что во всех упомянутых работах использовался алгоритм восстановления, основанный на полиномиальных разложениях Мальдонадо.

В серии работ Т. С. Мельниковой и авторов данного обзора ^{48, 51, 156} изучалась нестационарная турбулентная плазма и было зафиксировано большое разнообразие форм плазменного шнура в продольном магнитном поле. На рис. 13, а изображена схема применявшегося при этом 6-канального томографа, в котором с помощью короткофокусных линз $L_1 - L_6$ излучение из определенного сечения плазмы фокусируется на поверхности световодов $P_1 - P_6$. Противоположные концы световодов собраны в блок и картина с него на выделенной интерференционным светофильтром (F) длине волны регистрируется скоростной кинокамерой (K). На рис. 13, б показан пример аксонометрической проекции поля восстановленных температур в некотором сечении шнура. При восстановлении использовался алгоритм регуляризованной инверсии Радона.

Несмотря на значительные технические трудности получения за малый промежуток времени нескольких угловых проекций, методы ВТ проникли и в область физики *высокотемпературной плазмы*. Так, в работе ¹⁵⁷ для

целей локальных фазовых измерений плотности плазмы в тороидальной установке «Токамак-3» был разработан алгоритм восстановления, аналогичный предложенному ранее А. Кормаком³¹ для медицинской рентгенодиагностики. В лаборатории им. Лоуренса (Беркли) на плазменной установке «Тормак-4» с помощью световодов удалось осуществить скоростную полихроматическую регистрацию четырех проекций выбранного сечения, а затем, применяя алгоритм ART, восстановить локальные распределения

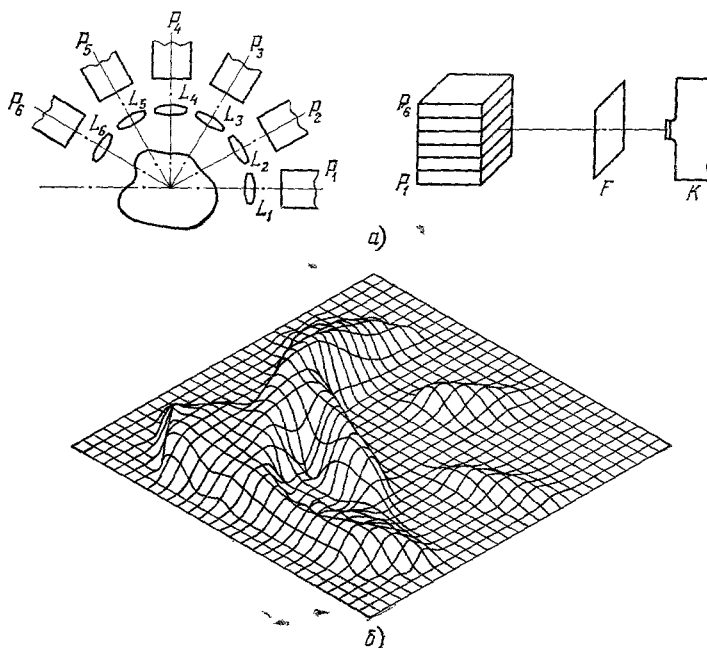


Рис. 13. а) Схема 6-канального томографа для диагностики нестационарной низкотемпературной плазмы по эмиссионным спектрам¹⁵⁶; б) пример восстановления поля температур турбулентной плазмы дугового разряда ($T_{\max} = 10\,500\text{ K}$).

профилей спектральных линий водорода и гелия, позволявших далее реконструировать поля плотности и температуры плазмы¹⁵⁸. Авторы работы¹⁵⁹ на токамаке «Алкатор-А» по аналогии с уже упомянутым экспериментом Плессла¹⁵⁵ получали до 18 вверных проекций рентгеновского излучения плазмы, вращавшейся с периодом $T = 0,456\text{ мс}$.

