

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

530.18

**УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ В ПОВЕДЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ\*)****М. Фейгенбаум**

*Хаотизация поведения большого числа нелинейных систем количественно описывается универсальными числами  $\delta = 4,6692016\dots$  и  $\alpha = 2,502907875\dots$*

**ОТКРЫТИЕ**

Открытие теории универсальности восходит к двум источникам. Во-первых, в 1971 г. Н. Метрополис, М. Стайн и П. Стайн (теоретический отдел Лос-Аламосской лаборатории) открыли любопытное свойство итераций: при изменении параметра характер поведения итераций изменяется способом, не зависящим от конкретного вида итерируемой функции. В частности, у большого класса функций при увеличении параметра происходит разрушение прежде устойчивого цикла и замена его циклом с удвоенным периодом. Это удвоение периода продолжается до бесконечности, и возникает хаотическое поведение.

Во-вторых, в начале 70-х годов был популяризирован, в основном Рюэлем, раздел математики, называемый теорией динамических систем, в котором вводилось понятие «странного аттрактора». Основные задачи, которые решались, были следующими: 1) как причинное уравнение (например, гидродинамические уравнения Навье — Стокса) может иметь решения с чисто статистическими свойствами и 2) как теоретически предсказывать статистические свойства. Это направление исследований объединилось с итерационными идеями: стало ясно, что предельные бесконечные «циклы» итерационных систем могут быть использованы для объяснения турбулентности. Я решил изучать итерации функций после лекции С. Смейла — одного из создателей теории динамических систем, в Аспене летом 1975 г.

Моя первая попытка понять проблему заключалась в исследовании сложных свойств квадратичного преобразования

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n).$$

Изучение прояснило механизм удвоения периода и привело к уравнениям совершенно другого типа для определения значения  $\lambda$ , при которых происходит удвоение периода. Новые уравнения были сложными, хотя приближенное решение казалось возможным. Соответственно, когда я вернулся из Аспена, я численно определил значения некоторых параметров. В то

\*) Feigenbaum M. J. Universal Behavior in Nonlinear Systems.— Los Alamos Science. 1980, v. 1, No. 1, pp. 4—27. Перевод С. Г. Тиходева.

М. Фейгенбаум — сотрудник Теоретического отдела Лос-Аламосской научной лаборатории, Калифорнийский университет, Лос-Аламос, шт. Нью-Мексико, США.

© Перевод на русский язык, издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Успехи физических наук», 1983.

время я никогда не пользовался большим компьютером, все, что у меня было, — это карманный программируемый калькулятор. Но такие машинки считают очень медленно. Определенное значение параметра находится итерациями (методом Ньютона), причем каждый последующий шаг требует  $2^n$  итераций функции. Для 64-цикла это занимает 1 минуту на каждый шаг метода Ньютона. В то же время при увеличении  $n$  становится все сложнее определить положение требуемого решения. Однако я сразу же понял, что  $\lambda_n$  сходятся геометрически. Это позволило мне предсказывать каждое следующее решение с возрастающей при увеличении  $n$  точностью. После этого для получения необходимого значения требовался лишь один шаг метода Ньютона. Насколько мне известно, это наблюдение о геометрической сходимости не было никем сделано по той простой причине, что решения всегда получались автоматически на больших и быстрых компьютерах!

То, что имеется геометрическая сходимость, было уже неожиданностью. Я заинтересовался этим по двум причинам. Во-первых, это позволило углубить мое понимание проблемы. Во-вторых, поскольку скорость сходимости есть число, инвариантное относительно гладких преобразований, оно представляет математический интерес. Соответственно, я истратил часть дня на попытки выразить скорость сходимости 4,669 через известные мне математические константы. Дело не увенчалось успехом, если не считать того, что число хорошо запомнилось.

В этот момент П. Стайн напомнил мне, что удвоение периода не есть уникальное свойство квадратичного отображения. Им обладает, например,

$$x_{n+1} = \lambda \sin \pi x_n.$$

Однако моя теория существенно основывалась на том, что нелинейность является просто квадратичной, а не трансцендентной. Соответственно мой интерес к проблеме упал.

Приблизительно через месяц я решил численно определить значения  $\lambda$  в трансцендентном случае. Эта задача решалась гораздо медленнее, чем предыдущая. Снова стало очевидно, что значения  $\lambda$  сходятся геометрически и, что было совершенной неожиданностью, скорость сходимости выражалась тем же числом 4,669, так хорошо мне запомнившимся в ходе неудачных попыток подгонки.

Вспомним, что в работе Н. Метрополиса, М. Стайна и П. Стайна было показано, что качественные особенности не зависят от конкретной итерационной схемы. Теперь я узнал, что точные количественные особенности также не зависят от конкретного вида функции. Это открытие полностью переворачивало обычный взгляд на вещи. Обычно полагают, что сходные итерационные схемы могут иметь качественно подобное поведение, но что количественные предсказания зависят от конкретного вида функций. Теория универсальности показывает, что качественно сходные итерации имеют одинаковое *количественное* поведение. Например, система дифференциальных уравнений задает определенное отображение. Вывод конкретного аналитического вида этого отображения находится обычно далеко за пределами возможностей современных математических методов. Если, однако, отображение испытывает удвоение периода, теория универсальности дает точные количественные предсказания, независимо от конкретного вида отображения. В частности, теперь экспериментально установлено, что некоторые жидкостные потоки переходят в турбулентное состояние через удвоение периода (субгармонические бифуркации). Одного этого достаточно для применимости теории универсальности. И действительно, она правильно предсказывает путь перехода к турбулентности, не обращаясь к лежащим в основе уравнениям Навье — Стокса.

\* \* \*

В природе происходят процессы двух типов: сложные, или хаотические, и простые, или упорядоченные. Задачей технологии является создание устройств второго типа: отдельные части механизма, совершающие отдельные упорядоченные действия, объединяются в единое целое для выполнения некоторой общей задачи. Так устроены, например, автомобили, самолеты, радиоприемники и часы. Все они собраны из отдельных простых частей, каждая из которых, по идее, отвечает за одну какую-нибудь функцию механизма. Важными технологическими проблемами являются также учет и сведение к минимуму влияния неупорядоченных процессов, например сложных атмосферных явлений, вихрей в турбулентном потоке, шумов в электронной схеме и т. д. Ниже пойдет речь именно о таких сложных явлениях.

Поведение шумового сигнала нерегулярно и трудно предсказуемо. Если, однако, проанализировать достаточно длинную запись такого сигнала, может обнаружиться, что его амплитуда находится в определенном узком диапазоне определенную долю времени. Если анализ другой записи сигнала обнаружит такую же долю времени, мы сможем описать шум *статистически*. Это значит, что хотя и нельзя предсказать, какова будет следующая амплитуда, но вполне возможно оценить вероятность достижения сигналом каких-то определенных значений. За последние сто лет утвердился именно статистический подход к неупорядоченным процессам. Поэтому исследование их заключается в определении вероятностей и, исходя из вероятностей, того, что нас в данном случае интересует, например какое влияние оказывает турбулентность воздуха на лобовое сопротивление самолета.

Мы знаем, что детерминированные и *простые* закономерности могут вести себя статистическим (или случайным) образом. Так, в современных электронно-вычислительных машинах имеются симулирующие хаотический процесс «генераторы случайных чисел». Такие генераторы просто передвигают запятую в рациональном числе с достаточно длинным периодом. Соответственно, можно предсказать, каким будет  $n$ -е полученное число. И все же последовательность полученных таким образом чисел производит впечатление настолько неупорядоченной и случайной, что все статистические тесты подтверждают случайное происхождение этих чисел. Это явление обозначается термином «псевдослучайность». Мы рассмотрим в данной работе, не являются ли псевдослучайными различные хаотические природные процессы (вопреки сложившемуся, но ошибочному мнению, что это не поддается проверке). То, что некоторые очень простые алгоритмы для получения случайных чисел ведут себя полностью аналогично естественным случайным процессам, представляется совершенно замечательным. Например, сейчас имеется убедительное доказательство того, что при помощи простой схемы, описанной в этой статье, можно объяснить, каким образом ламинарный поток жидкости становится турбулентным. Этот же метод пригоден для рассмотрения других естественно-научных проблем: изменений в популяции от поколения к поколению, шумов в разнообразных механических, электрических и химических осцилляторах. Так же можно исследовать и различные гамильтоновы системы, описываемые классической механикой, например Солнечную систему.

Все указанные процессы имеют следующую общую черту: по мере изменения какого-то внешнего параметра (например, температуры) поведение системы меняется от простого к хаотическому. Говоря точнее, имеется определенный диапазон значений внешнего параметра, в котором пове-

дение системы упорядочено и *периодично* (т. е. самовоспроизводится в каждый *период* времени  $T$ ). Вне этого диапазона процесс перестает воспроизводиться через  $T$  секунд; этого времени почти достаточно, но, в действительности, требуются два интервала  $T$ , чтобы процесс воспроизвелся, т. е. период удваивается и становится равным  $2T$ . Эта новая периодичность сохраняется внутри некоего нового диапазона значений параметра, пока не будет достигнуто новое критическое значение, после чего поведение только *почти* воспроизводится через  $2T$  секунд, на самом деле для этого требуется уже  $4T$  секунд. Процесс последовательного удвоения периода продолжается дальше (причем интервал значений параметра, при котором период равен  $2^n T$ , с ростом  $n$  уменьшается), пока при определенном значении параметра период не станет *бесконечным*, а поведение системы перестанет быть периодическим. Следовательно, удвоение периода — это характерная черта перехода системы от простого периодического к сложному непериодическому движению. Удвоение периода наблюдается во всех упомянутых выше процессах. В пределе хаотического непериодического движения имеется единственное и поэтому *универсальное* решение, общее для всех систем, испытывающих удвоение периода. Это обстоятельство имеет замечательные следствия. Пусть  $\Lambda_n$  — значение параметра (для каждой конкретной системы), при котором период удваивается в  $n$ -й раз. Тогда оказывается, что при больших  $n$   $\Lambda_n$  *геометрически* сходятся к  $\Lambda_\infty$  (при котором движение становится аperiodическим). Это означает, что при больших  $n$

$$\Lambda_\infty - \Lambda_n \sim \delta^{-n}, \quad (1)$$

где значение  $\delta$  (*скорости* перехода к хаотическому движению) фиксировано. Иначе говоря, если

$$\delta_n \equiv \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}, \quad (2)$$

то  $\delta_n$  быстро приближается к постоянной величине  $\delta$ . (Как правило,  $\delta_n$  совпадает с  $\delta$  с точностью до нескольких значащих цифр уже после небольшого числа удвоений периода.) Совершенно замечательным (помимо того, что всегда наблюдается геометрическая сходимость) представляется то, что у всех систем, испытывающих удвоение периода, значение  $\delta$  *одинаково* и равно универсальному числу

$$\delta = 4,6692016... \quad (3)$$

Именно такой является скорость перехода к беспорядку осцилляторов, популяций, жидкостей и вообще всех систем, испытывающих удвоение периода! Универсальность теории такова, что большинство измеримых параметров *любой* из таких систем в пределе хаотического движения может быть определено без помощи специальных, описывающих данную систему уравнений, т. е. если система переходит к хаотическому поведению путем удвоения периода (*качественная характеристика*), ее *количественные* характеристики становятся полностью заданными. Этот вывод подобен следствиям современной *теории фазовых переходов*, в которой несколько качественных характеристик системы, совершающей фазовый переход, особенно размерность, определяют *универсальные* критические экспоненты. Действительно, на *формальном* уровне эти теории идентичны в том смысле, что обе они являются теориями неподвижной точки, а число  $\delta$ , например, можно рассматривать как критическую экспоненту. Соответственно, для того чтобы разобратся в общем случае, достаточно рассмотреть простейшую (из обладающих таким поведением) систему.

## ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ИТЕРАЦИЯ

Генератор случайных чисел — это пример простой итерационной схемы, обладающей сложным поведением. Каждое следующее псевдослучайное число вычисляется путем некоторой операции над предыдущим псевдослучайным числом. Другими словами, для получения последовательности таких чисел каждый раз вычисляется некоторая функция. Пусть  $f$  является этой функцией, а  $x_0$  — первым числом. Тогда последовательность псевдослучайных чисел имеет вид  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ , где

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1), \\ &\dots \\ x_{n+1} &= f(x_n), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

Говорят, что она образована путем *функциональной итерации*.  $n$ -й элемент последовательности равен

$$x_n = f(f(\dots f(f(x_0)) \dots)) \equiv f^n(x_0), \quad (5)$$

где  $n$  — общее число вычислений функции  $f$ . ( $f^n(x)$  не есть  $n$ -я степень  $f$ , это —  $n$ -я итерация  $f$ .) Отметим следующее свойство итераций:

$$f^n(f^m(x)) = f^m(f^n(x)) = f^{m+n}(x), \quad (6)$$

поскольку каждое из выражений означает просто  $m + n$ -кратное вычисление функции  $f$ . Очевидно, что

$$f^0(x) = x. \quad (7)$$

Удобно обозначить функциональную итерацию специальным символом,  $\circ$ , так что

$$f^n \circ f^m = f^m \circ f^n = f^{m+n}. \quad (8)$$

Теперь  $f$  в (5) является определенной и вычислимой функцией, поэтому, в принципе,  $x_n$  функционально зависит от  $x_0$ .

Если функция  $f$  является *линейной*, например

$$f(x) = ax, \quad (9)$$

где  $a$  — постоянная, то

$$f^n(x) = a^n x \quad (10)$$

и

$$x_n = a^n x_0 \quad (11)$$

есть решение *рекуррентного соотношения* типа (4), которое в данном случае имеет вид

$$x_{n+1} = ax_n. \quad (12)$$

Если  $|a| < 1$ , то  $x_n$  геометрически сходится к нулю (со скоростью  $1/a$ ). Этот пример является выделенным, поскольку линейность функции  $f$  позволяет точно вычислить функцию  $f^n$ .

