

538.566

**ЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В НЕОДНОРОДНЫХ СЛАБОАНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ****В. В. Железняков, В. В. Кочаровский,
Вл. В. Кочаровский**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	257
2. Основные уравнения и приближения теории взаимодействующих электро- магнитных волн	262
а) Нормальные волны в анизотропной среде. Геометрическая оптика (262). б) Винтовые волны (263). в) Взаимодействие волн при нормальном падении в плоскостой среде (265). г) Квазиизотропное приближение геометриче- ской оптики (трехмерный случай). Уравнения Баддена — Кравцова (267). д) Уравнения переноса поляризации излучения в неоднородных средах (268).	
3. Качественный анализ линейной трансформации волн. Параметр взаимодей- ствия	269
а) Матрица трансформации и коэффициент трансформации. Предельные случаи (геометрическая оптика, изотропная среда, скачок анизотропии) (269). б) Уравнение Риккати. Сильная и слабая трансформации (271). в) Параметр взаимодействия в переходных слоях (275). г) О качественном ана- лизе взаимодействия встречных волн (278). д) Методы решения уравнений линейного взаимодействия (278).	
4. Трансформация волн в магнитоактивной плазме	279
а) Слабое квазиоперечное магнитное поле (281). б) Сильное квазипродоль- ное магнитное поле (283). в) Эффекты трансформации в системе «плазма + + намагниченный вакуум» (284). г) Эффект предельной поляризации (285). д) Плазма с широким магнитного поля (288).	
5. Линейное взаимодействие в оптике жидких кристаллов	289
а) Винтовые волны в кристалле холестерического типа (289). б) Поляризацион- ные свойства неоднородной холестерической спирали (291). в) Ориентацион- ный фазовый переход и отсечка режима Могена (292). г) Поляризационная диагностика динамических процессов (294).	
6. Линейная трансформация в магнитных средах	295
а) Оптические свойства доменной стенки блоховского типа (296). б) Сильно закрученная спираль (297). в) Надбарьерное отражение вблизи брэггов- ского резонанса (297).	
7. Связанные моды в волноводах и световодах	299
а) О взаимодействии мод в волноводных системах (299). б) Винтовые моды в скрученном световоде (300). в) Световод с нерегулярным двулучепрелом- лением (301). г) Неравномерно скрученный световод (303).	
8. Заключение	304
Цитированная литература	305

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема линейного взаимодействия волн (в четкой постановке) существует уже более четверти века. Систематические исследования в этой области физики были начаты в 50-х годах в связи с изучением распространения волн в ионосферной плазме и в широкодиапазонных нерегулярных СВЧ и акустических волноводах (см., например, ¹⁻¹⁰). Было

обнаружено, что при прохождении волн через неоднородный участок среды их геометрические амплитуды могут изменяться неадиабатическим образом. Это явление получило название линейного взаимодействия волн, или линейной трансформации мод. В настоящее время явление линейного взаимодействия исследуется в самых разнообразных областях физики: оптике, квантовой радиофизике, гидродинамике, акустике, электродинамике, физике плазмы и др. Общее число работ на эту тему составляет тысячи и продолжает быстро расти, написано несколько обзоров и статей обзорного характера ¹¹⁻²⁵ (о современном состоянии соответствующей математической теории см. ²⁶⁻²⁸ и указанную там литературу). Нисколько не преувеличивая, проблему линейного взаимодействия можно назвать важнейшей проблемой линейной теории колебаний и волн.

Однако в этой проблеме до последнего времени отсутствовало представление, которое позволяло бы давать качественное и в то же время достаточно детальное описание эффектов линейной трансформации в более или менее общей физической ситуации, т. е. для волн любой природы в произвольной анизотропной неоднородной среде. Дело в том, что решенные частные задачи линейного взаимодействия приспособлены в основном для описания довольно узких, специальных случаев распространения волн. В результате весьма сложно составить картину эффектов линейной трансформации волн не только в какой-нибудь вновь появившейся обширной области приложений, например в сейсмологии ²⁹ или оптике неоднородных сред ⁵⁵, но даже в классическом случае плазмы для вновь созданной или обнаруженной конкретной ситуации. Может показаться, что теория колебаний и волн здесь бессильна и линейное взаимодействие в каждом отдельном случае происходит совершенно по-разному ³⁰.

Целью предлагаемого обзора, наряду с задачей познакомить читателя с новыми результатами и новыми областями приложений явления линейного взаимодействия, служит изложение качественного анализа линейной трансформации и демонстрация его возможностей. Качественные представления позволяют единым образом анализировать линейное взаимодействие в самых разнообразных условиях, например в магнитоактивной плазме, а также в жидких кристаллах, ферродиеlectricах, упругих телах, световодах, планарных волноводах и т. д. Последнее особенно важно, так как в указанных областях это явление только начинает изучаться, а число интересующихся им лиц резко превышает число «специалистов по линейному взаимодействию».

Конкретно обзор посвящен взаимодействию электромагнитных волн в слабоанизотропных плавно неоднородных средах. В настоящее время именно в этой области проведено наибольшее число экспериментальных исследований и получены существенные теоретические результаты *).

Как известно ³¹⁻³³, в линейной однородной стационарной среде любое волновое поле излучения может быть представлено как суперпозиция нормальных волн вида $\vec{\mathcal{E}}_i A_i(\omega, \mathbf{k}_i) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})]$, где частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}_i$ связаны дисперсионным уравнением, $\vec{\mathcal{E}}_i$ — вектор, определяющий поляризацию i -й нормальной волны. Такое разложение используется и в неоднородной среде; однако здесь характеристики волн (показатели преломления $n_i = |\mathbf{k}_i| c/\omega$ и коэффициенты поляризации) определяются локальными свойствами среды и, следовательно, меняются в пространстве. Если свойства среды меняются медленно, то комплексные амплитуды волн $f_i(\mathbf{r}) = A_i(\mathbf{r}) \exp[i\varphi_i(\mathbf{r})]$ в указанном разложении

*) В настоящем обзоре мы ссылаемся преимущественно на работы последних лет. Что касается более ранних работ, то мы предпочитаем ссылаться на монографии и обзоры, в которых суммированы результаты этих работ.

определяются уравнением эйконала для фазы $\varphi_i(\mathbf{r})$ (которая уже не равна $-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}$) и законом сохранения энергии для амплитуды $A_i(\mathbf{r})$ каждой из волн. Такой подход называется адиабатическим приближением, ВКБ-приближением или приближением геометрической оптики³¹⁻³⁵.

Однако при определенных условиях в неоднородной области среды волновое поле может не подчиняться приближению геометрической оптики (даже в среде с медленно меняющимися свойствами) — и тогда говорят о явлении линейного взаимодействия волн. Это явление заключается в том, что при прохождении излучения через указанную область отношение амплитуд и разность фаз волн, составляющих это излучение, изменяются иначе, чем можно было ожидать на основе геометрооптического приближения. И распространяющиеся волны уже не являются независимыми (речь идет о волнах, поляризации которых $\mathcal{E}_i(\mathbf{r})$ в каждой точке заданы локальными свойствами среды, см. ниже). Существует взаимная трансформация как встречных (прямой и отраженной) волн, так и попутных волн, т. е. волн, распространяющихся (переносящих энергию) в одном направлении. В частности, при падении на область взаимодействия геометрооптической волны одного типа (например, обыкновенной волны) из нее выходят две когерентные геометрооптические волны (и необыкновенная, и обыкновенная). Такое взаимодействие является линейным, поскольку оно не связано с нарушением принципа суперпозиции волновых полей. Прилагательное «линейное» в дальнейшем опускается, так как нелинейное взаимодействие волн здесь не рассматривается.

Приведем простейший пример взаимодействия волн. Пусть излучение распространяется вдоль оси z плоскостной среды, ось анизотропии $\mathbf{L}$ которой ортогональна оси z и в некоторой области плавно поворачивается по азимуту на конечный угол ψ_0 (см., например, рис. 1 при $\alpha = \pi/2$; в магнитоактивной плазме осью анизотропии $\mathbf{L}$ служит магнитное поле $\mathbf{B}_0$). Пусть, далее, на входе в указанную неоднородную область излучение представляет собой линейно поляризованную волну с вектором $\mathbf{E} \parallel \mathbf{L}$ — в оптике это волна необыкновенного типа. Тогда в геометрооптическом приближении вектор поля $\mathbf{E}$ должен поворачиваться вслед за вращением оси анизотропии $\mathbf{L}$, оставаясь все время параллельным ей. Такой адиабатический режим соответствует отсутствию взаимодействия, так как волна обыкновенного типа не возникает. Однако, если ось анизотропии поворачивается достаточно резко, а величина анизотропии очень мала, то вектор электрического поля неминуемо отстанет от оси анизотропии и не будет параллелен ей; в пределе изотропной среды (или вакуума) вектор $\mathbf{E}$, как известно³⁴, вообще перестанет поворачиваться вслед за осью $\mathbf{L}$. Это означает, что на выходе из неоднородной области излучение, вообще говоря, будет суперпозицией необыкновенной и обыкновенной волн, которые поляризованы соответственно вдоль и поперек оси анизотропии. Следовательно, произошла трансформация геометрооптических волн⁴².

Трансформация волн определяется характером и масштабом неоднородности среды в области взаимодействия и поэтому несет информацию о структуре этой неоднородности. Изменение степени неоднородности позво-

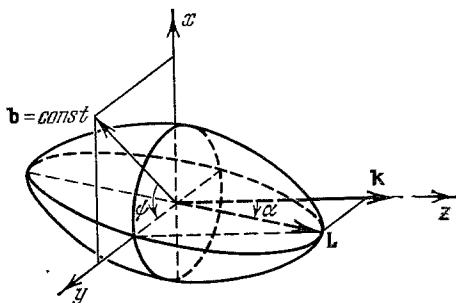


Рис. 1. «Вращающаяся» система координат и оптический эллипсоид
 $\text{Re } \epsilon_{kl}^{-1} x_k x_l = 1 \quad (x_k = x, y, z)$.

Ось y следует за осью анизотропии $\mathbf{L}$; вектор $\mathbf{b}$ имеет фиксированное направление в пространстве, $\mathbf{b} \perp \mathbf{z}$.

ляет управлять эффективностью трансформации волн, а следовательно, интенсивностью и поляризацией проходящих и отраженных волн.

Рассмотрим распространение монохроматических волн в стационарной среде без источников в одномерном случае (о трехмерно неоднородной среде см. п. 2г). В этом случае, опуская фактор $\exp(i\omega t)$, волновые уравнения для N компонент X_α поля можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка^{2, 14, 32, 36}

$$\mathbf{e}' = -iT\mathbf{e}. \quad (1.1)$$

Здесь через $\mathbf{e}$ обозначен N -компонентный вектор-столбец комплексных полевых переменных X_α ($\alpha = 1, \dots, N$); квадратная матрица $T = T(z)$ определяется локальными свойствами среды, т. е. имеет одинаковый вид как в однородной, так и в неоднородной среде и не содержит дифференциальных операторов. Частотную дисперсию учитывает зависимость $T(\omega)$. Штрих обозначает дифференцирование по безразмерной пространственной координате $\zeta = k_0 z$ вдоль направления распространения волн (z), $k_0 = \omega/c$, $c = \text{const}$ — характерная скорость волн (в электродинамике — скорость света в вакууме).

Определим для матрицы T в каждой точке среды полную систему собственных векторов $\mathbf{e}_i$ — нормальные волны, для которых $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* = 1$ ($i = 1, \dots, N$), и их собственные значения — показатели преломления n_i , с помощью уравнения $T\mathbf{e}_i = n_i \mathbf{e}_i$. Затем воспользуемся канонической заменой

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^N f_i \vec{\mathcal{E}}_i, \quad \vec{\mathcal{E}}_i = \Phi_i \mathbf{e}_i, \quad (1.2)$$

и перейдем от (1.1) к уравнениям для комплексных амплитуд взаимодействующих волн, считая *) $n_i = n_i(\zeta)$, $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(\zeta)$, $f_i = f_i(\zeta)$:

$$f_i' + in_i f_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j, \quad a_{ij} = -\vec{\mathcal{E}}_j' \cdot \vec{\mathcal{E}}_i^*. \quad (1.3)$$

Зависимости f_i от f_j ($i \neq j$) указывают на линейную связь между волнами в неоднородной среде, где $a_{ij} \neq 0$. Множители $\Phi_i(\zeta)$ определим из условия $a_{ii} \equiv -\vec{\mathcal{E}}_i' \cdot \vec{\mathcal{E}}_i^* = 0$, или, что то же,

$$\frac{\Phi_i'}{\Phi_i} + \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_i^* = 0. \quad (1.4)$$

Это условие означает, что локальные значения показателей преломления взаимодействующих волн не зависят от неоднородности среды (см. (1.3)). Нетрудно проверить, что геометрикооптическая асимптотика системы (1.1) дает независимые решения вида $\Phi_i \mathbf{e}_i \exp(-i \int n_i d\zeta)$, в которых множители Φ_i подчиняются уравнению (1.4). Поэтому, согласно (1.2), взаимодействие геометрикооптических волн описывается изменением амплитуд f_i .

В случае электромагнитного поля $N = 4$; конкретный вывод уравнений взаимодействия электромагнитных волн приведен в гл. 2, где получен явный вид коэффициентов связи a_{ij} .

) При переходе к (1.3) использована взаимная (к $\vec{\mathcal{E}}_j$) система векторов $\vec{\mathcal{E}}_i^$ ($\vec{\mathcal{E}}_j \cdot \vec{\mathcal{E}}_i^* = \delta_{ij}$). Она определяет так называемые «переносные» волны, являющиеся собственными векторами транспонированной матрицы: $T^T \vec{\mathcal{E}}_i^* = n_i \vec{\mathcal{E}}_i^*$, так что ма-

трица $T_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N n_i \mathcal{E}_{i\alpha} \mathcal{E}_{i\beta}^*$.

В пределе слабо неоднородной среды $a_{ij} \rightarrow 0$ и из (1.3) получаем решение метода ВКБ:

$$f_i = f_i(\xi_{\text{вх}}) \exp \left[-i \int_{\xi_{\text{вх}}}^{\xi} n_i(\xi) d\xi \right]. \quad (1.5)$$

Линейное взаимодействие проявляется в отличии решений уравнений (1.3) в неоднородной среде ($a_{ij} \neq 0$) от ВКБ-решений (1.5). Оно состоит в том, что поляризация геометрической волны, заданная соотношениями между компонентами волнового поля X_α / X_β , не сохраняется адиабатически такой, какой она локально должна быть для данной геометрической волны. Иными словами, различные компоненты поля меняются несогласованно (с точки зрения геометрической оптики), нарушая локальную структуру данной нормальной волны $\mathbf{e}_i$ и тем самым порождая другие волны. Отсюда ясно, что окончательный результат анализа взаимодействия волн должен состоять в указании пространственного изменения поляризационной структуры полного волнового поля. Вообще говоря, эту задачу можно решать непосредственно на основе исходной системы (1.1) для полевых компонент X_α , как, впрочем, иногда и поступают (1, 3, 11, 12, 30, 36-39 и др.). Однако, как будет ясно из дальнейшего, более эффективным и удобным является указанный выше способ перехода к уравнениям взаимодействия (1.3) для комплексных амплитуд волн.

Поскольку в непоглощающей среде при $n_i^2 > 0$ стационарный полный поток энергии S_z взаимодействующих волн не меняется вдоль оси z , трансформацию волн можно характеризовать перераспределением энергии между ними. Как станет ясно из гл. 2, условие (1.4), точнее, $\text{Re } a_{ii} = 0$, обеспечивает постоянство плотности потока энергии поля вида $\vec{\mathcal{E}}_i = \Phi_i \mathbf{e}_i$. Поэтому при нормировке этой плотности на единицу закон сохранения энергии принимает простой вид *):

$$S_z = \sum_i f_i f_i^* - \sum_j f_j f_j^* = \text{const}, \quad (1.6)$$

в котором индексы суммирования i и j относятся к геометрическим волнам, распространяющимся в направлении $+z$ и $-z$ соответственно. Сказанное относится и к случаю, когда $|\text{Im } n_i| \ll |n_i|$ и в области взаимодействия волны слабо поглощаются. В дальнейшем, если это не оговорено специально, поглощением пренебрегается.

В настоящее время в теории взаимодействия, как правило, используется приближение двух взаимодействующих волн (попутных или встречных):

$$\begin{aligned} f'_1 + in_1 f_1 &= a_{12} f_2, \\ f'_2 + in_2 f_2 &= a_{21} f_1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Оно оправдано в плавно неоднородной среде, когда в данной области взаимодействуют только те две волны, дисперсионные ветви $n_{1,2}(\xi)$ которых сближаются (для попутных волн) либо подходят близко к нулю (для встречных волн).[†] О качественном анализе взаимодействия двух волн см. гл. 3. В случае сильной неоднородности на масштабе длины волны обычно все волны связаны между собой; при этом наибольший интерес представляют среды со случайными неоднородностями^{12, 25, 40}. Однако в настоящем обзоре подобные задачи не рассматриваются.

*) Следует подчеркнуть, что описанный подход несправедлив в областях непрозрачности для i -й волны ($n_i^2 < 0$), где ее поток энергии обращается в нуль и исходная геометрическая замена (1.2), (1.4) не применима; см. 14.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

а) Нормальные волны в анизотропной среде. Геометрическая оптика

Уравнения монохроматического электромагнитного поля в стационарной анизотропной среде без источников имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = ik_0 \mathbf{D}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -ik_0 \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

$$D_i(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) E_j(\omega, \mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — электрическая и магнитная индукции, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, ε_{ij} — тензор комплексной диэлектрической проницаемости, $k_0 = \omega/c$; пространственная дисперсия не рассматривается. Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z , уравнения (2.1) сводятся к виду $\mathbf{e}' = -iTe$ (1.1), где

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} E_x \\ -E_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon^2 \varepsilon_{yx}^{-1} & \varepsilon^2 \varepsilon_{xx}^{-1} & 0 & 0 \\ \varepsilon^2 \varepsilon_{yy}^{-1} & \varepsilon^2 \varepsilon_{xy}^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь $\varepsilon^2 = (\varepsilon_{xx}^{-1} \varepsilon_{yy}^{-1} - \varepsilon_{xy}^{-1} \varepsilon_{yx}^{-1})^{-1}$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{r})$ — обратный тензор диэлектрической проницаемости ($E_i = \varepsilon_{ij}^{-1} D_j$). Использование последнего удобно в среде без источников^{31, 41}, где отсутствует продольная составляющая электрической индукции ($D_z = 0$).

Четыре нормальные волны системы (2.3), (1.1) представляют собой необыкновенные (n_e) и обыкновенные (n_o) волны, распространяющиеся в направлении оси z (индексы $i = 1, 2$; $n_{1,2} = n_{e,0}$, $\mathbf{K}_{1,2} = \mathbf{K}_{e,0}$) и в противоположном направлении ($i = 3, 4$; $n_{3,4} = -n_{e,0}$, $\mathbf{K}_{3,4} = \mathbf{K}_{e,0}$). Их собственные векторы и показатели преломления равны

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \begin{pmatrix} E_x \\ -E_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix}_i = \frac{\sqrt{8\pi/c}}{\sqrt{n_i(1+K_i^2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -iK_i \\ -in_i K_i \\ n_i \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$n_{e,0}^2 = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_{xx}^{-1} + \varepsilon_{yy}^{-1}) \pm i \varepsilon_{xy}^{-1} \sqrt{q^2 - \frac{\varepsilon_{yx}^{-1}}{\varepsilon_{xy}^{-1}}} \right], \quad (2.5)$$

$$K_{e,0} = q \mp \sqrt{q^2 - \frac{\varepsilon_{yx}^{-1}}{\varepsilon_{xy}^{-1}}}, \quad q = \frac{\varepsilon_{yy}^{-1} - \varepsilon_{xx}^{-1}}{2i\varepsilon_{xy}^{-1}}, \quad (2.6)$$

где через $K_i \equiv -iE_{iy}/E_{ix}$ обозначен коэффициент поляризации i -й волны. Согласно (2.6), обыкновенная и необыкновенная волны поляризованы эллиптически, т. е. в каждой волне действительный вектор напряженности электрического поля $\operatorname{Re}[\mathbf{E}_i \exp(i\omega t)]$ с течением времени описывает в пространстве эллипс. В отсутствие поглощения, когда $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$, оси x , y можно ориентировать так, чтобы $\operatorname{Re} \varepsilon_{xy}^{-1} = 0$ и, следовательно, $\varepsilon_{yx}^{-1} = -\varepsilon_{xy}^{-1}$. Тогда из (2.6) следует, что эллипсы поляризации обыкновенной и необыкновенной волн взаимно ортогональны: $K_e \cdot K_o \equiv -1$. Отношение главных осей этих эллипсов определяется величиной q . При $|q| \gg 1$ эллипсы вырождаются в ортогональные друг другу прямые (вдоль осей x и y соответственно), а при $|q| \ll 1$ — в окружности (с противоположными направлениями вращения вектора электрического поля).

Если свойства среды достаточно медленно меняются вдоль направления распространения волн, то справедливо приближение геометрической оптики: волны (2.4) распространяются независимо одна от другой, их фазы и амплитуды определяются показателями преломления согласно (1.5), а поляризации следуют изменяющимся свойствам среды согласно (2.4), (2.6). Фактор $1/\sqrt{n_i(1+K_i^2)}$ в амплитуде каждой волны $\vec{\mathcal{E}}_i$ (2.4) соответствует закону сохранения энергии в этой волне, т. е. постоянству вектора Пойнтинга: $|(c/8\pi) \operatorname{Re} [\mathbf{E}_i \mathbf{B}_i^*]_z| = \text{const}$ (поля в (2.4) выбраны так, что эта константа равна единице). В трехмерно неоднородной среде каждая из геометрикооптических волн будет распространяться вдоль луча, определяемого уравнением эйконала³¹⁻³⁴ $(\nabla \varphi_i)^2 = n_i^2$.

б) Винтовые волны

В однородной среде оси x, y занимают фиксированное положение — их удобно ориентировать вдоль оптических осей среды в плоскости, ортогональной направлению распространения z (точнее, вдоль осей эллипса $\operatorname{Re} [\varepsilon_{xx}^{-1}x^2 + (\varepsilon_{xy}^{-1} + \varepsilon_{yx}^{-1})xy + \varepsilon_{yy}^{-1}y^2] = 1$). В одноосной анизотропной среде это означает, что ось анизотропии, определяемая, например, магнитным полем B_0 в плазме или директором $\mathbf{L}$ в жидком кристалле, лежит в плоскости y, z (рис. 1). В неоднородной среде оптические оси среды, вообще говоря, могут поворачиваться при смещении вдоль оси z (их азимутальное вращение характеризуется изменением угла ψ на рис. 1). Если рассматривать проекции полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ на оси x, y системы координат, «вращающейся» вслед за поворотом оптических осей (ось z фиксирована), то матрица T в уравнении распространения (1.1) примет вид

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & -i\psi' & 0 & 1 \\ i\psi' & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon_{yx}^{-1} & \varepsilon_{xx}^{-1} & 0 & i\psi' \\ \varepsilon_{yy}^{-1} & \varepsilon_{xy}^{-1} & -i\psi' & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.7)$$

здесь $\psi' = k_0 d\psi/dz$ — локальная пространственная скорость вращения оптических осей. Тензор ε_{ij}^{-1} в матрице $\tilde{T}$ (2.7) имеет фиксированный вид и не зависит явно от угла ψ , в отличие от матрицы T (2.3) в невращающейся системе координат.

Если $\psi' = \text{const}$, а в остальном среда однородна, то, отправляясь от уравнения $\mathbf{e}' = -i\tilde{T}\mathbf{e}$ (1.1), приходим к нормальным волнам в среде с равномерным вращением оптических осей. Для них

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \begin{pmatrix} E_x \\ -E_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix}_i = \frac{\sqrt{8\pi/c}}{\sqrt{\tilde{n}_i(1+\tilde{K}_i^2) + 2\psi'\tilde{K}_i}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\tilde{K}_i \\ -i(\tilde{n}_i\tilde{K}_i + \psi') \\ \tilde{n}_i + \psi'\tilde{K}_i \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{n}^4 - [\varepsilon^2(\varepsilon_{xx}^{-1} + \varepsilon_{yy}^{-1}) + 2\psi'^2]\tilde{n}^2 - 2i\varepsilon^2(\varepsilon_{xy}^{-1} - \varepsilon_{yx}^{-1})\psi'\tilde{n} + \\ + (\varepsilon^2\varepsilon_{xx}^{-1} - \psi'^2)(\varepsilon^2\varepsilon_{yy}^{-1} - \psi'^2) - \varepsilon^4\varepsilon_{xy}^{-1}\varepsilon_{yx}^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\tilde{K}_i \equiv -iE_{iy}E_{ix}^{-1} = (\varepsilon^2\varepsilon_{yy}^{-1} - \psi'^2 - \tilde{n}_i^2)(i\varepsilon^2\varepsilon_{xy}^{-1} + 2\psi'\tilde{n}_i)^{-1}. \quad (2.10)$$

Эти волны мы будем называть винтовыми волнами⁴²⁻⁴⁷. Относящиеся к ним величины отмечаются знаком « $\sim$ ». Как ясно из (2.9), существуют четыре винтовые волны с различными показателями преломления $\tilde{n}_i$, определяемыми уравнением четвертого порядка (в общем случае не биквадратным,

как было для обыкновенной и необыкновенной волн в однородной среде *), и с различными коэффициентами поляризации $\tilde{K}_i$. Формулы (2.7)–(2.10) записаны с учетом поглощения. Однако даже в отсутствие поглощения эллипсы поляризации попутных винтовых волн, вообще говоря, не ортогональны: $\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \neq -1$. Описание распространения электромагнитных волн в терминах винтовых волн весьма удобно в холестерических жидких кристаллах, в скрученных световодах, в геликоидальных ферродиеlectricах и в плазме с широким магнитным полем.