Томографическими исследованиями, хотя и с некоторыми оговорками, можно считать диагностические эксперименты на установках «Пульсатор»¹⁶⁰ и «Токамак-10»¹⁶¹. Поскольку получить больше двух проекций в этих работах не удавалось, авторы вынуждены были прибегать к определенной параметризации задачи. Последняя соответствовала в случае¹⁶⁰ наложению двух систем неконцентрических круговых изолиний, а в случае¹⁶¹ — изолиниям типа овалов.

Возможности томографической диагностики в последнее время были продемонстрированы не только на замкнутых магнитных системах типа токамака или стелларатора, но и на установках с лазерным нагревом мишени. Так, на известной установке «Циклоп» (Ливерморская лаборатория, США) при исследовании двустороннего лазерного обжата стеклянной микросферы диаметром $\sim 100\text{ мкм}$, наполненной дейтерий-третиевой смесью, был использован метод мультиплексной томографии с зонной пластиной¹⁶². Регистрировалось возникающее при нагреве мишени рентгеновское излучение и достигнуто пространственное разрешение порядка 8 мкм .

В работе ¹⁶³ осуществлялось трехмерное томографическое восстановление функции источника по четырем двумерным проекциям, фиксируемым системой камер-обскур. При обработке эксперимента использовалась специальная (трехмерная) версия алгоритма MENT, предварительно тщательно изученная на тестовых объектах ¹⁶⁴. Показано, что если первоначальный диаметр сферической мишени составлял 200 мкм, то после лазерного двустороннего обжатия получался сплюснутый эллипсоид вращения со средним диаметром ~ 60 мкм. Выявлен также ряд интересных деталей процесса имплозии, в частности наличие интенсивно излучающего в рентгеновском спектре «сателлита», обязанного своим происхождением остаточному фрагменту стеклянной оболочки.

Вильямсон и Кларк ¹⁶⁵ предложили использовать формулы трехмерной инверсии Радона для восстановления асимметричной функции распределения электронов плазмы по вектору скорости. При этом предлагается регистрировать проекции, состоящие из спектров томсоновского рассеяния. При нахождении функции распределения учитываются релятивистские поправки и обосновывается применимость метода для целей диагностики плазмы в задачах управляемого термоядерного синтеза. Модельные расчеты показывают возможность вполне удовлетворительного восстановления функции распределения всего по четырем проекциям.

Если говорить об использовании методов ВТ в задачах физики *космической плазмы*, то в большинстве случаев исследователи вынуждены прибегать к довольно жестким априорным ограничениям и известны лишь отдельные попытки восстановления характеристик действительно асимметричных объектов. Например, при изучении плазмы солнечной короны стандартными являются предположения о центральной либо осевой симметрии ¹⁶⁶, о возможности описания распределения электронной плотности функцией с небольшим числом параметров ¹⁶⁷, о корректности расчета трехмерного распределения магнитного поля по двумерным (фотосферным) данным с привлечением уравнения Лапласа ¹⁶⁸ и т. д. Недавно Альтишулер с соавторами попытался осуществить томографический эксперимент по восстановлению поля электронной плотности короны в достаточно общей постановке ⁷. Однако при этом приходилось обрабатывать проекции, получаемые последовательно, за полупериод обращения Солнца вокруг своей оси, т. е. в течение 14 суток. Таким образом, использовалось достаточно серьезное допущение о постоянстве параметров плазмы за указанное время.

По своей математической постановке чисто томографическими являются уже упоминавшиеся работы Брейсуэлла (их подробный обзор содержится в ⁷), в которых исследовалось СВЧ излучение солнечной плазмы, фиксируемое по методу полосовых сумм. Сюда же примыкают работы по радиолокации Луны ¹⁶⁹ и по интерпретации данных, полученных на радиогелиографе ¹⁷⁰.