Для того чтобы образовать последовательность псевдослучайных чисел, мы должны выбрать *нелинейную* функцию  $f$ . Возьмем в качестве  $f$

$$f = a - x^2. \quad (13)$$

Тогда  $f^n$  является многочленом от  $x$  степени  $2^n$ . С ростом  $n$  этот многочлен быстро становится очень громоздким. Более того, его коэффициенты являются многочленами степени  $2^{n-1}$  от  $a$ , при больших  $n$  их очень трудно

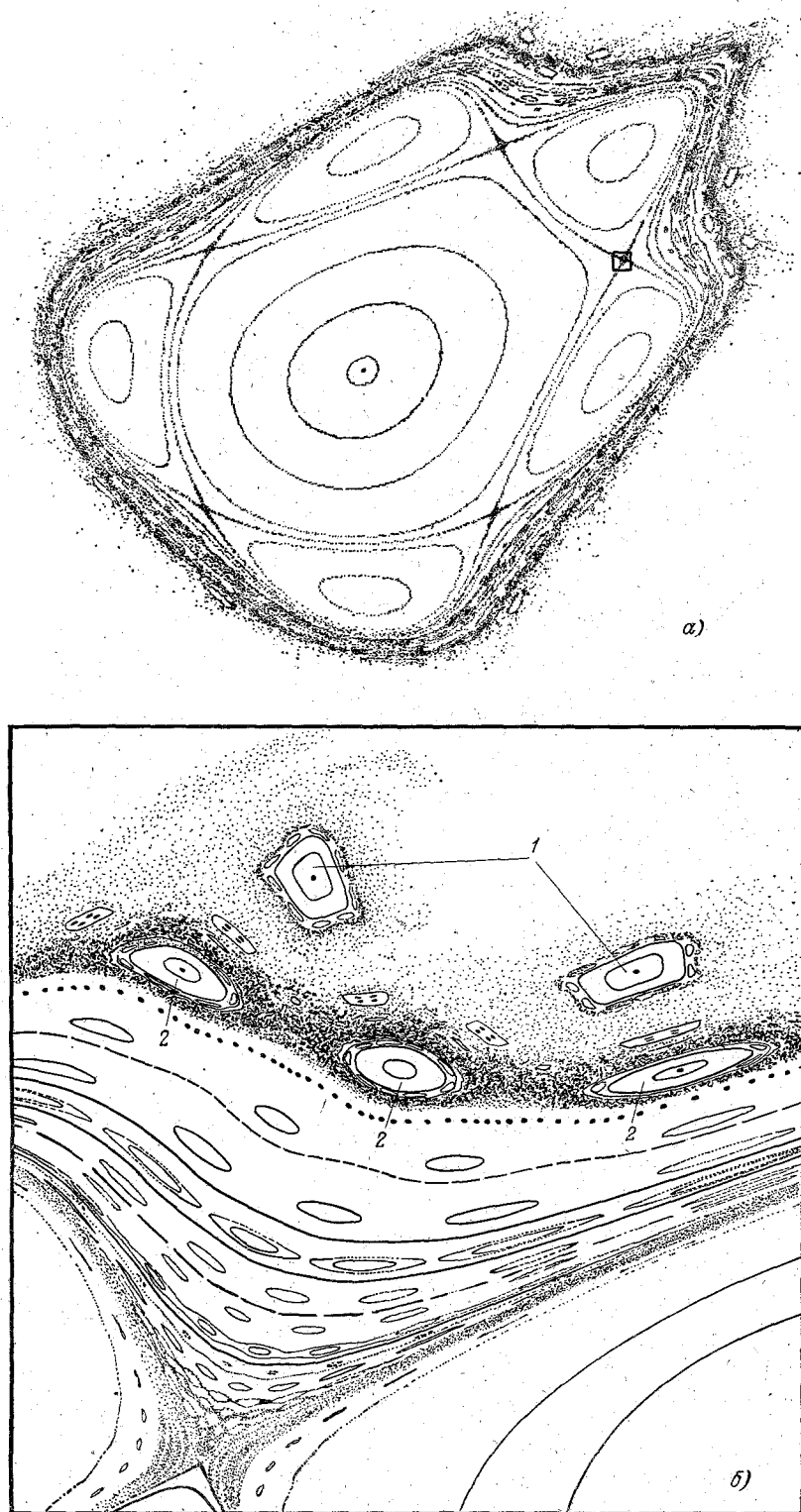


Рис. 1. Пояснение см. в сноске на стр. 349.

вычислять. Даже при  $x_0 = 0$   $x_n$  является многочленом  $z^{n-1}$  степени от  $a$ . Эти многочлены нетривиальны, что очевидно хотя бы из того, что для определенных значений  $a$  последовательность чисел, начинающихся с любого из интервала  $(a - a^2, a)$ , имеет все математические свойства последовательности случайных чисел. Для иллюстрации на рис. 1 \*) показаны последовательные итерации аналогичной, но двумерной функции

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n - x_n^2, \\ y_{n+1} &= a - x_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Как и в (4), по начальной паре координат  $(x_0, y_0)$ , применяя (14), можно вычислить следующую пару  $(x_1, y_1)$ , затем  $(x_2, y_2)$  и т. д. Для некоторых начальных точек все итерации попадают на кривую в форме эллипса,

\*) Элементарное двумерное преобразование может вести себя бесконечно сложным образом. Нижний рис. 1 есть увеличенная область в квадратике на верхнем рис. 1.

При помощи теории, предложенной Митчелом Фейгенбаумом и описанной им в статье «Универсальность в поведении нелинейных систем», может быть описан переход (посредством удвоения периода) от простого поведения к сложному в широком классе нелинейных диссипативных систем. Используемое для построения рис. 1 преобразование сохраняет фазовый объем и соответствует консервативной, а не диссипативной системе. Экспериментально установлено, что система такого типа может испытывать удвоение периода, и Митчел надеется обобщить теорию универсальности на гамильтоновы системы.

Рис. 1 был построен при помощи преобразования

$$\begin{aligned} x' &= y - x^2, \\ y' &= a - x, \end{aligned}$$

(где  $a = -0,4224$ ), многократно примененного к некоторому семейству начальных точек. Это квадратичное преобразование сохраняет площади и может рассматриваться как отображение Пуанкаре некоторой консервативной системы. Аналогичное отображение Пуанкаре имеет, например, поршень, поддерживаемый в поле тягости одночастичным газом.

Приблизительно 50 начальных точек, использованных для построения рис. 1, можно разделить на два множества. Из точек первого множества получаются итерации, лежащие на эллипсоподобных кривых. Например, из 3 начальных точек получаются, соответственно, центральные точки, меньшие внутренние овалы и большие овалы, в кластерах, обозначенных на рис. 1, б цифрой 1. Одна начальная точка образует центральные точки обоих изображенных на рисунке кластеров 1 (как и кластеров, не попавших в поле изображения). Из начальных точек второго типа образуется «дымка» итераций, хаотически попадающих в определенные области рисунка. Например, плотная дымка, окружающая три кластера 2, образована только одной начальной точкой. Именно эта дымка и соответствует статистическому поведению системы. Поведение итераций является еще гораздо более сложным, чем показано на рисунке. Именно, если увеличить область плотной дымки, расположенную ровно по середине между соседними кластерами 2, получится совершенно аналогичная картина с островами и дымкой, и т. д., до бесконечности.

Такое поведение можно считать следствием неустойчивостей (таких, скажем, как в плазме), которые привели к неконтролируемому поведению системы. В рамках аналогии с консервативной системой вся плоскость является поверхностью постоянной энергии. Траектория системы, подчиняющейся статистической механике, должна хаотически перемещаться по всей этой плоскости. Совершенно очевидно, что с нашей системой этого не происходит: некоторые начальные точки порождают траектории, циркулирующие вокруг одного из эллиптических островов, или «инвариантных торов». Существование таких торов есть нарушение статистической механики, но оно следует из знаменитой теоремы Колмогорова — Арнольда — Мозера. Надежда на обоснование статистической механики для классических систем — в поиске возможностей разрушения этих торов. Поскольку удвоение периода есть способ последовательного разрушения торов, обобщение существующей теории универсальности может описать этот процесс количественно. Это обобщение теории еще не построено, но активно разрабатывается. Кроме объяснения того, как гамильтоновы системы приходят к эргодическому поведению, эта теория может дать ответ на противоположный вопрос: как избежать хаотизации данной конкретной системы. Это имеет большое значение, например, для проблемы управляемого термоядерного синтеза. (Прим. редакции журнала «L. A. Science».)

в то время как для других распределены «усредненно» по некоторой области. Представляется очевидным, что столь разнообразные типы поведения, показанные на рис. 1, не описываются какой-либо точной формулой, т. е. хотя итерируемая функция (14) легко выписывается, нельзя получить  $n$ -ю итерацию в виде простой функции  $(x_0, y_0)$ . Другими словами, если многократно итерировать простейшую нелинейную функцию, можно получить весьма сложное поведение. Причем, поскольку повторно вычисляется одна и та же функция, можно ожидать появления всего нескольких типов самосогласованного поведения, определяемых не конкретным видом итерируемой функции, а самим фактом ее многократного вычисления. Такие самосогласованные типы поведения возникают в пределе бесконечного удвоения периода и имеют отчетливую структуру, которая может быть а priori определена среди сложных конфигураций, показанных на рис. 1.

### НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ

Рассмотрим теперь свойства функции (13). Нас интересует поведение системы после большого числа итераций. Как мы уже знаем, многократные итерации  $f$  быстро становятся очень сложными. В одном случае этого не происходит — если первая итерация  $x_0$  в точности равна  $x_0$ . Разумеется, это условие выполняется не для всех точек  $x$ , а выделяет не меняющиеся точки  $x_0$ , называемые *неподвижными точками* функции  $f$ . Итерационная последовательность для таких точек имеет вид  $x_0, x_0, \dots, x_0, \dots$ , поведение системы *статично* или может рассматриваться как периодическое с периодом 1.

Неподвижные точки (13) легко определить. Для удобства мы будем использовать несколько другой вид (13), получаемый сдвигом и некоторыми переопределениями:

$$f(x) = 4\lambda x(1 - x). \quad (15)$$

При любых  $\lambda$  точка  $x = 0$  является неподвижной. В самом деле, функция (15) имеет две неподвижные точки, являющиеся решениями уравнения

$$x^* = f(x^*) = 4\lambda x^*(1 - x^*) \quad (16)$$

и равные

$$x^* = 0, \quad x_0^* = 1 - \frac{\lambda}{4}. \quad (17)$$

Функция (15) при  $x = 1/2$  достигает максимального значения, равного  $\lambda$ . Кроме того, если  $\lambda > 0$  и  $x$  лежит в интервале  $(0, 1)$ ,  $f(x)$  положительна. Поэтому, если  $0 \leq \lambda \leq 1$ , любая итерация точки  $0 < x < 1$  также лежит в интервале  $(0, 1)$ . Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим только значения  $x$  и  $\lambda$ , лежащие между 0 и 1. Из (16) следует, что, в отличие от случая  $0 \leq \lambda < 1/4$ , когда имеется только одна неподвижная точка  $x^* = 0$ , при  $1/4 \leq \lambda \leq 1$  обе неподвижные точки принадлежат рассматриваемому интервалу. Например, если положить  $\lambda = 1/2$  и начать с неподвижной точки  $x_0^* = 1/2$  (т. е. положить  $x_0 = 1/2$ ), то  $x_1 = x_2 = \dots = 1/2$ . Аналогично, если  $x = 0$ ,  $x_1 = x_2 = \dots = 0$ , и проблема вычисления  $n$ -й итерации решается тривиально.

Что произойдет, если мы выберем  $x_0$  не равным неподвижной точке? Чтобы разобраться в происходящем, сделаем следующее графическое построение. Построим графики функций  $y = f(x)$  и  $y = x$ . В точках пересечения графиков имеем  $x = y = f(x)$ , поэтому пересечения являются как раз неподвижными точками. Теперь, если выбрать определенное значение  $x_0$  и отложить его на  $x$ -оси,  $x_1$  равно ординате  $f(x)$  при  $x = x_0$ .



Чтобы получить  $x_2$ , перед вычислением  $f$  надо перенести значение  $x_1$  на  $x$ -ось. Эта операция есть отражение от прямой  $y = x$ . В итоге, чтобы получить последовательные итерации  $x_0$ , надо:

1. провести вертикальную прямую до пересечения с графиком функции  $f(x)$ ;

2. провести горизонтальную прямую до пересечения с линией  $y = x$ ;

3. повторить действия 1, 2 и т. д. На рис. 2 изображено такое построение при  $\lambda = 1/2$ . Обе неподвижные точки обозначены кружками, показаны первые несколько итераций произвольно выбранной точки  $x_0$ . Представляется очевидным следующее: с какой бы точки  $x_0$  в интервале  $(0, 1)$  мы ни начали (значения  $x = 0$  и  $x = 1$  исключены), последовательные итерации  $x_n$  сходятся к неподвижной точке  $x = 1/2$ . Независимо от того, насколько близко точка  $x_0$  лежит к неподвижной точке  $x = 0$ , многократные итерации удаляются от последней.

Такая неподвижная точка называется *неустойчивой*. С другой стороны, для почти всех значений  $x_0$ , достаточно близких к  $x = 1/2$  (в нашем случае, просто для всех в интервале  $(0, 1)$ ), итерационная последовательность сходится к  $x = 1/2$ . Такая неподвижная точка называется *устойчивой* или *аттрактором* с периодом 1.

Если нас интересуют не детали поведения конечных итераций  $x_0$ , а возникающее после большого числа итераций регулярное поведение, нам достаточно знать лишь то, что  $x = 1/2$  является устойчивой неподвижной точкой. Если ограничиться лишь таким установившимся поведением, существование аттрактора диктует решение *независимое* от начального значения  $x_0$ , лишь бы только оно находилось в области притяжения аттрактора (т. е. притягивалось к нему). Аттрактор удовлетворяет уравнению (16), которое не зависит от  $x_0$ . Это лежит в основе универсальности: если аттрактор существует, установившееся поведение не зависит от начальной точки.

Почему  $x = 0$  — неустойчивая точка, а  $x = 1/2$  — устойчивая? Читатель может убедиться, что точка  $x = 0$  неустойчива, поскольку производная от  $f(x)$  при  $x = 0$  больше 1. И вообще, если  $x^*$  является неподвижной точкой, а абсолютная величина  $f'(x^*)$  меньше 1, точка  $x^*$  устойчива. Если  $|f'(x^*)| > 1$ , то  $x^*$  неустойчива. Отметим также, что только *устойчивые* неподвижные точки важны для установившегося поведения итераций произвольной точки.