Усложнение структуры нормальных волн в среде с периодической винтовой неоднородностью не происходит, если оптические оси поворачиваются плавно и среда слабо анизотропна (см. (2.5) и (2.9)):

$$|\psi'/V\epsilon| \ll 1, \quad \frac{1}{2} |n_e^2 - n_o^2| \ll \frac{1}{2} (n_e^2 + n_o^2) \approx \epsilon. \quad (2.11)$$

Поскольку в дальнейшем мы будем часто обращаться к этому важному частному случаю, выпишем соответствующие приближенные формулы для двух попутных винтовых волн (они следуют из (2.9), (2.10) при $\epsilon_{xy}^{-1} = -\epsilon_{yx}^{-1}$ **):

$$\tilde{n}_{1,2} = V\epsilon \left[1 \pm \left(\frac{i}{2} \epsilon \epsilon_{xy}^{-1} + \psi'/V\epsilon \right) \sqrt{\tilde{q}^2 + 1} \right], \quad (2.12)$$

$$\tilde{K}_{1,2} = \tilde{q} \mp \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \quad \tilde{q} = \frac{\epsilon (\epsilon_{yy}^{-1} - \epsilon_{xx}^{-1})}{4 \left(\frac{i}{2} \epsilon \epsilon_{xy}^{-1} + \psi'/V\epsilon \right)}. \quad (2.13)$$

Из (2.12), (2.13) ясно, что гиротропия ($i\epsilon\epsilon_{xy}^{-1}/2$) и вращение оптических осей среды ($\psi'/V\epsilon$) приводят к эффектам одного типа и поэтому суммируются. В остальном винтовые волны в этом случае ведут себя подобно обыкновенной и необыкновенной волнам. В отсутствие вращения оптических осей винтовые волны совпадают с обыкновенной и необыкновенной волнами. Отметим, что, как и в случае (2.4), плотность потока энергии винтовых волн (2.8) нормирована на единицу.

Геометрическая оптика винтовых волн строится аналогично геометрической оптике обыкновенной и необыкновенной волн; надо лишь параметр ψ' считать такой же локальной характеристикой среды, как ϵ_{ij}^{-1} (см. 43, 47) ***).

*) Различие показателей преломления $\tilde{n}_1$ и $\tilde{n}_2$ (или $\tilde{n}_3$ и $\tilde{n}_4$) двух винтовых волн, распространяющихся в разные стороны, возникает в магнитоактивной (гиротропной) среде с вращением оптических осей, когда $(\epsilon_{xy}^{-1} - \epsilon_{yx}^{-1})\psi' \neq 0$. Оно связано с тем, что направление вращения оптических осей среды в одном случае совпадает с направлением фарадеевского вращения, а в другом противоположно ему 43, 122. В результате наряду с известной невязанностью фарадеевского вращения плоскости поляризации здесь появляется дополнительная поляризационная невязанность — различие эллипсов поляризации и фазовых скоростей нормальных волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

**) Выражение (2.13) для $\tilde{K}_{1,2}$ справедливо при условии, что знаменатель величины $\tilde{q}$ не обращается в нуль: $\left| \frac{i}{2} \epsilon \epsilon_{xy}^{-1} + \psi'/V\epsilon \right| \gg \left| \frac{i}{2} \epsilon \epsilon_{xy}^{-1} \psi'/V\epsilon \right|$.

***) Уместно подчеркнуть, что для введения и использования винтовых волн нет необходимости в большом числе периодов винтовой структуры, тогда как для любой другой периодической структуры без этого условия нормальные волны невозможно определить. Дело в том, что при заданном направлении распространения волны только винтовое (азимутальное) вращение оставляет неизменными материальное соотношение (2.2) и уравнения (2.1) и поэтому позволяет провести локальное рассмотрение на сколь угодно малом участке структуры. В частности, винтовые волны пригодны для описания распространения излучения в случае поворота оптических осей среды на конечный угол $\psi_0 \lesssim 1$.

в) Взаимодействие волн
при нормальном падении
в плоско-слоистой среде

Рассмотрим распространение волн в плоскослоистой среде вдоль оси неоднородности z . Используем винтовые волны, т. е. не будем относить к неоднородности среды равномерный поворот ее оптических осей. Согласно (1.2)–(1.4), сделаем геометрооптическую замену вида $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^4 f_i \vec{\tilde{e}}_i$, обеспечивающую переход к геометрооптической асимптотике:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ -E_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 f_i \frac{(8\pi/c)^{1/2}}{\sqrt{\tilde{n}_i(1+\tilde{K}_i^2)+2\psi'\tilde{K}_i}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\tilde{K}_i \\ -i(\tilde{n}_i\tilde{K}_i+\psi') \\ \tilde{n}_i+\psi'\tilde{K}_i \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Тогда приходим к следующим уравнениям взаимодействия винтовых волн:

$$f'_i + i\tilde{n}_i f_i = \sum_{j=1}^4 \frac{(\delta_{ij}-1) \{ \tilde{K}'_j [2\psi' + \tilde{K}_i(\tilde{n}_i + \tilde{n}_j)] + \tilde{n}'_j (1 + \tilde{K}_i\tilde{K}_j) + \psi''(\tilde{K}_i + \tilde{K}_j) \}}{2\sqrt{\tilde{n}_i(1+\tilde{K}_i^2)+2\psi'\tilde{K}_i} \sqrt{\tilde{n}_j(1+\tilde{K}_j^2)+2\psi'\tilde{K}_j}} f_j. \quad (2.15)$$

При переходе к (2.15) мы предположили, что поляризации винтовых волн определяются гиротропией и вращением оптических осей, но не поглощением, точнее, использовали равенство $\varepsilon_{xy}^{-1} = -\varepsilon_{yx}^{-1}$. Для этого распространенного случая коэффициенты связи в (2.15) антисимметричны: $a_{ij} = -a_{ji}$. В этом можно убедиться, продифференцировав тождество

$$(\tilde{n}_i + \tilde{n}_j)(1 + \tilde{K}_i\tilde{K}_j) \equiv -2\psi'(\tilde{K}_i + \tilde{K}_j), \quad (2.16)$$

которое следует из (2.9), (2.10) *). Если вращение оптических осей отсутствует ($\psi' = 0$), то из системы (2.15) получаем следующие уравнения взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн^{2, 48}:

$$\begin{aligned} f'_1 + in_e f_1 &= -\Psi \frac{n_e + n_0}{2\sqrt{n_e n_0}} f_2 - \frac{in'_e}{2n_e} f_3 + i\Psi \frac{n_e - n_0}{2\sqrt{n_e n_0}} f_4 \\ f'_2 + in_0 f_2 &= \Psi \frac{n_e + n_0}{2\sqrt{n_e n_0}} f_1 + i\Psi \frac{n_e - n_0}{2\sqrt{n_e n_0}} f_3 - \frac{in'_0}{2n_0} f_4 \\ f'_3 - in_e f_3 &= \frac{in'_e}{2n_e} f_1 - i\Psi \frac{n_e - n_0}{2\sqrt{n_e n_0}} f_2 - \Psi \frac{n_e + n_0}{2\sqrt{n_e n_0}} f_4 \\ f'_4 - in_0 f_4 &= -i\Psi \frac{n_e - n_0}{2\sqrt{n_e n_0}} f_1 + \frac{in'_0}{2n_0} f_2 + \Psi \frac{n_e + n_0}{2\sqrt{n_e n_0}} f_3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $\Psi = -q' [2(q^2 + 1)]^{-1}$. Уравнения (2.15), (2.17) учитывают поглощение, если оно не нарушает условие $\varepsilon_{xy}^{-1} = -\varepsilon_{yx}^{-1}$. В отсутствие поглощения справедлив закон сохранения энергии в форме (1.6). Он непосредственно следует из уравнений (2.15) и (2.17), имеющих форму (1.3). В этом можно

*) Из (2.16) ясно, что неортогональность поляризаций винтовых волн, определяемая отличием $\tilde{K}_i\tilde{K}_j$ от -1 , пропорциональна скорости ψ' пространственного вращения оптических осей. Заметим, что в точке вырождения двух волн $\tilde{n}_i = \tilde{n}_j$ ($i \neq j$) подкоренное выражение в (2.14) не обращается в нуль, так как $\tilde{K}_i \neq \tilde{K}_j$ благодаря соответствующему выбору собственных векторов (2.8). (При $\tilde{K}_i = \tilde{K}_j$ и $\tilde{n}_i = \tilde{n}_j$ обращение в нуль указанного подкоренного выражения следует из равенства (2.16).)

убедиться, если учесть, что коэффициенты связи в этих уравнениях удовлетворяют следующим соотношениям симметрии: $a_{ij} = -a_{ji}^*$ для попутных волн i и j , $a_{ij} = a_{ji}^*$ для встречных волн i и j .

Из (2.15), (2.17) ясно, что в среде с сильной неоднородностью (большими производными $\tilde{n}_i$, $\tilde{K}_i$, $\tilde{\psi}$) все четыре геометрооптические волны тесно связаны между собой. Для этого случая теория взаимодействия волн еще не построена. В однородной среде, где все $a_{ij} = 0$, нормальные волны распространяются независимо одна от другой.

Для плавной неоднородности с масштабом $\Lambda \gg \lambda$ (λ — длина волны в среде), когда коэффициенты связи a_{ij} в (2.15), (2.17) малы, взаимодействие встречных и взаимодействие попутных волн при некоторых дополнительных условиях можно рассматривать раздельно. В случае надбарьерного отражения трансформация встречных волн соответствует отражению волны с показателем преломления, близким, но отличным от нуля^{7, 49-51} (см. п. 3г). Это отражение (взаимодействие двух волн одного типа) происходит в условиях, когда волнами другого типа можно пренебречь (см. (2.17)):

$$\begin{aligned} f_1' + in_1 f_1 &= -\Omega f_3 \\ f_3' - in f_3 &= \Omega f_1 \end{aligned}, \quad \Omega = \frac{in'}{2n}. \quad (2.18)$$

(Аналогичные уравнения для двух встречных винтовых волн получаются из (2.15)). Отражение от точек $n = 0$ и от областей с отрицательными значениями n^2 мы не рассматриваем, поскольку в областях, где $n^2 \leq 0$, волны являются нераспространяющимися и исходная геометрооптическая замена (1.2)—(1.4) теряет смысл (см. ¹⁴).

Взаимодействие попутных волн описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned} f_1' + i\tilde{n}_1 f_1 &= -\tilde{\Psi} f_2 \\ f_2' + i\tilde{n}_2 f_2 &= \tilde{\Psi} f_1 \end{aligned}, \quad \tilde{\Psi} = -\frac{\tilde{q}'}{2(\tilde{q}^2 + 1)} \quad (2.19)$$

(см. (2.14)—(2.15) и ниже). В этом случае трансформация происходит в областях сближения показателей преломления $|\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2| \ll \tilde{n}_1 + \tilde{n}_2$. Отсутствие отраженных волн при условии $\Lambda \gg \lambda$ будет обеспечено, если оба показателя преломления $\tilde{n}_1$ и $\tilde{n}_2$ достаточно далеки от нуля.

Из уравнений (2.18), (2.19) следует закон сохранения энергии, который записывается в форме

$$|f_1|^2 - |f_3|^2 = \text{const} \quad (2.20)$$

для встречных волн и в форме

$$|f_1|^2 + |f_2|^2 = \text{const} \quad (2.21)$$

для попутных волн. Это отвечает чисто мнимому и чисто действительному коэффициентам связи Ω и $\tilde{\Psi}$ соответственно. Сравнивая (2.18) и (2.19), видим, что коэффициент связи попутных волн определяется изменением величины $\tilde{q}$, т. е. поляризации волн $\tilde{K}_{1,2}$ (2.13), и не зависит от $\tilde{n}_{1,2}$, в то время как коэффициент связи встречных волн определяется только изменением их показателей преломления. Подчеркнем, что уравнения (2.18) и (2.19) пригодны для описания произвольной, в том числе и сильной трансформации волн, несмотря на предполагаемую плавность неоднородности величин $\tilde{n}_{1,2}$ и $\tilde{q}$ в масштабе длины волны в среде. Условия эффективного взаимодействия волн будут получены в гл. 3.

г) Квазиизотропное приближение
геометрической оптики (трехмерный случай).
Уравнения Баддена — Кравцова

В определенных условиях задачу о взаимодействии волн в трехмерно неоднородной среде удастся свести к одномерной, используя метод «квазиизотропного» приближения геометрической оптики^{34, 37, 38, 47, 52}. Он справедлив в слабоанизотропной плавно неоднородной среде *). Согласно этому методу, индукции электрического и магнитного полей $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ отыскиваются в виде асимптотического ряда по степеням k_0^{-1} так же, как это обычно делается в геометрической оптике изотропной среды. Тогда, используя в уравнениях (2.1), (2.2) плавную неоднородность и слабую анизотропию ($|\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}| \ll \varepsilon$) в качестве малых параметров и делая далее геометрооптическую замену вида (2.14), можно прийти к уравнениям Баддена — Кравцова^{2, 34}:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dl} + ik_0 \tilde{n}_1 f_1 &= f_2 [2(\tilde{q}^2 + 1)]^{-1} \frac{d\tilde{q}}{dl}, \\ \frac{df_2}{dl} + ik_0 \tilde{n}_2 f_2 &= -f_1 [2(\tilde{q}^2 + 1)]^{-1} \frac{d\tilde{q}}{dl}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

По форме они совпадают с уравнениями (2.19), полученными в одномерном случае; однако роль безразмерной координаты ξ играет величина $k_0 l$, где l — длина вдоль квазиизотропного луча. Форма луча определяется уравнением эйконала в изотропной среде с показателем преломления $\sqrt{\varepsilon} \approx \approx (n_0 + n_e)/2$. Введение квазиизотропного луча связано с возможностью (конечно, приближенной) не различать обыкновенный и необыкновенный лучи в условиях слабой анизотропии в области взаимодействия волн^{21, 38}. В замене переменных (2.14) теперь вместо амплитудного множителя $1/\sqrt{\tilde{n}_i} \approx \varepsilon^{-1/4}$ фигурирует новый множитель A , удовлетворяющий уравнению $\text{div}(\sqrt{\varepsilon} A^2 \mathbf{I}) = 0$ ($\mathbf{I}$ — единичный вектор вдоль квазиизотропного луча). Последнее уравнение вместе с (2.22) получается из уравнений Максвелла как условие разрешимости уравнений первого приближения по указанным выше малым параметрам. Множитель A , учитывающий изменение показателя преломления $\sqrt{\varepsilon}$ и рефракцию, обеспечивает закон сохранения энергии волн (2.21) вдоль луча.

В трехмерном случае используется ортонормальная система координат x, y, z , переносимая вдоль квазиизотропного луча и следящая за поворотом оптических осей (см. рис. 1, где ось z параллельна $\mathbf{I}$). Угол ψ составляют ось y и то направление в плоскости x, y , которое задается законом Рытова^{31, 34} $d\chi/dl = T^{-1}$ (T — радиус кручения луча, угол χ отсчитывается от нормали луча в плоскости x, y). Иными словами, угол ψ образован осью y , следящей за оптической осью, и вектором электрического поля $\mathbf{b}$ линейно поляризованного излучения, распространяющегося вдоль квазиизотропного луча в предположении, что среда изотропная и обладает показателем преломления $\sqrt{\varepsilon}$. При таком определении производная ψ' учитывает как поворот оптических осей, так и кручение самого луча⁴⁷.

Итак, в слабоанизотропной среде взаимодействие попутных волн в одномерном и трехмерном случаях описывается практически одинаково.

*) В трехмерно неоднородной среде с сильной анизотропией и произвольной неоднородностью взаимодействие волн мало изучено^{12, 20, 21, 24}. Для ряда конкретных случаев наклонное падение в анизотропной плоскостной среде рассматривалось в физике плазмы^{13–16, 48, 53}, в оптике холестерических жидких кристаллов^{54, 55}, в магнитооптике⁵⁶ и в интегральной оптике^{23, 57}.

Учесть взаимодействие с отраженными волнами в трехмерно неоднородной среде в квазиизотропном приближении, по-видимому, невозможно, так как отражения в такой среде нарушают локально плоскую структуру волнового поля, предположение о которой по существу определяет законность метода квазиизотропного приближения^{21, 34, 38}.

д) Уравнения переноса поляризации
излучения в неоднородных средах

Выше мы рассматривали монохроматические волны с фиксированной поляризацией в каждой точке пространства. Однако на практике часто приходится иметь дело с волнами, частоты которых сосредоточены в узком интервале $\Delta\omega \ll \omega$ ^{33, 59-62}. Их поляризации являются медленными и, вообще говоря, случайными функциями времени. Поэтому в теории переноса такого излучения используют квадратичные величины вида $\bar{E}_\alpha \bar{E}_\beta^*$ ($\alpha, \beta = x, y$), в которых проведено усреднение по времени на интервале $\Delta t \gg 1/\Delta\omega$ (или статистическое усреднение по ансамблю). Соответствующие уравнения переноса с учетом взаимодействия волн в трехмерно неоднородной слабоанизотропной среде можно получить из уравнений Баддена — Кравцова (2.22). Пренебрегая отраженными волнами согласно этим уравнениям, находим, что квадратичные комбинации $J_{ij} = \bar{f}_i \bar{f}_j^*$ комплексных амплитуд двух попутных волн подчиняются следующим уравнениям переноса *):

$$\begin{aligned} J'_{11} &= 2(\operatorname{Im} \tilde{n}_1) J_{11} - \tilde{\Psi}(J_{12} + J_{12}^*), \\ J'_{22} &= 2(\operatorname{Im} \tilde{n}_2) J_{22} + \tilde{\Psi}(J_{12} + J_{12}^*), \\ J'_{12} &= i(\tilde{n}_2^* - \tilde{n}_1) J_{12} + \tilde{\Psi}(J_{11} - J_{22}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Поскольку свойства среды мы считаем детерминированными, то, переходя к величинам $\bar{E}_\alpha \bar{E}_\beta^*$ посредством геометрооптической замены (2.14) и используя квазиизотропное приближение, получаем

$$\varepsilon(\varepsilon^{-1} I_{\alpha\beta})' = \tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\delta} I_{\gamma\delta}, \quad I_{\alpha\beta} = \frac{c}{8\pi} \varepsilon \dot{A}^{-2} \bar{E}_\alpha \bar{E}_\beta^* \approx \frac{c}{8\pi} \varepsilon^{-1} A^{-2} \bar{D}_\alpha \bar{D}_\beta^*. \quad (2.24)$$

Здесь тензор поляризации $I_{\alpha\beta}$ отнесен к единичному интервалу частот и единичному телесному углу вдоль луча. Используемая система координат указана в п. 2г. Тензор переноса поляризации $\tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, как можно показать, выражается через компоненты нормальных волн $\tilde{\mathcal{E}}_i$ так же, как в однородной среде⁶⁴⁻⁶⁶; однако теперь он зависит от координаты $\xi = k_0 l$ вдоль луча. Таким образом, в квазиизотропном приближении уравнения переноса (2.24) в неоднородной среде отличаются от соответствующих уравнений в однородной среде только зависимостью коэффициентов от пространственных координат. Тем самым уравнения переноса учитывают взаимодействие волн (ранее это было продемонстрировано на конкретных примерах численными расчетами⁶³). Такой результат следовало ожидать, поскольку в исходных уравнениях Максвелла отсутствуют производные от параметров среды. Указанное обстоятельство позволяет легко обобщить уравнения переноса (2.24) в неоднородной среде на случай, когда

*) Об уравнениях (2.23) говорят как об уравнениях для «переносных поляризаций»^{67, 68}, поскольку $\tilde{f}_i = \mathbf{e} \cdot \tilde{\mathcal{E}}_i$, где $\mathbf{e}$ — полное поле, а $\tilde{\mathcal{E}}_i$ — «переносные» волны, ортогональные нормальным волнам $\tilde{\mathcal{E}}_j$; см. (1.2), (1.3).

взаимодействующие нормальные волны не ортогональны (выше неортогональность не учитывалась). Для этого, как и в однородной среде, достаточно учесть неортогональность винтовых волн $\tilde{\mathcal{E}}_i$ в выражении для тензора $\tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (см. ^{33, 67}).

Из уравнений (2.23) (или (2.24)) следует, что в отсутствие дихроизма, когда $\text{Im } \tilde{n}_1 = \text{Im } \tilde{n}_2$, сохраняется отношение интенсивностей поляризованной (когерентной) и неполяризованной (некогерентной) составляющих излучения. В этом случае эффекты взаимодействия волн в теории переноса частично поляризованного излучения относятся, очевидно, только к его поляризованной (когерентной) составляющей и могут быть изучены на основе уравнений Баддена — Кравцова (2.22), без использования уравнений переноса. Однако анализ уравнений переноса приобретает существенное значение при наличии дихроизма, а также деполаризации, рассеяния и собственного излучения среды. Последние факторы обычно имеют статистический характер. Их роль можно учесть достаточно просто, если вместо стохастических уравнений поля использовать уравнения переноса, включив в их правые части соответствующие среднеквадратичные характеристики деполаризации, рассеяния и излучения среды. С учетом указанных факторов перенос излучения в условиях линейного взаимодействия волн не изучался, хотя он представляет несомненный интерес для теории генерации и распространения волн, например, в магнитоактивной плазме или в жидких кристаллах ^{33, 59-62, 69, 70}.

3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН. ПАРАМЕТР ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим качественную картину явления взаимодействия двух попутных волн, описываемого системой двух связанных уравнений (2.19) с действительными коэффициентами связи $\tilde{\Psi} = -a_{12} = a_{21}$ и показателями преломления $\tilde{n}_{1,2}$. Аналогично может быть проанализировано взаимодействие двух встречных волн (2.18) с чисто мнимым коэффициентом связи $\Omega = in'/(2n)$ и более общий случай (1.7) с комплексными коэффициентами связи и показателями преломления (т. е. с учетом поглощения).

а) М а т р и ц а т р а н с ф о р м а ц и и и к о э ф ф и ц и е н т
т р а н с ф о р м а ц и и . П р е д е л ь н ы е с л у ч а и
(г е о м е т р и ч е с к а я о п т и к а , и з о т р о п н а я с р е д а ,
с к а ч о к а н и з о т р о п и и)

Система уравнений (2.19) позволяет найти значения функций $f_1^{\text{вых}}$, $f_2^{\text{вых}}$ и соответствующее поле излучения (2.14) на выходе из неоднородного слоя по заданным значениям $f_1^{\text{вх}}$, $f_2^{\text{вх}}$ на входе. Благодаря линейности системы

$$f_1^{\text{вых}} = F_{11}f_1^{\text{вх}} + F_{12}f_2^{\text{вх}}, \quad f_2^{\text{вых}} = F_{21}f_1^{\text{вх}} + F_{22}f_2^{\text{вх}}, \quad (3.1)$$

где четыре величины F_{ij} составляют матрицу трансформации вида ⁵²

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-Q} e^{-i\gamma} & \sqrt{Q} e^{i(\varphi+\gamma)} \\ -\sqrt{Q} e^{-i(\varphi+\gamma)} & \sqrt{1-Q} e^{i\gamma} \end{pmatrix} \exp \left(-i \int_{\xi_{\text{вх}}}^{\xi_{\text{вых}}} \tilde{n} d\xi \right). \quad (3.2)$$

В этом нетрудно убедиться, сделав замену

$$f_{1,2} = \delta_{1,2} \exp \left(-i \int \tilde{n} d\xi \right), \quad \tilde{n} = \frac{1}{2}(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2), \quad (3.3)$$

которая приводит систему уравнений (2.19) к симметричной форме:

$$\begin{aligned} \delta'_1 + \frac{i}{2} (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) \delta_1 &= -\tilde{\Psi} \delta_2 \\ \delta'_2 - \frac{i}{2} (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) \delta_2 &= \tilde{\Psi} \delta_1 \end{aligned}, \quad \tilde{\Psi} = -\frac{\tilde{q}}{2(\tilde{q}^2 + 1)}. \quad (3.4)$$

Первый столбец матрицы трансформации получается, если записать решение (δ_1, δ_2) при граничных условиях $\delta_1^{\text{вх}} = 1, \delta_2^{\text{вх}} = 0$. Так как закон сохранения энергии (2.24) уже задает соотношение между модулями $\delta_1^{\text{вых}}$ и $\delta_2^{\text{вых}}$, то можно ввести обозначения

$$\delta_1^{\text{вых}} = \sqrt{1-Q} e^{-i\gamma}, \quad \delta_2^{\text{вых}} = -\sqrt{Q} e^{-i(\varphi+\gamma)}, \quad (3.5)$$

в которых возможные фазовые отличия учтены множителями $\exp(-i\gamma)$ и $-\exp[-i(\varphi+\gamma)]$. Второй столбец матрицы трансформации получается при граничном условии $\delta_1^{\text{вх}} = 0, \delta_2^{\text{вх}} = 1$. Простая подстановка в (3.4) показывает, что за решение можно принять $(-\delta_2^*, \delta_1^*)$, где δ_1 и δ_2 — прежние решения, использованные в определении первого столбца. Это позволяет записать матрицу трансформации в форме (3.2), если учесть также связь (3.3) между $\delta_{1,2}$ и $f_{1,2}$.

