

532 507

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И ОДНОМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, И. Г. Якушкин

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	221
2. Нелинейные волны в среде без дисперсии	223
а) Диспергирующие и гиперболические волны (223). б) Волны Римана (224). в) Ударные волны (225). г) Приложения уравнений Римана и Бюргерса (225).	
3. Динамика нелинейных волн в среде с диссипацией энергии	226
а) Основные стадии эволюции (226). б) Связь с потоком не взаимодействующих частиц (228). в) Модель соударяющихся частиц (230). г) Однополярная и периодическая волны (231).	
4. Случайные волны в среде без дисперсии	232
а) Методы анализа (232). б) Лагранжевы подходы (233). в) Начальная стадия турбулентности (234). г) Учет разрывов (236). д) Гипотеза автомодельности (236).	
5. Турбулентность пилообразных волн	238
а) Масштаб корреляций и асимптотическая теория (238). б) Свойства турбулентности при $D = 0$ (238). в) Поле диссипации (241). г) Вырождение турбулентности (241). д) Стационарная турбулентность (242). е) Турбулентность при отсутствии вырождения ($D \neq 0$) (242). ж) Автомодельность и диссипативная структура (244).	
6. Взаимодействие волн в средах без дисперсии	245
а) Качественная классификация (245). б) Взаимодействие волн Римана (247). в) Шумы и течения (249). г) Проблема турбулентной вязкости (249)	
7. Заключение	251
Цитированная литература	253

ВВЕДЕНИЕ

Природа дает нам много примеров нелинейных случайных полей и волн. Необходимость их изучения не нуждается в комментариях и ясна уже из краткого перечисления. Это турбулентность жидкости и газа, хаотические движения плазмы, интенсивные акустические шумы, случайные волнения морской поверхности. Одна из тенденций развития теории нелинейных случайных волн состоит в выделении небольшого числа понятий и идей, позволяющих, с одной стороны, единым образом описывать поведение нелинейных случайных волн разной физической природы, а с другой, довольно четко классифицировать нелинейные случайные волны по характеру присущих им взаимодействий. Сюда относятся в первую очередь понятия слабой и сильной турбулентности. Режим слабой турбулентности характерен для слаболинейных волн в средах с сильной дисперсией, когда энергия взаимодействия пространственных гармоник мала по сравнению с их полной энергией. Приближение хаотических фаз, предполагающее, что взаимодействие между гармониками некогерентно, позволяет в этом случае перейти к замкнутому статистическому

описанию турбулентного режима ^{1, 2}. Если дисперсия волн мала или отсутствует, свойства турбулентности определяются сильным взаимодействием большого числа когерентных гармоник волны. В этих случаях принято говорить о сильной турбулентности. Наиболее известный пример сильной турбулентности — вихревая турбулентность жидкости с малой вязкостью ³.

Чрезвычайная трудность анализа нелинейных волн, в особенности сильной турбулентности, обусловила другую тенденцию развития их теории — переход от сложных уравнений нелинейных случайных волн к более простым модельным уравнениям. Одним из таких модельных уравнений сильной турбулентности является уравнение Бюргерса (УБ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.1)$$

Решение УБ со случайным начальным условием

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad (1.2)$$

учитывает совместное действие двух важнейших механизмов, формирующих свойства реальной гидродинамической турбулентности — инерционной нелинейности и вязкости. Уравнение (1.1) заслуженно названо именем Бюргерса ^{*}), не только предложившего его в качестве простейшей модели гидродинамической турбулентности ^{4а}, но и выяснившего многие особенности поведения модельной турбулентности ^{4б}.

В настоящее время все более осознается тот факт, что при сильной турбулентности важную роль играет образование локально-когерентных негармонических профилей. Характер этих структур, изученных, главным образом, для пространственно-одномерных волн, зависит прежде всего от основного фактора, ограничивающего нелинейность в данной системе. Там, где роль этого фактора выполняет дисперсия, сильная турбулентность может быть описана как газ разнесенных в пространстве солитонов ⁵.