Исследуем теперь, при каких  $\lambda$  неподвижные точки являются притягивающими. Из (15) следует, что  $f'(x) = 4\lambda(1 - 2x)$ , поэтому

$$f'(0) = 4\lambda \quad (18)$$

и

$$f'(x^*) = 2 - 4\lambda. \quad (19)$$

Если  $0 < \lambda < 1/4$ , устойчива только точка  $x^* = 0$ . Если  $\lambda = 1/4$ ,  $x_0^* = 0$  и  $f'(x_0^*) = 1$ . Если  $1/4 < \lambda < 3/4$ , то  $x^*$  неустойчива и  $x_0^*$  устойчива. При  $\lambda = 3/4$   $f'(x_0^*) = -1$  и  $x_0^*$  также становится неустойчивой. Итак, в диапазоне  $0 < \lambda < 3/4$  установившееся поведение известно.

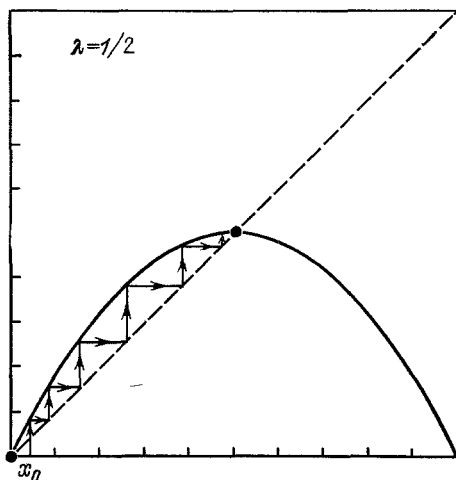
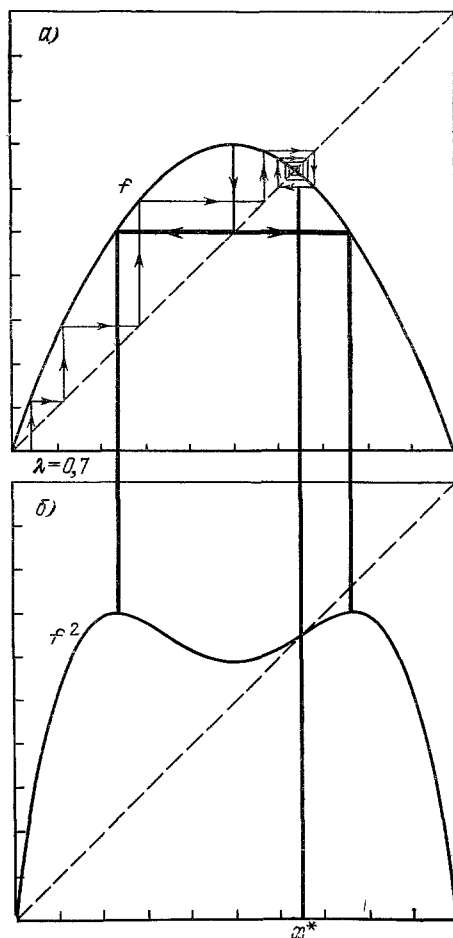


Рис. 2. Итерации  $x_0$  при  $\lambda = 0,5$ .

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРИОДА 2 ИЗ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Что происходит с системой, если  $3/4 < \lambda < 1$ , когда притягивающие неподвижные точки отсутствуют? Мы увидим, что если значение  $\lambda$  немного превысило величину  $3/4$ , итерации  $f$  испытывают удвоение периода. Это означает, что вместо устойчивого цикла с периодом 1, соответствующего

Рис. 3.  $\lambda = 0,7$ 

$x^*$  является устойчивой неподвижной точкой  
а) Положение экстремумов  $f^2$  определено при помощи обратного отображения точки  $x^* = 0,5$

одной неподвижной точке, система имеет устойчивый цикл с периодом 2, т. е. цикл, содержащий две точки. Поскольку эти точки являются неподвижными точками функции  $f^2$  (дважды вычисленной функции  $f$ ) и поскольку устойчивость определяется производной функции в *неподвижных* точках, займемся теперь  $f^2$ . Во-первых, рассмотрим график  $f^2$  при  $\lambda$  чуть меньше  $3/4$ . На рис. 3, а и б показаны соответственно  $f$  и  $f^2$  при  $\lambda = 0,7$ .

Чтобы разобраться в рис. 3, б, заметим прежде всего, что поскольку  $f$  симметрична относительно максимума при  $x = 1/2$ ,  $f^2$  также симметрична относительно этой точки. Кроме того, все неподвижные точки  $f$  являются также неподвижными точками  $f^2$ , поскольку вторая итерация неподвижной точки есть эта же самая неподвижная точка. Главное, что приводит к удвоению периода при увеличении  $\lambda$ , — соотношение между производными  $f$  и  $f^2$ . Оно следует из правила дифференцирования сложных функций. По определению,

$$x_2 = f^2(x_0),$$

где

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1).$$

Оставим читателю проверить, что из правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$f^{2'}(x_0) = f'(x_0) f'(x_1) \quad (20)$$

и

$$f^{n'}(x_0) = f'(x_0) f'(x_1) \dots f'(x_{n-1}). \quad (21)$$

Этот простой результат и объясняет удвоение периода. Для неподвижной точки  $f$   $x_0 = x^*$  соотношение (20) с учетом  $x_2 = x_1 = x^*$  дает

$$f^{2'}(x^*) = f'(x^*) f'(x^*) = [f'(x^*)]^2. \quad (22)$$

Так как при  $\lambda = 0,7$   $|f'(x^*)| < 1$ , из (22) следует, что

$$0 < f^{2'}(x^*) < 1.$$

Кроме того, из (23) вытекает, что в экстремуме  $f$  при  $x_0 = 1/2$  для всех  $n$

$$f^{n'}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (23)$$

поскольку  $f'(1/2) = 0$ . В частности,  $f^2$  имеет экстремум (минимум) при  $x = 1/2$ . Кроме того, из (20) следует, что  $f^2$  имеет экстремумы (максимумы) в точках  $x_0$ , отображающихся функцией в  $x = 1/2$ . В самом деле, тогда  $x_1 = 1/2$ ,  $f'(x_1) = 0$ . Эти точки, обратные  $x = 1/2$ , строятся следующим способом: проводим вертикальную прямую через  $x = 1/2$  до пересечения с  $y = x$ , затем горизонтальную — до  $y = f(x)$ . (Оберните стрелки на рис. 2, получится рис. 3, а.) Поскольку  $f$  имеет максимум, горизонтальная прямая пересекает ее график в двух точках, в которых  $f^2$  максимальна (см. рис. 3, б). Сложность поведения итераций  $f$  есть следствие двузначности обратного отображения, которая в свою очередь вытекает из того, что функция  $f$  имеет максимум. Итерации монотонной  $f$  всегда ведут себя просто, независимо от того, легко или просто их вычислять. Линейная функция является монотонной. Интересующие нас функции всегда имеют максимум и, следовательно, являются *сильно* нелинейными. Как и линейность, эта нелинейность системы приводит к существованию определенного решения. И в самом деле оказывается, что любая система с такой нелинейностью в пределе бесконечного удвоения периода разрешима. Добавим, что такой нелинейностью обладают многие системы, в частности различные связанные нелинейные дифференциальные уравнения.

Вернемся к рис. 3, б. Пусть  $\lambda \rightarrow 3/4$ , тогда максимальное значение  $f$  приближается к  $3/4$ ,  $f'(x^*) \rightarrow -1$  и  $f^{2'}(x^*) \rightarrow 1$ . Если  $\lambda$  становится больше  $3/4$ , то  $|f'(x^*)| > 1$ ,  $|f^{2'}(x^*)| > 1$  и у  $f^2$  появляются две новые неподвижные точки (помимо неподвижных точек  $f$ ) — график  $f^2$  пересекает прямую  $y = x$  в двух дополнительных точках. Этот переход показан на рис. 4, а и б соответственно для  $f$  и  $f^2$  (при  $\lambda = 0,75$ ) и на рис. 5, а и б (при  $\lambda = 0,785$ ). Отметим исключительно медленную сходимость к  $x^*$  при  $\lambda = 0,75$ , когда итерации стремятся к неподвижной точке не геометрически, но обратно пропорционально квадратному корню из числа итераций. Поскольку новые неподвижные точки  $f^2$   $x_1^*$  и  $x_2^*$  не являются неподвижными точками  $f$ , последняя преобразует одну из них в другую:

$$x_1^* = f(x_2^*)$$

и

$$x_2^* = f(x_1^*).$$

Эта пара точек, называемая *двойным циклом*, образует на рис. 5, а квадрат, на который навиваются итерационные траектории. Отметим (см. рис. 5, б), что производная  $f^2$  превосходит 1 в неподвижных точках  $f$ , которые, следовательно, являются неустойчивыми неподвижными точками  $f^2$ . Напротив, наклон в двух новых неподвижных точках меньше  $45^\circ$ , т. е. они являются устойчивыми: каждая двойная итерация  $f$  будет притягиваться либо к  $x_1^*$ , если она достаточно близка к  $x_1^*$ , или к  $x_2^*$ , если она достаточно близка к  $x_2^*$ . Это означает, что последовательность итераций

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

при больших номерах итераций сколь угодно близко подойдет к последовательности

$$x_1^*, x_2^*, x_1^*, x_2^*, \dots,$$

являющейся устойчивым двойным циклом, или *аттрактором с периодом 2*. Итак, мы обнаружили первое удвоение периода для (15) при увеличении  $\lambda$ .

Отметим факт первостепенной важности: производные  $f^2$  в точках  $x_1^*$  и  $x_2^*$  совпадают. Это вытекает непосредственно из соотношения (20), поскольку при  $x_0 = x_1^*$ ,  $x_1 = x_2^*$ , и, наоборот, произведение производных

одинаково. Вообще говоря, если  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  есть  $n$ -цикл, т. е.

$$x_{r+1}^* = f(x_r^*), \quad r = 1, 2, \dots, n-1,$$

и

$$x_1^* = f(x_n^*), \quad (24)$$

то производные  $f^2$  во *всех* неподвижных точках совпадают:

$$x_r^* = f^n(x_r^*), \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

и

$$f^{n'}(x_r^*) = f'(x_1^*) \dots f'(x_n^*). \quad (26)$$

Это является причиной *бесконечной* последовательности удвоений периода.

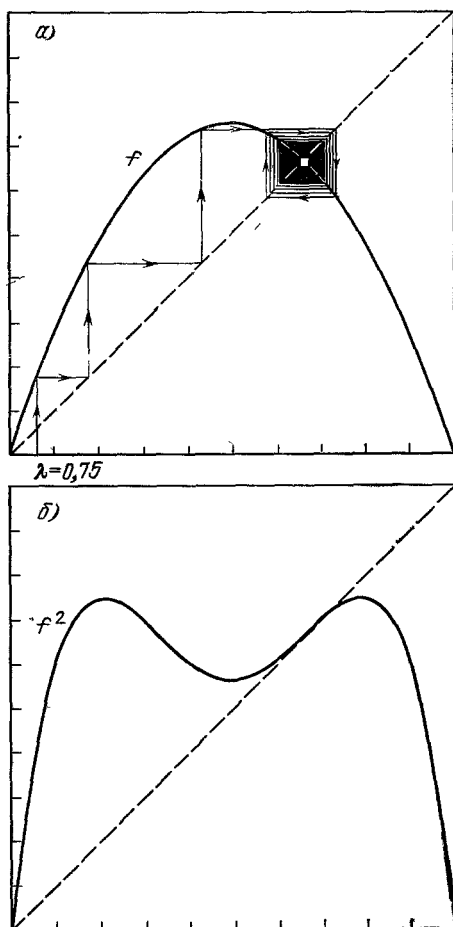


Рис. 4.  $\lambda = 0,75$

а) Показана медленная сходимость итераций к неподвижной точке; б)  $f^2$  касается прямой  $y = x$  в неподвижной точке.

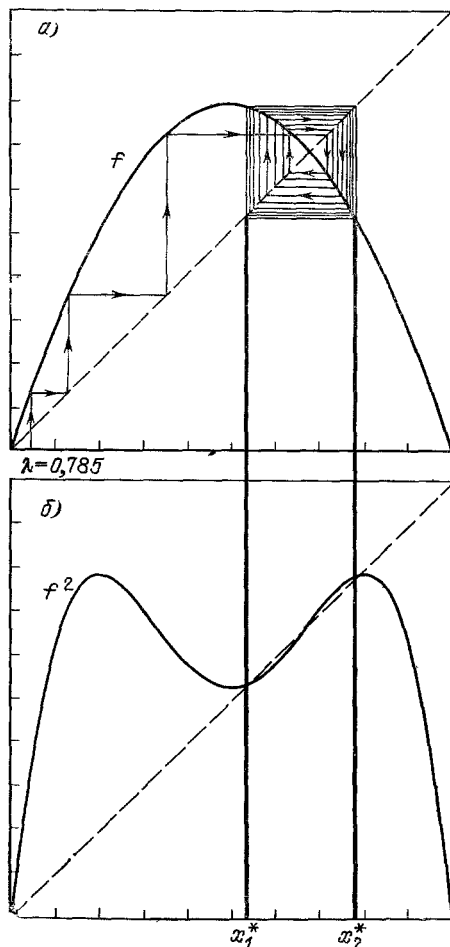


Рис. 5.  $\lambda = 0,785$ .

а) Итерации «наматываются» на устойчивый 2-цикл, б) показаны неподвижные точки  $f^2 x_1^*$  и  $x_2^*$ , являющиеся элементами 2-цикла.

При дальнейшем увеличении  $\lambda$  минимум функции  $f$  при  $x = 1/2$  понижается и производная ее в неподвижной точке возрастает. При некотором значении  $\lambda$ , которое мы обозначим  $\lambda_1$ ,  $x = 1/2$  станет неподвижной точкой

$f^2$ . Одновременно станет неподвижной точкой и правый максимум  $f^2$  (из (26) следует, что в обеих точках двойного цикла производная равна нулю). Эта ситуация при  $\lambda = \lambda_1$  показана на рис. 6, а и б.

### БЕСКОНЕЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ УДВОЕНИЙ ПЕРИОДА

Теперь мы подбираемся к концу рассказа. При дальнейшем увеличении  $\lambda$  минимум опустится еще ниже и производные  $f^2$  в точках  $x_1^*$  и  $x_2^*$  станут отрицательными. При некотором значении параметра  $\Lambda_2$  производная в *обеих* точках  $x_1^*$  и  $x_2^*$  станет равной  $-1$ . Ситуация для  $f^2$  в точке  $\Lambda_2$ , следовательно, аналогична ситуации для  $f$  в точке  $\Lambda_1 = 3/4$ . Этот переходной случай изображен на рис. 7. Соответственно, как неподвижная точка  $f$  при  $\Lambda_1$  превращается в 2-цикл, так и *каждая* неподвижная точка  $f^2$  при  $\Lambda_2$  образует 2-цикл, т. е. 4-цикл для функции  $f$ . Таким образом, произошло второе удвоение периода.