Величина Q в (3.4) — так называемый коэффициент трансформации, определяющий относительную интенсивность волны одного типа (на выходе), если на слой падает волна другого типа:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{|f_1^{\text{вых}}|^2}{|f_1|^2 + |f_2|^2} = \frac{|\delta_1^{\text{вых}}|^2}{|\delta_2^{\text{вх}}|^2} \quad \text{при } f_1^{\text{вх}} = 0, \\ Q &= \frac{|f_2^{\text{вых}}|^2}{|f_1|^2 + |f_2|^2} = \frac{|\delta_2^{\text{вых}}|^2}{|\delta_1^{\text{вх}}|^2} \quad \text{при } f_2^{\text{вх}} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Очевидно, что $0 \leq Q \leq 1$. Коэффициент трансформации в ту же волну составит $1 - Q$. Это ясно из закона сохранения энергии (2.24), который учтен также при переходе к последним равенствам (3.6). Из симметрии системы (3.4) следует, что оба определения в (3.6) приводят к одинаковым значениям Q .

Величина φ в (3.2), очевидно, определяет разность фаз между волнами первого и второго типа на выходе из слоя, если на входе была только волна второго типа. Величина γ в геометрикооптическом приближении совпадает с «фарадеевской» разностью фаз

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta_{\text{вых}}} (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) d\zeta. \quad (3.7)$$

Появление взаимодействия означает, что коэффициент трансформации Q отличен от нуля, а сдвиг фаз γ — от γ_0 (3.7). Это ясно из сравнения матрицы трансформации F (3.2) с матрицей F_0 , полученной из решения системы (3.4) в отсутствие взаимодействия, когда $\tilde{\Psi} = 0$:

$$F_0 = \begin{pmatrix} \exp\left(-i \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta_{\text{вых}}} \tilde{n}_1 d\zeta\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta_{\text{вых}}} \tilde{n}_2 d\zeta\right) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Последняя матрица соответствует геометрикооптическому приближению.

В предельном случае изотропной среды ($\tilde{n}_1 \approx \tilde{n}_2$) уравнения (3.4) также легко решаются, и матрица трансформации принимает вид

$$F = \begin{pmatrix} \cos \Delta\eta & \sin \Delta\eta \\ -\sin \Delta\eta & \cos \Delta\eta \end{pmatrix} \exp \left(-i \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta_{\text{вых}}} \tilde{n} d\zeta \right), \quad (3.9)$$

где

$$\eta = - \int \tilde{\Psi} d\zeta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \tilde{q}(\zeta), \quad (3.10)$$

$$\Delta\eta = \eta_{\text{вых}} - \eta_{\text{вх}} = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} \tilde{q}_{\text{вых}} - \operatorname{arctg} \tilde{q}_{\text{вх}}). \quad (3.11)$$

Согласно (3.10),

$$\tilde{q} = -\operatorname{ctg} 2\eta, \quad \tilde{K}_2 \equiv -\tilde{K}_1^{-1} = \operatorname{tg} \eta, \quad (3.12)$$

т. е. приращение $\Delta\eta$ величины η характеризует изменение поляризации волн (2.13) на трассе распространения $\zeta_{\text{вх}} \div \zeta_{\text{вых}}$. Это изменение определяет величину коэффициента трансформации в пределе изотропной среды $Q = \sin^2 \Delta\eta$ (см. (3.9)); при этом сдвиг фаз $\gamma = 0$ и фаза $\varphi = 0$ или $\pm\pi$. Переходя к компонентам поля E_x и E_y посредством формулы (2.14), можно показать, что в данном случае поляризация полного излучения не меняется в слое $\zeta_{\text{вх}} \div \zeta_{\text{вых}}$ и матрица F (3.9) осуществляет простой пересчет между двумя разложениями этой поляризации: разложением на две ортогональные поляризации нормальных волн на входе слоя и разложением на две другие ортогональные поляризации на выходе. Следует оговориться, что здесь под нормальными волнами в изотропной среде понимаются волны, которые получаются предельным переходом от анизотропной среды и, следовательно, имеют определенную поляризацию (см. формулы (2.6), (2.13) при $\varepsilon_{ij} \rightarrow \varepsilon\delta_{ij}$).

В анизотропной среде $\tilde{n}_1 \neq \tilde{n}_2$. Однако для слоев с малой геометрической разностью фаз (3.7) ($|\gamma_0| \ll 1$), как и в пределе изотропной среды, членами $\pm \frac{i}{2} (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) \delta_{1,2}$ в уравнениях (3.4) снова можно пренебречь. Поэтому матрица трансформации F для таких неоднородных слоев («скачков» анизотропии) совпадает с (3.9).

б) У р а в н е н и е Р и к к а т и .

С и л ь н а я и с л а б а я т р а н с ф о р м а ц и я

Качественный анализ взаимодействия удобно вести, используя наряду с системой (3.4) (или (2.19)) следующее из нее уравнение Риккати для отношения комплексных амплитуд волн $P = -if_1/f_2$:

$$\frac{dP}{d\eta} = i(P^2 - 1) - 2iG(\eta)P. \quad (3.13)$$

Здесь переменная η определена формулой (3.10), а характерная функция $G(\eta)$ имеет вид

$$G(\eta) = \frac{\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1}{2\tilde{\Psi}} \equiv \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{2\eta'} \equiv (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) \frac{\tilde{q}^2 + 1}{\tilde{q}}. \quad (3.14)$$

Для получения уравнения Риккати (3.13) систему (3.4) удобно записать в каноническом виде:

$$\begin{aligned} d\delta_1/d\eta + iG(\eta)\delta_1 &= \delta_2, \\ d\delta_2/d\eta - iG(\eta)\delta_2 &= -\delta_1. \end{aligned} \quad (3.4a)$$

Согласно (2.14), отношение P прямо определяет коэффициент поляризации излучения в любой точке вдоль луча:

$$K \equiv -i \frac{E_y}{E_x} = \frac{\tilde{K}_1 (\tilde{K}_2 - iP)}{\tilde{K}_1 - iP}. \quad (3.15)$$

Элементы матрицы трансформации (3.2) выражаются через P следующим образом. Коэффициент трансформации Q и фаза φ находятся из решения уравнения (3.13) при граничном условии $P_0(\eta_{\text{вх}}) = 0$:

$$P_0(\eta_{\text{вых}}) = -\frac{i\sqrt{Q}}{\sqrt{1-Q}} \exp(i\varphi) \quad (3.16)$$

(на слой падает только волна типа 2). Справедливость равенства (3.16) становится ясной, если обратиться к формулам (3.2), (3.6). В свою очередь, сдвиг фаз φ определяется соотношением

$$\gamma - \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta_{\text{вых}}} G(\eta) d\eta = -\text{Re} \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta_{\text{вых}}} P_0(\eta) d\eta, \quad (3.17)$$

в котором $P_0(\eta)$ — решение (3.13) при том же граничном условии. Формула (3.17) получается путем интегрирования стандартной замены $P(\eta) = G(\eta) + i\delta^{-1}_2 d\delta_2/d\eta$, связывающей уравнение Риккати (3.13) с системой (3.4а).

Согласно (3.13), (3.4а), весь процесс изменения поляризации излучения вдоль луча (включая область взаимодействия) определяется поведением характерной функции $G(\eta)$ на интервале $\Delta\eta$ изменения переменной $\eta(\xi)$ в рассматриваемой среде. Например, если в неоднородном слое можно линеаризовать величину (2.13) $\tilde{q} = q_0 \cdot \xi$, а разность показателей преломления аппроксимировать квадратичной зависимостью $\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2 = (\Delta n)_0 \times \sqrt{1 + q_0^2 \xi^2}$, то в этом случае приращение $\Delta\eta = \pi/2$ и характерная функция

$$G(\eta) = \frac{(\Delta n)_0}{q_0 \sin^3 2\eta}. \quad (3.18)$$

Ясно, что решение уравнения (3.13) с функцией $G(\eta)$ вида (3.18) будет описывать не только взаимодействие волн в данном конкретном слое (см. пп. 4а, 7в), это решение останется справедливым и во всех других слоях с той же характерной функцией $G(\eta)$, независимо от конкретного профиля показателей преломления $\tilde{n}_{1,2}(\xi)$ и величины $\tilde{q}(\xi)$.

Из вида функции $\eta(\tilde{q})$ (3.10) очевидно, что на интервале $\tilde{q}$ от $-\infty$ до $+\infty$ изменение η в основном происходит там, где $\tilde{q}^2 \sim 1$ и значения $\tilde{K}_{1,2}$ (2.13) соответствуют эллиптической поляризации геометрооптических волн. Напротив, в области $\tilde{q}^2 \gg 1$ (линейная поляризация) переменная η почти не меняется, оставаясь близкой к нулю или $\pi/2$; в области $\tilde{q}^2 \ll 1$ (круговая поляризация) значения η близки к $\pi/4$.

В предельном случае больших значений характерной функции $|G(\eta)| \gg 1$ на интервале от $\eta_{\text{вх}}$ до $\eta_{\text{вых}}$ (т. е. когда $\tilde{n}_1 \neq \tilde{n}_2$ и, согласно (3.14), переменная η медленно меняется вдоль луча) приближенное решение уравнения (3.13) можно найти в виде разложения по малому параметру $G_{\text{min}}^{-1} \ll 1$, где G_{min} — наименьшее значение $|G(\eta)|$ на интервале от $\eta_{\text{вх}}$

до $\eta_{\text{вых}}$. Тогда

$$P(\eta_{\text{вых}}) = \left\{ P(\eta_{\text{вх}}) - i \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta_{\text{вых}}} \exp \left[2i \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta} G(\eta) d\eta \right] d\eta \right\} \times \\ \times \exp \left[-2i \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta_{\text{вых}}} G(\eta) d\eta \right]. \quad (3.19)$$

Этот результат соответствует учету членов $-i$ и $-2iG(\eta)P$ (но не iP^2) в (3.13) и отличается присутствием малых поправок порядка G_{min}^{-1} от геометрического решения, в котором учитывается только член $-2iG(\eta)P$.

Коэффициент трансформации здесь не равен нулю, но он остается малым по сравнению с единицей (слабое взаимодействие):

$$Q \approx \left| \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta_{\text{вых}}} \exp \left[2i \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta} G(\eta) d\eta \right] d\eta \right|^2 \leq G_{\text{min}}^{-2} \ll 1. \quad (3.20)$$

Сдвиг фаз γ мало отличается от геометрического значения γ_0 (3.7). Поведение фазы φ рождающейся волны более сложное; в простейших случаях новая волна возникает почти в квадратуре с падающей: $\varphi \approx \pm \pi/2$ либо $\varphi \approx -2\gamma_0 \pm \pi/2$ (см. (3.19)).

Согласно (3.16), взаимодействие слабое, когда всюду $|P_0^2| \ll 1$. В этом случае для любой функции $G(\eta)$ в (3.13) можно пренебречь членом iP^2 , и мы приходим в точности к решению (3.19). Следовательно, оно описывает слабую трансформацию и при $|G(\eta)| \lesssim 1$. Более того, если приближенно считать, что и при $|G(\eta)| \lesssim 1$ фаза функции P определяется соотношением вида (3.19), то решение уравнения (3.13) для $|P|$ приводит к коэффициенту трансформации в форме, напоминающей (3.20):

$$Q = \sin^2 \left| \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta_{\text{вых}}} \exp \left[2i \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta} G(\eta) d\eta \right] d\eta \right|. \quad (3.21)$$

Судя по конкретным примерам ⁷², формула (3.21) приближенно описывает также эффективную и сильную трансформацию. Последнее характерно для случаев, когда фазовые расхождения с геометрической оптикой невелики; это типично для переходных слоев, поскольку в них $|\gamma - \gamma_0| \lesssim (\Delta\eta/2)^2$ (см. (3.7), (3.17) и (3.26)).

В предельном случае $|G(\eta)| \ll 1$ (когда $\tilde{n}_1$ и $\tilde{n}_2$ сильно сближаются, а η продолжает меняться вдоль луча) также можно найти явные выражения для Q , φ и γ . Для этого следует воспользоваться заменой $\tilde{P} = (1 - P)/(1 + P)$, которая переводит уравнение (3.13) с функцией $G(\eta)$ в аналогичное уравнение Риккати с функцией $\tilde{G}(\eta) = 1/G(\eta)$, и снова применить решение типа (3.19). Нетрудно проверить, что это решение дает малые поправки к значениям Q , φ и γ , полученным ранее в пределе изотропной среды (3.9) (когда $G(\eta) = 0$). В частности,

$$Q \approx \sin^2 \Delta\eta \cdot [1 - O(G^2)], \quad [(3.22)]$$

$|\gamma - \gamma_0| \ll 1$ и рождающаяся волна находится почти в фазе ($\varphi \approx 0$) или в противофазе ($\varphi \approx \pm \pi$) с падающей волной. При $|\Delta\eta| \sim 1$ в слое этот случай соответствует сильному взаимодействию.

Согласно (3.22), малое по сравнению с единицей изменение η вдоль луча приводит к появлению лишь слабого взаимодействия: $Q \ll 1$. Ска-

зависимость справедливо не только в случае $|G(\eta)| \ll 1$, но и для неоднородных слоев с функцией *) $|G(\eta)| \lesssim 1$. В случае $|G(\eta)| \gg 1$ величина $Q \ll 1$ при любых приращениях $\Delta\eta$ вдоль луча (см. (3.20)).

Резюмируя изложенное, можно утверждать, что эффективное взаимодействие с коэффициентом трансформации $Q \sim 1/2$ может реализоваться только в таких неоднородных слоях, где характерная функция $G(\eta)$ опускается до значений $|G(\eta)| \lesssim 1$ на интервале $|\Delta\eta| \sim 1$. Этот вывод можно подтвердить анализом фазовой структуры уравнения Риккати (3.13).

Несколько характерных примеров поведения функции $G(\eta)$ приведено на рис. 2. Так, кривая 1 относится к слою (3.18). Кривая 2 соответствует эффекту предельной поляризации в условиях, когда излучение выходит из анизотропной среды ($\tilde{n}_1 \neq \tilde{n}_2$) в изотропную ($\tilde{n}_1 = \tilde{n}_2$); здесь взаимодействие будет сильным, с коэффициентом трансформации $Q_{\max} = \sin^2 \Delta\eta$, если $|\Delta\eta| \sim 1$ и функция $G(\eta)$ опускается от значений $|G(\eta)| \gg 1$ до значений $|G(\eta)| \ll 1$ достаточно быстро; благодаря этому большая часть приращения $\Delta\eta$ и, следовательно, основное изменение коэффициентов поляризации геометрооптических волн происходит в области $|G(\eta)| \ll 1$. Такая же функция $G(\eta)$ реализуется на участке перехода из однородной анизотропной среды в сильно неоднородную анизотропную среду, когда $\tilde{n}_1 \neq \tilde{n}_2$ и $G(\eta)$ стремится к нулю с ростом η из-за большой производной $\tilde{q}'$ (см. (3.14)).

Рис. 2. Простейшие зависимости $G(\eta)$ в переходных слоях.

1 — слой без смены знака $\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2$; 2 — переходный слой между анизотропной и изотропной средой; 3 — слой со сменой знака $\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2$; 4 — слой с $G(\eta) \approx \text{const} \sim 1$.

двух ее половин отличаются комплексным сопряжением недиагональных элементов. Все эти выводы нетрудно проследить на основе системы уравнений взаимодействия (3.4а).

Приведенные выше результаты можно получить также из уравнения Риккати для коэффициента поляризации полного излучения:

$$K' = i \frac{\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1}{\tilde{K}_2 - \tilde{K}_1} (K - \tilde{K}_1)(K - \tilde{K}_2). \quad (3.23)$$

Оно следует из (3.13) после замены (3.15), но может быть написано и сразу, как в однородной среде, поскольку производные от параметров среды в него не входят (ср. вывод уравнений переноса в п. 2д). Последнее позволяет легко дополнить это уравнение учетом поглощения, дихроизма, неортогональности нормальных волн и сильного вращения оптических осей

*) На малом интервале значений η решение уравнения (3.13) (или (3.4а)) удобно искать в виде ряда по $\Delta\eta$. В результате получаем $Q \approx (\Delta\eta)^2 \ll 1$. В частности, эффект взаимодействия окажется слабым, если поляризация геометрооптических волн всюду вдоль луча остается либо линейной, либо круговой: в этих случаях, как ясно из (3.10)–(3.12), приращение $\Delta\eta$ вдоль луча мало.

среды, так как указанные факторы включены в коэффициенты $\tilde{n}_{1,2}$ и $\tilde{K}_{1,2}$. Соответствующее обобщение уравнения (3.13) для амплитуд взаимодействующих волн может быть получено обратной заменой (3.15).

в) Параметр взаимодействия в переходных слоях

Трасса распространения электромагнитных волн в плавно неоднородной среде обычно включает в себя области с линейной и круговой поляризацией геометрооптических волн и переходы между ними. Как показано выше, только на этих переходах и возникает взаимодействие волн. Для одного перехода приращение $\Delta\eta = \pm\pi/4$, для двух $\Delta\eta = \pm\pi/2$. Взаимодействие при этом слабое, если вдоль всего луча $|G(\eta)| \gg 1$. Оно остается слабым, если функция $G(\eta)$ опускается до значений $|G(\eta)| \lesssim 1$ только на малом интервале $|\Delta\eta| \ll 1$, сохраняя большие абсолютные значения на остальных участках луча. Напротив, взаимодействие становится эффективным ($Q \sim 1/2$), если $|G(\eta)| \lesssim 1$ в широком интервале $|\Delta\eta| \sim 1$ (рис. 2). И наконец, взаимодействие будет сильным, когда $|G(\eta)| \ll 1$ на интервале $|\Delta\eta| \sim 1$; при $\Delta\eta = \pm\pi/4$ и $\Delta\eta = \pm\pi/2$ коэффициент трансформации приближается к своим максимальным значениям (1/2 и 1 соответственно).

Рассмотрим переходный слой, характеризующийся монотонным изменением переменной η (и величины $\tilde{q}$) и разделяющий две соседние области среды, в которых справедливо геометрооптическое приближение. Из сказанного выше ясно, что в случае, когда изменение функции $G(\eta)$ на большей части интервала $\Delta\eta$ не превышает величину самой функции, эффективность трансформации в переходном слое может быть охарактеризована параметром $G = G(\eta_0)$. Здесь η_0 — некоторая фиксированная (например, средняя) точка из интервала $\Delta\eta$. В случае переходного слоя с $|\Delta\eta| \sim 1$ интервал $\Delta\eta$ обязательно включает в себя область, где значения $\tilde{q}^2 \sim 1$, и параметр взаимодействия можно определить выражением *)

$$G = |G(\eta)|_{\tilde{q}^2 \sim 1} = \left| \frac{\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1}{2\tilde{\Psi}} \right|_{\tilde{q}^2 \sim 1}. \quad (3.24)$$

Значение $\tilde{q}^2 = 1$ в зависимости от знака параметра эллиптичности волн $\tilde{q}$ отвечает величине $\eta = 3\pi/8$ и $\eta = \pi/8$ (см. (3.10)).

Если в среде имеется переходная область существенного изменения поляризации геометрооптических волн $\tilde{K}_{1,2}$ (2.13) (т. е. $|\Delta\eta| \sim 1$ вдоль луча), причем в этой области относительное изменение характерной функции $G(\eta)$ меньше или сравнимо с единицей, то значения параметра взаимодействия позволяют судить об эффективности трансформации волн. А именно,

$$\begin{aligned} Q &\ll 1 && \text{при } G \gg 1, \\ Q &\sim \frac{1}{2} Q_{\max} && \text{при } G \sim 1, \\ Q &\approx Q_{\max} && \text{при } G \ll 1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $Q_{\max} = \sin^2 \Delta\eta$. Схематически зависимость $Q(G)$ представлена на рис. 3. При $G \gg 1$ применима формула (3.20), согласно которой в зависи-

*) Отметим, что в статье Козна ⁷³ «параметром взаимодействия» была названа функция $G(\eta)$, а не введенная здесь и ранее ^{3, 33, 52} величина G (3.24).

мости $Q(G)$ возможны осцилляции, поскольку в этом случае слабой трансформации область взаимодействия может быть не локализована и сказываются фазовые эффекты. Однако наиболее интересным и нетривиальным является промежуточный случай эффективного взаимодействия ($Q \sim 1/2$ при $G \sim 1$, $|\Delta\eta| \sim 1$). Для получения аналитического вида функции $Q(G)$ здесь требуются более рафинированные методы (см. п. 3д).

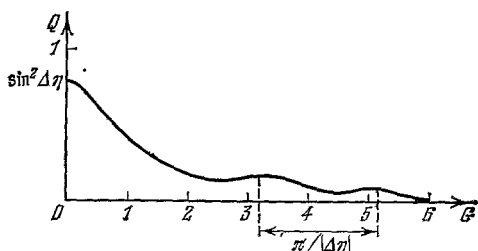


Рис. 3. Характерная зависимость коэффициента трансформации Q от параметра взаимодействия G .

Подобная зависимость при $\Delta\eta = \pi/2$ получена численно для нейтрального токового слоя плазмы ⁷⁴.

любом случае, согласно (3.22), максимальный коэффициент трансформации $Q_{\max} = \sin^2 \Delta\eta$ и достигается тогда, когда в переходном слое $|G(\eta)| \ll 1$ и, в частности, $G \ll 1$.

Далее заметим, что, согласно (3.14) и (3.10),

$$2 \int_{\eta_{\text{вх}}}^{\eta_{\text{вых}}} G(\eta) d\eta = \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta_{\text{вых}}} (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) d\zeta. \quad (3.26)$$

Отсюда следует, что в переходном слое на отрезке луча $\zeta_{\text{вх}} \div \zeta_{\text{вых}}$, совпадающем с областью эффективного взаимодействия ($|\Delta\eta| \sim 1$, $|G(\eta)| \lesssim 1$),

абсолютное значение $\int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta_{\text{вых}}} (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) d\zeta$ по порядку величины не превышает

единицу. Поскольку условие $\int (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) d\zeta \sim 1$ определяет пространственный период биений между геометрооптическими волнами, ясно, что эффективное взаимодействие реализуется в случае, когда на указанном периоде происходит существенное изменение поляризации этих волн (т. е. когда период биений занимает интервал $|\Delta\eta| \sim 1$). Поэтому неудивительно, что параметр взаимодействия (3.24), как нетрудно видеть, по порядку величины равен отношению масштаба неоднородности $\Lambda_{\tilde{q}}$ величины $\tilde{q}$ в точке $\tilde{q}^2 \sim 1$ к периоду биений между волнами $2\pi/k_0 |\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2|$ в этой же точке:

$$G = |2(\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) k_0 \Lambda_{\tilde{q}}|_{\tilde{q}^2 \sim 1}. \quad (3.27)$$

Иными словами, взаимодействие появляется, если поляризация полного излучения «не успевает» следить за изменением поляризаций $\tilde{K}_{1,2}$ геометрооптических волн. Этот вывод проще всего понять, обратившись к уравнению (3.23) для поляризации излучения K и рассматривая «фарадеевский» интеграл $\int (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) d\zeta$ как новую независимую переменную.

На участке, где ее применение малó, $\int (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) d\zeta \ll 1$, приращение неизвестной функции K в (3.23) также малó — и следовательно, поляризация полного излучения остается практически постоянной, тогда как поля-

ризации геометрооптических волн $\tilde{K}_{1,2}$, определяемые локальными свойствами среды, могут сильно изменяться (в неоднородной среде). Однако изменение поляризации полного излучения происходит на интервале, где $\int (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) d\zeta \gtrsim 1$ (конечно, при условии $K \neq \tilde{K}_{1,2}$, которое, впрочем, не существенно при наличии взаимодействия). Это следует из уравнения (3.23), согласно которому характерный масштаб поляризационной перестройки излучения, определяемый отношением $|K/K'|$ при $|K| \sim 1$, равен периоду биений между волнами $2\pi/k_0 |\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2|$ и не зависит от производных $\tilde{K}'_{1,2}$, $\tilde{n}'_{1,2}$. В результате, как только масштаб неоднородности $\Lambda_{\tilde{q}} = |\tilde{q}/\tilde{q}'| |\tilde{q}_{\sim 1}|$ для геометрооптических волн (2.13) становится меньше периода биений, возникает расхождение с геометрической оптикой и, следовательно, взаимодействие волн.