Иная картина складывается, если роль ограничителя нелинейности выполняет слабая диссипация, как в турбулентности Бюргерса (ТБ), которая может рассматриваться как газ крупных, соприкасающихся между собой квазичастиц ^{4, 6, 7}. Особый интерес представляет при этом то обстоятельство, что удается связать описание сформировавшегося турбулентного режима с начальными условиями и тем самым проследить полную картину эволюции случайных возмущений в системе. Подробный анализ возникающих здесь стохастических режимов был дан в последнее время в работах самого Бюргерса, а также в работах, выполненных в университете в Киото, Горьковском государственном университете и Институте физики атмосферы АН СССР.

Ценность УБ как модельного уравнения для вихревой турбулентности иногда вызывает сомнения ввиду огромной физической разницы между двумя задачами. В этом отношении более адекватной может оказаться обсуждаемая в последнее время связь гидродинамической турбулентности со стохастическими колебаниями систем с малым числом степеней свободы ⁸. Нельзя однако отрицать черт сходства ТБ и гидродинамической турбулентности. В обоих случаях сильное нелинейное взаимо-

^{*}) Ян Бюргерс (1895—1981) учился в Лейдене у Н. Бора, А. Эйнштейна, Г. Лоренца, П. Эренфеста. Был профессором университетов в Дельфте (Голландия, до 1955 г.) и Мериленде (США). Первоначально занимался моделью атома Н. Бора, однако после знакомства с Т. Карманом занялся проблемами механики жидкости. В этой области Бюргерсом были получены фундаментальные результаты и написан ряд книг. Другие работы относятся к физике кристаллов и суспензий и философии науки (некролог см.: Physics Today, 1982, № 1).

действие приводит к установлению универсальных степенных асимптотик энергетического спектра, к автомодельности свойств турбулентности и т. д. Ввиду несомненной общности в проблемах замыкания уравнений для статистических характеристик ТБ может оказаться полезной для предварительной апробации приближенных методов замыкания и описания гидродинамической турбулентности ^{7, 9-11}.

Часто простейшие модельные описания сложных природных явлений находят со временем все большее число приложений и обретают все более глубокий смысл. Так случилось и с УБ. Выяснилось, что к УБ сводится описание широкого класса нелинейных акустических волн ¹²⁻¹⁶. Оказалось, что решения УБ адекватно отражают процессы нелинейного укручения и последующей вязкой диссипации волн различной физической природы в нелинейных средах без дисперсии ¹⁷. Обнаружились связи УБ с лучевым описанием распространения волн, потоками не взаимодействующих частиц, газом неупруго сталкивающихся частиц ⁷. Наконец, стало ясно, что УБ — эталонное уравнение широкого класса волн в нелинейных средах без дисперсии, достойное занять место рядом с классическим линейным гиперболическим уравнением.

Более тесным при ближайшем рассмотрении оказались и связи ТБ со свойствами сильной гидродинамической турбулентности. Представления о крупных квазичастицах в ТБ могут оказаться близкими к представлениям о таком типе вихревой турбулентности, когда отчетливо прослеживается ее структурный характер ¹⁸. Проблемы описания турбулентности связаны с УБ, как указывает Струминский ¹⁹, еще в одном отношении. УБ в простейшем приближении описывает потенциальную часть флуктуационной составляющей вихревой турбулентности. Следующее приближение дает трехмерное УБ, также представляющее интересный объект исследования. Таким образом, изучение ТБ является, по-видимому, необходимым шагом на пути формирования представлений о гидродинамической турбулентности и сильной турбулентности вообще.

В данном обзоре с единых позиций излагаются основные идеи теории одномерных нелинейных волн в средах без дисперсии, обсуждаются физические приложения УБ и подробно анализируются методы описания и статистические свойства ТБ.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

а) Д и с п е р г и р у ю щ и е и г и п е р б о л и ч е с к и е в о л н ы

Среди многообразия волновых движений можно с известной степенью условности выделить классы диспергирующих и гиперболических волн ¹⁷. Для диспергирующих волн, существующих в среде с собственными временными и пространственными масштабами, характерна зависимость скорости распространения от частоты или волнового числа. Гиперболические волны возникают в средах без собственных масштабов или если эти масштабы несоизмеримы по величине с масштабами волн.