Мы смогли проследить за образованием 2-цикла, поскольку ожидали возникновения равного двум периода и следили за функцией  $f^2$ , превращающей цикл в пару неподвижных точек. Аналогично надо рассмотреть функцию  $f^4$ , чтобы цикл с периодом 4 превратился в неподвижные точки. Эта функция, будучи четвертой итерацией  $f$ , может быть также вычислена по  $f^2$  следующим, вытекающим из (8), способом:

$$f^4 = f^2 \circ f^2.$$

С этого момента можно забыть про  $f$  и считать  $f^2$  «основной» функцией.

Тогда, так же как  $f^2$  получилась после двойной итерации  $f$ ,  $f^4$  получится после двойной итерации  $f^2$ . То, что  $f^2$  есть двойная итерация  $f$ , проявляется в равенстве в неподвижных точках ее производных, вытекающем из правила дифференцирования сложных функций. Поскольку это правило работает «автоматически», достаточно рассмотреть только ближайшую к  $x = 1/2$  неподвижную точку  $f^2$ ; поведение другой точки совершенно аналогично. Поэтому на уровне  $f^4$  необходимо рассмотреть также только ближайшую к  $x = 1/2$  неподвижную точку, поведение *трех* других совершенно аналогично. Так возникает рекуррентная процедура. Снова увеличиваем  $\lambda$  до  $\lambda_2$ , когда ближайшая к  $x = 1/2$  неподвижная точка  $f^4$  есть  $x = 1/2$ , а производная равна нулю. Эта ситуация показана на рис. 8, а и б для  $f^2$  и  $f^4$  соответственно. При дальнейшем увеличении  $\lambda$  максимум  $f^4$  при  $x = 1/2$  поднимается и наклон графиков в неподвижных точках

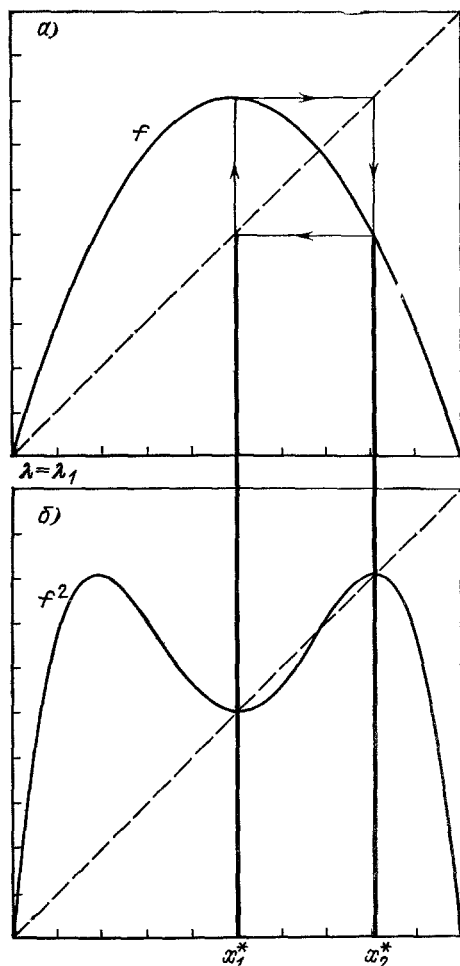


Рис. 6.  $\lambda = \lambda_1$ .

Наиболее устойчивый 2-цикл;  $x_1^*$  и  $x_2^*$  — экстремумы  $f^2$ .

становится отрицательным. В конце концов при  $\lambda = \Lambda_3$ , когда производная в этой неподвижной точке (как и в остальных трех) снова становится равной  $-1$ , каждая неподвижная точка расщепляется на две и возникает устойчивый 8-цикл. И снова  $f^8 = f^4 \circ f^4$ , снова можно считать основной

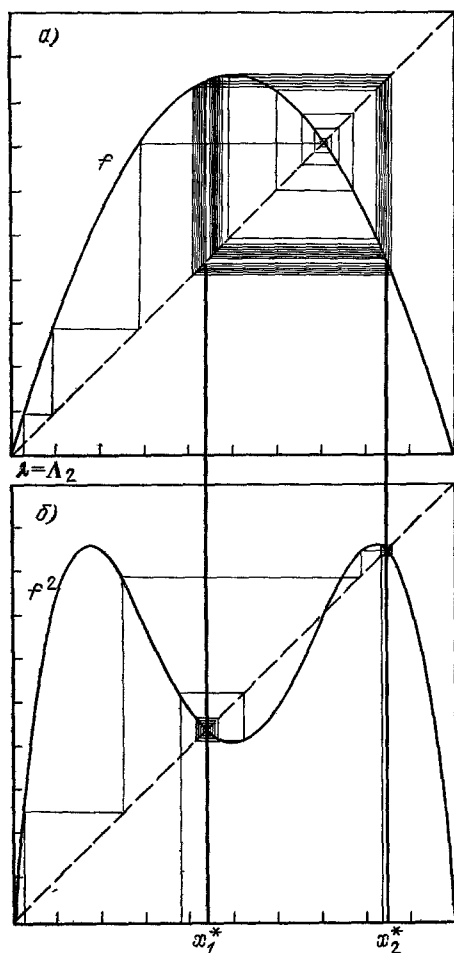


Рис. 7.  $\lambda = \Lambda_2$ .

б) Итерации так же медленно сходятся к  $x_1^*$  и  $x_2^*$ , как к неподвижной точке на рис. 4, а.

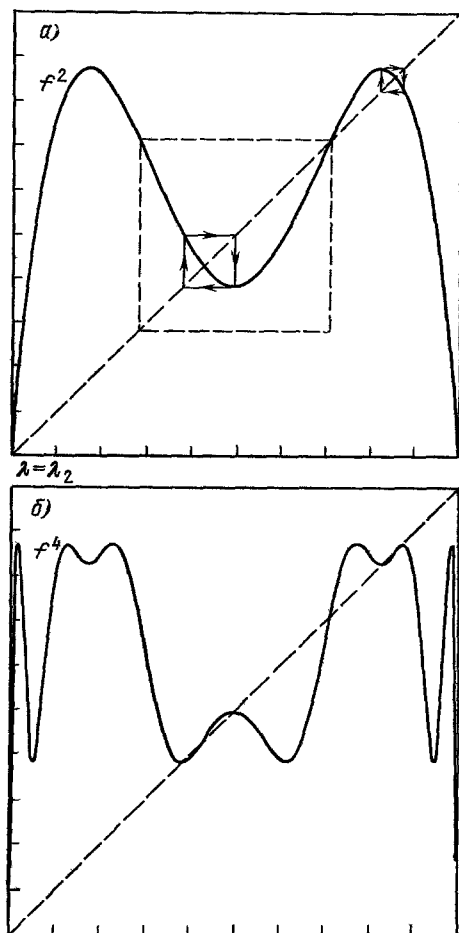


Рис. 8.  $\lambda = \lambda_2$ .

Наиболее устойчивый 4-цикл. Сравните область внутри квадрата, выделенного штриховой линией, со всем рис. 6, а.

функцию  $f^4$ . При  $\lambda_3$  точка  $x = 1/2$  снова становится неподвижной, на этот раз — функции  $f^8$ . При  $\Lambda_4$  производные сравниваются с  $-1$ , и происходит новое удвоение периода. Всегда

$$f^{2^{n+1}} = f^{2^n} \circ f^{2^n}. \quad (27)$$

Если в допустимом диапазоне параметра с ростом  $\lambda$  каждый раз производная в соответствующих неподвижных точках по абсолютной величине превосходит 1, это удвоение периода будет происходить до бесконечности.

Итак, один и тот же механизм приводит к удвоению периода итераций  $f^{2^n}$  при  $\Lambda_{n+1}$  и  $f^{2^{n+1}}$  при  $\Lambda_{n+2}$ . Функция  $f^{2^{n+1}}$  образуется из  $f^{2^n}$  при помощи (27), и так же  $f^{2^{n+2}}$  образуется из  $f^{2^{n+1}}$ . Отсюда следует, что имеется определенная операция (при действии на функции — образующая функ-

ции), результат действия которой на  $f^{2^n}$  при  $\lambda_{n+1}$  (или лучше  $f^{2^n}$  при  $\lambda_n$ ) равен  $f^{2^{n+1}}$  при  $\lambda_{n+1}$ . Поскольку, кроме того, нам необходимо рассматривать  $f^{2^n}$  лишь в интервале, включающем ближайшую к  $x = 1/2$  неподвижную точку, и поскольку размер этого интервала постоянно убывает с возрастанием  $\lambda$ , часть  $f$ , образующая эту область, также сжимается в очень маленькую область кривой вблизи  $x = 1/2$ . (На самом деле, важны производные и в других точках, но они задают только «масштаб», который может быть изменен соответствующим сжатием.) Поведение  $f$  вдали от  $x = 1/2$  несущественно для свойства удвоения периода, и в пределе больших  $n$  важна только *природа* максимума  $f$ . Отсюда следует, что в пределе бесконечного числа удвоений периода все функции с квадратичным экстремумом ведут себя одинаково ( $f''(1/2) \neq 0$  является важным условием). Следовательно, действующая на функции операция имеет *устойчивую неподвижную точку* в пространстве функций, являющуюся общим универсальным пределом для многократных итераций любой конкретной функции. Чтобы определить этот универсальный предел, мы должны сделать следующее существенное обобщение: теперь роль начальной точки будет играть произвольная *функция*, а притягивающая неподвижная точка станет универсальной функцией, подчиняющейся уравнению, зависящему только от этой функции. Роль функции в уравнении  $x_0 = f(x_0)$  теперь играет *операция*, образующая при действии на функцию новую функцию. В основе этой операции лежит композиция функций (27). Если мы определим точный вид операции и решим задачу о ее неподвижных точках, мы сможем понять, почему определенное число, скажем,  $\delta$  из (3), возникает независимо от любой начальной функции.

#### УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ МНОГОКРАТНЫХ ИТЕРАЦИЙ

В этом разделе мы кратко расскажем о решении задачи о неподвижной точке. Квадрат, выделенный на рис. 8, *а* штриховой линией, содержит часть  $f^2$ , которую мы и рассмотрим для того, чтобы разобраться во всех последующих удвоениях периода. Сравним этот квадрат со всем единичным квадратом, изображенным на рис. 6, *а*. Если квадрат на рис. 8, *а* инвертировать относительно  $x = 1/2$ ,  $y = 1/2$ , а затем *растянуть* так, чтобы квадрат, образованный 2-циклом, совпал с аналогичным квадратом на рис. 6, *а*, в обоих квадратах окажутся кривые с одинаковым типом максимума при  $x = 1/2$  и зануляющиеся в правом нижнем углу. Так же как  $f$  при возрастании  $\lambda$  от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$  определяет соответствующую часть  $f^2$ ,  $f^2$  определит следующую кривую, после необходимого растяжения и двойной инверсии похожую на две предыдущие. На рис. 9 показана совокупность первых *пяти* таких функций. Отметим, что в масштабе рис. 9, последние три кривые сливаются в одну. Кроме того, изменение масштаба  $f^4$ , определяемое по  $f^2$ , основывается только на свойствах композиции функций. Поэтому если описанные кривые для  $f^{2^n}$ ,  $f^{2^{n+1}}$  *сходятся*

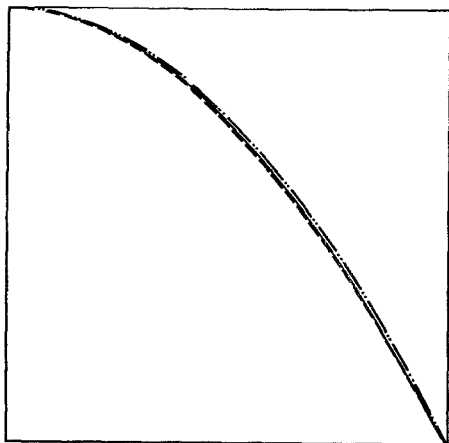


Рис. 9. Совокупность нужным образом увеличенных частей  $f^{2^{n-1}}$  при  $\lambda_n$  (типа выделенных квадратами на рис. 6, *а* и 7, *а*).

к одному пределу (что правдоподобно, судя по рис. 9), величина изменения масштаба (скейлинга) от уровня к уровню также *сойдется к определенной величине*. Но сторона каждого квадрата, образуемого 2-циклом, равна расстоянию между  $x = 1/2$  в момент, когда она является неподвижной точкой  $f^{2^n}$ , и ближайшей к  $x = 1/2$  неподвижной точкой  $f^{2^n}$  (см. рис. 8, а и б). Отсюда следует, что асимптотически *расстояние, разделяющее соседние элементы аттрактора, уменьшается между двумя последовательными удвоениями периода в постоянное число раз*. Кроме того, при каждом следующем удвоении периода ближайший к  $x = 1/2$  элемент аттрактора перемещается с одной стороны точки  $x = 1/2$  на другую. Пусть  $d_n$  есть алгебраическое расстояние от  $x = 1/2$  до ближайшего элемента аттрактора с периодом  $2^n$  при  $\lambda = \lambda_n$ . Переход к  $2^{n+1}$  циклу при  $\lambda = \lambda_{n+1}$  осуществляется сжатием масштаба приблизительно в  $\alpha$  раз ( $\alpha$  — положительное число):

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \sim -\alpha. \quad (28)$$

Так как величина скейлинга определяется только свойствами композиции функций, должна существовать функция, которая после одной итерации и сжатия в  $-\alpha$  раз *не изменяется*. Эта функция имеет квадратичный максимум при  $x = 1/2$ , симметрична относительно этой точки и может быть приведена преобразованием масштаба к такому виду, что значение ее при  $x = 1/2$  равно 1. Смещая координаты так, что  $x = 1/2 \rightarrow x = 0$ , получаем

$$-\alpha g\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = g(x). \quad (29)$$

Если подставить  $g(0) = 1$ , получим

$$g(1) = -\frac{1}{\alpha}. \quad (30)$$

(29) является уравнением для функции  $g$ , зависящей от  $x$  только через  $x^2$  и имеющей максимум, равный 1 при  $x = 0$ . У уравнения (29) имеется единственное гладкое решение, при котором

$$\alpha = 2,502907875... \quad (31)$$

Зная  $\alpha$  и используя (28), можно предсказать закон скейлинга любой итерационной схемы, испытывающей удвоение периода. Этот закон был самым широким образом проверен экспериментально. Из уравнения (29) следует, что операция, лежащая в основе удвоения периода, есть композиция функций с последующим растяжением. Величина растяжения определяется самим уравнением (29) — условием на неподвижную точку  $g$  в пространстве функций. Уравнение (29), однако, не описывает устойчивую неподвижную точку, поскольку оно никак не учитывает увеличения параметра от  $\lambda_n$  до  $\lambda_{n+1}$ . Поэтому  $g$  не является предельной функцией для кривых, изображенных на рис. 9, хотя очень тесно с нею и связана. Полное теоретическое рассмотрение будет дано в следующем разделе. Здесь мы отметим только, что предельную функцию можно вычислить и, следовательно, *определить положение элементов предельных  $2^n$ -циклов*. Кроме того, как оказывается, функция  $g$  является неустойчивой точкой композиции функций, причем скорость ухода от  $g$  есть в точности число  $\delta$  (см. (3)), благодаря чему его тоже можно вычислить. Соответственно, имеется полная теория, количественно определяющая поведение многократных итераций *любой* функции  $f$  в аperiodическом пределе.