Несколько специфичным, но, несомненно, перспективным является метод исследования трехмерной пространственно неоднородной структуры планетарной туманности по плоской картине ее изофот ¹⁷¹. По сравнению с более ранними расчетами для планетарной туманности NGC 7662, в которых последняя считалась однородной по плотности, было достигнуто существенное улучшение результатов в рамках модели переменной плотности.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие ВТ продолжается по многим направлениям и охватывает все новые области физики и техники. Отчетливо прослеживается тенденция повышения информативности каждой из луч-сумм и каждой из проекций. Это

достигается прежде всего тем, что фиксируемые интегральные по направлению наблюдения значения становятся не просто числами, а представляют собой функции, зависящие от частоты, поляризационных характеристик, релаксационных параметров и т. п. Благодаря этому могут восстанавливаться двумерные и трехмерные поля различных величин, описывающих свойства неоднородного объекта. Одним из примеров является так называемая томохимия¹⁷², открывающая возможность определять состав вещества в каждой точке объекта. Весьма перспективным в этом плане представляется также сочетание принципов ВТ со спектроскопией рассеяния¹⁷³. Высокой степенью информативности отличаются и новые варианты томографической ЯМР-интроскопии¹⁷⁴.

Актуальной остается проблема регистрации такого числа проекций, которое необходимо для хорошего восстановления структуры объекта. Как видно из нескольких приведенных выше примеров, здесь значительный эффект дает использование методов голографии (фазовые решетки, конические отражатели с углом обзора, близким к 180° , и т. п.), а также многолучевых лазерных схем с большой частотой повторения импульса. Полезным, по-видимому, может оказаться и использование явления обращения волнового фронта. В рентгеновской ВТ продолжают конструироваться все более сложные установки с большим числом источников и детекторов (динамическая томография сердца)¹⁷⁵. Изучаются и чисто математические аспекты проблемы реконструкции изображения по ограниченному числу проекций.

Весьма значительные резервы заключены в оптических способах реализации процесса восстановления томографического изображения. В частности, очень заманчивым является вариант многократной обработки изображения, выполняемый аналоговыми методами, когда сначала достигается высокое разрешение, а затем высокий контраст (большое отношение сигнал/шум)⁶. Новые интересные возможности содержат методы кодированной апертуры. Чисто физический путь значительного увеличения контраста изображения — протонную томографию — предложили Кормак и Колер¹⁷⁶. В медико-биологических приложениях это направление исследований представляет особую ценность, так как позволяет резко уменьшить общую дозировку облучения объекта.

Среди новых многообещающих идей и направлений развития ВТ уместно упомянуть томосинтез с фильтрацией двумерных проекций объекта по высоким и низким частотам (при переходе в фурье-область) — так называемую эктомографию¹⁷⁷. Шлиферштейн и Чейн¹⁷⁸ недавно приступили к разработке важного общего метода анализа, позволяющего указать, с какой степенью точности для заданного алгоритма реконструкции восстановленная структура повторяет оригинал. Ряд интересных результатов на этом пути уже получен, причем выявлена принципиальная роль алгоритмов статистического моделирования.

Совершенствование техники формирования широких ленточных пучков от лазеров, работающих как в импульсном, так и в непрерывном режимах, открыло новые возможности для развития резонансно-флуоресцентной томографии с высоким разрешением во времени¹⁸⁵, а также интерференционно-голографических версий, позволяющих производить восстановление двумерных полей вектора скорости жидкости, например, в конвекционных (бенаровских) потоках¹⁸⁶.

Новым перспективным направлением исследований, делающим, правда, пока лишь самые первые шаги, следует считать и так называемую инверсную томографию^{187, 188}. Задачей последней является мультиплексный синтез в реальном времени трехмерного изображения объекта по набору конечного числа томографических «срезов».

Быстрый и непрерывный прогресс как в технике, так и в расчетных методах ВТ не оставляет сомнений в том, что томографическое исследование разнообразных физических объектов еще не раз приведет к новым экспериментальным результатам фундаментального характера.