Из сказанного становится ясным смысл преобразования исходных уравнений поля (1.4), (2.3) или (3.23) в канонические уравнения взаимодействия (3.4а) или (3.13). В исходных уравнениях информация о явлении взаимодействия содержалась неявно, в виде нескольких различных функциональных характеристик неоднородного слоя, например $\tilde{n}_{1,2}(\zeta)$ и $\tilde{q}(\zeta)$. Напротив, в канонических уравнениях взаимодействия вся информация об эффекте трансформации заключена в одной функции (3.14) $G(\eta)$, являющейся дифференциальной характеристикой неоднородного слоя. В функцию $G(\eta)$ явно входит производная $\tilde{q}'$ (она определяет пространственную скорость изменения поляризации геометрооптических волн). Именно это обстоятельство позволяет указать локальную пространственную «скорость» процесса взаимодействия и, в частности, ввести параметр взаимодействия как среднюю величину этой «скорости» в переходной области взаимодействия.

В случае двух (или нескольких) следующих друг за другом переходных слоев взаимодействия принципиальное значение приобретают фазовые характеристики трансформации волн. Действительно, перемножая матрицы трансформации (3.2) двух переходных слоев (с параметрами Q_I, γ_I и Q_{II}, γ_{II} , соответственно) и учитывая разность фаз $\delta = \frac{1}{2}k_0 \int (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2) d\zeta$, приобретаемую волнами в промежутке между слоями, получаем

$$Q = [\sqrt{Q_I(1-Q_{II})} + \sqrt{Q_{II}(1-Q_I)}]^2 - 4\sqrt{Q_I Q_{II}(1-Q_I)(1-Q_{II})} \sin^2 \left[\delta + \gamma_{II} + \frac{1}{2}(\varphi_{II} - \varphi_I) \right]. \quad (3.28)$$

В случае двух одинаковых переходных областей взаимодействия, образующих неоднородный слой, симметричный относительно точки $\zeta = 0$, формула (3.28) принимает следующий вид (ср. пп. 5б, 6а и 50, 160):

$$Q = \sin^2 s' \cdot \text{ch}^{-2} s'', \quad (3.28a)$$

где

$$2s' = 2\delta + 2\gamma_I + \varphi_{II} - \varphi_I + \pi, \quad s'' = \text{archch} [4Q_I(1-Q_I)]^{-1/2}, \quad Q_I = Q_{II}.$$

Как видим, полная трансформация зависит от интерференции волн, и эффекты трансформации в двух соседних слоях могут компенсироваться. С другой стороны, в периодической последовательности переходных слоев, взаимодействие в каждом из которых слабое, полная трансформация может быть значительно усилена за счет резонансной интерференции волн.

г) О качественном анализе взаимодействия встречных волн

Уравнения взаимодействия встречных волн (2.18) заменой $F = (f_1 - if_3)/\sqrt{n}$ сводятся к каноническому волновому уравнению $F'' + n^2 F = 0$, исследованию которого посвящено большое число работ (см. 7-10, 26-28, 51, 75, 92 и др.). Здесь мы отметим лишь аналогию между явлениями взаимодействия для попутных и для встречных волн. В соответствии с (2.18) ограничимся случаем надбарьерного отражения ($n^2 > 0$). Из (2.18) следует, что коэффициент отражения $\mathcal{R} = -if_3/f_1$ подчиняется уравнению Риккати ^{5,7}

$$\frac{d\mathcal{R}}{d\theta} = \mathcal{G}^2 - 1 - 2i\mathcal{G}(\theta)\mathcal{R}, \quad (3.29)$$

где $\theta = - \int [n'/(2n)] d\xi = -\ln\sqrt{n}$, $\mathcal{G}(\theta) = 2n^2/n'$. Формально оно отличается от уравнения Риккати для попутных волн (3.13) только заменой $\theta \rightarrow i\eta$, $\mathcal{G}(\theta) \rightarrow -iG(\eta)$ и тем, что для определения коэффициента трансформации волн в (3.29) надо искать решение с граничным условием $\mathcal{R}(\xi_{\text{вх}}) = 0$, а в (3.13) — с граничным условием $P(\xi_{\text{вх}}) = 0$. Поэтому нетрудно перенести качественный анализ, изложенный выше, на случай взаимодействия двух встречных волн. Необходимо лишь учесть, что если интервал изменения переменной η (3.10) для попутных волн ограничен отрезком $[0, \pi/2]$, то для встречных волн интервал изменения переменной θ оказывается неограниченным $(-\infty; +\infty)$. (Заметим, что в случае попутных волн наличие поглощения также приводит к тому, что переменная η и функция $G(\eta)$ становятся комплексными и возможный интервал изменения $\Delta\eta$ — неограниченным.) В частности, максимальный коэффициент трансформации равен

$$Q_{\max} = |\sin^2 \Delta\eta| (|\sin^2 \Delta\eta| + |\cos^2 \Delta\eta|)^{-1} \quad (3.30)$$

с $\Delta\eta$ или $i\Delta\theta$ для попутных и для встречных волн соответственно.

Для переходного слоя, в котором $n(\xi)$ — монотонная функция, справедлив вывод о том, что эффективное отражение с коэффициентом трансформации (отражения) $Q = |\mathcal{R}|^2/(|\mathcal{R}|^2 + 1) \sim 1/2$ может реализоваться только в слое, где характерная функция $\mathcal{G}(\theta)$ опускается до значений $|\mathcal{G}(\theta)| \lesssim 1$ на интервале $|\Delta\theta| \gtrsim 1$. Действуя аналогично, можно ввести параметр взаимодействия $\mathcal{G}$, определяющий эффективность трансформации в переходном слое $n_{\text{вх}} \div n_{\text{вых}}$, и рассмотреть зависимости коэффициента отражения и фаз встречных волн от параметра взаимодействия. Если фазовые эффекты не играют существенной роли, то снова применима ⁵ приближенная формула вида (3.21) с заменой $\eta \rightarrow -i\theta$, $G(\eta) \rightarrow i\mathcal{G}(\theta)$ и $\sin \rightarrow \text{sh}$. При отражении от последовательности переходных слоев оказываются существенными фазовые эффекты и интерференция взаимодействующих встречных волн (ср. п. 3в).

д) Методы решения уравнений
линейного взаимодействия

Качественный анализ взаимодействия волн позволяет указать области эффективной трансформации и дать оценку величины эффекта прямо по виду неоднородности среды, не прибегая к решению уравнений. Для получения более детальной информации используются различные приближенные методы решения уравнений взаимодействия: разнообразные варианты метода теории возмущений ^{1, 7, 28, 34, 49, 72, 77, 164} и модификации метода ВКБ ^{26, 78, 79}, метод фазовых интегралов (метод неопределенных множите-

лей Цвана)^{3, 9, 25, 50}, метод уравнения сравнения (линейного присоединенного уравнения)^{28, 50}, численные методы^{64, 74, 80-87}, метод эталонных задач^{7, 30, 36-39, 47, 52, 71, 75, 76, 88-91, 93} и др.

Достигнутый в последние годы прогресс в теории взаимодействия во многом обязан методу эталонных задач, т. е. отысканию точных решений для достаточно широкого класса неоднородных слоев и сравнительному анализу их свойств. Особенности применения этого метода удобно пояснить на примере уравнения⁵²

$$\frac{d^2 \delta_2}{d\eta^2} + I(\eta) \delta_2 = 0, \quad I(\eta) = 1 - \frac{i dG(\eta)}{d\eta} + G^2(\eta), \quad (3.31)$$

которое следует из (3.4а). Выберем характерную функцию $G(\eta)$ так, чтобы ее вид соответствовал исследуемому типу взаимодействия (см. п. б) гл. 3 и рис. 2) и чтобы уравнение (3.31) свелось к одному из изученных уравнений, решаемых в известных функциях. Этот выбор налагает, согласно (3.14), одну дифференциальную связь на все функции, определяющие неоднородные профили параметров среды. Интегрируя эту связь, получаем целый класс функций, соответствующих различным конкретным реализациям неоднородного слоя (зависимостей параметров среды от координаты вдоль луча). Взаимодействие волн в каждой из этих реализаций описывается матрицей трансформации, которую находим по известной асимптотике специальных функций выбранной эталонной задачи. Таким образом, начиная «с середины», т. е. с выбора эталонной функции $G(\eta)$, мы сводим задачу к двум, вообще говоря, более простым задачам: нахождению матрицы трансформации с помощью уравнения (3.13) и определению набора реализаций неоднородных слоев, трансформация в которых описывается выбранной эталонной задачей — с помощью (3.14). Обе эти задачи эффективно решаются; это будет продемонстрировано ниже. Напротив, если с самого начала задаться конкретным профилем неоднородного слоя, то по большей части задача о взаимодействии волн приводит к сложному дифференциальному уравнению, решение которого неизвестно. Тем не менее характер эффектов трансформации можно указать и здесь, если найти функцию $G(\eta)$ и использовать, наряду с качественным анализом, изученные эталонные задачи с характерными функциями $G(\eta)$ того же типа. Кроме того, если реальная функция $G(\eta)$ слабо отличается от эталонной, то нетрудно найти поправки к эталонной матрице трансформации при помощи теории возмущений.

4. ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Плазма, находящаяся в неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$, является важнейшим и наиболее изученным примером гиротропной среды, в которой возможна трансформация электромагнитных волн. В плавно неоднородной магнитоактивной плазме взаимодействие обыкновенной и необыкновенной волн *) происходит в областях сближения их показателей преломления

$$n_{1,2}^2 = 1 - v + v \sqrt{u} \cos \alpha (K_{1,2} + \sqrt{u} \cos \alpha)^{-1} \quad (4.1)$$

*) Имеются в виду высокочастотные волны в холодной плазме. Анализ взаимодействия низкочастотных волн, распространяющихся, например, в земной ионосфере, может быть проведен аналогичным образом^{39, 71, 72}. Кроме того, мы пренебрегаем пространственной дисперсией, наличие которой в «горячей» плазме приводит к появлению взаимодействия плазменных, бернштейновских, циклотронных и других волн^{1, 3, 11-13, 17, 18, 94-97} и др. Обсуждение этого круга вопросов заслуживает по меньшей мере отдельного обзора и здесь не проводится.

(см. рис. 4) и связано с изменением коэффициентов поляризации волн

$$K_{1,2} = q \mp \sqrt{q^2 + 1}, \quad q = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2(1-v) \cos \alpha}. \quad (4.2)$$

В выражении (4.2) использованы определение (2.6) и тождество $\varepsilon_{xy}^{-1} \equiv -\varepsilon_{yx}^{-1}$ для плазмы с магнитным полем $\mathbf{B}_0$, лежащим в плоскости y, z (рис. 1)¹; α — угол между $\mathbf{B}_0$ и направлением распространения (осью z);

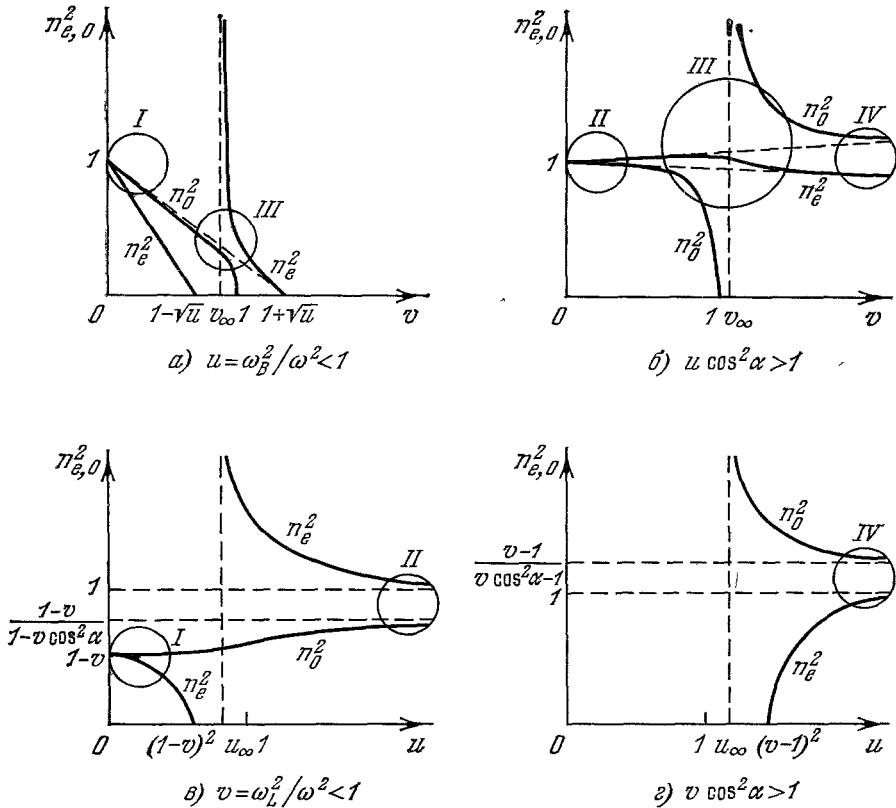


Рис. 4. Показатели преломления нормальных волн в магнитоактивной плазме как функции электронной концентрации v и величины магнитного поля u (схематически).

Кружками отмечены области взаимодействия волн. [1, 2]

параметры $u = \omega_B^2/\omega^2$, $v = \omega_L^2/\omega^2$; $\omega_B = eB_0/mc$ — электронная гирочастота, $\omega_L = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ — плазменная частота, N — электронная концентрация плазмы (e и m — заряд и масса электрона).

Из характера зависимости (4.2) ясно, что изменение поляризации обыкновенной и необыкновенной волн вдоль луча и их взаимодействие происходит благодаря неоднородности магнитного поля $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ по величине и направлению или из-за неоднородности распределения электронной концентрации. При этом трансформация наиболее эффективна в слабом квазипоперечном и в сильном квазипродольном магнитном поле^{33, 52}:

$$\sqrt{u} \ll 1 - v, \quad \cos^2 \alpha \ll 1, \quad v < 1; \quad (4.3)$$

$$u \gg 1, \quad \sin^2 \alpha \ll 1, \quad v \ll \sqrt{u}. \quad (4.4)$$

В этих областях параметр взаимодействия (3.24) существенно уменьшается по сравнению со значением $G \sim k_0 v \Lambda_q$, характерным для плазмы с пара-

метрами $\alpha \sim u \sim |1 - u| \sim 1$ и $v \lesssim 1 - v$. Поэтому при соблюдении условий (4.3), (4.4) эффективное взаимодействие возможно в более плотной и более однородной плазме. Неоднородность концентрации плазмы оказывается существенной при распространении вдоль сильного магнитного поля в закритической плазме ($1 \ll v \ll \sqrt{u}$; область IV на рис. 4) либо в окрестности плазменного резонанса ($v \sim 1$; область III на рис. 4). Последний случай осложняется обращением функции $n^2(\xi)$ в нуль в точке $v = 1$ и особенностью этой функции в точке $v = v_\infty$; ниже он не рассматривается (см. о нем ^{1, 3, 14}).

а) Слабое квазипоперечное магнитное поле

Если значение масштаба неоднородности Λ_q определяется главным образом изменением направления магнитного поля вдоль луча, то в случае (4.3) параметр взаимодействия G (3.24) равен ^{3, 13, 52, 73}

$$G_\perp = \frac{\sqrt{2} k_0 v u}{(1-v)^{3/2}} \left| \frac{\cos^2 \alpha}{d \cos \alpha / dl} \right|_{q^2 \sim 1}. \quad (4.5)$$

Согласно п. 3в, в переходном слое от квазипродольного распространения ($q_{\text{вх}}^2 \rightarrow 0$) к квазипоперечному ($q_{\text{вх}}^2 \rightarrow \infty$) или, наоборот, максимальный коэффициент трансформации равен 1/2 и достигается при $G_\perp \ll 1$. В этом случае падающая на слой циркулярно поляризованная волна одного типа проходит неоднородную область Λ_q практически без изменения поляризации. Следовательно, в область квазипоперечного распространения, где нормальные волны поляризованы линейно, выходят когерентные обыкновенная и необыкновенная волны равной интенсивности; их суперпозиция обеспечивает круговую поляризацию полного излучения. С увеличением $G_\perp$ и уменьшением приращения $\Delta\eta$ при $q_{\text{вх}}^2 \neq 0$, $q_{\text{вх}}^2 \neq \infty$ эффективность трансформации падает (см. п. 3в и рис. 3).

В случае, когда волны последовательно проходят два переходных слоя с $q^2 \sim 1$, трансформация обыкновенной и необыкновенной волн может быть полной: $Q \approx 1$ при $G_\perp \ll 1$. Это имеет место при прохождении области поперечного магнитного поля со сменой знака его продольной составляющей на направление распространения волн (рис. 5, а). Если $\cos \alpha = u/\Lambda$, а $v, u, \psi' = \text{const}$, то здесь (ср. (3.18))

$$G(\eta) = -\frac{vu^{3/2}}{4(1-v)^{5/2}} k_0 \Lambda \cos^3 2\eta, \quad (4.6)$$

и уравнение (3.31) имеет точное решение, выражающееся через функции параболического цилиндра ^{38, 50, 93, 165}. Коэффициент трансформации равен ³⁸

$$Q = \exp\left(-\frac{\pi G_\perp}{4\sqrt{2}}\right) = \exp\left(-\frac{\omega_\perp^4}{\omega^4}\right), \quad (4.7)$$

$$\omega_\perp = (\pi \omega_\perp^2 \omega_B^2 \Lambda / 8c)^{1/4}$$

(сначала этот результат был получен методом фазовых интегралов ^{3, 99}). Выражение Q через $\omega_\perp$ в (4.7) записано для случая $v \ll 1$, когда $G_\perp \propto \omega^{-4}$ (см. (4.5)); критическая частота $\omega_\perp$ введена из условия $\pi G_\perp / 4\sqrt{2} = 1$.

На низких частотах $\omega \ll \omega_\perp$, где $G_\perp \gg 1$, волны распространяются независимо, следуя вдоль своих дисперсионных кривых (рис. 5а) и изменяя знак вращения на противоположный в соответствии со сменой знака продольной составляющей магнитного поля. С ростом частоты геометро-оптическое приближение нарушается, и при $\omega \gg \omega_\perp$, когда $G_\perp \ll 1$, излучение «не замечает» изменения магнитного поля и сохраняет знак кру-

говой поляризации, как при распространении в вакууме. Наконец, при $G_{\perp} \sim 1$ имеет место промежуточный случай: при подходе волны одного типа к области взаимодействия из нее выходят уже две когерентные волны — обыкновенная и необыкновенная. Отношение их интенсивностей равно $Q/(1-Q)$ и зависит от частоты (см. (4.7)); при $\omega \sim \omega_{\perp}$ оно становится равным единице, что соответствует линейной поляризации. Определение частоты обращения знака поляризации $\omega_{\perp}$ (или измерение параметра взаимодействия $G_{\perp}$ на заданной частоте) служит удобным источником информации

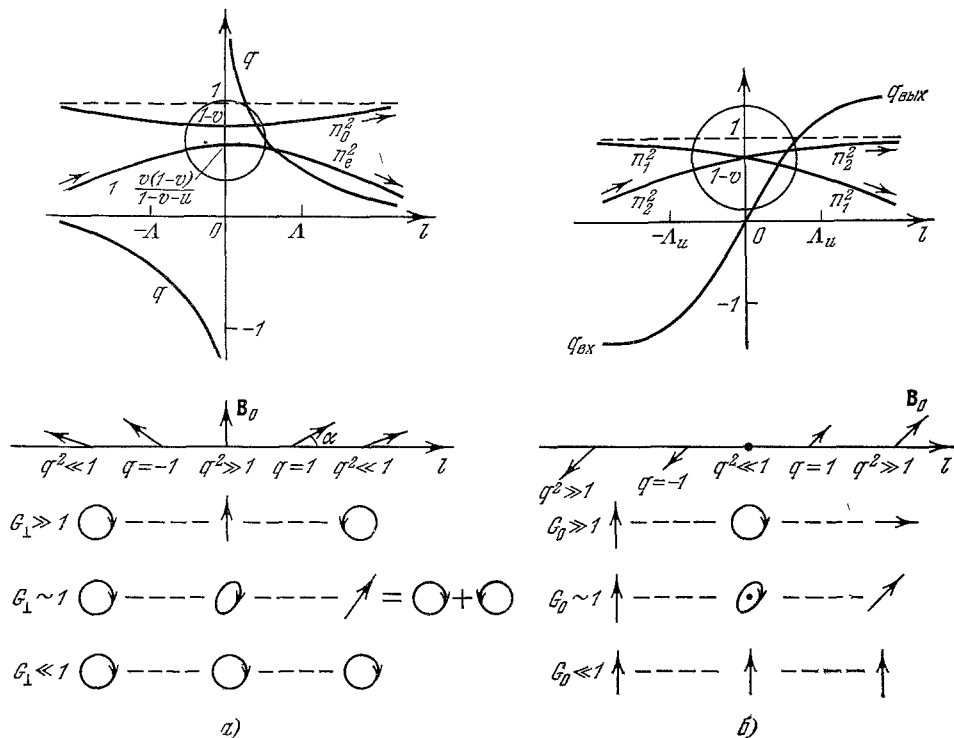


Рис. 5. Характер поведения дисперсионных ветвей и поляризации волн при распространении через область квазиоперечного магнитного поля (а), через нейтральный токовый слой (б).

о локальных характеристиках плазмы (магнитных полях в солнечной короне^{3, 84, 85, 100} (рис. 6, а), электронной концентрации в ионосферной и лабораторной плазме³⁸, а также в плазме внутренней магнитосферы Юпитера^{83, 101}).

В качестве примера укажем на наблюдения обращения знака поляризации медленно меняющейся компоненты и микроволновых всплесков солнечного радиоизлучения на частотах около 3 ГГц (см. ^{33, 100} и указанную там литературу). Этот эффект объясняется, если предположить, что излучение проходит в короне через область квазиоперечного магнитного поля, в которой частота $\omega_{\perp}/2\pi \sim 3$ ГГц. Отсюда с помощью (4.7) получаем оценку магнитного поля в области взаимодействия $B_0 \sim 5$ Гс, предположив, что там $N \sim 3 \cdot 10^8$ см⁻³ и $\Lambda \sim 10^{10}$ см; согласно определению $\omega_{\perp}$, указанная оценка сравнительно слабо зависит от параметров N , Λ и значительно сильнее — от частоты $\omega_{\perp}$.

Трансформация волн возникает и при прохождении области нулевого магнитного поля, когда основной вклад в масштаб Λ_q дает изменение поля

по величине и соответствующий параметр взаимодействия ^{33, 52, 74}

$$G_0 = 4 \sqrt{2} k_0 v \sqrt{1-v} \cos^2 \alpha \left| \frac{V \bar{u}}{d \sqrt{u}/dl} \right|_{q^2 \sim 1} \ll 1. \quad (4.8)$$

Указанная ситуация реализуется в нейтральных токовых слоях плазмы (см. рис. 5, б), играющих важную роль в объяснении происхождения магнитосферных суббурь и солнечных вспышек. Явление взаимодействия

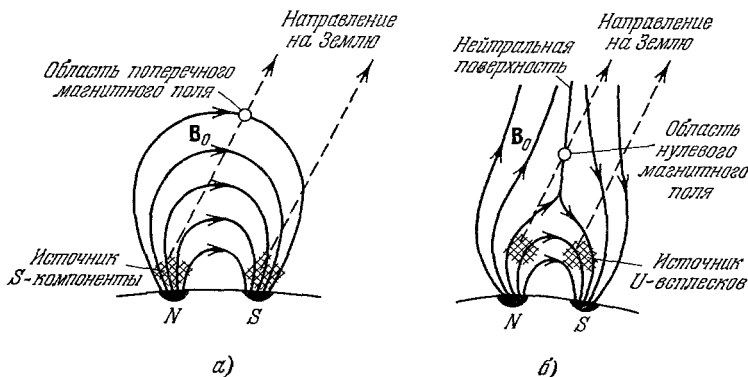


Рис. 6. Выход солнечного радиоизлучения за пределы активной области над биполярной группой пятен через поперечное магнитное поле (а), нулевое магнитное поле (б).

волн позволяет осуществлять диагностику токовых слоев ^{33, 74, 100} (рис. 6, б): зная коэффициент трансформации Q и зная зависимость $Q(G)$ в токовом слое (она рассчитана в ⁷⁴), можно определить параметр взаимодействия G и, следовательно, установить связь между параметрами слоя ω_L , Λ_u и $\cos \alpha$.