Слабые плоские гиперболические волны распространяются без искажений с одинаковой скоростью c и вне области источника (справа от него) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Скорость c , однако, одинакова только для слабых волн. В средах без дисперсии она может зависеть от амплитуды, в результате чего появляются нелинейные искажения формы волны.

Различие между диспергирующими и гиперболическими волнами сказывается на основной модели, служащей для их интерпретации. Для диспергирующих волн это — совокупность слабо взаимодействующих осцилляторов, для гиперболических — поток слабо взаимодействующих частиц. В первом случае важную роль играет потенциальная энергия системы, во втором потенциальная энергия мала по сравнению с кинетической.

Можно указать еще на один аспект обсуждаемого различия. Диспергирующие волны распространяются в готовых структурах, тогда как с нелинейными гиперболическими волнами часто можно связать процесс образования структур.

Конечно, противопоставление двух типов волнового движения не имеет абсолютного характера. В реальных задачах гидродинамики, астрофизики и теории плазмы может рассматриваться изменение не одного, а нескольких локальных параметров среды (скорость, плотность, температура и т. д.). При этом в соответствующие уравнения должны вводиться члены, описывающие их взаимное влияние, что может приводить к возникновению движений смешанного типа. В еще большей степени это относится к многомерным системам. Однако и в этих случаях, как правило, можно указать характерные времена и масштабы, на которых справедлив тот или иной упрощенный подход.

б) Волны Римана

При анализе нелинейных искажений в гиперболических системах значительный интерес представляют так называемые волны конечной амплитуды, при анализе которых можно пренебречь возникновением волны, движущейся в обратном направлении или, иначе говоря, обратным

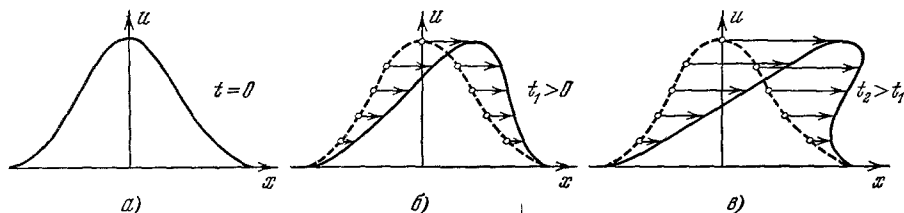


Рис. 1. Эволюция профиля скорости $u(x, t)$ волны Римана.

а) Начальный профиль, б) укрупнение профиля, в) профиль в области многопоточного распространения.

рассеянием нелинейной волны на самой себе. Изучение волн этого типа удобно вести в системе координат, движущейся вместе с волной.

Основное уравнение нелинейных волн конечной амплитуды в средах без дисперсии называется уравнением простой волны или уравнением Римана, получившим его из уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

Простейший физический пример, дающий наглядную интерпретацию волн Римана — гидродинамический поток невзаимодействующих частиц, каждая из которых летит вдоль оси x с постоянной скоростью. Если в момент $t = 0$ задан профиль скоростей частиц $u_0(x)$, то поле скорости $u(x, t)$ удовлетворяет УР с начальным условием (1.2). Не повторяя^{1, 20}, где этот пример подробно разобран, приведем профили скорости, иллюстрирующие, как гладкий профиль (рис. 1, а) вначале укрупняется из-за того, что одни частицы догоняют другие (рис. 1, б), а потом, после обгона,