Институт теоретической и прикладной механики
СО АН СССР, Новосибирск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Cormack A. M.— Science, 1980, v. 209, p. 1482.
2. Hounsfield G. N.— Science, 1980, v. 210, p. 22.
3. Mach L.— Wien. Akad. Ber. Math.— Phys., 1896, v. 105, p. 605.
4. Bracewell R. N.— Austr. J. Phys., 1956, v. 9, p. 198.
5. Herman G. T. Image Reconstruction from Projections: the Fundamentals of Computerized Tomography.— Acad. Press, 1980.
6. Barrett H. H., Swindell W. Radiological Imaging. The Theory of Image Formation, Detection and Processing — Acad. Press, 1981.
7. Image Reconstruction from Projections. Implementation and Applications/Ed. G. T. Herman; Topics in Applied Physics. V. 32.— Springer-Verlag, 1979.
8. Gordon R., Herman G. T., Johnson S. A.— Sci American, 1975, v. 233, № 4, p. 56.
9. Swindell W., Barrett H.— Phys. Today, 1977, v. 30, № 12, p. 32.
10. Ter-Pogossian M. M., Raichle M. E., Sobel B. E.— Sci. American, 1980, v. 243, № 4, p. 141.
11. Redington R., Berninger W.— Phys. Today, 1981, v. 34, № 8, p. 36.
12. Вайнштейн Б. К.— УФН, 1973, т. 109, с. 455.
13. Budinger T. F., Gullberg G. T.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1974, v. NS-21, p. 2.
14. Brooks R. A., Di Chiro G.— Phys. Med. Biol., 1976, v. 21, p. 689.
15. Васильева Э. Ю., Никешилев В. Н., Сеницын Р. В.— В кн. Медицинская радиационная техника.— М., 1978.— С. 77.
16. Kowalski G., Wagner W.— Optica Acta, 1977, v. 24, p. 327.
17. Mersereau R. M., Oppenheim A. V.— Proc. IEEE, 1974, v. 62, p. 1319.
18. Horn B. K. P.— Ibid., 1978, v. 66, p. 27.
19. Scudder H. J.— Ibid., p. 628.
20. Mueller R. K., Kaveh M., Wade G.— Ibid., 1979, v. 67, p. 567.
21. Kak A. C.— Ibid., p. 1245.
22. Казанцев И. Г.— В кн. Математические и технические проблемы обработки изображений.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980.— С. 37.
23. Ерохин В. А., Шнейдеров В. С. Трехмерная реконструкция (машинная томография). Моделирование на ЭВМ: Препринт № 23.— Ленинград, НИВЦ, 1981.
24. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.— В кн. Свойства низкотемпературной плазмы и методы ее диагностики.— Новосибирск: Наука, 1977.— С. 138.
25. Преображенский Н. Г.— В кн. Инверсия Абеля и ее обобщения.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978.— С. 6.
26. Пикалов В. В.— Ibid.— С. 25.
27. Адаркин В. А., Скроцкий Г. В., Сороко Л. М., Федин Э. И.— УФН, 1981, т. 135, с. 285.
28. Nedyalkov I. P.— DAN Bulgaria, 1981, v. 34(4), p. 493.
29. Bosage E. M.— French Patent 536464.— Paris, France, 1921.
30. Гладыш Б. Томография в клинической практике/Пер. с польского.— Варшава, 1965.
31. Cormack A. M.— J. Appl. Phys., 1963, v. 34, p. 2722; 1964, v. 35, p. 2908.
32. Kuhl D. E., Edwards R. Q.— Radiology, 1963, v. 80, p. 653.
33. Oldendorf W. H.— IRE Trans. Bio-Med. Electron., 1961, v. BME-8, p. 68.
34. Hounsfield G. N.— Brit. J. Radiol., 1973, v. 46, p. 1016.
35. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Сер. «Обобщенные функции».— М.: Физматгиз, 1962.— Вып. 5.
36. Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения.— М.: Госатомиздат, 1963.
37. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов.— М.: Атомиздат, 1960.