б) Сильное квазипродольное магнитное поле

В случае сильного квазипродольного магнитного поля параметры взаимодействия, возникающего из-за изменения магнитного поля по направлению ($\alpha = \alpha(\xi)$) и по величине ($u = u(\xi)$), равны соответственно

$$G_{\parallel} = \frac{\sqrt{2} k_0 v}{\sqrt{u}} \left| \frac{\sin \alpha}{d \sin \alpha / dl} \right|_{q^2 \sim 1},$$

$$G_{\infty} = \frac{\sqrt{2} k_0 v \sin^2 \alpha}{|1-v|} \left| \frac{V \bar{u}}{d \sqrt{u}/dl} \right|_{q^2 \sim 1} \quad (4.9)$$

(индексы « $\parallel$ » и « ∞ », согласно (4.4), указывают на то, что $\sin^2 \alpha \ll 1$ и $u \gg 1$ соответственно). Продемонстрируем их роль в переходном слое типа переходного слоя Эпштейна (см. 7):

$$q(\sigma) = \frac{q_{вх} - q_{вых}}{1 + \exp(4 \sqrt{2} \sigma / G)} + q_{вых}, \quad \sigma = \int \frac{n_1 - n_2}{2 \sqrt{q^2 + 1}} d\xi, \quad (4.10)$$

где $q_{вх} > q_{вых} > 0$ и $G = G_{\parallel}$ или $G = G_{\infty}$. Соответствующая функция (3.14)

$$G(\eta) = -\frac{G}{2 \sqrt{2}} \frac{(q_{вх} - q_{вых}) (1 + \operatorname{ctg}^2 2\eta)^{3/2}}{(q_{вх} + \operatorname{ctg} 2\eta) (q_{вых} + \operatorname{ctg} 2\eta)} \quad (4.11)$$

и имеет вид, представленный кривой 1 на рис. 2. Решение уравнения (3.34) в случае (4.11) сводится к гипергеометрическим функциям и проанализи-

ровано в ⁵². Оказывается, эффективность трансформации монотонно растет с уменьшением G и с увеличением перепада $q_{вх} - q_{вых}$ в слое (т. е. с увеличением приращения $\Delta\eta$ (3.11)). Для слоя, содержащего переход от квазипоперечного распространения ($q_{вх} \rightarrow \infty$) к квазипродольному ($q_{вых} \rightarrow 0$), имеем

$$Q = \left[1 + \exp \left(\frac{\pi G}{2\sqrt{2}} \right) \right]^{-1}. \quad (4.12)$$

В полном соответствии с результатами качественного анализа коэффициент трансформации $Q \ll 1$ при $G \gg 1$ и $Q \sim 1/2$ при $G \lesssim 1$. Взаимодействие, определяемое параметрами $G_{\parallel}$ и G_{∞} , ранее не рассматривалось, хотя оно представляет интерес, скажем, при исследовании плазмы в полупроводниках, помещенных в сильное магнитное поле, или при анализе поляризационных характеристик радиоизлучения, выходящего за пределы ионосферы Юпитера и магнитосфер нейтронных звезд.

в) Э ф ф е к т ы т р а н с ф о р м а ц и и в с и с т е м е
« п л а з м а + н а м а г н и ч е н н ы й в а к у у м »

В сильных магнитных полях, достигающих $5 \cdot 10^{12}$ Гс, ближайшую окрестность нейтронных звезд — рентгеновских пульсаров — следует рассматривать как среду, состоящую из разреженной плазмы ($v \ll 1$) и намагниченного вакуума ¹⁰²⁻¹⁰⁴. В такой среде

$$q = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \left[1 - \frac{3a(u-1)}{vu} \right], \quad (4.13)$$

где

$$a = \left(\frac{1}{45\pi} \right) \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{B_0}{B_{cr}} \right)^2 \ll 1, \quad B_{cr} = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 4,4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}.$$

Наибольший интерес представляет область

$$\left| 1 - \frac{4}{3} vu/a(u-1) \right| \ll 1. \quad (4.14)$$

В ней становятся сравнимыми влияние плазмы и намагниченного вакуума на поляризацию нормальных волн рентгеновского диапазона, и изменение величины q может быть обеспечено за счет неоднородности концентрации плазмы. В этих условиях возможна трансформация волн ¹⁰².

Если в плазме выполнено условие квазипоперечного распространения $\sqrt{u} \sin^2 \alpha \gg 2 |\cos \alpha|$, то поляризация волн близка к линейной. Пусть концентрация плазмы уменьшается в направлении распространения волн. Тогда, согласно (4.13), величина q убывает от значений $|q| \gg 1$ до нуля, меняет знак, а затем снова становится большой по абсолютной величине. В соответствии со сказанным поляризация волн сначала определяется плазмой и близка к линейной, с вектором $\mathbf{E}$ по оси x для обыкновенной волны и вектором $\mathbf{E}$ по оси y для необыкновенной; в области «компенсации», включающей слой, где $1 - (1/3)vu/a(u-1) = 0$, поляризация близка к круговой; наконец, в разреженной плазме с малыми значениями v поляризация волн определяется только намагниченным вакуумом и опять близка к линейной. Однако теперь волна необыкновенного типа поляризована вдоль оси y , а обыкновенного — вдоль оси x . В области взаимодействия ($q^2 \sim 1$ соответствующий параметр взаимодействия равен ¹⁰⁴

$$G_p = 12 \sqrt{2} k_0 a u^{-1} \operatorname{ctg}^2 \alpha \left| \frac{v}{dv/dl} \right|_{q^2 \sim 1} \quad (4.15)$$

при $u = \text{const} > 1$, $\alpha = \text{const}$).

Указанный поворот плоскости поляризации при переходе из плазмы в область, где свойства волн определяются намагниченным вакуумом, происходит, очевидно, только в геометрическом приближении, когда $G_v \gg 1$ и взаимодействие отсутствует. Если, напротив, взаимодействие сильное, то волна при своем распространении сохраняет плоскость поляризации неизменной и, следовательно, из необыкновенной превращается в волну обыкновенного типа (и наоборот). Для линейного профиля концентрации эффективность трансформации описывается уже знакомой нам формулой вида (4.7) (с заменой $G_{\perp}^2$ на G_v)¹⁰⁴. Из условия $G_v \ll 1$ следует, что для широкой области углов $\alpha \sim 1$ взаимодействие существенно, если $\hbar\omega \lesssim 1$ кэВ (мягкий рентгеновский диапазон). Концентрацию в области взаимодействия можно найти из условия $1 - \frac{1}{3}vu/a(u-1) = 0$, согласно которому $N_0 \sim 10^{20}$ см⁻³. Поскольку явление взаимодействия волн имеет место в широкой области углов, можно ожидать, что оно окажется существенным при формировании поляризации излучения рентгеновских пульсаров *).

г) Эффект предельной поляризации

Взаимная трансформация волн может оказывать влияние на поляризацию излучения, выходящего в вакуум из магнитоактивной плазмы (например, из плазмы в установках термоядерного синтеза или из магнитосферной плазмы, см. 1-3, 33, 58, 86, 98, 101, где обсуждаются соответствующие эксперименты и наблюдения). В этом случае существует неоднородная область, связывающая анизотропную среду с вакуумом (или с изотропной средой). Если после прохождения этой области поляризация излучения отличается от вычисленной в приближении геометрической оптики, то будем говорить, что имеет место эффект предельной поляризации. Физически ясно, что при достаточно малом v или u , т. е. в условиях слабой анизотропии, влияние магнитного поля $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ на поляризацию излучения должно исчезать. Если $v \rightarrow 0$, волны должны распространяться так же, как в вакууме; при $u \rightarrow 0$ — так же, как в изотропной плазме. Поэтому при выходе в вакуум (или в изотропную плазму), начиная с некоторого уровня, поляризация излучения перестает изменяться и при дальнейшем распространении эллипс поляризации сохраняет фиксированную форму, такую, какой она была до входа в область слабой анизотропии («предельная поляризация»). Наоборот, согласно приближению геометрической оптики, эллипс поляризации излучения и здесь должен менять свою форму в соответствии с изменением параметров v , u и α (см. (4.2)). Это означает, что в переходной области от анизотропной среды к изотропной при малых v и u имеет место взаимодействие волн.

На основании проведенного качественного анализа (см. п. в) гл. 3) можно указать следующие особенности эффекта предельной поляризации. Прежде всего ясно, что если при переходе в изотропную среду поляризация нормальных волн (4.2) меняется слабо ($|\Delta\eta| \ll 1$, см. (3.11)), то предельная поляризация излучения подчиняется приближению геометрической оптики и, следовательно, эффект предельной поляризации практически отсутствует **). Согласно п. в) гл. 3 как тут, так и в общем

*) Анализ эффектов трансформации радиоволн в магнитосферах радиопульсаров¹⁰⁵ должен проводиться с учетом того обстоятельства, что плазма в магнитосферах нейтронных звезд (радиопульсаров), по-видимому, является релятивистской.

**) Именно такая ситуация анализировалась в известной работе Баддена¹⁰⁷, где рассматривался выход в атмосферу волны, отраженной от земной ионосферы, и предполагалось, что неоднородность связана с изменением эффективной частоты соударений $s = v_{эфф}/\omega$. В этом случае величина q (4.2) равна $\frac{1}{2} \sqrt{u \sin^2 \alpha} [2(1 - v - is) \cos \alpha]^{-1}$ и мало меняется с изменением s при $s \ll 1$ и $v \neq 1$. Поэтому прира-

случае при выходе из анизотропной среды, соответствующем стремлению $\xi \rightarrow +\infty$, поляризация излучения (которая может быть произвольной) перестает изменяться там, где перестает нарастать «фарадеевский» интеграл $\int_{-\infty}^{\xi} (n_1 - n_2) d\xi$. Интервал значений ξ , в котором величина $\int_{-\infty}^{\xi} (n_1 - n_2) d\xi \sim 1$, называется предельной поляризационной областью.

Если же переход из анизотропной среды в изотропную сопровождается существенным изменением поляризации нормальных волн ($|\Delta\eta| \sim 1$), т. е. переходом от квазипоперечного распространения к квазипродольному (или наоборот), то необходимо учитывать взаимодействие волн. Оно становится существенным и приводит к эффекту предельной поляризации, если параметр взаимодействия $G \lesssim 1$ в области взаимодействия $q^2 \sim 1$. При этом, в зависимости от расположения области взаимодействия относительно предельной поляризационной области, возможны три различные ситуации. Если область взаимодействия расположена ближе к изотропной среде, чем предельная поляризационная область, то приращение «фарадеевского» интеграла $\int (n_1 - n_2) d\xi$ в области взаимодействия мало и $G \ll \ll 1$ — тогда эффект предельной поляризации соответствует сильному взаимодействию и в известном смысле является тривиальным (см. п. а) гл. 3). Если область взаимодействия расположена с другой стороны предельной поляризационной области, т. е. в глубине анизотропной среды, то формирование предельной поляризации определяется главным образом трансформацией волн в указанной области взаимодействия, поскольку при дальнейшем распространении в сторону изотропной среды и, в частности, в предельной поляризационной области поляризация излучения подчиняется приближению геометрической оптики. На наш взгляд, наиболее интересной оказывается третья возможная ситуация, когда область взаимодействия совпадает с предельной поляризационной областью и $G \sim 1$ (в этом случае характерная функция $G(\eta)$ имеет вид кривой 2 на рис. 2). Такая ситуация проанализирована в работе ¹⁰⁶ на примере эталонной задачи *) для переходного слоя с неоднородным магнитным полем, удовлетворяющим соотношению

$$\frac{dq}{d\xi} = -v \sqrt{u} \cos \alpha (q^2 + 1)^{3/2} \frac{1}{G(\eta)}, \quad G(\eta) = G \operatorname{ctg} \left[\frac{(1/2) \pi (\eta_0 - \eta)}{\Delta\eta} \right], \quad (4.16)$$

где $\Delta\eta$ — из (3.14), $0 < \Delta\eta < (\eta_0 - \pi/4)$, параметр $G = \text{const}$ (см. рис. 7). В этом случае имеем ¹⁰⁶

$$Q = [1 + |\operatorname{ctg}(G_1 \Delta\eta) \operatorname{ctg}(G_2 \Delta\eta)|]^{-1}, \quad (4.17)$$

$$e^{i\varphi} = \frac{4\pi^2}{\Delta\eta} \sqrt{|\operatorname{ctg}(G_1 \Delta\eta) \operatorname{ctg}(G_2 \Delta\eta)|} \times \\ \times \frac{\Gamma(-2G_1 \Delta\eta/\pi) \Gamma(2G_2 \Delta\eta/\pi)}{\Gamma^2(-G_1 \Delta\eta/\pi) \Gamma^2(G_2 \Delta\eta/\pi)} e^{i4(\ln 2)G\Delta\eta/\pi}, \quad (4.18)$$

щение $|\Delta\eta| \ll 1$ и формирование предельной поляризации фактически не сопровождается взаимодействием волн: $Q_{\max} \ll 1$, см. (3.30). Очевидно, этот вывод справедлив и в случае разреженной ($v \ll 1$) магнитоактивной плазмы, когда неоднородность при выходе в вакуум связана с изменением концентрации плазмы ^{35, 52}.

*) Метод фазовых интегралов здесь не эффективен, так как он не позволяет найти фазы волн и, следовательно, решить проблему предельной поляризации (например, определить ориентацию выходящего эллипса поляризации).

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta_{\text{вых}}} (n_1 - n_2) d\zeta + \arg \left[\frac{\Gamma((1/2) - 2i G \Delta\eta/\pi)}{\Gamma((1/2) - (G_1 \Delta\eta/\pi)) \Gamma((1/2) + (G_2 \Delta\eta/\pi))} \right] \quad (4.19)$$

(Γ — гамма-функция, $G_{1,2} = \sqrt{1 - G^2} \pm iG$). Фазы φ и γ позволяют указать форму и ориентацию предельного эллипса поляризации, см. рис. 7. Коэффициент трансформации Q характеризует эффект предельной поляризации, который, согласно (4.17), оказывается сильнее при большихращениях $\Delta\eta$ и малых параметрах взаимодействия G .

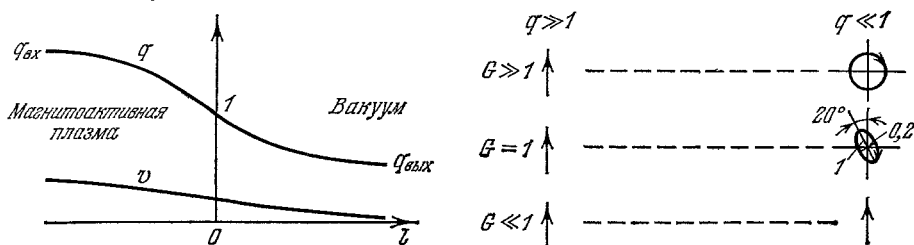


Рис. 7. Эффект предельной поляризации в переходном слое (4.16) от магнитоактивной плазмы к вакууму (схематически). Слева на слой падает обыкновенная волна.

Различие области нарушения геометрической оптики и предельной поляризационной области подчеркивалось в ¹⁰⁸. В работе ³⁰ рассматривались более сложные и реже встречающиеся модели предельных поляризационных областей, содержащих много переходных слоев величины q ,

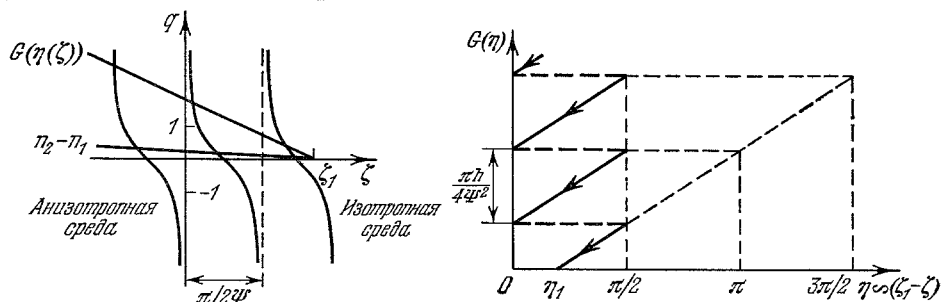


Рис. 8. Система переходных слоев взаимодействия и характерная функция $G(\eta(\zeta)) = (h/2\Psi^2) \Psi(\zeta_1 - \zeta)$ при выходе из анизотропной среды в изотропную для модели (4.20).

т. е. много локальных областей взаимодействия $q^2 \sim 1$ (или, можно сказать, одну распределенную область взаимодействия). Например, в модели

$$\Psi \equiv -\frac{q'}{2(q^2 + 1)} = \text{const}, \quad n_2 - n_1 = \begin{cases} h(\zeta_1 - \zeta) & \text{при } \zeta < \zeta_1, \\ 0 & \text{при } \zeta > \zeta_1 \end{cases} \quad (4.20)$$

($h = \text{const}$), обсуждавшейся в ³⁰, система переходных слоев имеет вид

$$q \equiv -\text{ctg } 2\eta = -\text{ctg } [2\eta_1 + 2\Psi(\zeta_1 - \zeta)] \quad (4.21)$$

(рис. 8). В каждом из переходных слоев, где величина q изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, трансформация характеризуется параметром взаимодей-

ствия G , определенным согласно качественному анализу гл. 3. При выходе из анизотропной среды в каждом следующем переходном слое параметр взаимодействия оказывается меньше, чем в предыдущем, так как функция $G(\eta(\xi))$ уменьшается (см. рис. 8). Полная трансформация определяется интерференцией волн в последовательности переходных слоев (п. в гл. 3).

Такая ситуация возникает в случае, когда $\frac{1}{2} h/\Psi^2 \ll 1$ и эффективная трансформация с параметром взаимодействия $G \ll 1$ происходит в большом числе ($\sim 2\Psi^2/h \gg 1$) переходных слоев. При этом «фарадеевский» интеграл на трассе, содержащей эти слои, велик: $\int (n_2 - n_1) d\xi \equiv \equiv 2 \int G(\eta) d\eta \sim 2\Psi^2/h \gg 1$. Поэтому в соответствии с качественным анализом поляризации излучения на участке выхода в изотропную среду будет изменяться даже в области, где $G(\eta) \ll 1$. Это можно проследить на основе точного решения задачи (4.20), выражающегося через функции параболического цилиндра.

Картина упрощается в другом предельном случае, когда $\frac{1}{2} h/\Psi^2 \gg 1$ и функция $G(\eta)$ уменьшается столь резко, что переход от $G(\eta) \gg 1$ до $G(\eta) \ll 1$ происходит уже в одном (последнем) переходном слое. В нем, согласно точному решению³⁰, трансформация слабая: $Q \sim 2\Psi^2/h \ll 1$. Такой результат согласуется с качественным анализом и следует из формулы (3.20). Остальные переходные слои в анизотропной среде в этом случае не сказываются на взаимодействии волн и на эффекте предельной поляризации.

д) Плазма с широм магнитного поля

Выше мы не учитывали шир силовых линий магнитного поля B_0 , т. е. изменение направления проекции магнитного поля на плоскость, ортогональную направлению распространения (см. п. 2б). Такая неоднородность характерна для магнитных полей в установках типа токамаков^{43, 58}, в магнитосферах вращающихся аккрецирующих нейтронных звезд¹⁰⁵, во вращательных разрывах и ударных волнах, в низкочастотных спиральных и магнитогидродинамических волнах⁴⁴. В этих условиях также происходит взаимодействие волн, причем оно становится возможным даже вследствие неоднородности концентрации разреженной плазмы ($v = v(\xi) \ll 1$).

Теория взаимодействия волн легко переносится и на случай плазмы с широм. Для этого вместо обыкновенной и необыкновенной волн следует рассматривать винтовые волны, введенные в п. 2б. Их трансформация характеризуется параметром взаимодействия G (3.24) и происходит в областях, где $\tilde{q}_2 \sim 1$. Поскольку величины q и $\tilde{q}$ различны (ср. (2.6) и (2.13)), в плазме с широм магнитного поля расположение области взаимодействия $\tilde{q}^2 \sim 1$ иное, чем в случае отсутствия шира, когда область взаимодействия определяется условием $q^2 \sim 1$. Наличие шира приводит к возникновению трансформации винтовых волн в новых областях параметров плазмы и для более широкого класса неоднородностей. В частности, к трансформации винтовых волн ведет неравномерность шира ($\psi'' \neq 0$). Соответствующий детальный анализ проведен в⁴¹. Мы не излагаем его здесь, поскольку в принципиальном отношении явление взаимодействия в плазме с широм магнитного поля близко к аналогичному явлению в жидких кристаллах холестерического типа (гл. 5).

5. ЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ОПТИКЕ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

Если в магнитоактивной плазме изучение шира магнитного поля и трансформации винтовых волн является не более чем дополнением картины взаимодействия волн, то в отсутствие магнитной активности *) исследование всего круга вопросов, связанных с вращением оптических осей среды, приобретает первостепенное значение. Действительно, в негиротропной анизотропной среде обыкновенная и необыкновенная волны поляризованы линейно ($q^2 = \infty$) и, следовательно, не взаимодействуют, если ориентация оптических осей среды фиксирована в пространстве (коэффициент связи $\Psi = 0$ в (2.17), поскольку $q = \text{const}$). Взаимодействие волн становится возможным только при повороте осей анизотропии, который имеет место, например, в жидких кристаллах, в ферромагнитных структурах (гл. 6), в механически напряженном (скрученном) теле ^{42, 112, 113} и в других условиях.

а) Винтовые волны в кристалле холестерического типа

В жидких кристаллах, несмотря на частичное или полное отсутствие пространственного порядка, сохраняется ориентационное упорядочение: длинные оси молекул выстроены преимущественно в направлении, которое характеризуется единичным вектором $\mathbf{L}$ — директором. В жидких кристаллах холестерического типа (в том числе смектических), содержащих хиральные молекулы, не обладающие зеркальной симметрией, директор $\mathbf{L}(z)$ описывает винтовую линию с шагом $g = 2\pi/|\psi'|/k_0$ при смещении вдоль оси z («холестерическую спираль»). Шагом и характером неоднородности этой спирали можно управлять, помещая холестерик во внешние электрические, магнитные и ультразвуковые поля или изменяя температуру, давление и химический состав кристалла. Связанный с вращением директора поворот оптических осей радикально меняет оптические свойства кристалла. Примером служит брэгговское отражение света с длиной волны $\lambda \approx g$ ^{55, 114, 115}.

Здесь мы рассмотрим взаимодействие попутных винтовых волн ⁸⁸, которое возникает при распространении вдоль оси z плавно неоднородной холестерической спирали (масштаб неоднородности $\Lambda \gg \lambda$, шаг $g \gg \lambda$, при этом соотношение между Λ и g может быть произвольным) **). Винтовые волны, т. е. нормальные волны в среде с равномерной спиралью ($\psi' = \text{const}$), имеют близкие дисперсионные ветви в силу слабой анизотропии жидкого кристалла ($\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} \ll \epsilon$, обычно $\Delta\epsilon/\epsilon \sim 10^{-1}$) и медленного вращения плоскости директора ($|\psi'|/\sqrt{\epsilon} \ll 1$). Для этих волн

$$\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2 = 2\psi' \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \quad \tilde{q} = \frac{n_o - n_e}{2\psi'} \approx -\frac{\Delta\epsilon \sin^2 \alpha}{4\sqrt{\epsilon}\psi'}, \quad (5.1)$$

где α — угол наклона директора $\mathbf{L}$ к оси z (см. рис. 1 и 9). Величина $\tilde{q}$, определяемая локальными свойствами холестерического кристалла, задает

*) Естественная (молекулярная) оптическая активность в большинстве случаев является слабой ^{41, 109} и может изменить структуру нормальных волн ¹¹⁰, в том числе винтовых ¹¹¹, только при распространении света под малыми углами к оси анизотропии.[†]

**) Результаты численного расчета распространения поляризованного света для конкретных моделей неоднородной сильно закрученной спирали с шагом $g \sim \lambda$ приведены в работах ⁸⁹. При этом даже в плавно неоднородной спирали с $\Lambda \gg \lambda$ благодаря брэгговскому отражению возникает взаимодействие встречных волн, тогда как трансформация попутных винтовых волн является слабой.

показатели преломления $\tilde{n}_{1,2}$ (2.12) и коэффициенты поляризации $\tilde{K}_{1,2}$ (2.13) винтовых волн. При $\tilde{q}^2 \gg 1$, когда спираль слабо закручена, винтовые волны поляризованы линейно и фактически не отличаются от обыкновенной и необыкновенной волн ($\tilde{n}_{1,2} \approx n_{e,0}$). При $\tilde{q}^2 \ll 1$, т. е. в сильно

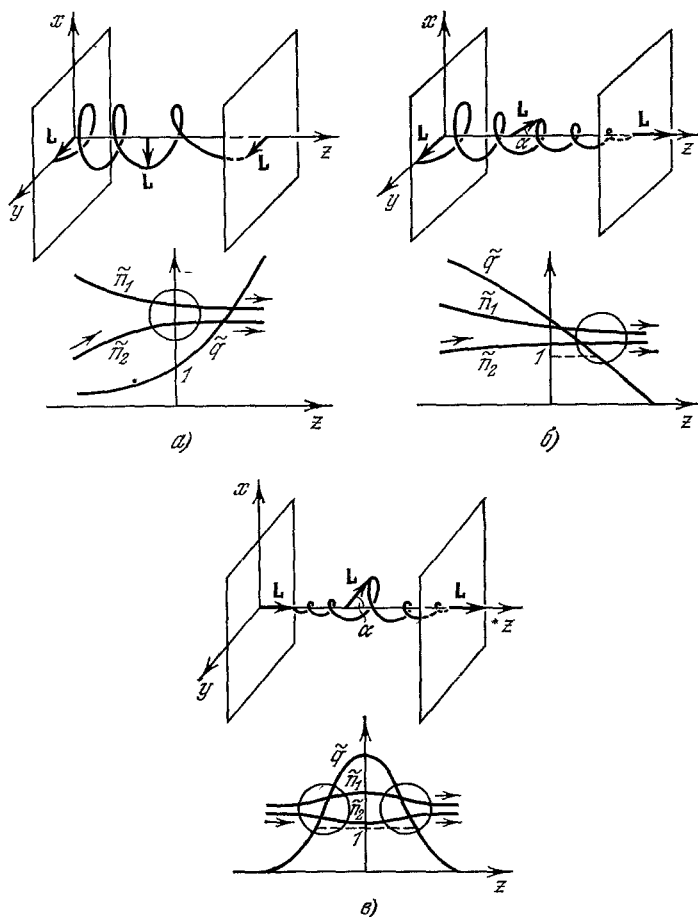


Рис. 9. Неоднородные жидкокристаллические ячейки холестерического типа (схематически).