## НЕКОТОРЫЕ ДЕТАЛИ ПОЛНОЙ ТЕОРИИ

Вернемся к соотношению (28). Мы можем теперь дать теоретическое описание универсального скейлинга циклов высокого порядка и сходимости к универсальному пределу. Поскольку  $d_n$  есть расстояние между  $x = 1/2$  и ближайшим к этой точке элементом  $2^n$ -цикла при  $\lambda = \lambda_n$  и поскольку этот ближайший элемент есть  $2^{n-1}$ -итерация точки  $x = 1/2$  (это так, потому что перед  $n$ -м удвоением цикла, обусловившим расщепление, эти точки совпадали), имеем

$$d_n = f^{2^{n-1}} \left( \lambda_n, \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Для последующего удобно совершить трансляцию координат  $x = 1/2 \rightarrow x = 0$ . После трансляции (32) будет иметь вид

$$d_n = f^{2^{n-1}} (\lambda_n, 0). \quad (33)$$

Соотношение (28) устанавливает сходимость при  $n \rightarrow \infty$  растянутого расстояния

$$r_n \equiv (-\alpha)^n d_{n+1},$$

т. е. если соотношение (28) имеет место, предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n} (\lambda_{n+1}, 0) \quad (34)$$

должен существовать.

Из рис. 9 следует, однако, гораздо более сильное, чем (34), утверждение. Именно, *растянутая* в  $(-\alpha)^n$  раз  $f^{2^n}$  сходится к определенной функции. Соотношение (34) есть значение этой функции в  $x = 0$ . После растяжения сходящиеся функции имеют вид

$$(-\alpha)^n f^{2^n} \left( \lambda_{n+1}, \frac{x}{(-\alpha)^n} \right).$$

Следовательно, изображенная в квадрате на рис. 9 предельная функция есть

$$g_1(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n} \left( \lambda_{n+1}, \frac{x}{(-\alpha)^n} \right). \quad (35)$$

Из того, что в пределе многократных итераций существенны все меньшие и меньшие части функции  $f$  вблизи максимума, функция  $g_1$  является *универсальным* пределом итераций любых функций  $f$  с квадратичным экстремумом. В самом деле, численно легко убедиться в том, что задаваемая соотношением (35) функция  $g_1$  всегда одна и та же, независимо от  $f$  в (32).

Зачем нужна эта универсальная функция? На рис. 6, а показана грубая аппроксимация  $g_1$  (с  $n = 0$  в (35)), в то время как на рис. 8, а — более точная аппроксимация (с  $n = 1$ ). И каждый раз на экстремумах  $g_1$  вблизи неподвижных точек  $g_1$  строится квадрат, содержащий две точки цикла. (Два квадрата на рис. 8, а определяют положение четырех точек цикла.) Поэтому  $g_1$  определяет положение близких к  $x = 0$  элементов  $2^n$ -циклов с большими  $n$ . Поскольку  $g_1$  *универсальна*, мы получаем следующий удивительный результат: положение элементов цикла высокого порядка универсально! Легко понять, насколько это сильный результат. На рис. 10 приведена функция  $g_1$  с достаточно большими  $x$  — такими, что помещается 8 квадратов, определяющих положение 15 ближайших к  $x = 0$  элементов  $2^n$ -цикла. Кроме того, универсальное значение скей-

лингового параметра  $\alpha$ , полученное численно, равно

$$\alpha = 2,502907875... \quad (36)$$

Как и  $\delta$ , число  $\alpha$  можно измерить в любом процессе с удвоением периода (экспериментально определяя  $d_n$  из (28)).

Если  $g_1$  универсальна, то и ее итерация  $g_1^2$  также является универсальной. На рис. 8, б показана грубая аппроксимация этой функции. Определим новую универсальную функцию  $g_0$ , полученную после скейлинга  $g_1^2$ :

$$g_0(x) \equiv -\alpha g_1^2\left(-\frac{x}{\alpha}\right). \quad (37)$$

(Так как  $g_1$  является универсальным пределом, а все итерации нашей квадратичной функции  $f$  — четные функции  $x$ ,  $g_1$  и  $g_0$  также являются

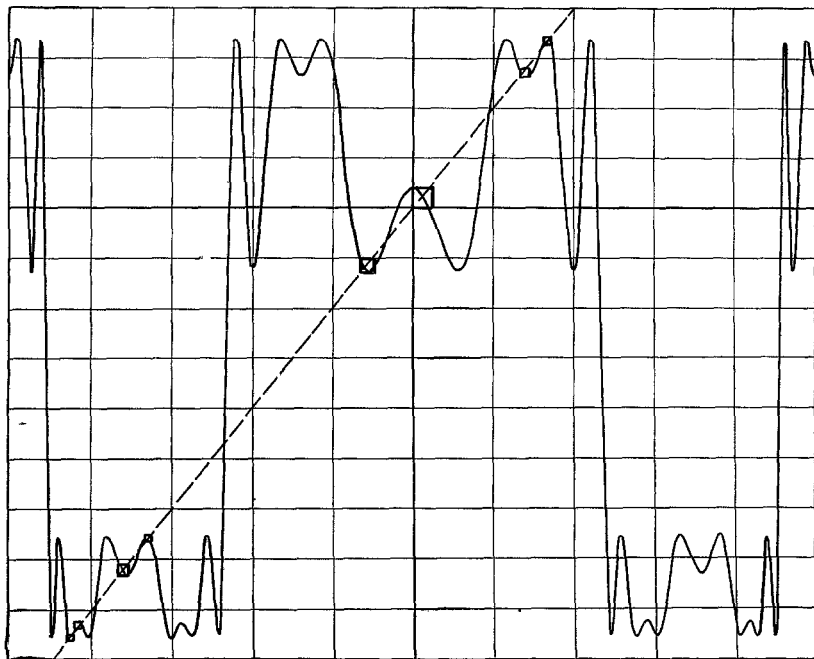


Рис. 10. Функция  $g_1$ .

Квадраты определяют положение элементов цикла.

четными функциями. Соответственно знак минус в аргументе  $g_1^2$  можно опустить.) Из (35) следует, что

$$g_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n}\left(\lambda_n, \frac{x}{(-\alpha)^n}\right) \quad (38)$$

(мы ввели скейлинг (37), чтобы каждому удвоению периода соответствовала одна степень  $\alpha$ , поскольку каждая последовательная итерация в  $f^{2^n}$  уменьшает масштаб в  $\alpha$  раз).

Теперь мы можем обобщить соотношения (35) и (38) и определить семейство универсальных функций  $g_r$ :

$$g_r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n}\left(\lambda_{n+r}, \frac{x}{(-\alpha)^n}\right). \quad (39)$$

Чтобы понять смысл этих функций, заметим, что  $g_0$  определяет положение элементов цикла: они являются ее неподвижными точками и одновременно

по экстремумам. По  $g_1$  можно определить положение этих же элементов, но уже по два элемента на экстремум. Аналогично  $g_r$  определяет положение  $2^r$  элементов цикла на каждый экстремум вблизи неподвижной точки. Поскольку при всех  $r$  каждая из функций  $f^{2^n}$  растянута в  $(-\alpha)^n$  раз, масштабы всех  $g_r$  совпадают. И в самом деле, все  $g_r$  при  $r > 1$  подобны  $g_1$  на рис. 10, с тем отличием, что каждый экстремум расположен несколько выше, чтобы мог разместиться  $2^r$ -цикл. Поскольку каждый экстремум для размещения циклов с возрастающими порядками должен подрастать на все меньшую и меньшую величину, мы приходим к выводу, что должен существовать предел

$$g(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} g_r(x). \quad (40)$$

Из (39) следует, что

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n} \left( \lambda_\infty, \frac{x}{(-\alpha)^n} \right). \quad (41)$$

В отличие от функций  $g_r$ ,  $g(x)$  есть предел функций  $f^{2^n}$  при фиксированном значении  $\lambda$ . В самом деле, в этом заключается особая роль изолированного значения  $\lambda_\infty$ , при котором многократные итерации и скейлинг приводят к сходящейся функции.

Теперь мы можем вывести уравнение, которому подчиняется функция  $g$ . Легко проверить, что, аналогично (37), все  $g_r$  связаны соотношениями

$$g_{r-1}(x) = -\alpha g_r \left( g_r \left( -\frac{x}{\alpha} \right) \right). \quad (42)$$

Из (40) следует, что  $g$  удовлетворяет уравнению

$$g(x) = -\alpha g \left( g \left( \frac{x}{\alpha} \right) \right). \quad (43)$$

Читатель может проверить, что уравнение (43) инвариантно относительно растяжения  $g$ . Следовательно, теория ничего не говорит об абсолютном масштабе, и мы можем зафиксировать его «руками», положив

$$g(0) = 1. \quad (44)$$

Кроме того, мы должны указать природу максимума  $g$  при  $x = 0$  (он должен быть, например, квадратичным). Наконец, поскольку  $g$  строится итерациями  $a - x^2$ , она должна быть гладкой функцией, зависящей от  $x$  через  $x^2$ . Уравнение (43) с такими дополнительными условиями имеет единственное решение. Из (44) и (43) следует, что

$$g(0) = 1 = -\alpha g(g(0)) = -\alpha g(1),$$

т. е.

$$\alpha = -\frac{1}{g(1)}. \quad (45)$$

Следовательно, уравнение (43) определяет  $\alpha$  вместе с  $g$ .

Обсудим теперь природу уравнения (43) — так называемого функционального уравнения. Поскольку  $g$  является гладкой, используя значения в конечном числе точек и какую-нибудь достаточно гладкую интерполяцию, можно приближенно определить эту функцию на интервале, содержащем эти точки. Отсюда, с некоторой степенью точности, уравнение (43) можно заменить конечной системой нелинейных уравнений. Точное же уравнение (43) является бесконечномерным нелинейным векторным уравнением. Соответственно мы получили решение задачи об удвоении периода одномерных итераций, сведя ее к бесконечномерной универсальной проблеме. Уравнение (43) должно быть бесконечномерным,

поскольку отвечает за бесконечное число элементов цикла, положение которых надо определить в задаче об удвоении периода. Строгая теория уравнений типа (43) пока еще не построена.

Здесь мы должны обсудить два момента. Во-первых, откуда возникает число  $\delta$ ? Во-вторых, как вычислить  $g_1$ -функцию, которая единственно и необходима для определения положения элементов цикла? Обе проблемы являются частью одной задачи. Соотношение (42) само по себе является итерационным алгоритмом. Однако, в отличие от (4), оно имеет дело с функциями. Аналогом функции  $f$  в (4) является операция, действующая в пространстве функций, состоящая из функционального произведения и последующего растяжения. Обозначим эту операцию буквой  $T$ , а элемент пространства функций —  $\psi$ . Тогда из (42) следует, что

$$T[\psi](x) = -\alpha\psi^2\left(-\frac{x}{\alpha}\right). \quad (46)$$

Используя операцию  $T$ , (42) можно привести к виду

$$g_{r+1} = T[g_r], \quad (47)$$

а (43) —

$$g = T[g]. \quad (48)$$

Итак,  $g$  является в точности неподвижной точкой  $T$ . Поскольку  $g$  есть предел последовательности  $g_r$ , мы можем получить  $g_r$  при больших  $r$ , линеаризуя  $T$  около ее неподвижной точки  $g$ . Как только мы получим  $g_r$  в этом линейном режиме, применяя повторно  $T$ , при помощи (47) получим  $g_1$ . Итак, мы должны исследовать устойчивость  $T$  в неподвижной точке  $g$ . Очевидно, однако, что  $T$  неустойчива в  $g$ : хотя при достаточно больших  $r$   $g_r$  произвольно близко подходит к  $g$ , последовательное применение  $T$  уводит  $g_r$  от  $g$ , как это видно из (47). Насколько неустойчива  $T$ ? Рассмотрим однопараметрическое семейство функций  $f_\lambda$ , являющееся «линией» в пространстве функций. Для каждой функции  $f$  имеется изолированное значение параметра  $\lambda_\infty$ , при котором функция, образованная многократным применением  $T$ , сходится к  $g$  (см. (41)). «Заполним» теперь пространство функций линиями, соответствующими различным  $f_\lambda$ . Совокупность всех точек на этих линиях, соответствующих  $f_{\lambda_\infty}$ , определяет «поверхность», повторное применение операции  $T$  к точкам которой дает функции, сходящиеся к  $g$ . Это устойчивая поверхность  $T$  («устойчивое многообразие»  $g$  относительно  $T$ ). Но через каждую точку на этой поверхности проходит соответствующая линия, являющаяся одномерной, поскольку параметризуется одним числом  $\lambda$ . Соответственно и  $T$  неустойчива только по одному направлению в пространстве функций. После линеаризации вблизи  $g$  эту неустойчивую линию можно записать в виде однопараметрического семейства

$$f_\lambda(x) = g(x) - \lambda h(x), \quad (49)$$

проходящего через  $g$  (при  $\lambda = 0$ ) и отклоняющегося от  $g$  вдоль одного направления  $h$ . Но  $f_\lambda$  является одной из наших функций (4)! Следовательно, при изменении  $\lambda$   $f_\lambda$  испытывает удвоение периода, при соответствующих значениях  $\lambda_n$  переходя к  $2^n$ -циклу. Из (41) следует, что  $\lambda_\infty$  для семейства функций (49) равно

$$\lambda_\infty = 0. \quad (50)$$

Из (1) следует, что

$$\lambda_n \sim \delta^{-n}. \quad (51)$$

Поскольку последовательное применение  $T$  вследствие (47) приводит к движению в противоположном направлении (удалению от  $g$ ), отсюда следует, что степень неустойчивости  $T$  по направлению  $h$  точно равна  $\delta$ .