38. El-Hanany U., Rakavy G., Waschal J., Yatsiv S.— *Phys. Rev.*, 1965, v. 137, p. A 1548.
39. Преображенский Н. Г. Спектроскопия оптически плотной плазмы.— Новосибирск: Наука, 1971.
40. Васильева И. А., Депутатова Л. В., Нефедов А. П.— В кн. Диагностика плазмы по контурам спектральных линий.— Петрозаводск, 1977.— С. 178.
41. Birkeland J., Oss J.— *Appl. Optics*, 1968, v. 7, p. 1635.
42. Преображенский Н. Г.— *Nukleonika*, 1975, v. 20, p. 429.
43. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
44. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.— *Физ. горения и взрыва*, 1974, т. 10, с. 923.
45. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.— *Инж.-физ. ж.*, 1977, т. 33, с. 1042.
46. Piskalov V. V., Преображенский Н. Г.— In: *Proc. of XIII ICPIG. Contribut. Papers.*— Berlin, 1977.— v. 1, p. 201.
47. Пикалов В. В., Федосов В. П.— *Цит. в*²⁵ *сб.*— С. 190.
48. Мельникова Т. С., Пикалов В. В.— *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук*, 1978, № 13, с. 25.
49. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.— *Опт. и спектр.*, 1979, т. 46, с. 194.
50. Piskalov V. V., Преображенский Н. Г.— *J. de Phys.*, 1979, t. 40, p. C7-329.
51. Мельникова Т. С., Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.— *Опт. и спектр.*, 1980, т. 48, с. 474.
52. Silver E., Roney W.— *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1980, v. PS-8, p. 231.
53. Михайлов А. М., Беляева Н. Н.— *ДАН СССР*, 1980, т. 250, с. 222.
54. Crowther R. A., De Rosier D. J., Klug A.— *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1970, v. 317, p. 319.
55. Crowther R. A.— *Phil. Trans. Ser. B*, 1971, v. 261, p. 221.
56. Radon J.— *Ber. Verh. Sachs. Akad.*, 1917, Bd. 69, S. 262.
57. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа.— М.: Наука, 1980.
58. Vest G. M.— *Appl. Opt.*, 1975, v. 14, p. 1601.
59. Зимин В. Д., Фрик П. Г.— *ЖТФ*, 1976, т. 46, с. 408.
60. Maquyama Y., Iwata K., Nagata R.— *Japan. J. Appl. Phys.*, 1976, v. 15, p. 1921.
61. Howes W. L., Buchele D. R.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1966, v. 56, p. 1517.
62. Anderson E. E., Stevenson W. H., Viskanta R.— *Appl. Opt.*, 1975, v. 14, p. 185.
63. Greenleaf J. F., Johnson S. A.— *Ultrasound Med. Biol.*, 1978, v. 3, p. 327.
64. Schomberg H.— *J. Phys. Ser. D*, 1978, v. 11, p. L 181.
65. Cha S., Vest C. M.— *Opt. Lett.*, 1979, v. 4, p. 311.
66. Cha S., Vest C. M.— *Appl. Opt.*, 1981, v. 20, p. 2787.
67. Johnson S. A., Greenleaf J. F., Samaya W. F. et al.— In: 1975 *Ultrasonic Symp. Proc. (IEEE Cat. № 75, CHO 994-4SU)*.—1975.— P. 46.
68. Вест Ч. Голографическая интерферометрия.— М.: Мир, 1982.
69. Татарский В. И. Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной среде.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.
70. Мухометов Р. Г. Препринт ВЦ СО АН СССР № 136,— Новосибирск, 1978.
71. Бухрейм А. Л. Препринт ВЦ СО АН СССР № 280,— Новосибирск, 1981.
72. Huang T., Barker D., Berger S.— *Appl. Opt.*, 1975, v. 14, p. 1165.
73. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1980.
74. Gordon R., Bender R., Herman G. T.— *J. Theor. Biol.*, 1970, v. 29, p. 471.
75. Gilbert P.— *J. Theor. Biol.*, 1972, v. 36, p. 105.
76. Herman G. T., Lent A.— *Comput. Biol. and Med.*, 1976, v. 6, p. 273.
77. Friden B. R.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1972, v. 62, p. 511.
78. Burg J. P. *Maximum Entropy Spectral Analysis.*— Stanford Univ., 1967.
79. Minerbo G.— *Comp. and Graph. Image Process.*, 1979, v. 10, p. 48.
80. Gordon R., Herman G. T.— *Comm. ACM*, 1971, v. 14, p. 759.
81. Gordon R., Herman G. T.— *Intern. Rev. Cytol.*, 1974, v. 38, p. 111.
82. Рубашов И. Б., Тимонов А. А., Пестряков А. В.— *ДАН СССР*, 1981, т. 258, с. 846.
83. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Рубашов И. Б. и др.— *Ibid.*, 1982, т. 263, с. 872.