а) Гомогенная (с переменным шагом); б) гибридная, в) гомеотропная. Кругами отмечены области взаимодействия винтовых волн.

закрученной спирали, поляризация винтовых волн круговая. В этом случае директор делает много оборотов на периоде биений обыкновенной и необыкновенной волн. В результате оптическая анизотропия жидкого кристалла пропадает и свет распространяется как в изотропной среде с показателем преломления $\sqrt{\epsilon} = (\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2)/2 = (n_e + n_0)/2$.

Если, теперь выписать условия взаимодействия в неоднородной спирали

$$|\Delta\eta| \sim 1, \quad G = \left| \frac{4\sqrt{2}\psi'}{\tilde{q}'} \right|_{\tilde{q}^2 \sim 1} \ll 1 \quad (5.2)$$

(см. п. 3в и определения (3.10)—(3.12) величин η и $\Delta\eta$), то станет ясно, что в неоднородных жидких кристаллах эффективная трансформация

винтовых волн может быть реализована только при переходе от сильно закрученной к слабо закрученной спирали или наоборот (т. е. когда приращение $|\Delta \tilde{q}| \sim 1$ в области $\tilde{q}^2 \sim 1$). Согласно (5.2), этот переход должен быть достаточно резким, а именно, на одном шаге спирали должна существенно изменяться величина $\tilde{q}$, т. е. величина анизотропии $\Delta \epsilon$, наклон директора к оси спирали или сам шаг спирали. Распространение света вдоль равномерной спирали с $\tilde{q} \approx \text{const}$ не сопровождается взаимодействием и полностью описывается геометрической оптикой винтовых волн ^{45, 61, 88, 114–116}.

б) Поляризационные свойства
неоднородной холестерической спирали

Рассмотрим конкретные примеры взаимодействия световых волн в холестерических ячейках, в которых тонкий слой жидкого кристалла (толщиной $d \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ см) заключен между двумя прозрачными пластинками (рис. 9). Неоднородность здесь может быть связана как с граничными условиями, так и с внешними полями ^{114, 115, 117, 118}.

Пусть шаг спирали меняется линейно: $g(\xi) = g' \cdot \xi$, $g' = \text{const}$, а директор $\mathbf{L} \perp \mathbf{z}$ ($\alpha \equiv \pi/2$, рис. 9а). Для такого перехода от сильно закрученной к слабо закрученной спирали точное решение приводит к формуле (4.12) с параметром взаимодействия $G = 8\sqrt{2}\pi/|q'|k_0$, откуда следует, что в сильно неоднородной спирали, когда производная g' велика, взаимодействие сильное, а в слабо неоднородной спирали трансформация экспоненциально мала. Качественно аналогичные результаты получаются из решения других эталонных задач ^{88, 119}, например для слоя, в котором $\psi'(\xi) = \psi''\xi$, т. е. $g \propto \xi^{-1}$, хотя параметр взаимодействия здесь иной:

$$G = \sqrt{2} (n_e - n_0)^2 |\psi''|^{-1}. \quad (5.3)$$

Пусть теперь меняется угол $\alpha(\xi)$ наклона директора к оси спирали. На рис. 9б изображена гибридная ячейка, у входной стенки которой $\mathbf{L} \perp \mathbf{z}$ ($\alpha = \pi/2$), а у выходной — $\mathbf{L} \parallel \mathbf{z}$ ($\alpha = 0$). Изменение величины $\tilde{q}$ здесь качественно можно описать зависимостью ¹¹⁹

$$\tilde{q}^2 = -1 + \left[(\tilde{q}_{\text{вх}}^2 + 1)^{-1/2} + G^{-1} \int_{\xi_{\text{вх}}}^{\xi} (n_e - n_0) d\xi \right]^{-2}, \quad (5.4)$$

где $\tilde{q}_{\text{вх}} = \tilde{q}(\xi_{\text{вх}}) > \tilde{q}_{\text{вых}} = \tilde{q}(\xi_{\text{вых}}) \geq 0$. В этом случае функция (3.14) $G(\eta) = G = \text{const}$ на интервале $\Delta\eta$ (3.11) и точное решение находится элементарно:

$$Q = (G^2 + 1)^{-1} \sin^2(\Delta\eta \sqrt{G^2 + 1}), \quad (5.5)$$

$$\text{tg } \gamma = -\text{tg } \varphi = \frac{G}{\sqrt{G^2 + 1}} \text{tg } (\Delta\eta \sqrt{G^2 + 1}). \quad (5.6)$$

Формулы (5.5), (5.6) описывают переход волн с одной дисперсионной ветви ($\tilde{n}_2$) на другую ($\tilde{n}_1$) и соответствующее преобразование поляризации света (рис. 10).

В гомеотропной ячейке, представленной на рис. 9в, у обеих стенок длинные оси молекул параллельны оси спирали ($\alpha = 0$). В качестве модели такой ячейки возьмем слой, в котором

$$\tilde{q}(\xi) = \frac{\tilde{q}_0}{\text{ch}[4\sqrt{2}\psi(\xi)/p]}. \quad (5.7)$$

Здесь приведена явная зависимость величины $\tilde{q}$ от угла ψ поворота плоскости директора, так как, согласно (5.2), именно характер этой зависимости определяет эффективность взаимодействия. В центре ячейки, где угол $\psi = 0$, величина $\tilde{q}$ максимальна. По краям ячейки $\tilde{q}_{\text{вх}} \approx \tilde{q}_{\text{вых}} \approx 0$. В этом случае коэффициент трансформации равен ¹¹⁹

$$Q = \sin^2 \left(\frac{\pi \tilde{q}_0 p}{4 \sqrt{2}} \right) \text{ch}^{-2} \left(\frac{\pi p}{4 \sqrt{2}} \right). \quad (5.8)$$

Он зависит не только от параметра взаимодействия $p > 0$, характеризующего степень неоднородности слоя, но и от интерференционного множителя $\sin^2 (\pi \tilde{q}_0 p / 4 \sqrt{2})$, определяемого «геометрооптической разностью хода» на

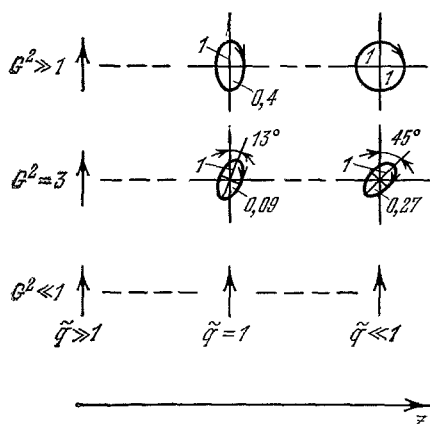


Рис. 10. Преобразование эллипса поляризации света в гибридной ячейке в приближении $G(\eta) = \text{const}$ для случаев слабого ($G^2 \gg 1$), эффективного ($G^2 = 3$) и сильного ($G^2 \ll 1$) взаимодействия.

Слева на слой падает волна типа 2.

участке между двумя областями взаимодействия $\tilde{q}^2 \sim 1$ (см. (3.28a) и рис. 9в): $\pi \tilde{q}_0 p / 4 \sqrt{2} \approx (1/2) \int (\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1) d\xi$. Поэтому в сильно неоднородной гомеотропной ячейке ($p \ll 1$, $\tilde{q}_0 \gg 1$) трансформация не обязательно должна быть полной ($Q \neq 1$), так как взаимодействие в двух указанных областях может компенсироваться вследствие интерференции.

Взаимодействие винтовых волн приводит к перераспределению светового потока между волнами и тем самым обуславливает «неадиабатическое» изменение поляризации света в неоднородных жидких кристаллах. Управляя эффективностью трансформации волн путем изменения внешних условий и полей, определяющих неоднородную структуру холестерической

спирали, можно управлять поляризацией света. При этом для селекции винтовых волн на входе и на выходе жидкокristаллической ячейки необходимо использовать специальные поляризаторы, пропускающие ту или иную винтовую волну.

Обратим внимание на то, что параметр взаимодействия G и, следовательно, степень трансформации Q зависят от частоты (ср. (4.7)). Например, в случае (5.3) $G \propto \omega^4$, так как $\psi'' = (c/\omega)^2 d^2\psi/dz^2 \propto \omega^{-2}$ и для оценок можно положить $[n_e(\omega) - n_o(\omega)] \propto \omega$. В результате неоднородная жидкокristаллическая спираль, заключенная между двумя поляризаторами, пропускающими различные винтовые волны, может служить оптическим частотным фильтром ^{88, 119}. Такой фильтр не пропускает свет в области частот, для которых параметр взаимодействия $G(\omega) \gg 1$; вне этой области фильтр будет частично прозрачен — он пропустит свет с поляризацией, соответствующей поляризации винтовой волны, возникающей вследствие трансформации при $G(\omega) \lesssim 1$.

в) Ориентационный фазовый переход и отсечка режима Могена

Особый интерес теория взаимодействия волн представляет для решения проблемы соотношения между порогом поляризационной отсечки света и точкой фазового перехода в жидкокristаллических структурах ^{117, 118}.

Эти переходы, называемые переходами Фредерикса, совершаются при изменении величины приложенного электрического или магнитного поля и связаны с переориентацией длинных осей молекул жидкого кристалла под действием этого поля. На рис. 11а изображена так называемая нематическая твист-структура. В продольном электрическом поле E в ней происходит переход Фредерикса: начиная с некоторого критического значения поля $E_{кр}$, молекулам становится энергетически выгодно постепенно переориентироваться вдоль поля. В зависимости от величины поля угол α

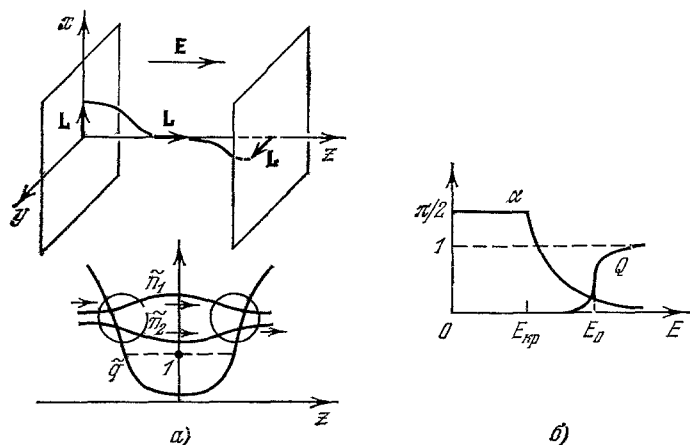


Рис. 11. Нематическая твист-структура с углом закрутки $\psi_0 = \pi/2$ в продольном поле E .

а) Характерный вид распределения величины $\tilde{q} \propto \sin^4 \alpha$ и дисперсионных кривых $\tilde{n}_{1,2}$ (5 1) вдоль слоя (кружками отмечены области трансформации винтовых волн) б) пороговые характеристики.

наклона директора к оси спирали, например в центре ячейки, меняется так, как показано на рис. 11б. В результате твист-структура становится неравномерной, что делает возможным взаимодействие винтовых волн. Если на входе и на выходе стоят поляризаторы, пропускающие только одну из винтовых волн, то при увеличении электрического поля наблюдается поляризационная отсечка света, или, как говорят, отсечка адиабатического режима Могена^{81, 117}, т. е. режима геометрикооптического распространения света. Она происходит при некотором пороговом значении поля E_0 (оптический порог, см. рис. 11б) и обусловлена переходом световой волны с одной дисперсионной ветви на другую. При $E > E_0$ указанный переход становится полным и система из твист-структуры с двумя поляризаторами будет непрозрачной.

Поскольку переходы Фредерикса являются фазовыми переходами второго рода^{114, 118}, обусловленные ими изменения оптических свойств жидкокристаллической структуры весьма малы, если превышение поля над критическим значением невелико. С другой стороны, для отсечки света необходима существенная деформация структуры; поэтому оптический порог может существенно превышать критическое поле перехода. Подобная ситуация имеет место не только для твист-структуры, но и в ряде других случаев (см. 88, 114, 117–120). Связь соответствующего оптического порога E_0 с критическим полем фазового перехода $E_{кр}$ долгое время оставалась неясной. Ее удалось установить благодаря качественному анализу явления взаимодействия. Наблюдаемое значение поля отсечки E_0 соответствует образованию в структуре области взаимодействия $\tilde{q}^2 \sim 1$, в которой приращение $|\Delta \tilde{q}| \sim 1$ и параметр взаимодействия $G(E) \sim 1$. Отсюда для

эффекта отсечки режима Могена в твист-структуре с $\psi_0 = \pi/2$ (рис. 11) находим⁸⁸:

$$E_0 = E_{\text{кр}} \left(\frac{2}{\pi \sqrt{3}} \right) \ln \left[\frac{8\pi \tilde{q}_0}{\ln(8\pi \tilde{q}_0)} \right], \quad (5.9)$$

где $\tilde{q}_0 = \omega |n_e - n_o| d / \pi c$. Например, для типичных значений⁸¹ $d = 13$ мкм, $\Delta\epsilon/2\sqrt{\epsilon} = 0,17$, $\lambda \equiv 2\pi c/\omega = 0,59$ мкм величина $E_{\text{кр}} = 0,6 E_0$. С помощью формулы (5.9) получают объяснение экспериментальные зависимости^{81, 117} порога поляризационной отсечки света от толщины твист-структуры d и частоты света ω . В частности, согласно (5.9), отношение $E_0/E_{\text{кр}}$ логарифмически зависит от толщины нематической твист-структуры. Зависимость от частоты и от угла закручивания ψ_0 имеет более сложный характер и обсуждается в⁸⁸. Точные формулы для оптических порогов типа (5.9) позволяют изучать структурные свойства жидких кристаллов через их оптические свойства и измерять параметры жидких кристаллов^{88, 119, 120}. Для этого, разумеется, необходимо найти точку фазового перехода $E_{\text{кр}}$ и значение оптического порога E_0 из независимых измерений. Таким образом, явление взаимодействия волн в жидкокристаллических структурах холестерического типа может быть использовано и для поляризационного преобразования света, и для исследования свойств жидких кристаллов.

г) Поляризационная диагностика динамических процессов

С помощью трансформации световых волн в жидких кристаллах можно изучать различные динамические процессы, изменяющие характер неоднородности спирали, и измерять соответствующие коэффициенты переноса. Эти процессы включают диффузию, тепловые потоки, гидродинамические течения, ориентационные волны, химические реакции и пр.^{114, 117, 118, 121}. Дело в том, что, в отличие от геометрической оптики, при линейном взаимодействии поляризация света, прошедшего через неоднородную жидкокристаллическую структуру, несет информацию о неоднородности этой структуры⁸². Это обстоятельство открывает возможность поляризационной диагностики динамических процессов в жидких кристаллах.

Поясним ее на конкретном примере. На рис. 12 изображен процесс диффузии хиральных молекул в нематическом жидком кристалле. Присутствие хиральных молекул приводит к формированию холестерической спирали, шаг которой обратно пропорционален концентрации такого рода молекул¹¹⁴. Пусть в начальный момент $t = 0$ существовала резкая граница между кристаллами холестерического и нематического типов. В процессе диффузии хиральных молекул масштаб неоднородности спирали будет меняться по диффузионному закону как $\sqrt{Dt}$, а вместе с ним — параметр взаимодействия $G = 2\sqrt{Dt}k_0 |n_e - n_o|$ и эффективность трансформации $Q(G)$ (рис. 12). В результате, следя за поляризацией света и регистрируя зависимость $Q(t)$, можно наблюдать процесс диффузии, а затем измерить коэффициент диффузии D . Для этого нужно заметить тот момент времени t_0 , когда эффективность трансформации убывает вдвое; поскольку, как показано в⁸², это должно произойти при значении параметра $G = 1$, находим

$$D = c^2 [4t_0\omega^2(n_e - n_o)^2]^{-1}. \quad (5.10)$$

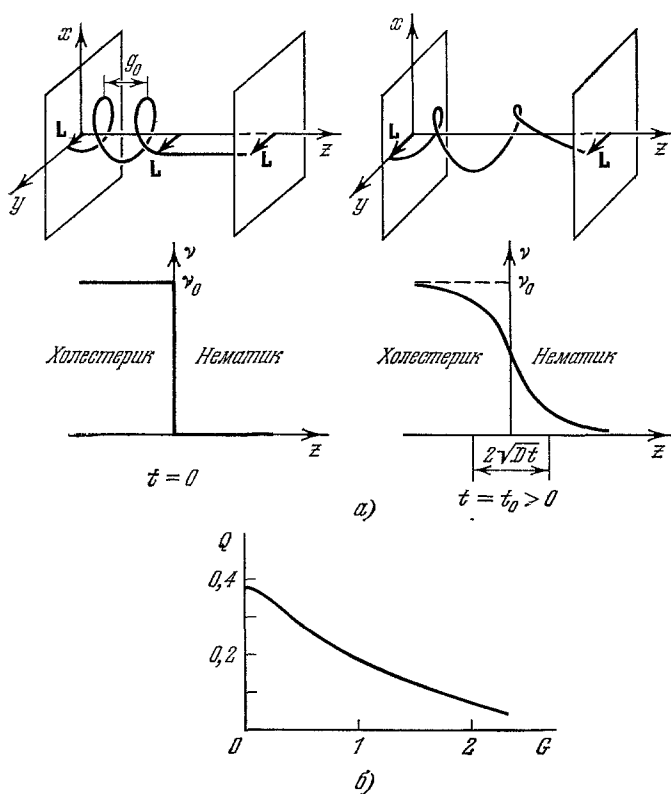


Рис. 12. Переходный диффузионный слой.

а) Распределение концентрации хиральных молекул $v(z)$ и холестерическая структура директора $L(z)$ в моменты времени $t=0$ и $t=t_0 > 0$; б) зависимость коэффициента трансформации Q от параметра взаимодействия $G \propto \sqrt{Dt}$ при большой начальной концентрации хиральных молекул (график

построен численно для $\tilde{g}_0^2 = [g_0 k_0 (n_o - n_e)/4\pi]^2 = 1/16$).

Время измерения t_0 коэффициента диффузии здесь составляет всего несколько секунд вместо часов и суток для других методов, применяющихся в настоящее время.

6. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ В МАГНИТНЫХ СРЕДАХ

Все сказанное о взаимодействии винтовых электромагнитных волн в магнитоактивной плазме и жидких кристаллах относится и к магнитным средам. В магнитоупорядоченных кристаллах^{124, 125} в оптическом и инфракрасном диапазонах относительная величина анизотропии и гиротропии достигает 10^{-3} — 10^{-2} ; согласно изложенному выше, это делает возможным взаимодействие волн уже при плавной неоднородности среды *) $\Lambda \gg \lambda$. Для этого неоднородность вдоль луча должна представлять собой либо неравномерное винтовое вращение намагниченности M , либо переход от квазипродольного распространения к квазиперечному (по отношению к M), или наоборот. Неоднородности обоих типов присущи внутренней структуре магнитных сред (доменные стенки, геликоидальные и синусоидальные структуры, спиновые волны), но могут быть созданы и внешним

*) Кроме оптики, эффекты взаимодействия могут реализоваться в СВЧ, миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах для неоднородно намагниченных ферритов и, по-видимому, в ультрафиолетовом диапазоне для металлических ферромагнетиков, когда они становятся прозрачными.

магнитным полем. Из менее известных примеров укажем магнитные полупроводники^{125–128} (например, со структурой вюрцита или шпинели), сегнетомагнетики, геликоидально упорядоченный³He (см.¹²⁹), ферромагнитные жидкости (суспензии ферромагнитных частиц) в магнитном поле¹³⁰. Неравномерное распределение магнитной примеси или механические напряжения, возникающие при выращивании кристалла, также делают магнитную структуру неоднородной.

а) Оптические свойства доменной стенки блоховского типа

Поляризационный оптический метод является весьма удобным и иногда единственным способом изучения неоднородных доменных структур^{123–125, 131–135}, особенно при исследовании динамики доменных границ в импульсных процессах^{136–138}. В магнитооптике обычно используют доменные структуры в достаточно тонких ферродиелектрических пленках

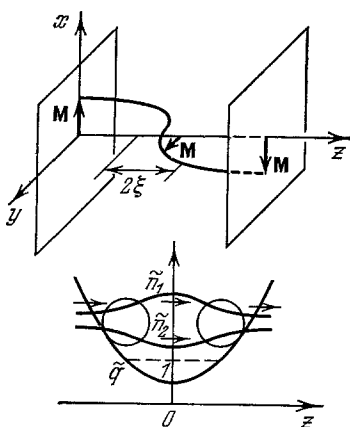


Рис. 13. Доменная стенка блоховского типа и характерное поведение дисперсионных ветвей $\tilde{n}_{1,2}$ и величины $\tilde{q}$. Кругами отмечены области трансформации винтовых волн.

(10^{-3} – 10^{-2} см), прозрачных для оптического и инфракрасного излучения*). Здесь мы рассмотрим распространение света через такую пленку с доменной стенкой блоховского типа^{88, 131, 135}. В направлении оси z пленку будем считать плоскостной. Предположим, что в ней вектор намагниченности $\mathbf{M}(z)$ винтообразно поворачивается на конечный угол ψ_0 в области с характерным масштабом 2ξ (рис. 13) по следующему закону:

$$\psi = \frac{2\psi_0}{\pi} \operatorname{arctg} \exp\left(\frac{z}{\xi}\right) - \frac{\psi_0}{2} \quad (-\infty < z < +\infty). \quad (6.1)$$

Неоднородность доменной стенки приводит к взаимодействию винтовых волн света с коэффициентом трансформации^{47, 88}

$$Q = \sin^2 \psi_0 \operatorname{ch}^{-2} \left[\frac{\pi}{2} k_0 (n_e - n_o) \xi \right] \quad (6.2)$$

(при $\varepsilon_{xy}^{-1} = 0$). Фактически (6.2) представляет собой коэффициент трансформации обыкновенной и необыкновенной волн, поскольку последние совпадают с винтовыми волнами вне доменной стенки, где $\psi' = 0$. Из (6.2) ясно, что в доменной стенке с $\psi_0 = \pi$, а следовательно, и в последовательности таких доменных стенок трансформация отсутствует даже при резких поворотах на малом масштабе ξ . Такой результат связан с симметрией слоя (6.1): благодаря интерференции волн эффекты взаимодействия в первой половине слоя компенсируются эффектами взаимодействия во второй половине (см. рис. 13 и формулу (3.28а)**).

*) Реально даже в таких тонких пленках поглощение бывает значительным. Вследствие дихроизма оно может повлиять на характер трансформации геометрооптических волн, например, в случае, когда в области взаимодействия разность $\int \operatorname{Im} \tilde{n}_1 d\xi - \int \operatorname{Im} \tilde{n}_2 d\xi$ порядка единицы (ср. ^{39, 75, 94, 116, 139}). Ниже этот эффект не учитывается.

**) Это очевидно в случае узких доменных стенок, когда $k_0 |n_e - n_o| \xi \ll 1$. Здесь, согласно п. гл. 3, распространение света происходит как в изотропной среде, независимо от характера намагниченности. В результате, если угол поворота ψ_0 произволен, то непосредственное разложение падающей на доменную стенку линейно поляризованной волны на две линейно поляризованные волны, выходящие из доменной стенки, дает $Q = \sin^2 \psi_0$ — в полном соответствии с формулой (6.2).

Компенсация исчезает, если поворот происходит, например, на угол $\psi_0 = \pi/2$ (ср. рис. 11). Такого рода доменную стенку, по-видимому, можно реализовать во внешнем магнитном поле при соответствующих граничных условиях. Согласно (6.2), эффективная трансформация будет иметь место, если толщина доменной стенки $\xi \leq \xi_{\text{кр}} = |\pi k_0 (n_e - n_0)/2|^{-1}$; распространение света подчиняется геометрической оптике, если $\xi \gg \xi_{\text{кр}}$. Если по краям магнитной пленки расположены скрещенные поляризаторы, пропускающие линейно поляризованный свет в плоскости вектора намагниченности $\mathbf{M}$, то при $\xi \gg \xi_{\text{кр}}$ доменная структура будет прозрачной. Если же $\xi \leq \xi_{\text{кр}}$, то структура не будет пропускать свет: в условиях сильного взаимодействия линейно поляризованный свет, выходящий из первого поляризатора, распространяется в магнитном кристалле, сохраняя плоскость поляризации неизменной; поэтому он будет задержан вторым поляризатором, ориентированным ортогонально первому. Описанная система, очевидно, способна работать в режиме переключения света внешним магнитным полем.