опрокидывается и становится многопоточковым (рис. 1, в). При опрокидывании происходит слияние близких частиц, которое сопровождается градиентными катастрофами — возникновением бесконечных градиентов поля скорости. Начало опрокидывания можно найти из условия

$$t_0 = - \frac{1}{\min u'_0(x)}. \quad (2.3)$$

в) Ударные волны

До опрокидывания волна Римана ведет себя подобно потоку не взаимодействующих частиц. После опрокидывания волны разной физической природы разделяются на два типа — волны с разрешенным многопоточковым движением (те же потоки не взаимодействующих частиц, многопоточковые движения холодной плазмы, многолучевое распространение световых волн) и волны по своей природе однопоточковые. Типичный пример последних — волны давления в газе. Для них в момент опрокидывания, в окрестностях градиентной катастрофы, необходимо учитывать нелокальное взаимодействие резко меняющейся волны со средой, приводящее к образованию крутых перепадов профиля волны — так называемых разрывов или ударных фронтов, до и после которых гладкий профиль волны по-прежнему подчиняется УР.

Существуют два подхода к описанию волн в среде без дисперсии с учетом ударных фронтов (см., например, ^{17, 21, 22}). Первый, почти игнорируя вопрос о механизме образования ударных волн, полагает фронты бесконечно тонкими и выделяет из возможных математически равноправных решений УР физически истинные, удовлетворяющие фундаментальным законам сохранения и термодинамическим неравенствам. Здесь используется тот факт, что дифференциальные уравнения, описывающие волны, есть следствие более общих интегральных законов, справедливых и в областях градиентных катастроф.

При опрокидывании волны Римана возникают слабые ударные волны, описание которых основывается на законе сохранения импульса. В рамках аналогии с потоком не взаимодействующих частиц образование разрывов можно рассматривать как результат абсолютно неупругих соударений между частицами, а сам разрыв как тяжелую частицу, образовавшуюся в результате слипания легких. Слабые ударные волны не учитывают обратного рассеяния на разрывах (частичной упругости соударений).

Второй подход явно учитывает нелокальный характер взаимодействия волны со средой в окрестностях ударных фронтов и ведет к более сложным, по сравнению с (2.2), уравнениям. Учет диссипации в простейшем приближении ведет к уравнению Бюргерса, которое описывает процесс поглощения энергии в области разрыва как процесс, обладающий конечной скоростью. Вследствие этого область фронта может рассматриваться как обладающая протяженностью и структурой.

г) Приложения уравнений Римана и Бюргерса

В применении к волнам в средах без дисперсии УР и УБ возникают как укороченные уравнения, учитывающие медленно накапливающиеся нелинейные и диссипативные искажения. Метод вывода подобных уравнений был развит Хохловым на примере волн в радиотехнических нелинейных длинных линиях ²³. Аналогичные уравнения электромагнитных волн в нелинейных средах и длинных линиях получены Островским ^{24, 25}.

Приближения УБ и УР к анализу нелинейных электромагнитных волн обсуждены в ²⁶⁻²⁸.

Еще чаще встречается УБ в нелинейной акустике, где оно выведено из уравнений гидродинамики вязкой теплопроводящей среды ¹⁴⁻¹⁷ и обобщено на случаи цилиндрических ²⁹, сферических волн ³⁰ и волн в средах с релаксацией ³¹. К подобным уравнениям сводится и анализ распространения интенсивных акустических пучков, если дифракция и нелинейные искажения пространственно разнесены ^{32, 33}. Так, если вначале более существенна дифракция пучка, ее рассчитывают в рамках линейной теории, учитывая последующее нелинейное укрупнение с помощью нелинейной акустики сферически расходящихся волн (см., например, ³⁴).

К неоднородному УБ в акустике сводится анализ возбуждения акустической волны интенсивным модулированным оптическим излучением ^{35, 36}. УБ применяется также для описания нелинейных волновых процессов в термоупругих средах ³⁷.

УР и УБ используют при расчете высокочастотных акустических волн в неоднородных средах методом нелинейной геометрической акустики. При этом в системе координат, связанной с лучами в линейной неоднородной среде, нелинейное искажение волн описывается УР с учетом разрывов ^{38, 39}.