Следовательно, мы определяем  $\delta$  и  $g_1$  следующим образом. Во-первых, мы должны линеаризовать операцию  $T$  вблизи неподвижной точки  $g$ . Затем мы должны определить устойчивые направления линеаризованного оператора. Более того, мы ожидаем, что имеется только одно неустойчивое направление. В самом деле, оказывается, что инфинитезимальные деформации  $g$  определяют *устойчивые* направления, тогда как единственное неустойчивое направление  $h$  характеризуется скоростью нарастания неустойчивости  $\delta$  (3). Соотношение (49) при  $\lambda = \lambda_r$  есть в точности  $g_r$  при асимптотически больших  $r$ . Таким образом,  $g_r$  асимптотически известна, и, двигаясь по последовательности функций  $g_r$  (повторно применяя (47)), мы можем добраться до  $g_1$ , а с ней получить полное описание  $2^n$ -циклов высокого порядка, очевидным образом являющееся универсальным.

Хотя мы и сказали, что функция  $g_1$  универсально определяет положение элементов цикла вблизи  $x = 0$ , мы должны отдавать себе отчет в том, что она не определяет положение всех элементов цикла. Это вытекает из того, что любой конечный интервал  $g_1$  (например, расстояние от  $x = 0$  до ближайшего элемента цикла) при получении этой функции после  $n$  растяжений был растянут в  $\alpha^n$  раз. И действительно, расстояние от  $x = 0$  до всех элементов  $2^n$ -цикла, положение которых достаточно точно определяется по  $g_1$ , при переходе к  $2^{n+1}$ -циклу сжимается в  $-\alpha$  раз. Однако совершенно очевидно, что некоторые элементы не подчиняются такому скейлингу: поскольку в (13)  $f(0) = a_n$ , а  $a_n \rightarrow a_\infty$  (определенному, отличному от нуля числу), расстояние от начала координат до дальнего правого элемента  $2^n$ -цикла при каждом удвоении периода отнюдь не уменьшалось в  $-\alpha$  раз. Отсюда следует, что мы должны определять положение правых элементов по отношению к самой правой точке. Если это проделать, окажется, что такие расстояния сжимаются в  $\alpha^2$  раз, так как являются образами отображенных через квадратичный максимум  $f$  близких к  $x = 0$  элементов, сжимающихся в  $-\alpha$  раз. Действительно, если отобразить  $g_1$  через максимум  $f$  (т. е. квадратично деформировать), в результате получится новая универсальная функция, определяющая положение элементов цикла вблизи самого правого элемента. Итак, для корректного описания цикла с большим периодом надо рассмотреть универсальные локальные группы элементов.

Можно точно указать пределы универсальности в расположении элементов цикла. Поскольку  $f(\lambda_1, x)$  точно определяет положение двух элементов 2-цикла и является приближением к  $g_1$  ( $n = 0$  в (35)), очевидно, что мы точно можем определить положение обеих точек, подбирая соответствующий масштаб  $g_1$ . Далее, вблизи  $x = 0$   $f^2(\lambda_2, x)$  является лучшей аппроксимацией  $g_1$  (необходимым образом сжатой). Однако, вообще говоря, чем точнее мы подберем масштаб  $g_1$  для вычисления положения самых близких к  $x = 0$  элементов 2-цикла, тем больше будет ошибка в определении самых правых элементов. Далее, вблизи  $x = 0$   $f^4(\lambda_3, x)$  является еще более хорошим приближением к  $g_1$ . Очевидно, что соответствующим образом сжатая  $g_1$  позволяет определить положение нескольких точек цикла вблизи  $x = 0$  достаточно аккуратно, но положение дальних правых элементов определяется еще хуже. Таким образом, по правилу сжатой  $g_1$  можно определить  $2^r$  ближайших к  $x = 0$  точек  $2^r$ -цикла, где  $r \ll n$ . Если рассмотреть окрестность одной из этих  $2^r$  точек, расположенной на определенном расстоянии от  $x = 0$ , то из (35) следует, что чем больше  $n$ , тем в большее число раз растягивается расстояние от этой области до  $x = 0$  и, следовательно, тем хуже становится точность определения в ней неподвижных точек при помощи  $g_1$ . Однако подобно тому, как мы подобрали видоизмененную функцию  $g_1$  для определения положения дальних правых элементов цикла, можно подобрать соответствующую

функцию и для этой выбранной окрестности. Соответственно, универсальное описание строится с допустимым огрублением: если мы можем «измерить»  $f^{2^n}$  при каком-нибудь определенном значении  $n$ , то воспользуемся точными положениями элементов  $2^n$ -цикла для привязки  $2^n$  соответствующих модификаций  $g_1$ . Положение новых элементов цикла при дальнейших удвоениях периода мы определим по этим функциям. Итак, *чем точнее нам надо знать положение произвольных элементов циклов высоких порядков, тем больше параметров нам надо измерить* (именно, положений элементов цикла после какого-то определенного удвоения периода). В этом смысле теория универсальности является асимптотической. Ее хорошая предсказательная способность есть счастливое следствие большой скорости сходимости  $\delta$  ( $\sim 4,67$ ). Благодаря этому обычно после двух или трех удвоений периода точность асимптотической теории достигает нескольких процентов. Если поведение системы с удвоением периода *измеряется* на этапе 4- или 8-цикла, оно с точностью до этих же нескольких процентов может быть вычислено на всем протяжении процесса удвоения периода.

Для получения точных динамических предсказаний не надо строить все локальные версии  $g_1$ , достаточно знать лишь локальное изменение масштаба (*скейлинг*) вдоль всего аттрактора. Величина скейлинга равна  $-\alpha$  для  $x = 0$  и  $\alpha^2$  для самого правого элемента. Но каковы его значения в произвольных точках? Мы определим закон изменения масштаба, если упорядочим элементы цикла не по их положению на  $x$ -оси, а по их порядку в итерациях точки  $x = 0$ . Поскольку именно в этом порядке процесс развивается во времени, получившийся результат обладает большой предсказательной силой. Закон скейлинга позволяет рассчитать спектр систем с удвоением периода в момент возникновения турбулентности.

Что мы должны вычислить? Прежде всего отметим следующее. Как ближайший к точке  $x = 0$  элемент  $2^n$ -цикла расположен точно посередине цикла, начинающегося с  $x = 0$ , так и ближайший элемент к произвольно выбранной точке расположен точно посередине начинающегося с нее цикла. Пусть  $d_n(m)$  — расстояние между  $m$ -й точкой  $2^n$ -цикла ( $x_m$ ) и ближайшим к ней элементом. (Величина  $d_n$  в (28) есть  $d_n(0)$ .) Как только что было объяснено,

$$d_n(m) = x_m - f^{2^{n-1}}(\lambda_n, x_m). \quad (52)$$

Но  $x_m$  есть  $m$ -я итерация  $x_0 = 0$ . Вспоминая (см. (6)), что показатели степени в композиции функций коммутируют, получим

$$d_n(m) = f^m(\lambda_n, 0) - f^m(\lambda_n, f^{2^{n-1}}(\lambda_n, 0)). \quad (53)$$

Пусть  $m = 2^{n-r}$ , тогда

$$\begin{aligned} d_n(2^{n-r}) &= f^{2^{n-r}}(\lambda_n, 0) - f^{2^{n-r}}(\lambda_n, f^{2^{n-1}}(\lambda_n, 0)) = \\ &= f^{2^{n-r}}(\lambda_{(n-r)+r}, 0) - f^{2^{n-r}}(\lambda_{(n-r)+r}, f^{2^{n-1}}(\lambda_n, 0)). \end{aligned} \quad (54)$$

Для  $r \ll n$  (но  $r \gg 1$  при больших  $n$ ), используя (39), получаем

$$d_n(2^{n-r}) \sim (-\alpha)^{-(n-r)} [g_r(0) - g_r((-\alpha)^{n-r} f^{2^{n-1}}(\lambda_n, 0))],$$

или

$$d_n(2^{n-r}) \sim (-\alpha)^{-(n-r)} [g_r(0) - g_r((-\alpha)^{-r+1} g_1(0))]. \quad (55)$$

Нам нужно определить локальное изменение масштаба вблизи  $m$ -го элемента, т. е. расстояние от  $m$ -й итерации  $x = 0$  до ближайших элемен-

тов при следующих  $n$ . Если обозначить этот закон изменения масштаба буквой  $\sigma$ , то

$$\sigma_n(m) \equiv \frac{d_{n+1}(m)}{d_n(m)}. \quad (56)$$

(Сравнивая с определением  $\alpha$  (28), отметим, что  $\sigma_n(0) \sim (-\alpha)^{-1}$ .) Снова полагая  $m = 2^{n-r}$ , где  $r \ll n$ , получим при помощи (55), что

$$\sigma(2^{n-r}) \sim \frac{g_{r+1}(0) - g_{r+1}((- \alpha)^{-r} g_1(0))}{g_r(0) - g_r((- \alpha)^{-r+1} g_1(0))}. \quad (57)$$

Наконец, изменим масштаб оси итераций таким образом, чтобы между всеми  $2^{n+1}$  итерациями был единичный интервал. Обозначим получившуюся ось  $t$ , тогда значение  $t$  у  $m$ -го элемента  $2^n$ -цикла равно

$$t_n(m) = \frac{m}{2^n}. \quad (58)$$

В частности, имеем

$$t_n(2^{n-r}) = 2^{-r}. \quad (59)$$

Естественно определить  $\sigma$  вдоль  $t$ -оси следующим образом:

$$\sigma(t_n(m)) \sim \sigma_n(m) \quad (\text{при } n \rightarrow \infty),$$

тогда из (57) и (59) вытекает, что

$$\sigma(2^{-r-1}) = \frac{g_{r+1}(0) - g_{r+1}((- \alpha)^{-r} g_1(0))}{g_r(0) - g_r((- \alpha)^{-r+1} g_1(0))}. \quad (60)$$

Значения  $\sigma$  для всех  $t$  получить не на много сложнее. Сначала рассмотрим рациональные  $t$  и перейдем к двоичному представлению:

$$t_{r_1 r_2 r_3 \dots} = 2^{-r_1} + 2^{-r_2} + \dots$$

При аппроксимации  $2^n$ -цикла нам требуется  $\sigma_n$  вблизи  $(2^{n-r_1} + 2^{n-r_2} + \dots)$ -й итерации точки  $x = 0$ . Но, вследствие (8),

$$f^{2^{n-r_1} + 2^{n-r_2} + \dots} = f^{2^{n-r_1}} \circ f^{2^{n-r_2}} \circ \dots$$

После преобразований, аналогичных использованным при переходе от (54) к (60), получаем, что значение  $\sigma$  при таких  $t$  равно (60), в котором функции  $g_r$  заменены на соответствующие итерации разных  $g_r$ .

Остался последний момент в вычислении  $\sigma$ . Мы знаем, что  $\sigma(0) = -\alpha^{-1}$ . Кроме того,  $\sigma_n(1) \sim \alpha^{-2}$ . Но из (59) вытекает, что

$$t_n(1) = 2^{-n} \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что  $\sigma$  разрывна при  $t = 0$ :  $\sigma(0 - \varepsilon) = -\alpha^{-1}$  и  $\sigma(0 + \varepsilon) = \alpha^{-2}$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ). В самом деле, поскольку  $x_{2^{n-r}}$  лежат всегда очень близко к  $x = 0$ , каждая из этих точек преобразуется квадратично. Поэтому (60) на самом деле определяет  $\sigma(2^{-r-1} - \varepsilon)$ , тогда как  $\sigma(2^{-r-1} + \varepsilon)$  получается заменой каждого  $g_r$  в числителе и знаменателе его квадратом. Эта же замена должна быть сделана в каждом содержащем разные  $g_r$  члене для значения  $\sigma$  в рациональном  $t$ .

Итак, мы получили следующие результаты. Функция  $\sigma(t)$  может быть вычислена при любых значениях  $t$ . Она является универсальной, поскольку процедура ее вычисления зависит только от универсальных функций  $g_r$ . Функция  $\sigma$  разрывна во всех рациональных точках. Однако можно показать, что чем больше число членов в двоичном разложении

рационального  $t$ , тем меньше величина разрыва  $\sigma$ . Далее, поскольку в пределе  $n \rightarrow \infty$  конечное число итераций не меняет значения  $t$ ,  $\sigma$  должна

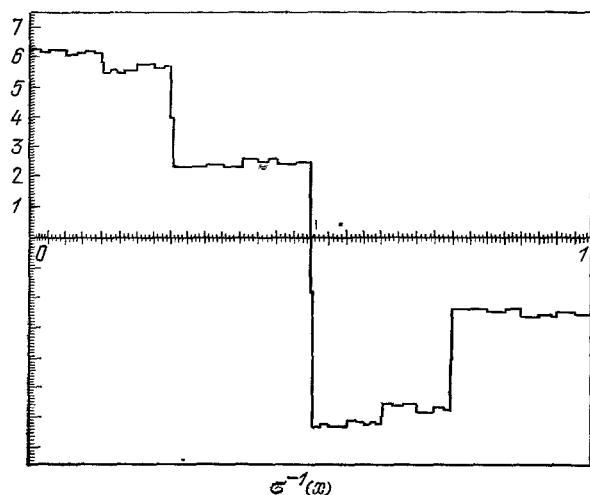


Рис. 11. Скейлинговая функция вдоль траектории.  
Отметьте, что  $\sigma(t + 1/2) = -\sigma(t)$ .

быть непрерывной всюду кроме рациональных точек. На рис. 11 изображена функция  $1/\sigma(x)$ . Несмотря на патологическую структуру, при  $0 < t < 1/4$  эта функция, как может убедиться читатель, приближенно равна  $\alpha^{-1}$ , а при  $1/4 < t < 1/2$ :  $\alpha^{-2}$ . Для большей точности надо разбить пополам каждый такой отрезок; на получившихся интервалах  $\sigma$  меняется в меньших пределах. И так далее. (Легко проверить, используя (52), что  $\sigma$  периодична по  $t$  с периодом 1. Кроме того,

$$\sigma = \left(t + \frac{1}{2}\right) = -\sigma(t).$$

Следовательно, существенным является только интервал  $0 < t < 1/2$ . Вычислив  $\sigma$ , мы, наконец, закончили исследование одномерных отображений.

#### УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ В СИСТЕМАХ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ИЗМЕРЕНИЙ

До сих пор мы обсуждали одномерные отображения, прототипом которых являлась функция (15). Отображение (14) — пример двумерной итерации — обладает специальным свойством сохранения площади. Обобщая (14), получим отображение

$$x_{n+1} = y_n - x_n^2$$

и

$$y_{n+1} = a + bx_n, \quad (61)$$

при  $|b| < 1$  являющееся сжимающим. Отображение (61) интересно тем, что имеет так называемый *странный аттрактор*. Такой аттрактор (как и выше) образуется при повторном наложении кривой самой на себя (рис. 12), в результате чего две очень близко расположенные друг от друга начальные точки находятся очень далеко друг от друга, если измерять расстояние вдоль аттрактора (по которому они, собственно, и движутся при итерациях). Это приводит к тому, что после нескольких итераций они будут расположены далеко друг от друга как вдоль аттрактора, так и в реальном пространстве. Этот общий механизм приводит к тому, что поведение системы очень сильно зависит от начальных условий и имеет полностью статистический характер: малейшие различия в начальных условиях быстро нарастают, а так как начальные условия не известны с бесконечной точностью, все имеющееся знание быстро превращается в полное незнание. И оказывается, что (61) переходит к ранним стадиям статистического поведения через удвоение периода. Более того, число  $\delta$  (3) снова является скоростью перехода к хаотическому режиму, а число



$\alpha$  (31) — скоростью, с которой уменьшается расстояние между соседними точками аттрактора. И вообще, одномерная теория объясняет все поведение (61) в начале хаотического режима.

Размерность, в действительности, не имеет значения. Эта же теория с этими же числами и всем прочим применима для итераций в  $N$ -мерном пространстве, лишь бы система испытывала удвоение периода. Где бы ни происходило *бесконечное* удвоение периода, основную роль играют свойства функционального произведения. Соответственно модификация уравнения (29) содержит функциональное произведение функций, зависящих от  $N$  переменных. Если рассматриваемое отображение в  $N$ -мерном пространстве является сжимающим (при диссипативном процессе), то, вообще говоря, имеется направление наиболее медленного сжатия, и после нескольких итераций процесс становится эффективно одномерным. Другими словами, одномерное решение уравнения (29) всегда есть решение его  $N$ -мерного аналога. Оно представляет собой соответствующую неподвижную точку  $N$ -мерного уравнения, если итерируемая функция является сжимающей.

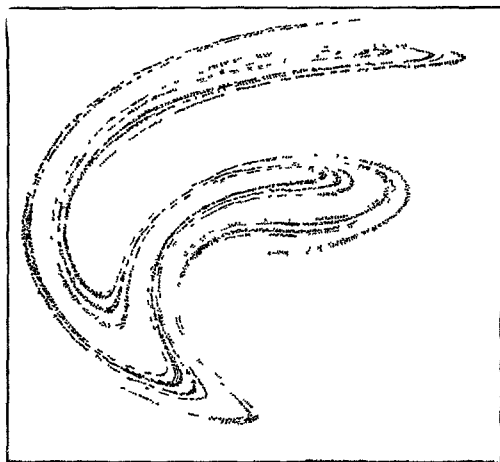


Рис. 12. Показаны точки, лежащие на «странном аттракторе» уравнения (62).

## УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ В ПОВЕДЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Следующее обобщение касается систем дифференциальных уравнений. Прототипом для их рассмотрения служит уравнение Дюффинга — неавтономный ангармонический осциллятор с затуханием:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = b \sin 2\pi t. \quad (62)$$

Период вынуждающей силы, равный 1, определяет естественный временной интервал. На рис. 13, а показан аттрактор с периодом 1, обычно называемый *предельным циклом*. Он является аттрактором, так как к нему притягиваются решения (62) из некоторой области начальных условий. Его период равен 1, так как траектория системы описывает одну и ту же кривую в течение каждого периода вынуждающей силы. На рис. 13, б и в показаны аттракторы с периодом 2 и 4, возникающие при последовательном уменьшении коэффициента трения  $k$  в (62). Значения параметра  $k = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  есть коэффициенты трения, при которых соответствующие  $2^n$ -циклы являются наиболее устойчивыми (по аналогии с одномерной функциональной итерацией). И действительно, осциллятор испытывает (по крайней мере, численно!) *бесконечную* последовательность удвоений периода. При  $k = \lambda_5 \delta_3$  (см. (2)) равно 4,69. Чем это объясняется? Давайте вместо того, чтобы рассматривать всю траекторию, показанную на рис. 13, будем следить за положением точки на траектории через интервал времени, равный одному периоду вынуждающей силы. Тогда 1-цикл дает только одну точку, 2-цикл — две и т. д. Такое *стробоскопическое отображение* (с интервалом в 1 период), связывающее положение

точки на траектории  $(x, \dot{x})$  в данный момент с положением через один период, вследствие дифференциального уравнения является гладкой и обратимой двумерной функцией. Качественно оно подобно отображению (61). При существующем уровне развития теории мало можно сказать об аналитическом виде стробоскопического отображения. Однако, поскольку наша теория является универсальной, знание его точной формы

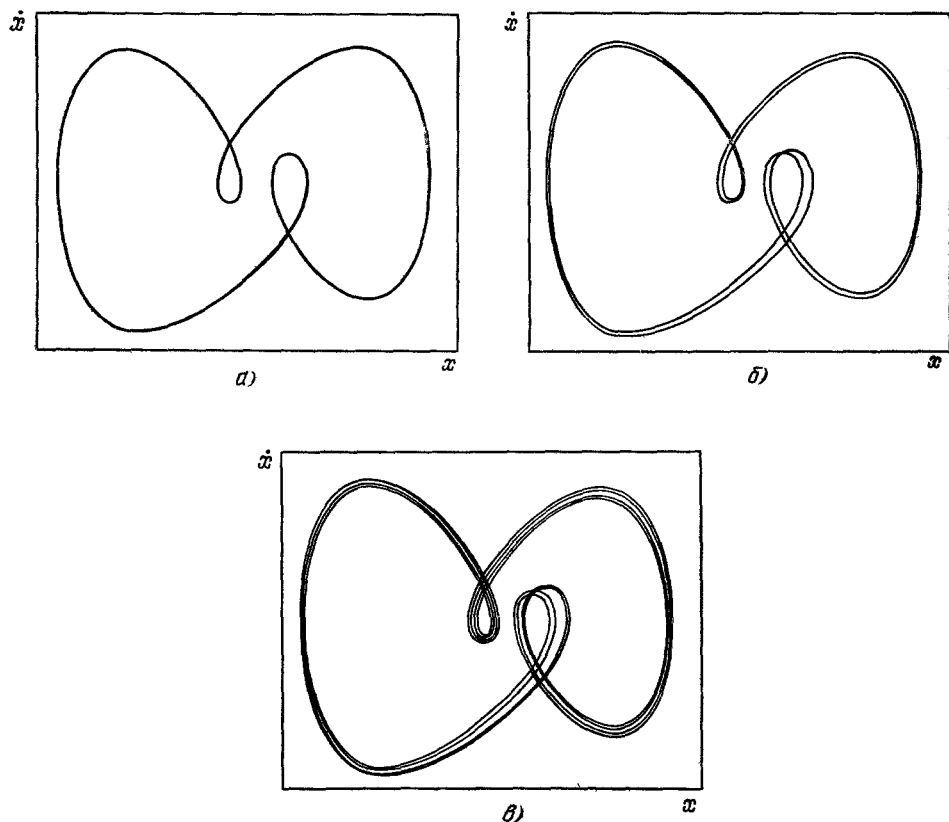


Рис. 13. а) Наиболее устойчивый 1-цикл уравнения (62) на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$ ; б) наиболее устойчивый 2-цикл этого же уравнения (отметьте, что он состоит из двух смещенных друг относительно друга копий рис. 13, а); в) наиболее устойчивый 4-цикл (отметьте, что между смещенными копиями рис. 13, б большое или малое расстояние).

и не является необходимым. Мы по-прежнему можем получить полное количественное описание поведения уравнения (62) на пороге хаотического движения. Предположим, что мы измерили точную форму траектории после нескольких удвоений периода. Тогда, аккуратно используя универсальную теорию для определения расстояния между элементами цикла, можно вычислить форму траектории во всей области возникновения хаотического режима при дальнейшем уменьшении трения.

Рассмотрим подробнее, как работает наша теория. Исследуем стробоскопическое отображение уравнения Дюффинга при наиболее устойчивом  $2^n$ -цикле. В частности, рассмотрим элемент, значение скейлинга (см. рис. 11) у которого равно  $\sigma_0$  и не изменяется при следующей итерации. (Этот элемент расположен не у большого разрыва  $\sigma$ .) Интуитивно ясно, что если провести стробоскопическое исследование траектории в другие (по сравнению с предыдущим исследованием) моменты времени, мы полу-

чим то же значение скейлинга  $\sigma_0$  для этой части траектории. Отсюда следует, что дифференциальное уравнение позволяет непрерывно продолжить скейлинговую функцию на функцию, определенную вдоль всей траектории (таким образом, что если две последовательные точки на траектории, разделенные интервалом времени в 1 период, имеют скейлинг  $\sigma_0$ , то и весь кусок функции на этом единичном интервале имеет скейлинг  $\sigma_0$ ). Вводя в предыдущем разделе скейлинг как функцию  $t$ , мы имели в виду использование ее именно для такой цели.

Первый шаг в осуществлении нашего замысла состоит в том, чтобы определить аналог  $d_n$ . Для этого мы возьмем расстояние между точками на траектории в моменты времени  $t$  и  $t + (T_n/2)$ , где период системы на  $2^n$ -цикле есть

$$T_n \approx 2^n T_0, \quad (63)$$

т. е. мы определяем

$$d_n(t) = x_n(t) - x_n\left(t + \frac{T_n}{2}\right). \quad (64)$$

(Для каждой из  $N$  переменных системы  $N$  дифференциальных уравнений имеется своя величина  $d$ .) Поскольку  $\sigma$  по определению периодична с периодом 1, имеем

$$d_{n+1}(t) \sim \sigma\left(\frac{t}{T_{n+1}}\right) d_n(t). \quad (65)$$

Соотношение (65), содержащее зависимость от  $n$  только через  $T_n$  в аргументе  $\sigma$  и не зависящее от конкретного вида  $\sigma$ , уже является сильным предсказанием: отношение

$$\frac{d_{n+1}(t)}{d_n(t)},$$

построенное в таком масштабе  $t$ , что  $T_n = 1$ , есть функция, не зависящая от  $n$ . Поэтому, если (65) имеет место для некоторой  $\sigma$ , в какой бы системе это ни выполнялось, то, зная  $x_n(t)$ , мы можем вычислить  $d_n(t)$  и  $d_{n+1}(t)$  из (65). Вследствие периодичности, уравнение (64) с заменой  $n \rightarrow n+1$  может быть разрешено относительно  $x_{n+1}(t)$  (при помощи фурье-преобразования). Итак, если мы измерили зависимость любой координаты системы в  $2^n$ -цикле, то можно вычислить зависимость этой координаты от времени в  $2^{n+1}$ -цикле. Поскольку описанная процедура является рекуррентной, мы можем вычислить эволюцию координаты во всех высших циклах вплоть до предела бесконечного удвоения периода. Если (65) имеет место, а функция  $\sigma$  неизвестна, то, измеряя  $d_n(t)$  и  $d_{n+1}(t)$ , можно построить  $\sigma$  при помощи (65) и затем определить поведение системы при всех последующих удвоениях периода. Следовательно, соотношение (65) является очень сильным результатом. В действительности мы знаем, однако, гораздо больше. Теория универсальности говорит нам, что удвоение периода универсально и что существует *единственная* функция  $\sigma$ , которую мы и вычислили в предыдущем разделе. Следовательно, измеряя  $x(t)$  на каком-то определенном  $2^n$ -цикле, мы можем полностью предсказать эволюцию системы на пути к турбулентности. При этом чем больше  $n$ , тем больше параметров надо определить эмпирически и тем более точными будут предсказания.

Насколько хорошо работает эта теория? На рис. 14, а и б показаны эмпирически определенные по (65) функции  $\sigma$  для (62) при  $n = 3$  и  $n = 4$  соответственно. Графики были построены так: по оси ординат откладывалось отношение  $d_{n+1}$  к  $d_n$ , а масштаб по  $t$  соответствовал  $T = 16$  на рис. 14, а и  $T = 32$  на рис. 14, б. Закон скейлинга (65) очевидным образом соблю-

дается. Более того, на рис. 15 на одном графике приведен эмпирический вид  $\sigma$  при  $n = 4$  и эта же функция, вычисленная теоретически (см. рис. 11). Читатель может убедиться в детальном совпадении обеих кривых. Если

воспользоваться (65) с теоретически определенной  $\sigma$  и, исходя из  $n = 2$ , вычислить частотный спектр при  $n = 5$ , получится 10%-е совпадение с опытом (по  $n = 4$  спектр при  $n = 5$  определяется с 1%-й точностью). Итак, асимптотическая теория универсальности является правильной и хорошо работает даже при  $n = 2$ !

Как указывалось выше, уравнения (64) и (65) решаются при помощи преобразования Фурье. В результате получается рекуррентная схема, позволяющая определить коэффициенты Фурье  $x_{n+1}(t)$  через коэффициенты Фурье  $x_n(t)$  и преобразование Фурье известной функции  $\sigma(t)$ . Чтобы точно вычислить каждый коэффициент для  $x_{n+1}(t)$ , надо знать полный спектр  $x_n$  (амплитуду и фазу). Имеется, однако, локальное приближение, позволяющее грубо определить амплитуду коэффициентов  $x_{n+1}$  только через амплитуду  $x_n$  вблизи требуемой частоты.