б) Сильно закрученная спираль

В магнитооптике ^{46, 125, 131} и оптике жидких кристаллов ^{55, 114-117} часто встречается случай, когда шаг спирали, образованной вращением намагниченности $\mathbf{M}$ или директора $\mathbf{L}$, мал по сравнению с периодом пространственных биений обыкновенной и необыкновенной волн: $|\psi'| \gg |n_e - n_0|$. При этом в слабоанизотропной среде, где $|n_e - n_0| \ll n_e + n_0$, шаг спирали $g = 2\pi/|\psi'| k_0$ может быть как меньше, так и больше длины волны $\lambda = 2\pi/\sqrt{\epsilon} k_0$. Обратимся к свойствам винтовых волн в такой системе *). Для них

$$\tilde{n}_{1,2}^2 = n^2 + \psi'^2 \pm 2\psi'n \sqrt{\left(\frac{n_e^2 - n_0^2}{4\psi'n}\right)^2 + 1}, \quad n^2 = \frac{1}{2}(n_e^2 + n_0^2), \quad (6.3)$$

$$\tilde{K}_{1,2} = \frac{n_0^2 - \psi'^2 - \tilde{n}_{1,2}^2}{2\psi'\tilde{n}_{1,2}}, \quad (\tilde{K}_1 \tilde{K}_2)^2 = \frac{n_0^2 - \psi'^2}{n_e^2 - \psi'^2}. \quad (6.4)$$

Как ясно из (6.4), при $|\psi'| \gg |n_e - n_0|$ поляризация волн близка к круговой ($\tilde{K}_{1,2}^2 \approx 1$) и, следовательно, не может изменяться даже в неоднородной спирали. Поэтому эффективное взаимодействие попутных волн невозможно. Из (2.15) следует, что взаимодействие встречных волн при этом происходит как в изотропной среде с показателем преломления $n = \sqrt{(n_e^2 + n_0^2)/2}$ и описывается уравнениями (2.18). Согласно п. 3г и ⁷⁶, отражение становится эффективным только в сильно неоднородной среде, когда $|n'|/(2n^2) \gtrsim 1$ и приращение $|\Delta n| \sim 1$.

в) Надбарьерное отражение вблизи брэгговского резонанса

Сделанный выше вывод не относится к случаю брэгговского резонанса ^{46, 56, 131, 140}, вблизи которого возникает эффективное взаимодействие встречных волн уже в плавно неоднородной периодической структуре (имеется в виду надбарьерное отражение). Согласно (6.3), (6.4), в спирали, где $n_0 \leq \psi' \leq n_e$, существует брэгговский резонанс и одна из винтовых

*) Для простоты здесь мы пренебрегаем собственной гиротропией и полагаем $n_e^{-2} = \epsilon_{yy}^{-1}$, $n_0^{-2} = \epsilon_{xx}^{-1}$. Необходимые для этого ограничения на величины ϵ_{xy}^{-1} , ϵ_{xx}^{-1} , ϵ_{yy}^{-1} и ψ' можно получить из формул (2.9), (2.10).

волн не распространяется: $\tilde{n}_2^2 \leq 0$, $\tilde{K}_2^2 \leq 0$ (для определенности полагаем $\psi' > 0$, $n_e > n_0$). Речь идет о волне, которая вблизи брэгговского резонанса поляризована так, что в ней конец вектора $\mathbf{E}$ при своем вращении описывает в пространстве винтовую линию («спираль»), идентичную по форме спирали намагниченности $\mathbf{M}$ или директора $\mathbf{L}$. (При этом другая волна во всей области брэгговского резонанса $\psi' \sim n$ имеет спиральную структуру с противоположным направлением вращения и свободно распространяется; для этой волны $\tilde{n}_1^2 \approx (2n)^2$, $\tilde{K}_1 \approx -1$.) В окрестности брэгговского резонанса, когда $n_0 - \psi' \ll n_e - n_0$, показатель преломления волны типа 2 близок к нулю: $\tilde{n}_2^2 \approx (n_0 - \psi')(n_e - \psi')$. Поэтому эта волна будет эффективно взаимодействовать со своей отраженной волной. Согласно (2.15), уравнения взаимодействия имеют вид (2.18) с коэффициентом связи $\Omega = i\tilde{K}_2/(2\tilde{K}_2) \approx i\tilde{n}_2'/(2\tilde{n}_2)$ (в последнем равенстве учтено, что $\tilde{K}_2 \approx (n_e - n_0)^{-1}\tilde{n}_2$ (см. (6.4))). Их качественный анализ и выяснение условий эффективного отражения проводятся так, как указано в п. 3г.

Ниже в качестве примера мы рассмотрим гиперболический переходный слой конечной толщины $\zeta_{\text{вх}} \div \zeta_{\text{вых}}$, в котором в окрестности брэгговского резонанса ($n_0 - \psi' \ll n_e - n_0$) показатель преломления плавно уменьшается от малого значения $\tilde{n}_2(\zeta_{\text{вх}})$ до еще меньшего значения $\tilde{n}_2(\zeta_{\text{вых}})$: $\tilde{n}_2(\zeta) = \tilde{n}_2(\zeta_{\text{вх}})/[1 + (\zeta - \zeta_{\text{вх}})/k_0\Lambda]$ (такая зависимость может быть обеспечена плавным уменьшением шага спирали с приближением к границе брэгговского резонанса $\psi' \rightarrow n_0 - 0$). В этом случае величина приращения переменной $\theta = -\ln \sqrt{\tilde{n}_2}$ в уравнении Риккати (3.29) равна

$$\Delta\theta = \theta_{\text{вых}} - \theta_{\text{вх}} = \ln \sqrt{\frac{\tilde{n}_2(\zeta_{\text{вх}})}{\tilde{n}_2(\zeta_{\text{вых}})}} \quad (6.5)$$

и параметром взаимодействия служит величина

$$\mathcal{G} = 2\tilde{n}_2(\zeta_{\text{вх}})k_0\Lambda, \quad (6.6)$$

так как функция $\mathcal{G}(\theta) \equiv 2\tilde{n}_2^2/\tilde{n}_2' = \text{const.}$ Последнее позволяет точно решить уравнение (3.29) и найти величину коэффициента отражения:

$$R = \left| \frac{f_4}{f_2} \right|_{\zeta=\zeta_{\text{вх}}}^2 = \begin{cases} \sin^2(\Delta\theta \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1}) [\mathcal{G}^2 - 1 + \sin^2(\Delta\theta \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1})]^{-1} & \text{при } \mathcal{G} \geq 1, \\ \text{sh}^2(\Delta\theta \sqrt{1 - \mathcal{G}^2}) [1 - \mathcal{G}^2 + \text{sh}^2(\Delta\theta \sqrt{1 - \mathcal{G}^2})]^{-1} & \text{при } \mathcal{G} \leq 1. \end{cases} \quad (6.7)$$

Отсюда следует, что трансформация встречных волн слабая, если приращение $\Delta\theta$ мало: $R \approx (\Delta\theta)^2 \ll 1$ при $\Delta\theta \ll 1$. Если $\Delta\theta \geq 1$, то отражение остается слабым при $\mathcal{G} \gg 1$ ($R \lesssim \mathcal{G}^{-2} \ll 1$). Отражение становится эффективным, когда параметр взаимодействия $\mathcal{G} \sim 1$; при $\mathcal{G} \rightarrow 1$ коэффициент отражения R стремится к величине $(\Delta\theta)^2/[1 + (\Delta\theta)^2]$, так что $R \sim 1/2$, если $\Delta\theta \geq 1$. Наконец, сильное отражение возникает при $\mathcal{G} \ll 1$, когда изменение показателя преломления происходит резко и $\Delta\theta \geq 1$; тогда коэффициент отражения $R \approx \text{th}^2 \Delta\theta \sim 1$ (ср. (3.30)). Заметим также, что в случае эффективного взаимодействия при $\mathcal{G} > 1$ коэффициент отражения испытывает осцилляции в зависимости от величины приращения $\Delta\theta$ и параметра взаимодействия $\mathcal{G}$. При $\mathcal{G} < 1$ эти осцилляции пропадают.

7. СВЯЗАННЫЕ МОДЫ В ВОЛНОВОДАХ И СВЕТОВОДАХ

До сих пор речь шла о распространении волн в безграничной среде. Между тем часто представляет интерес волноводное распространение в условиях, когда структура нормальных волн (мод) и характер их распространения определяются свойствами волноведущих («боковых») поверхностей.

а) О взаимодействии мод
в волноводных системах

Если вдоль трассы распространения меняются граничные условия на указанных поверхностях, то опять возникает взаимодействие волн (мод). Такие задачи широко известны в электротехнике (неоднородные линии передачи)^{32, 170}, электродинамике (нерегулярные волноводы)^{4-6, 22}, акустике (стратифицированный океан)^{7, 8, 22}, интегральной оптике (планарные и волоконные световоды)^{23, 57, 141, 142}. Значительный интерес явление взаимодействия представляет также для физики поверхностных волн, интенсивно развивающейся в последнее время^{96, 143-146}.

Несмотря на то, что в указанных случаях трансформация мод происходит из-за неоднородности границ, уравнения взаимодействия и их качественный анализ имеют тот же характер, что и в безграничной среде (см. гл. 2 и 3). Только теперь коэффициенты связи мод a_{ij} в уравнениях взаимодействия определяются локальными свойствами границ. Так, в⁸⁹ для коэф-

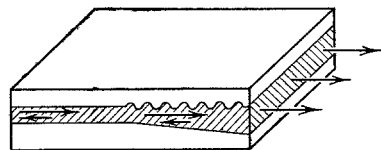


Рис. 14. Плоский диэлектрический волновод с неоднородным брэгговским зеркалом.

фициента отражения основной моды в резонансно связанную с ней встречную моду в плоском гофрированном диэлектрическом волноводе переменной толщины (неоднородное брэгговское зеркало, рис. 14) получено уравнение Риккати вида (3.29). В нем переменная θ и функция $\mathcal{G}(\theta)$ определяются уже не показателем преломления, а параметрами гофрированного волновода. Влияние градиента толщины волновода на отражательные свойства брэгговского зеркала исследовано в⁸⁹ на примере эталонной задачи с линейным профилем толщины гофрированного волновода и методом теории возмущений. Полученные при этом выводы согласуются с качественным анализом взаимодействия двух встречных мод, который можно провести на основе уравнения Риккати так, как описано в п. г) гл. 3.

Подобные задачи о трансформации встречных и попутных мод в волноводах и системах связанных волноводов исследовались в^{4, 24, 36, 87, 147-152, 165}; соответствующие задачи в применении к лазерам с распределенной обратной связью см. в^{90, 153, 154}. Их обсуждение выходит за рамки настоящего обзора. Мы ограничимся указанными ссылками на литературу и подробнее рассмотрим случай одномодового скрученного двулучепреломляющего световода. На этом примере будет показано, что описанный выше анализ явления взаимодействия может быть использован для исследования трансформации мод в волноводных системах *).

*) В литературе (см., например, ^{4, 32, 141, 155}) детально исследованы случаи, когда коэффициенты связи мод и их постоянные распространения не меняются вдоль волновода. В этих условиях явление взаимодействия становится тривиальным, поскольку здесь всегда можно перейти к новым нормальным модам, которые между собой уже не взаимодействуют. Обсуждаемое ниже явление взаимодействия обусловлено не просто связью, в нерегулярность связи мод вдоль волновода.

б) Винтовые моды в скрученном световоде

В последние пять лет повысился интерес к поляризационным свойствам одномодовых волоконных световодов. Это связано с освоением технологии изготовления волокон, сохраняющих поляризацию излучения на длинах в сотни метров и более, а также с перспективой применения таких волокон в системах оптической связи, оптических приборах, гироскопах, гидрофонах, различного рода датчиках и т. д. ^{142, 155-161}.

Регулярный двулучепреломляющий одномодовый световод аналогичен анизотропной среде: в нем распространяются две основные моды (с амплитудами E_x и E_y), обладающие различными фазовыми скоростями (c/n_x и c/n_y) и поляризованные практически линейно и ортогонально друг другу (так называемые LP-моды) ^{155, 158}. В изготовленном волокне с круглым сечением вырождение мод снимается в силу неизбежной эллиптичности сечения сердцевин, изгибов, оптической анизотропии стекла, вызванной внутренними или внешними механическими напряжениями, и т. п. ¹⁵⁶⁻¹⁶⁰. При этом период пространственных биений мод, равный $2\pi/k_0 |n_x - n_y|$, обычно порядка $10^{-1} \div 10^4$ см. Уравнения распространения связанных LP-мод в слабонаправляющем и слабоанизотропном световоде можно записать в виде ^{157, 158}

$$\begin{aligned} E'_x + in_x E_x &= \alpha E_y, \\ E'_y + in_y E_y &= -\alpha E_x, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где x, y — локальные оптические оси волокна (в поперечном сечении), вдоль которых направлены главные оси эллипсов поляризации двух нормальных мод (см. ниже).

Коэффициент связи α является действительной величиной и определяется деформацией сердцевинки волокна, воздействием внешних полей, анизотропией и гиротропией стекла; в скрученном световоде — азимутальным вращением оптических осей. Последний фактор обеспечивает величину $\alpha \approx \psi'$ и наиболее существен в реальных условиях, так как благодаря ему коэффициент связи α может достигать значений порядка $|n_x - n_y|$ (см. ¹⁵⁷⁻¹⁶⁰). В этом случае свойства нормальных мод световода сильно изменяются и, что особенно важно, их поляризация становится эллиптической. Это видно из выражений для показателей преломления $\tilde{n}_{1,2}$ и коэффициентов поляризации $\tilde{K}_{1,2}$ нормальных мод равномерно скрученного волокна, которые легко находятся из системы (7.1) при $n_{x,y} = \text{const}$ и $\alpha = \psi' = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{1,2} &= \frac{1}{2} (n_x + n_y) \pm \psi' \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \\ \tilde{K}_{1,2} &= \tilde{q} \mp \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \quad \tilde{q} = \frac{n_x - n_y}{2\psi'}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Существование этих нормальных мод недавно было доказано экспериментально ¹⁵⁹. Как и в безграничной среде (см. (2.12), (2.13)), мы будем называть их винтовыми модами.

В нерегулярном, в частности, в неравномерно скрученном световоде, где $n_x, n_y, \psi' \neq \text{const}$, возникает взаимодействие винтовых мод. Оно может быть описано совершенно так же, как это сделано в гл. 3, 5, 6, поскольку в результате геометрооптической замены (1.2) (см. также (2.14)), т. е. перехода к взаимодействующим винтовым модам, система (7.1) приводит в точности к уравнениям (2.19), (3.13) и (3.23) для комплексных амплитуд винтовых мод $f_{1,2}$, их отношения $P = -if_1/f_2$ и коэффициента поляризации излучения $K = -i E_y/E_x$ соответственно. Поэтому все

сделанные выше выводы о характере взаимодействия остаются в силе. Как и в случае жидких кристаллов (п. 5а), эффективная трансформация винтовых мод возникает только на таких участках световода, где есть переход от сильно скрученного (в масштабе периода биений мод) к слабо скрученному волокну, или наоборот. При таком переходе на одном шаге скрутки должна существенно изменяться величина $\tilde{q}$, т. е. либо двулучепреломление (см. п. 7в), либо сам шаг скрутки (см. п. 7г).

Трансформация мод в определенных условиях, например в кабелях оптической связи, может быть нежелательной, так как она приводит к дисперсионному расплыванию и изменению импульсных оптических сигналов. Чтобы исключить ее, необходимо ликвидировать нерегулярные области взаимодействия, в которых $\tilde{q}^2 \sim 1$. Для этого специально либо усиливают двулучепреломление волокна, увеличивая всюду величину $\tilde{q}$, либо сильно скручивают волокно, уменьшая по всей длине величину q (см. ^{158, 160}).

В других условиях эффективная трансформация, напротив, представляет значительный интерес, например, в целях измерения локальных оптических характеристик волокна ^{161, 162} или для управления поляризацией проходящего по световоду излучения без разрыва светопроводящего контура ¹⁶³. В экспериментах ¹⁶³ показано, что изменение поляризации светового сигнала зависит как от его входной поляризации, т. е. от относительной интенсивности мод, так и от положения на световоде источника возмущений, т. е. от той разности фаз, с которой моды подходят к нерегулярной области взаимодействия. Здесь необходим детальный анализ амплитудных и фазовых характеристик эффекта трансформации. Если в случае слабого взаимодействия такой анализ осуществляется сравнительно просто в общем виде (см. гл. 3 и, например, ¹⁶⁴), то в случае эффективного взаимодействия необходимо обращаться к различным эталонным задачам (см. п. 3д).

в) Световод

с нерегулярным двулучепреломлением

Рассмотрим сначала равномерно скрученный ($\psi' = \text{const}$) световод, в котором осуществляется плавный переход от двулучепреломляющего невырожденного волокна к вырожденному изотропному волокну. Пусть величина двулучепреломления обращается в нуль по линейному закону: $n_x - n_y = \Delta n \cdot \xi$. Тогда линейно будет изменяться и величина $\tilde{q} = (\Delta n / 2\psi') \xi$, что соответствует плавному переходу от линейной поляризации винтовых мод на одном краю области взаимодействия ($\tilde{q}^2 \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow -\infty$) к циркулярной поляризации винтовых мод на другом ($\tilde{q}^2 = 0$ в точке вырождения $\xi = 0$). Такой профиль нерегулярности возникает, например, в случаях линейного изменения механических напряжений или эллиптичности ядра световода. Как следует из точного решения ⁸⁸ (рис. 15), матрицу трансформации (3.2) и, в конечном счете, все характеристики эффекта трансформации в указанной линейной модели определяет следующий параметр взаимодействия:

$$G = 8 \sqrt{2} \frac{(\psi')^2}{\Delta n}. \quad (7.3)$$

На рис. 15а показана относительная интенсивность Q рождающейся моды и отношение осей эллипса поляризации полного излучения $R = 1 - 2\sqrt{Q(1-Q)}$ в точке вырождения $\xi = 0$ при условии, что вдали от

точки вырождения излучение было одномодовым. При $G \ll 1$, т. е. в случае резкой нерегулярности и слабой скрутки коэффициент трансформации максимален и описывается формулой $Q \approx 1/2 - (\pi G/32 \sqrt{2})^{1/2}$. В этом случае линейно поляризованное на входе излучение, отвечающее одной моде, проходит область взаимодействия до точки $\zeta = 0$ практически без изменения поляризации и $R \approx \pi G/16 \sqrt{2} \ll 1$. Поскольку в точке $\zeta = 0$ винтовые моды циркулярно поляризованы, то линейная поляризация излучения здесь соответствует их суперпозиции с равными амплитудами. Следовательно, $Q_{\max} = 1/2$. С увеличением параметра взаимодействия G трансформация ослабляется и степень круговой поляризации излучения возрастает. Наконец, при $G \gg 1$, т. е. в случае слабой нерегулярности на шаге скрутки винтовая мода одного типа доходит до точки вырождения почти без трансформации: $Q \approx 2/G^2 \ll 1$. Поэтому поляризация полного излучения близка к циркулярной поляризации этой моды: $R \approx 1 - 2\sqrt{2}/G$.

На рис. 15, б приведены фазовые характеристики трансформации. Фаза φ рождающейся моды монотонно меняется от $-\pi$ до $-\pi/2$, т. е. при сильном взаимодей-

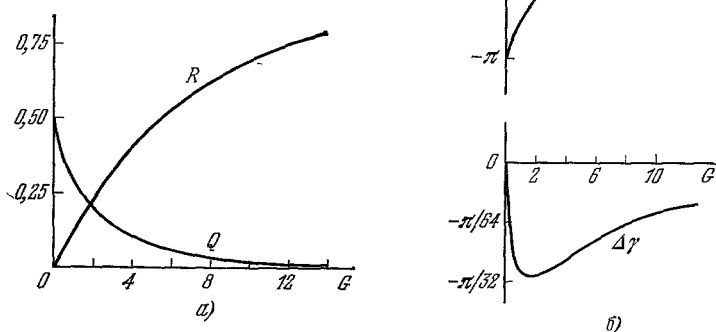


Рис. 15. Линейная модель перехода от двулучепреломляющего к вырожденному световоду.

На входе в переходную область задана одна линейно поляризованная мода а) Коэффициент трансформации Q и отношение осей R эллипса поляризации излучения; б) фазы φ , $\Delta\gamma = \gamma - \gamma_0$ и угол наклона $\chi = (\pi + \varphi)/2$ эллипса поляризации излучения к оси y в точке вырождения.

вии новая мода возникает в противофазе, а при слабом — в квадратуре с падающей модой (это свойство типично для явления взаимодействия, см. п. б) гл. 3). Отличие $\Delta\gamma = \gamma - \gamma_0$ фазы γ от геометрической разности фаз между модами невелико и представляет интерес только в условиях эффективного взаимодействия, когда $G \sim 1$.

В случае симметричного нерегулярного слоя, когда участок вырождения в волокне ограничен двулучепреломляющими областями с обеих сторон и величины $n_x - n_y$ и $\tilde{q}$ линейно меняются в бесконечных пределах (см. (3.18)), коэффициент трансформации $Q = \exp(-\pi G/4\sqrt{2})$ и может достигать 1 (полная трансформация). Подобная симметричная линейная модель реализуется также в задаче о двух связанных световодах¹⁶⁵. Однако наиболее подробно она исследована в задачах о неадиабатических переходах в квантовых системах, см.^{50, 93} и указанную там литературу.

г) Н е р а в н о м е р н о с к р у ч е н н ы й с в е т о в о д

Остановимся теперь на неравномерно скрученном одномодовом световоде, в котором постоянны масштаб нерегулярности $\Lambda = |\psi/(d\psi/dz)| = \text{const}$ и величина двулучепреломления $n_x - n_y = \text{const}$. В таком световоде, очевидно,

$$\psi(\xi) = \psi(0) \exp\left(-\frac{\xi}{k_0 \Lambda}\right), \quad (7.4)$$

т. е. шаг скрутки $g(\xi) = 2\pi/k_0 \psi'$ и величина $\tilde{q}(\xi) = \frac{1}{2}g(\xi)k_0(n_x - n_y)/2\pi$, определяющая локальные характеристики винтовых мод (7.2), изменяются экспоненциально. В этом случае решение уравнения (3.13) сводится к функциям Бесселя¹¹⁹. Анализ этого решения показывает, что область взаимодействия винтовых мод локализована в окрестности точки $\tilde{q}^2 = 1$ и ее характерный размер равен масштабу нерегулярности Λ . Отсюда следует, что на взаимодействии не сказываются участки сильно скрученного световода, где $g/2 \ll 2\pi/k_0 |n_x - n_y|$, и участки слабо скрученного световода, где $g/2 \gg 2\pi/k_0 |n_x - n_y|$. Переходя к асимптотическому представлению функций Бесселя при $\tilde{q}^2(\xi_{\text{вх}}) \rightarrow 0$ и $\tilde{q}^2(\xi_{\text{вых}}) \rightarrow \infty$, найдем элементы матрицы трансформации (3.2):

$$Q = \left[1 + \exp\left(\frac{\pi G}{2\sqrt{2}}\right)\right]^{-1}, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-Q} e^{i\nu} = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \text{ch}\left(\frac{\pi G}{4\sqrt{2}}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{iG}{4\sqrt{2}}\right) \left[-\frac{\psi(\xi_{\text{вых}})}{2}\right]^{iG/4\sqrt{2}} e^{i\psi(\xi_{\text{вх}}) - \pi G/8\sqrt{2}} \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{Q}{1-Q}} e^{i\varphi} = -\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{iG}{4\sqrt{2}}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{iG}{4\sqrt{2}}\right)\right]^{-1} \times \\ \times \left[-\frac{\psi(\xi_{\text{вых}})}{2}\right]^{iG/2\sqrt{2}} e^{-\pi G/4\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где Γ — гамма-функция. Как видим, характер поляризационных оптических явлений определяет параметр взаимодействия, равный $G = 2\sqrt{2}|n_x - n_y|k_0\Lambda$. При $G \gg 1$ трансформация мод экспоненциально мала. Отсюда, следует, что для эффективного взаимодействия недостаточно простого перехода от сильно скрученного к слабо скрученному участку волоконного световода (или наоборот). Такой переход должен быть резким в масштабе периода пространственных биений мод: тогда $G \lesssim 1$ и $Q \sim 1/2$ (см. (7.5)).

Согласно (7.6), (7.7), взаимодействие определяет и фазовые соотношения между модами¹¹⁹. Сопоставление сдвига фаз γ с его «геометрооптическим» значением γ_0 (3.7), как и следовало ожидать (см. п. 3б), показывает, что они заметно различаются только при $G \sim 1$, когда размер области взаимодействия Λ — порядка периода пространственных биений мод (рис. 16, а). На рис. 16, б приведена другая фазовая зависимость $\Delta\varphi =$

$$= \varphi - \int_{\xi_{\text{min}}}^{\xi_{\text{вых}}} (\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1) d\xi, \text{ характеризующая отличие фазы } \varphi \text{ моды, рожда-$$

ющейся в результате взаимодействия, от геометрооптической фазы; последняя вычислена на интервале от сечения ξ_{min} , в котором нарушение геометрической оптики винтовых мод особенно сильное ($G(\xi_{\text{min}}) = \min G(\xi)$), до выходного сечения $\xi_{\text{вых}}$. Иными словами, из фазы φ исключена геомет-

рооптическая разность фаз, возникающая уже после области взаимодействия. Из указанной зависимости $\Delta\varphi(G)$ можно заключить, что если к нерегулярному участку световода подходит одна мода $\tilde{n}_2$, то в условиях эффективной трансформации ($G \lesssim 1$) вторая мода $\tilde{n}_1$ возникает примерно в противофазе с первой: $\Delta\varphi \approx \pi$.