Отметим еще, что для слаболинейных волн в сжимаемой жидкости, когда взаимодействие встречных волн из-за высокочастотного усреднения мало, возмущения плотности и скорости жидкости представимы в виде суперпозиции волн, каждая из которых в своей сопровождающей системе координат приближенно описывается УБ ^{40, 41}. Приближение слабого взаимодействия оказывается справедливым не только для встречных, но и для квазипериодических волн, бегущих под не слишком малыми углами друг к другу ^{42, 43}. Таким образом, УБ применимо и к описанию одномерной турбулентности сжимаемой жидкости ^{40, 41}, и к анализу волн в нелинейных акустических резонаторах и волноводах ^{42, 43}.

Обычно УБ и УР ассоциируются с волнами в средах без дисперсии. Но близкие уравнения естественно возникают и при анализе коротковолнового излучения в диспергирующих средах, когда масштабы неоднородностей среды, медленно меняющихся частоты и локального волнового вектора, велики в сравнении с дисперсионной или дифракционной нелокальностью поведения волн. При этом эволюция параметров волн описывается уравнениями геометрической оптики (акустики и т. д.), близкими, а подчас и совпадающими с УР (см., например, ^{44, 45}). Как и УР в акустике, геометрооптические уравнения несправедливы в окрестностях каустик — градиентных катастроф, где приходится учитывать нелокальность поведения волны.

Из других приложений УР и УБ отметим еще широкий спектр кинематических волн — паводковых волн, движений ледников, волн потоков транспорта и т. д. ¹⁷.

3. ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

а) Основные стадии эволюции

Динамика нелинейной волны при учете диссипативных эффектов определяется следующим из УБ законом сохранения импульса:

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx = \text{const}, \quad (3.1)$$

и соотношением для скорости диссипации энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x) dx = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3.2)$$

Изменение профиля волны характеризуется временами опрокидывания и диссипации: $t_n = l_0/u_0$ и $t_d = l_0^2/\nu$, где u_0 и l_0 — амплитуда и масштаб начального возмущения. Отношение этих времен дает значение акустического числа Рейнольдса:

$$R_0 = \frac{t_d}{t_n} = \frac{u_0 l_0}{\nu}.$$

При $R_0 \ll 1$ нелинейные эффекты несущественны и поведение волны определяется линейной диссипацией.

В наиболее интересном случае $R_0 \gg 1$ волна проходит три стадии:

I. Начальная стадия до образования разрывов ($t < t_n$), на которой проявляется когерентное нелинейное взаимодействие гармоник начального возмущения с сохранением энергии.

II. Стадия разрывных волн ($t_n < t < t_d$, t_d определяется той же формулой, что и t_d , однако при этом, вообще говоря, следует учитывать изменение масштаба волны при распространении). На стадии разрывных волн в волне образуются ударные фронты, положение которых можно найти из закона сохранения (3.1), приводящего к известному в акустике правилу равенства площадей.

О структуре ударных фронтов можно судить по стационарному решению УБ:

$$u(x - u_+ t) = u_+ - u_- \operatorname{th} \left[\frac{u_-}{2\nu} (x - u_+ t) \right], \quad (3.3)$$

представляющему собой бегущий со скоростью u_+ скачок поля u с амплитудой u_- и шириной δ , где

$$u_+ = \frac{u_2 + u_1}{2}, \quad u_- = \frac{u_2 - u_1}{2}, \quad \delta = \frac{\nu}{u_-}.$$

К стационарной волне вида (3.3) стремятся любые начальные возмущения с заданными значениями $u_0(-\infty) = u_1$; $u_0(\infty) = u_2$, но особенно важно, что при малых ν форма ударного фронта устанавливается быстрее изменения u_1 и u_2 и потому описывает локальный профиль ударного фронта, где происходит диссипация энергии. Между разрывами поле скорости на этой стадии меняется по линейному закону, соответствующему автомодельному решению УБ. В целом волна представляет собой пилу с одинаковым наклоном зубцов.

III. Стадия линейного затухания ($t > t_d$). На этой стадии ширина зоны диссипации становится одного порядка с масштабом волны, пропадает нелинейное взаимодействие гармоник и затухание энергии обуславливается линейной диссипацией.

Поведение нелинейной волны при $R_0 \gg 1$ хорошо интерпретируется на основе двух совпадающих на начальной стадии моделей: модели невзаимодействующих частиц и модели частиц, испытывающих неупругие соударения.