84. Chen F. P., Goulard R.— J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer, 1976, v. 16, p. 819.
85. Maldonado C. D.— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 1935.
86. Ауслендер А. Л., Вишняков Г. Н., Левин Г. Г.— Опт. и спектр., 1980, т. 49, с. 946; 1981, т. 50, с. 408.
87. Sherp L. A., Logan B. F.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1974, v. NS-21, p. 21.
88. Штейн И. Н.— Радиотехн. и радиоэлектрон., 1972, т. 17, с. 2436.
89. Sherp L. A., Kruskal J. B.— Amer. Math. Monthly, 1978, v. 85, p. 420.
90. Пресняков Ю. П.— Опт. и спектр., 1976, т. 40, с. 124.
91. Melnikova T. S., Piskalov V. V.— In: Proc. XV ICPIC. Contribut. Papers. Pt. 2.— Minsk, 1981.— P. 1003.
92. Cormack A. M.— J. Appl. Phys., 1964, v. 35, p. 2908.
93. Cho Z. H.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1974, v. NS-21, p. 44.
94. Ведерников Г. А., Преображенский Н. Г.— Опт. и спектр., 1978, т. 44, с. 204.
95. Hopkins F. F., Morgan I. L., Ellinger H. D. et al.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1981, v. NS-28, p. 1717.
96. Wecksung G. W. et al.— Proc. SPIE, 1979, v. 207, p. 76.
97. Sanderson J. G.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1979, v. NS-26, p. 2685.
98. Schlapper G. A., Brugger R. M., Коерре R. A. et al.— Materials Evaluation, 1981, v. 39, p. 1121.
99. Kruger R. P., Cannon T. M.— Ibid., 1978, v. 36, p. 75.
100. Cagnasso A., Cagnage B., Rosello R. et al.— C. R. Ac. Sci., 1978, t. 287, p. 219.
101. Kruger R. P.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1981, v. NS-28, p. 1721.
102. Клюев В. В., Вайнберг Э. И., Казак И. А. и др.— Дефектоскопия, 1980, № 3, с. 42 (ч. 1), с. 51 (ч. 2).
103. Зимин В. Д., Фрик П. Г.— Опт. и спектр., 1981, т. 50, с. 736.
104. Mansfield P., Horn C.— J. Food Techn., 1972, v. 7, p. 53.
105. Бабкин А. Ф.— Пищевая технология, 1976, № 6, с. 130.
106. Berry M. V., Gibbs D. F.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1970, v. 314, p. 143.
107. Франсон М. Фазово-контрастный и интерференционный микроскопы.— М.: ИЛ, 1960.
108. Останевич Ю. М., Сердюк И. Н.— УФН, 1982, т. 137, с. 85.
109. Baba N., Murata K., Okada K., Fujimoto Y.— Optik, 1979, v. 54, p. 97; 1981, v. 58, p. 233.
110. Орлов С. С.— Кристаллография, 1975, т. 20, с. 511, 701.
111. Напарьин Ю. А., Шахурдин В. И.— Инж.-физ. ж., 1971, т. 20, с. 510.
112. Шахурдин В. И.— Ibid., 1973, т. 25, с. 506.
113. Зимин В. Д., Шахурдин В. И.— Прикл. механика, 1978, т. 14, с. 25.
114. Hoch M., Day A.— Sol. State Comm., 1979, v. 30, p. 241.
115. Mansfield P., Grannell P. K.— Phys. Rev. Ser. B, 1975, v. 12, p. 3618.
116. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— 2-е изд.— М.: Наука, 1973.
117. Dines K. A., Lytle R. J.— Proc. IEEE, 1979, v. 67, p. 1065.
118. Radcliff R. D., Balanis C. A.— Ibid., p. 1060.
119. Lytle R. J., Laine E. F., Lager D. L.— Radio Sci., 1976, v. 11, p. 285.
120. Lager D. L., Lytle R. J.— Ibid., 1977, v. 12, p. 249.
121. Алексеев А. С., Бессонова Э. Н., Матвеева Н. Н. и др. Обратные кинематические задачи взрывной сейсмологии.— М.: Наука, 1979.
122. Stuck B. W.— J. Opt. Soc. Amer., 1977, v. 67, p. 668.
123. Byer R. L., Sherp L. A.— Opt. Lett., 1979, v. 4, p. 75.
124. Wolfe D. C., Byer R. L.— Appl. Opt., 1982, v. 21, p. 1165.
125. Schenk R., Andrasch U.— Zs. Meteorologie, 1980, Bd. 30, H. 3, S. 169.
126. Herman G. T., Naparstek A.— SIAM J. Appl. Math., 1977, v. 33, p. 511.
127. Краснушкин П. Е.— ДАН СССР, 1981, т. 257, с. 1099.
128. Чернов Ю. А. Возвратно-наклонное зондирование ионосферы.— М.: Связь, 1971.
129. Краснушкин П. Е.— Геомагн. и аэрон., 1981, т. 21, с. 1133.
130. Гурвич А. С., Загоруйко С. В., Кан В. и др.— ДАН СССР, 1981, т. 259, с. 1330.
131. Васильев Л. А. Теневые методы.— М.: Наука, 1968.
132. Elliot J. L., Veverka J.— Icarus, 1976, v. 27, p. 359.
133. Иванов В. М., Лукин Д. С.— Косм. исслед., 1981, т. 19, с. 120.
134. Баженова Т. В., Леонтьева З. С.— В кн. Газодинамика и физика горения.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.— С. 88, 95.
135. Белоцерковский С. М., Сухоруких В. С., Татаренчик В. С.— ПМТФ, 1964, № 3, с. 95.