Определяя из поляризационных измерений коэффициент трансформации Q и фазы φ и γ , можно получить информацию о параметре взаимодействия G и об интерференции мод, а следовательно, определить масштаб нерегулярности Λ , двулучепреломление и характер скрутки волокна. Такая возможность неразрушающей диагностики локальных параметров

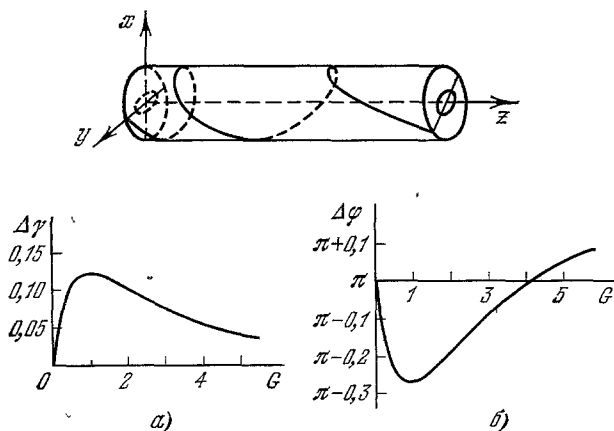


Рис. 16. Экспоненциально скрученный волоконный световод.

Фазы $\Delta\gamma = \gamma - \gamma_0$ и $\Delta\varphi$ как функции параметра взаимодействия G .

световодов и излучения локальных внешних воздействий на них (датчики) существует для всех нерегулярных световодов, в которых наблюдается взаимодействие мод (в том числе в нестационарных условиях, ср. п. 5г).

Проблемы сохранения поляризации света, ее регулируемого преобразования и диагностики оптических свойств существуют и для многомодовых световодов, если деполаризация света в них невелика^{166, 167}. Многомодовые световоды имеют больший диаметр световедущей сердцевины по сравнению с одномодовыми световодами, и поэтому их свойства ближе к свойствам неограниченной анизотропной среды. При анализе распространения света в них может оказаться удобным использовать квазиизотропное приближение геометрической оптики (см. п. 2г), не вводя волноводные моды. Так или иначе, не приходится сомневаться в том, что явление взаимодействия, связанное с поляризационным вырождением, имеет в случае многомодового световода тот же характер, что и в рассмотренных выше случаях безграничной среды и одномодового световода. В частности, можно ожидать, что эффекты трансформации могут быть обнаружены в начатых недавно¹⁶⁸ экспериментах по исследованию поляризационных свойств скрученных многомодовых световодов, возбуждаемых параллельным пучком света под некоторым углом к их оси.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние годы исследования распространения поляризованных электромагнитных волн и их взаимной линейной трансформации вышли далеко за рамки классической физики СВЧ и физики плазмы и вызвали более широкий интерес в связи с обнаружением и применением необычных поляризационных свойств волн в различных неоднородных анизотропных средах и волноводных структурах. Это относится к широкому интервалу

частот, начиная от радио и кончая рентгеновским диапазоном, и к большому классу различных сред: магнитоактивной плазме (лабораторной и космической), системе «плазма + намагниченный вакуум», жидким кристаллам, ферродиеlectricам, магнитным полупроводникам, диэлектрическим волноводам и др. И хотя в каждом случае повышенный интерес имеет свои конкретные причины — общим является стремление использовать новые поляризационные эффекты линейной трансформации волн (и соответствующую поляризационную методику) для изучения самих неоднородных анизотропных структур и для создания на их основе новых поляризационных устройств и приборов. В частности, явление линейного взаимодействия волн начинает играть заметную роль в оптике, прежде всего в оптике жидких кристаллов и световодов, где в последнее время интенсивно изучаются поляризационные свойства неоднородных спиральных (винтовых) структур.

В указанных и во многих других случаях качественный анализ линейного взаимодействия волн является необходимым (а иногда и достаточным) условием изучения и применения этого явления. Важнейшим обстоятельством, которое неоднократно отмечалось выше, но которое хотелось бы подчеркнуть еще раз, является то, что явление линейного взаимодействия определяется не только характером поведения дисперсионных ветвей волн, но в не меньшей степени характером поведения их поляризации. Качественный анализ и, прежде всего, определение параметра взаимодействия, учитывающее указанное обстоятельство, позволяют выяснить возможность появления и степень эффективности взаимодействия волн в той или иной конкретной ситуации. Более того, как ясно из обзора, качественный анализ позволяет также указать характерные зависимости эффекта трансформации от свойств неоднородной среды и распространяющихся в ней волн. (Конкретные примеры были рассмотрены в гл. 4—7; они, разумеется, не исчерпывают всего разнообразия явлений, связанных с линейным взаимодействием волн.) Все это удастся сделать без непосредственного решения уравнений взаимодействия (что особенно ценно, так как последняя процедура в большинстве случаев представляет существенные трудности). Сказанное позволяет надеяться, что достаточно глубокое понимание эффектов линейного взаимодействия волн может быть достигнуто сравнительно простыми средствами. Это особенно важно сейчас, когда расширяется сфера приложений эффектов линейной трансформации волн.

Авторы признательны В. Л. Гинзбургу, Ю. А. Кравцову и Б. М. Смирнову за полезные замечания, которые помогли улучшить содержание обзора.

Институт прикладной физики
АН СССР, Горький

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
2. Budden K. G. Radio Waves in the Ionosphere.— Cambridge: Univ. Press, 1961.
3. Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет.— М.: Наука, 1964.
4. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.
5. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика.— М.: Наука, 1966.
6. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах.— М.: Наука, 1969.
7. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
8. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. И. Теоретические основы акустики океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

9. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ).— М.: Мир, 1965.
10. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
11. Голант В. Е., Пилия А. Д.— УФН, 1971, т. 104, с. 413.
12. Ерохин И. С., Моисеев С. С.— Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1973.— с. 146.
13. Melrose D. B.— Austr. J. Phys., 1974, v. 27, p. 31, 43; 1977, v. 30, p. 495, 647, 661; 1980, v. 33, p. 121.
14. Budden K. G.— Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1979, v. 290, p. 405.
Batchelor D. B.— Plasma Phys., 1980, v. 22, p. 41.
15. Budden K. G.— J. Atm. and Terr. Phys., 1980, v. 42, p. 287.
16. Карпман В. И., Кауфман Р. Н.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1845; Физ. плазмы, 1982, т. 8, с. 319.
17. Stefani R. J.— Astrophys. and Space Sci., 1981, v. 76, p. 301.
18. Fuchs V., Ko K., Bers A.— Phys. Fluids, 1981, v. 24, p. 1251.
19. Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Асимптотические методы в теории дифракции и распространения волн.— Рязань: РТИ, 1975.
20. Апресян Л. А. и др.— Изв. вузов. Сер. «Радиофиз.», 1976, т. 19, с. 1296.
21. Найда О. Н.— Ibid., 1974, т. 17, с. 1833; 1977, т. 20, с. 383; ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 471.
22. Боровиков В. А., Попов А. В.— В кн.: Прямые и обратные задачи теории дифракции.— М.: ИРЭ, 1979.— С. 167.
Булдырев В. С., Григорьева Н. С.— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1981, т. 104, с. 33; 1981, т. 117, с. 78.
23. Lin Z. Q. et al.— IEEE Trans. MTT, 1981, v. 29, p. 881.
24. Старков А. С.— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1979, т. 89, с. 275; 1981, т. 104, с. 217.
Молотков И. А., Старков А. С.— Ibid., 1978, т. 78, с. 138; ДАН СССР, 1980, т. 254, с. 327.
25. Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах.— Новосибирск: Наука, 1982.
26. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.
27. Olver F. W. Asymptotics and Special Functions.— N.Y.: Lnd: Academic Press, 1974.
28. Найфэ А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.
29. Гальперин Е. И. и др.— ДАН СССР, 1982, т. 264, с. 596.
Александров С. И., Гамбургцев А. Г., Стародубровская С. П.— В кн. Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками.— М.: Наука, 1981.
Найда О. Н.— Акуст. ж., 1978, т. 24, с. 731.
30. Денисов Н. Г. Препринт НИРФИ № 118.— Горький, 1978; Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1979, т. 22, с. 1186.
31. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
32. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн.— М.: Мир, 1978.
33. Железняков В. В. Электромагнитные волны в космической плазме.— М.: Наука, 1977.
34. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.
35. Денисов Н. Г.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1977, т. 20, с. 316.
36. Краснушкин П. Е.— ДАН СССР, 1978, т. 239, с. 815; Радиотехн. и электрон., 1972, т. 17, с. 1129; 1974, т. 19, с. 1345.
37. Кравцов Ю. А.— ДАН СССР, 1968, т. 183, с. 74.
38. Кравцов Ю. А., Найда О. Н.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 237.
Найда О. Н.— Радиотехн. и электрон., 1978, т. 23, с. 2489.
39. Беллюстин Н. С.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1978, т. 21, с. 487, 1563.
40. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1978.— Ч. 2.
41. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— М.: Наука, 1979.
42. Гинзбург В. Л.— ЖТФ, 1944, т. 14, с. 181.
43. Суворов Е. В.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1972, т. 15, с. 1320.
44. Беллюстин Н. С.— Ibid., 1980, т. 23, с. 133.
45. Кац Е. И.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 1854.
Sauter E. G.— Appl. Phys. Ser. B, 1982, v. 27, p. 137.

46. Ерухимов М. Ш., Тюрнев В. В.— ФТТ, 1975, т. 17, с. 2440.
Семенов Д. И., Морозов А. М.— ФТТ, 1978, т. 20, с. 2591.
47. Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.— Физ. плазмы, 1980, т. 6, с. 565.
48. Cheng F. T., Fung C. W.— Astrophys. and Space Sci., 1977, v. 49, p. 367; v. 50, p. 361.
49. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Наука, 1974.
50. Никитин Е. Е., Уманский С. Я. Неадиабатические переходы при медленных атомных столкновениях.— М.: Атомиздат, 1979.
51. Коварский В. А. и др. Неадиабатические переходы в сильном электромагнитном поле.— Кишинев: Штиинца, 1980.
52. Heading J.— Aust. J. Phys., 1980, v. 33, p. 307.
53. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 101.
54. Greinhaelter J., Кореску V.— J. Plasma Phys., 1973, v. 10, p. 1.
55. Жаров А. А.— Физ. плазмы, 1983.
56. Майер А. А., Сухоруков А. П., Кузьмин Р. Н.— Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, с. 1168.
Акопян Р. С., Зельдович Б. Я., Табиров Н. В.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1770.
57. Беляков В. А., Дмитриенко В. Е., Орлов В. П.— УФН, 1979, т. 127, с. 221.
58. Саланский Н. М., Ерухимов М. Ш., Тюрнев В. В.— ФТТ, 1974, т. 16, с. 3676.
59. Van Rosu J., Lagasse P. E.— Appl. Opt., 1981, v. 20, p. 423.
60. Голант В. Е.— Физ. плазмы, 1980, т. 6, с. 1396.
61. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1981.
62. Долгинов А. З., Гнедин Ю. Н., Силантьев Н. А. Распространение и поляризация излучения в космической среде.— М.: Наука, 1979.
63. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет.— М.: Мир, 1981.
64. Пахольчик А. Радиогалактики.— М.: Мир, 1980.— Гл. 3.
Melrose D. B. Plasma Astrophysics.— N.Y.: Lnd.: P.: Gordon and Breach, 1980, v. 1.
65. Ерухимов Л. М., Кирш П. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1973, т. 16, с. 1783.
66. Cheng F. T., Fung C. W.— Astrophys. and Space Sci., 1977, v. 49, p. 427; v. 52, p. 243; 1979, v. 63, p. 177.
67. Wilson D. B.— Mon. Not. RAS, 1980, v. 192, p. 787.
68. Kubo H., Nagata R.— Opt. Comm., 1980, v. 34, p. 306.
69. Железняков В. В., Суворов Е. В., Шапошников В. Е.— Астрон. ж., 1974, т. 51, с. 243.
70. Сазонов В. Н.— Астрофиз., 1974, т. 10, с. 405.
71. Jones T. W., O'Dell S. L.— Astrophys. J., 1977, v. 215, p. 236.
72. Azzam R. M. A.— JOSA, 1978, v. 68, p. 1756.
73. Рябов Б. С.— В кн. Низкочастотные волны и сигналы в магнитосфере Земли.— М.: Наука, 1980.— С. 88.
74. Рябов Б. С., Ярославцев А. А.— В кн.: Исследование структуры и волновых свойств околоземной плазмы.— М.: ИЗМИРАН, 1980.— С. 76.
75. Cohen M. H.— Astrophys. J., 1960, v. 131, p. 664.
76. Железняков В. В.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 560.
77. Петров Н. С., Шакин В. А.— В кн.: Ковариантные методы в теоретической физике (оптике и акустике).— Минск: ИФ АН БССР, 1981.— С. 74.
78. Зимин А. Б., Петров Н. С.— Ж. прикл. спектр., 1982, т. 37, с. 843.
79. Jager E.— Phys. Stat. Sol. Ser. b, 1979, v. 96, p. K11.
80. Стреш П. Е.— ЖТФ, 1975, т. 45, с. 437.
81. Sauter E. G.— J. Phys. Ser. A, 1979, v. 12, p. 1155.
82. Bahar E.— Radio Sci., 1980, v. 15, p. 573.
83. Dreher R.— Sol. State Comm., 1973, v. 12, p. 519.
Hajdo L. E., Eringen A. C.— JOSA, 1979, v. 69, p. 1017.
84. Van Doorn C. Z.— Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 42, p. 537.
85. Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.— Кристаллография, 1982, т. 27, с. 342; Авторское свидетельство № 915057, 1982.
86. Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В., Шапошников В. Е.— В кн.: XIII Всесоюзная конференция по радиоастрономическим исследованиям Солнечной системы: Тезисы докладов.— Киев: Наукова думка, 1981.— С. 72.
87. Петерова Н. Г., Рябов Б. И.— В кн.: Физика солнечных пятен.— М.: Наука, 1976.— С. 89.

85. Рябов Б. И.— В кн. Исследование Солнца и красных звезд.— Рига: Зинатне, 1981.— С. 44.
86. Рыбачек С. Т.— В кн. Распространение радиоволн над земной поверхностью и в ионосфере.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— С. 221.
87. Мартынова Т. А., Шевченко В. В.— Радиотехн. и электрон., 1979, т. 24, с. 657.
88. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1735.
89. Константинов О. В., Райх М. Э.— ЖТФ, 1979, т. 49, с. 703.
90. Дедушенко К. Б., Маймистов А. И.— Радиотехн. и электрон., 1981, т. 26, с. 877.
91. Саркар А., Стреж П. Е.— В кн.: Современные задачи в точных науках.— М.: 1977.— С. 98; в кн. Проблемы статистической и квантовой физики.— М.: Ун-т Дружбы народов, 1980.— С. 162.
92. Дородницын А. А.— УМН, 1952, т. 7, вып. 6, с. 3.
93. Landau L. D.— Phys. Zs. Sowjetunion, 1932, Bd. 1, S. 88; Bd. 2, S. 46.
Zener C.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1932, v. 137, p. 696.
94. Chan V. S., Chiu S. C., Guest G. E.— Phys. Fluids, 1980, v. 23, p. 1250.
95. Греков Д. Л., Степанов К. Н.— УФЖ, 1980, т. 25, с. 1281.
Ngan Y. C., Swanson D. G.— Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 1920.
96. Давыдова Т. А.— Физ. плазмы, 1981, т. 7, с. 921.
97. Жаров А. А., Кондратьев И. Г., Миллер М. А.— Ibid., 1979, т. 5, с. 261.
Васильев А. Н., Мейерович Б. Э.— Ibid., 1979, т. 5, с. 12.
Будников В. Н. и др.— Ibid., 1980, т. 6, с. 1050.
98. Смолякова О. Б., Суворов Е. В., Фрайман А. А., Хальнов Ю. В.— Ibid., 1983.
99. Железняков В. В., Злотник Е. Я.— Астрон. ж., 1963, т. 40, с. 633.
100. Железняков В. В., Злотник Е. Я.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1977, т. 20, с. 1444.
101. Goertz C. K.— Planet. and Space Sci., 1974, v. 22, p. 1491.
Железняков В. В., Шапошников В. Е.— Астрон. ж., 1979, т. 56, с. 1042.
102. Павлов Г. Г., Шибанов Ю. А.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 1457.
103. Melrose D. B., Zheleznyakov V. V.— Astron. and Astrophys., 1981, v. 95, p. 86.
104. Железняков В. В., Литвинчук А. А.— Физ. плазмы, 1983.
105. Melrose D. B.— Austr. J. Phys., 1979, v. 32, p. 61.
106. Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.— В кн.: Материалы Всесоюзной научной студенческой конференции. Физика.— Новосибирск: НГУ, 1978.— С. 37.
107. Budden K. G.— Proc. Roy. Soc., 1952, v. 215, p. 215.
108. Simpson M. A.— Austr. J. Phys., 1976, v. 29, p. 343.
109. Yarov A., Lotspeich J. F.— JOSA, 1982, v. 72, p. 273.
110. Каменский В. Г., Кац Е. И.— Опт. и спектр., 1978, т. 45, с. 1106.
111. Семченко И. В., Сердюков А. Н.— ДАН БССР, 1982, т. 26, с. 235.
112. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела.— М.: Наука, 1973.
113. Абен Х. К.— В кн. Поляризационно-оптические методы исследования напряжений.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1966.
Емелин В. Я., Классен Н. В.— ФТТ, 1982, т. 24, с. 3305.
114. П. де Жен. Физика жидких кристаллов.— М.: Мир, 1977.
115. Чандрасекар С. Жидкие кристаллы.— М.: Мир, 1980.
116. Journeaux R., Laurent M., Viovy R.— Opt. Comm., 1981, v. 38, p. 330.
117. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов.— М.: Наука, 1978.
118. Пикин С. А. Структурные превращения в жидких кристаллах.— М.: Наука, 1981.
119. Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.— Опт. и спектр., 1982, т. 52, с. 297.
120. Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.— Кристаллография, 1982, т. 27, с. 544.
121. Кожевников Е. Н.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 161; т. 83, с. 207; Акуст. ж., 1982, т. 28, с. 238.
122. Гребенюк С. В.— ЖТФ, 1982, т. 52, с. 139.
123. Горнаков В. С. и др.— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 2007.
124. Смоленский Г. А., Писарев Р. В., Синий И. Г.— УФН, 1975, т. 116, с. 231.

125. Криничик Г. С. Физика магнитных явлений.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
126. Костюрин А. А., Криничик Г. С. Магнитооптика.— М.: Знание, 1980.
127. Сизов Ф. Ф., Уханов Ю. И. Магнитооптические эффекты Фарадея и Фогта в применении к полупроводникам.— Киев: Наукова думка, 1979.
128. Пихтин А. Н., Яськов А. Д.— ФТП, 1981, т. 15, с. 15.
129. Губарев С. И.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1174.
130. Fetter A. L., Williams M. R.— Phys. Rev. Ser. B., 1981, v. 23, p. 2186.
131. Скибин Ю. Н., Чеканов В. В., Райхер Ю. Л.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 949.
132. Саланский Н. М. и др. Препринт ИФСО-7Ф.— Красноярск, 1972.
133. Саланский Н. М. и др.— Опт. и спектр., 1976, т. 41, с. 104.
134. Харченко Н. Ф., Гнатченко С. Л.— ФНТ, 1981, т. 7, с. 475.
135. Бучельников В. Д. и др.— ФММ, 1981, т. 52, с. 298.
136. Fujii T., Kumosaki K., Inoue M.— Japan J. Appl. Phys., 1980, v. 19, p. 1913.
137. Дудоров В. Н., Рандошкин В. В., Телеснин Р. В.— УФН, 1977, т. 122, с. 253.
138. Мартынов А. Ф. и др.— Письма ЖЭТФ, 1981, т. 34, с. 169.
139. Иванов Л. П. и др.— ФТТ, 1979, т. 21, с. 1868.
140. Карась В. И., Моисеев С. С., Новиков В. Е.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1702.
141. Базылев В. А., Жеваго Н. К., Чибисов М. И.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1282; 1975, т. 69, с. 853.
142. Семенов Д. И.— ФНТ, 1980, т. 6, с. 906.
143. Интегральная оптика/Под ред. Т. Тамира.— М.: Мир, 1978.
144. Гурьянов А. Н. и др.— Квант. электрон., 1980, т. 25, с. 1569.
145. Гуляев Ю. В., Плесский В. П.— Радиотехн. и электрон., 1980, т. 25, с. 1569.
146. Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Плесский В. П.— Ibid., 1981, т. 26, с. 2282.
147. Pouget J., Maugin G. A.— JOSA, 1981, v. 69, p. 1304, 1319.
148. Ханкина С. И., Яковенко В. М.— ФТП, 1979, т. 13, с. 1795; 1982, т. 16, с. 158.
149. Найдя О. Н., Силичев О. О.— Радиотехн. и электрон., 1980, т. 25, с. 2072.
150. Бичуцкая Т. И., Новиков В. В.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1979, т. 22, с. 860; 1980, т. 23, с. 1225.
151. Авдеев А. Д.— В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн.— Л. Изд-во Ленингр. ун-та, 1978, вып. 16, с. 81; 1981, вып. 18, с. 74.
152. Michel E.— Appl. Opt., 1981, v. 20, p. 3436.
153. Chung P. S., Wilson M. G. F.— Electron. Lett., 1981, v. 17, p. 14.
154. Дикарев В. А.— Радиотехн. и электрон., 1980, т. 4, с. 679.
155. Kogelnik H.— Bell. Syst. Tech. J., 1976, v. 55, p. 109.
156. Verly P., Tremblay R., Lit John W. Y.— JOSA, 1980, v. 70, p. 1218.
157. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Денисов Г. Г.— В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника.— Горький: ИПФ АН СССР, 1981.— С. 237.
158. Ботвинник И. Е. и др.— Письма ЖЭТФ, 1982, т. 35, с. 418.
159. Унгер Х. Г. Планарные и волоконные оптические волноводы.— М.: Мир, 1980.
160. Marcuse D.— Bell. Syst. Tech. J., 1975, v. 54, p. 985.
161. Smith A. M.— Appl. Opt., 1978, v. 17, p. 52; 1980, v. 19, p. 2606.
162. Monerie M., Jeunhomme L.— Opt. Quantum Electron., 1980, v. 12, p. 449.
163. Sakai J., Kimura T.— IEEE J. Quantum Electron., 1981, v. 17, p. 1041; 1982, v. 18, p. 59, 1899.
164. Sakai J., Machida S., Kimura T.— Electron. Lett., 1981, v. 17, p. 494; Opt. Lett., 1981, v. 6, p. 496; IEEE Trans. Microwave Theory and Techn., 1982, v. 30, p. 334.
165. Okoshi T.— IEEE J. Quantum Electron., 1981, v. 17, p. 879.
166. Okamoto K., Sasaki Y., Shibata N.— Ibid., 1982, v. 18, p. 1890.
167. Simon A., Ulrich R.— Appl. Phys. Lett., 1977, v. 31, p. 517; Appl. Opt., 1979, v. 18, p. 2241; Opt. Lett., 1981, v. 6, p. 16.
168. Monerie M., Lamouler P.— Electron. Lett., 1981, v. 17, p. 252.
169. Алексеев Э. И. и др.— Письма ЖТФ, 1979, т. 5, с. 887.
170. Базаров Е. Н. и др.— Ibid., 1981, т. 7, с. 921; ЖТФ, 1982, т. 52, с. 773.

- 164. Базаров Е. Н., Полухин А. Т.— Радиотехн. и электрон., 1982, т. 27, с. 1472.
- 165. Jones A. L.— JOSA, 1965, v. 55, p. 261.
- 166. Быков А. М. и др.— Опт. и спектр., 1982, т. 53, с. 517.
Wagnle R. E., Stolen R. H., Pleibel W.— Electron. Lett., 1981, v. 17, p. 177.
- 167. Григорьева Е. Е., Семенов А. Т.— Квант. электрон., 1978, т. 5, с. 1877.
- 168. Быков А. М. и др.— Письма ЖТФ, 1980, т. 7, с. 38; УФЖ, 1981, т. 26, с. 1605.
- 169. Crothers D. S. F.— J. Phys. Ser. B, 1973, v. 6, p. 1418.
Rosen N., Zener C.— Phys. Rev., 1932, v. 40, p. 502.
- 170. Kobayashi K., Nemoto Y., Sato R.— Trans. IECE (Japan), Ser. A, 1980, v. 63, p. 807; IEEE Trans. Microwave Theory and Techn., 1982, v. 30, p. 140.