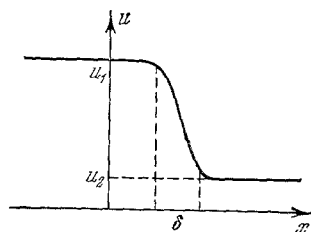


Рис. 2. Профиль ударного фронта.

$\delta = \nu / (u_1 - u_2)$ — ширина ударного фронта.

б) Связь с потоком
невзаимодействующих частиц

Замечательная особенность УБ состоит в том, что оно допускает интерпретацию с точки зрения потока невзаимодействующих частиц не только в области однопоточкового, но и в области многопоточкового движения. Однако, в отличие от задач распространения света, где имеет место интерференция потоков, здесь следует говорить об их конкуренции. На стадии $t_n < t < t_n$ из приходящих в точку потоков при $R_0 \gg 1$, как оказывается, можно учитывать только поток, обладающий минимальным действием, так как остальные поглощаются разрывами.

Возможность такого подхода следует из точного решения УБ, которое нелинейной заменой^{46, 47}

$$u(x, t) = -2v \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi(x, t) \quad (3.4)$$

сводится к линейному уравнению диффузии, что позволяет получить решение начальной задачи (1.1), (1.2) в виде

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-y) \exp[-s(x, y, t)/2v] dy}{t \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-s(x, y, t)/2v] dy}, \quad (3.5)$$

$$s(x, y, t) = s_0(y) + \frac{(x-y)^2}{2t}; \quad s_0(y) = \int^y u_0(x) dx.$$

Обзор свойств точных решений УБ и их таблицы приведены в⁴⁸.

При $R_0 \gg 1$ интегралы в (3.5) с достаточной точностью вычисляются методом перевала^{45, 7}:

$$u(x, t) = \frac{\sum_m u_m(x, t) |j_m(x, t)|^{-1/2} \exp[-s_m(x, t)/2v]}{\sum_m |j_m(x, t)|^{-1/2} \exp[-s_m(x, t)/2v]}. \quad (3.6)$$

Входящие в (3.6) совокупности величин можно рассматривать как многозначные функции: скорость частиц потока, удовлетворяющая УР и (1.2), действие потока, удовлетворяющее уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad s(x, 0) = s_0(x), \quad (3.7)$$

и расходимость потока, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial j}{\partial t} + u \frac{\partial j}{\partial x} = j \frac{\partial u}{\partial x}, \quad j(x, 0) = 1. \quad (3.8)$$

Наглядная интерпретация связывает (3.6) с гидродинамическим потоком невзаимодействующих частиц. Каждому члену суммы соответствует частица с начальной лагранжевой координатой y_m , попадающая в точку (x, t) . Суммирование ведется по всем попавшим в точку частицам, для которых $j > 0$. В лагранжевом представлении параметры потока в окрестности фиксированной частицы с начальной координатой y описываются системой характеристических уравнений, решение которой имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x(y, t) &= y + u_0(y) \cdot t, \quad u(y, t) = u_0(y), \\ s(y, t) &= s_0(y) + \frac{1}{2} u_0^2(y) t, \\ j(y, t) &= \frac{\partial x}{\partial y} = 1 + q t, \quad q(y, t) = \frac{\partial u}{\partial y} = u'_0(y). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Формулу (3.6) можно рассматривать как усреднение по приходящим в точку траекториям частиц с помощью некоторого аналога статистической суммы. На начальной стадии сумма содержит один член, соответствующий единственному решению УР. На стадии ударных волн сумма может включать несколько слагаемых, но почти для каждой точки существует одно доминирующее слагаемое, обладающее минимальным действием. При $t > t_{\text{н}}$ действие многих слагаемых (частиц) становится соизмеримым, благодаря чему в сумме необходимо учитывать много членов.