Как выглядит спектр системы, испытывающей удвоение периода? Каждый раз при удвоении периода основные частоты делятся пополам; в данном случае удвоение периода называется бифуркацией с появлением половинной

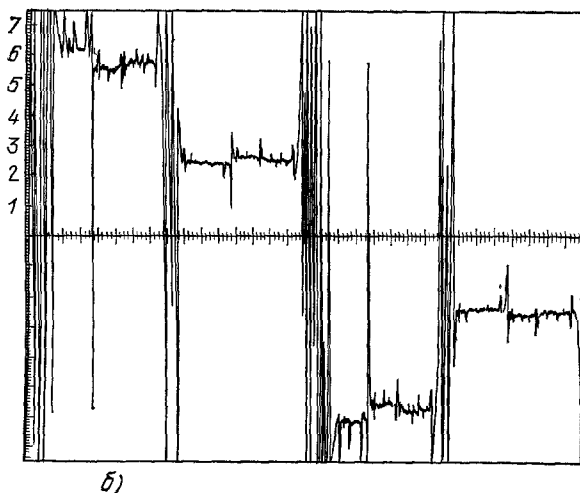
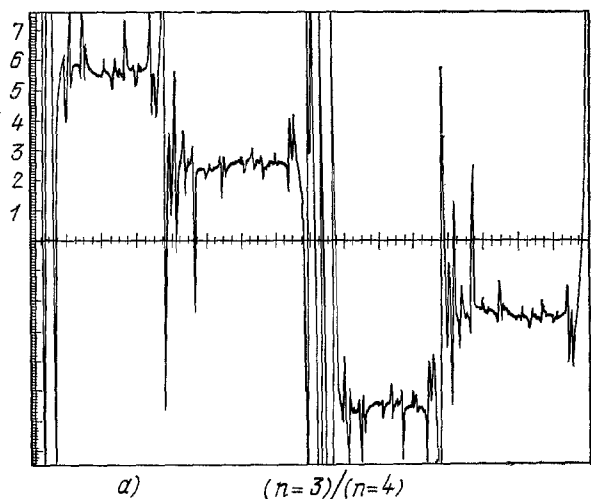


Рис. 14. а) Отношение расстояний между ближайшими копиями в 8- и 16-циклах для уравнения (62); б) это же отношение, но для 16- и 32-циклов (ось времени сжата в два раза).

субгармоники. Оно является типичным для поведения связанных нелинейных дифференциальных уравнений. Поскольку движение почти воспроизводится через период действия вынуждающей силы, амплитуда исходной гармоники высока. После первой бифуркации появляются нечетные гармоники половинной частоты. Их амплитуда по мере перехода к апериодическому режиму насыщается на некотором определенном уровне. Поскольку движение с большей точностью воспроизводится каждые два периода вынуждающей силы, следующие субгармоники, являющиеся

нечетными гармониками одной четверти основной частоты, насыщаются на меньшем уровне, чем предыдущие, и так происходит со всеми  $2^n$ -суб-

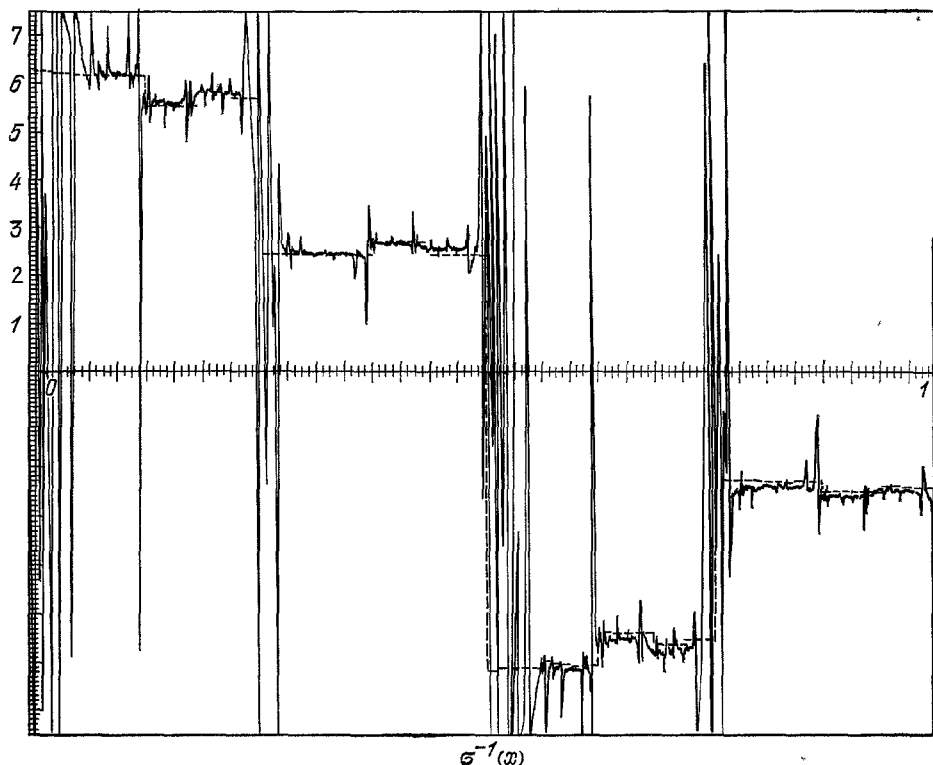


Рис. 15. Графики на рис. 14, б и 10 наложены друг на друга для сравнения универсальной скейлинговой функции  $\sigma$  и эмпирически вычисленного скейлинга расстояний между ближайшими копиями в 16- и 32-циклах уравнения (62).

гармониками. Из теории вытекает такое приближенное предсказание: каждое следующее семейство субгармоник насыщается на уровне, рас-

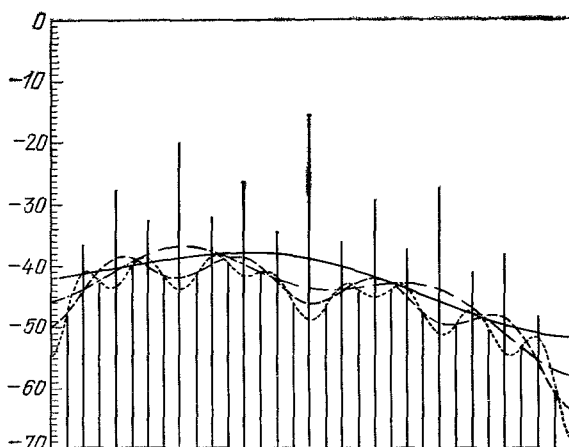


Рис. 16. Спектр субгармоник уравнения (62) в 32-цикле.

Пунктиром показана интерполяция для нечетных гармоник 32-й субгармоники; штриховая, штрих-пунктирная и сплошная линии — то же для, соответственно, 16-й, 8-й и 4-й субгармоники. Уровень каждой кривой понижен, соответственно, на 8, 2, 16, 4 и 24,6 дБ.

положенном на 8,2 дБ ниже предыдущего. (Для уравнения (62) это показано на рис. 16.) После бесконечного числа бифуркаций система ведет себя аperiодически, у нее образуется сплошной спектр, начинающийся с нуле-

вой частоты и имеющий определенное распределение по энергии, т. е. после описанного процесса в системе возникает начальная стадия широкополосного шума детерминированной природы. Аналогичный процесс имеет место при возникновении турбулентности в жидкости.

### ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Существующее объяснение развития турбулентности основывается на теории Ландау 1944 г. Объяснение состоит в том, что система становится турбулентной вследствие последовательности неустойчивостей, в результате каждой из которых развивается периодическое во времени движение с новой степенью свободы (вследствие независимости фазы). Частоты движений возрастают от неустойчивости к неустойчивости и являются несоизмеримыми. Поскольку получающееся в результате движение есть суперпозиция этих мод, оно является квазипериодическим.

Из экспериментов, однако, следует, что предположение о квазипериодичности неверно. Напротив, чтобы в результате получился наблюдаемый экспериментально шум с быстрым спадом корреляций, спектр должен быть *непрерывным* (шум должен быть широкополосным) вплоть до нулевой частоты. Этот недостаток теории можно устранить, если предположить, что при развитии турбулентности образуются последовательные субгармоники. Если общая идея последовательных неустойчивостей сохраняется, новые моды *не* имеют независимой фазы. Причем для получения требуемого спектра необходимо возбудить только малое число мод (в настоящее время вопрос о числе принимающих участие в переходе мод экспериментально не исследован). При этом знания фаз малого числа амплитуд на ранней стадии процесса удвоения периода достаточно для определения фаз в переходном режиме. Здесь важно то, что полностью детерминированная система может иметь и имеет полностью статистические свойства. Привлечение специальной статистической гипотезы не обязательно (и, вообще говоря, не совместимо с динамикой системы).

Полное теоретическое описание развития турбулентности требует расчета последовательных неустойчивостей. Обычно для этого используется теория возмущений. Начинаем с установившегося решения и добавляем малое зависящее от времени возмущение. Уравнения гидродинамики линеаризуются вблизи установившегося решения, и исследуется устойчивость возмущения. К настоящему времени аналитически вычислена только первая неустойчивость. Если нам известно значение параметра (например, число Рэлея), при котором возникает эта первая переменная во времени неустойчивость, мы должны определить точное решение, которое возникает в *нелинейном* режиме после развития неустойчивости. К этому решению добавляем новое зависящее от времени возмущение, снова линеаризуем уравнения (теперь уже вблизи найденного переменного во времени неаналитического решения) с тем, чтобы найти новую неустойчивость. Этот второй этап задачи к настоящему времени решен только численно. Такой процесс, в принципе, может быть повторен снова и снова, пока не будет получено решение, хорошо описывающее турбулентный поток. На каждом следующем этапе трудности вычислений неизмеримо возрастают.<sup>1</sup>

Однако именно в этом месте теория универсальности решает проблему. Она применима после того, как возникло достаточное для достижения асимптотического режима число неустойчивостей. Поскольку двух неустойчивостей уже достаточно для приближенного описания, необходимо всего несколько параметров для каждой моды, чтобы теория завершила бесконечный каскад более сложных неустойчивостей.

Почему применима наша теория? Уравнения гидродинамики являются системой полевых уравнений. При помощи разложения Фурье их можно привести к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку жидкость вязкая, имеется некоторый минимальный пространственный масштаб возмущений. Поэтому реально получившаяся система дифференциальных нелинейных уравнений является конечной. Число уравнений в ней несущественно. Теория универсальности является общей для всех систем уравнений с диссипацией. Поэтому представляется возможным, что поток испытывает удвоение периода. Если это происходит, теория применима. Однако доказательство того, что данный поток (или

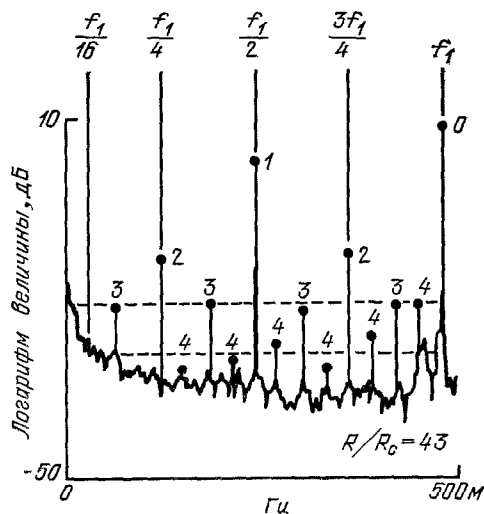


Рис. 17. Экспериментальный спектр конвектирующей жидкости при переходе к турбулентности<sup>16</sup>.

вообще любой поток) испытывает удвоение периода, пока вне наших возможностей. Все, что мы можем делать, — экспериментировать.

На рис. 17 показан экспериментально измеренный спектр конвективной ячейки жидкого гелия в начальной стадии турбулентности. Система испытывает четыре или пять экспериментально различных удвоения периода; спектральные компоненты каждого семейства нечетных субгармоник помечены номером соответствующего удвоения периода. Штриховые линии представляют собой грубые интерполяции для амплитуды компонент с  $n = 3$  и  $n = 4$ , вычисленные по уровню с  $n = 2$  (считается, что субгармоники с  $n = 2$  достигли своего асимптотического положения). Так как информации мало и она чисто амплитудная, интерполяции по необходимости плохие. Кроме того, амплитуды более высоких нечетных субгармоник не известны и это не позволяет построить сколько-нибудь приемлемую интерполяцию для правой части рисунка. Соответственно, для самой грубой проверки правая амплитуда не учитывалась, а осцилляции были сглажены путем усреднения. Экспериментальные результаты  $-8,3$  дБ и  $-8,4$  дБ находятся в неожиданно хорошем согласии с теоретическим значением  $8,2$  дБ!

Исходя из этого хорошего согласия с экспериментом и того, что в системе происходит большое число удвоений периода, мы можем считать доказанным, что поток переходит к турбулентности в соответствии с нашей теорией. Конечно, самым убедительным доказательством было бы экспериментальное определение величины  $\alpha$ . (Достигнутое в настоящее время разрешение для этого недостаточно.) Если, однако, обратить наши аргументы, мы придем к выводу, что согласие в пределах нескольких процен-

тов при определении 8,2 дБ означает *экспериментальное определение  $\alpha$*  с такой же точностью. Итак, данный метод позволил провести теоретическое рассмотрение поведения динамической системы там, где это невозможно сделать, исходя из уравнений Навье — Стокса. И вообще, закон скейлинга (65) применим к *истинным* уравнениям, какими бы они ни были.

## ЛИТЕРАТУРА \*)

1. Feigenbaum M. J.— J. Stat. Phys., 1978, v. 19, p. 25; 1979, v. 21, p. 669; Lecture Notes in Physics, 1979, v. 93, p. 163; Comm. Math. Phys., 1980, v. 77, p. 65.
2. Монин А. С.— УФН, 1978, т. 125, с. 97.
3. Рабинович М. И.— Ibid., с. 123.
4. Чириков В. В.— Phys. Rept., 1979, v. 52, p. 263.
5. Helleman R.— In: Fundamental Problems in Statistical Mechanics/Ed. by E. G. D. Cohen, North Holl. Publ., Amsterdam; New York: North-Holland, 1980.— V. 5, p. 165.
6. Ескманн J. P.— Rev. Mod. Phys., 1981, v. 53, p. 643.
7. Ott E.— Ibid., p. 655.
8. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.— Природа, 1981, № 2, с. 54.
9. Синай Я. Г.— Природа, 1981, № 3, с. 72.
10. Physics Today, 1981, v. 34, No. 3, p. 17.
11. Hofstadter D.— Sci. American, 1981, v. 245, p. 16.
12. Чириков В. В.— Природа, 1982, № 7, с. 15.
13. Degen H.— Phys. Rev. Ser. A, 1982, v. 26, p. 711.
14. Hu B., Maо J. M.— Ibid., v. 25, p. 3259.
15. Testa J., Pérez J., Jeffries C.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 1349.
16. Libchaber A., Maurer J.— I. de Phys., 1980, t. 41, p. C3-51.

---

\*) Добавлена переводчиком. (Прим. ред.)