136. Скотников М. М. Теневые количественные методы в газовой динамике.— М.: Наука, 1976.
137. Matulka R. D., Collins D. J.— J. Appl. Phys., 1971, v. 42, p. 1109.
138. Jagota R. C., Collins D. J.— J. Appl. Mech., 1972, v. 39, p. 897.
139. Kosakowski R. A., Collins D. J.— AIAA J., 1974, v. 12, p. 767.
140. Zien T.-F., Ragsdale W. C., Spring W. C.— AIAA J., 1975, v. 13, p. 841.
141. Sweeney D. W., Vest C. M.— Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1974, v. 17, p. 1443.
142. Radulovic P. T., Vest C. M.— In: Application of Holography and Optical Data Processing/Ed. E. Marom, A. A. Friesem.— Oxford.: Pergamon Press, 1977. P. 241.
143. Fitzgerald J., Hörster H.— Phillips Techn. Rev., 1971, v. 32, p. 206.
144. Murata K., Baba N., Kunugi K.— Optik, 1979, v. 53, p. 285.
145. Рабинович М. И.— УФН, 1978, т. 125, с. 123.
146. Странные аттракторы. Сер. «Математика. Новое в зарубежной науке». Вып. 22.— М.: Мир, 1981.
147. Boyer L., Clavin P.— La Recherche, 1981, t. 12, p. 238.
148. Chamberlin D. D., Minerbo G. N., Teel L. E. et al.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1981, v. NS-28, p. 2347.
149. Преображенский Н. Г., Суворов А. Е.— ПМТФ, 1979, № 5, с. 8.
150. Emmerman P. J., Goulard R., Santoro R. J. et al.— J. Energy, 1980, v. 4, p. 70.
151. Lauterbur P., Lai C. M.— In: Proc. of 1977 Devices and Techn. Branch Contractors Conf. Program.— Washington: Government Print Office, 1978.
152. Kramer D. M., Lauterbur P. C.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1979, v. NS-26, p. 2674.
153. Maldonado C. D., Olsen H. N.— J. Opt. Soc. Amer., 1966, v. 56, p. 1305.
154. Sebald N.— Appl. Phys., 1980, v. 21, p. 221.
155. Plessl A.— Ibid., p. 337.
156. Melnikova T. S., Pickalov V. V.— Beitr. Plasma Phys., 1982, v. 22, p. 171.
157. Горбунов Е. П., Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П.— ЖТФ, 1968, т. 38, с. 312.
158. Myers B. R., Levine M. A.— Rev. Sci. Instrum., 1978, v. 49, p. 610.
159. Chase R. C., Seguin F. H., Gerassimenko M. et al.— Opt. Eng., 1981, v. 20, p. 486.
160. Gottardi N.— J. Appl. Phys., 1979, v. 50, p. 2647.
161. Есипчук Ю. В., Виноградова Н. Д., Ковров П. Е. и др.— Физ. плазмы, 1981, т. 7, с. 5.
162. Ceglie N. M., Attwood D. T., George E. V.— J. Appl. Phys., 1977, v. 48, p. 1566.
163. Minerbo G. N., Sanderson J. G., van Hulsteyn D. B. et al.— Appl. Opt., 1980, v. 19, p. 1723.
164. Minerbo G. N.— Comp. and Graph. Image Process., 1979, v. 10, p. 48.
165. Williamson J. H., Clarke M. E.— J. Plasma Phys., 1971, v. 6, p. 211.
166. Saito K.— Ann. Tokyo Astron. Obs. 2nd Series, 1970, v. 12, p. 151.
167. Bohlin J. D., Garrison L. M.— Solar Phys., 1974, v. 38, p. 165.
168. Altschuler M. D., Levine R. H., Stix M. et al.— Solar Phys., 1977, v. 51, p. 345.
169. Thomson J. H., Ponsonby J. E. B.— Proc. Roy. Soc. Ser., A, 1968, v. 303, p. 477.
170. Cole T. W.— J. Opt. Soc. Amer., 1980, v. 70, p. 338.
171. Гончарский А. В., Тивков С. М., Хромов Г. С. и др.— Письма Астрон. ж., 1981, т. 7, с. 179.
172. Kowalski G., Rieckeheer R., Wagner W.— Optik, 1980, Bd 55, S. 67.
173. Yoneda Y., Chikaura Y.— Japan. J. Appl. Phys., 1982, v. 21, p. L 31.
174. Lauterbur P. C.— IEEE Trans. Nucl. Sci., 1979, v. NS-26, p. 2808.
175. Robb R. A., Ritman E. L., Gilbert B. K. et al.— Ibid., p. 2713.
176. Cormack A. M., Koehler A. M.— Phys. Med. and Biol., 1976, v. 21, p. 560.
177. Knutsson H. E., Edholm P., Granlund G. H. et al.— IEEE Trans. Biomedical Eng., 1980, v. BME-27, pp. 640, 649.
178. Shkiferstein A., Chain Y. T.— Pattern Recognitions, 1978, v. 10, p. 327.
179. Mansfield P., Morris P. G. NMR Imaging in Biomedicine.— Acad. Press, 1982.

180. Preobrazhensky N. G.— In: 6. Tagung. Physik und Technik des Plasmas.—Leipzig, 1982.— S. 2.
181. Bottomley P. A.— Rev. Sci. Instrum., 1982, v. 53, p. 1319.
182. Cho Z. H., Kim H. S., Song H. B., Cummins J.— Proc. IEEE, 1982, v. 70, p. 1152.
183. Kumar A., Welty I., Ernst RR.— J. Magn. Reson., 1975, v. 18, p. 69.
184. Киселев Н. А., Мирзабеков А. Д.— Природа, 1983, № 1, с. 94.
185. Kuchakoff G., Howe R. D., Hanson R. K. et al.— Appl. Opt., 1982, v. 21, p. 3225.
186. Ueda M., Kagawa K., Yamada K. et al.— Ibid., p. 3269.
187. Колфилд Г.— В кн. Оптическая обработка информации/Под ред. Д. Кейсасента.— М.: Мир, 1980.
188. Колфилд Г.— В кн. Оптическая голография/Под ред. Г. Колфилда.— М.: Мир, 1982.— Т. 1.