Наиболее интересно использовать модель конкурирующих потоков для описания свойств разрывных волн. При этом

$$u(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}, \quad (3.10)$$

где y — начальная координата той из попавших в точку частиц, действие которой минимально. Формула (3.10) дает простой графический ре-

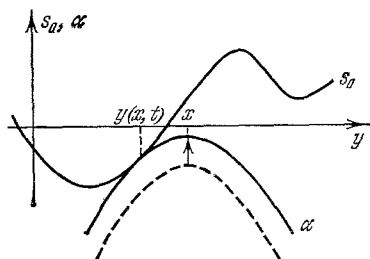


Рис. 3. Графическое определение точки абсолютного минимума действия.

Начальная координата, соответствующая абсолютному минимуму действия; $y(x, t)$ при заданной координате точки наблюдения x совпадает с точкой касания функции начального распределения действия $s_0(y)$ и параболы $\alpha = 1 - (x - y)^2/2t + H$, где H имеет минимальное значение из возможных.

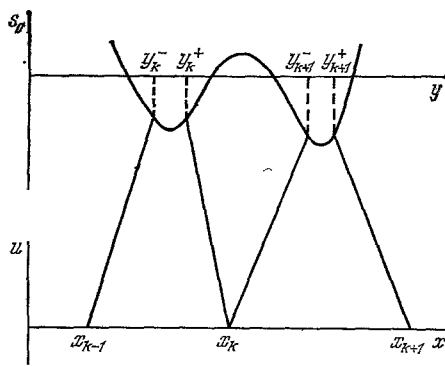


Рис. 4. Формирование разрывов.

Положение разрыва x_k соответствует точке равенства действий для потоков, выходящих из окрестностей двух минимумов s_0 .

цент отыскания значения $u(x, t)$ по точке минимума действия $y(x, t)$ ^{45, 7}. Для этого, варьируя H , надо найти первую точку касания кривой начального действия $s_0(y)$ параболой (рис. 3)

$$\alpha = H - \frac{(x - y)^2}{2t}. \quad (3.11)$$

На временах, больших времени опрокидывания, весь поток частиц разбивается на парциальные потоки, ограниченные разрывами, которые возникают в точках x_k , где сравниваются действия двух доминирующих частиц:

$$x_k = \frac{y_{k+1}^- + y_k^+}{2} + V_k t, \quad V_k = \frac{s_0(y_{k+1}^-) - s_0(y_k^+)}{y_{k+1}^- - y_k^+}. \quad (3.12)$$

Здесь y_k^+ и y_{k+1}^- — начальные координаты частиц, попадающих в точку разрыва слева и справа (см. рис. 4). С учетом конкуренции действий двух частиц профиль ударного фронта приобретает вид (3.3), где

$$u_+ = V_k, \quad u_- = \frac{y_{k+1}^- - y_k^+}{2t}.$$

При $t \gg t_n$ начальные координаты y_k^- и y_k^+ , ограничивающие один парциальный поток, оказываются в малой окрестности точки y_k , где s_0 имеет минимум. При этом для всех точек данного потока в формуле (3.10) можно положить $y = y_k$, откуда следует, что между разрывами поле

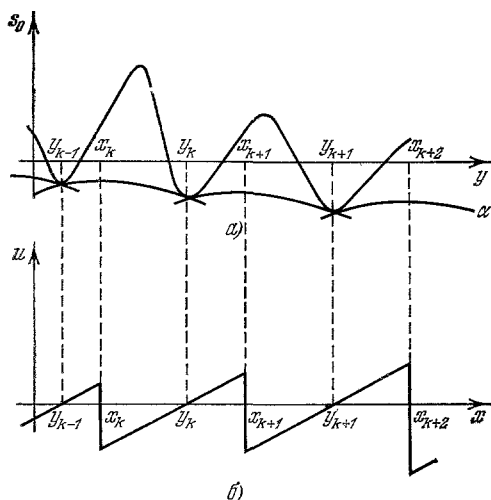


Рис. 5. Формирование профиля пилообразных волн.

Центры пил y_k соответствуют минимумам начального распределения действия s_0 .

В областях разрежения (между разрывами) плотность меняется как $\rho \sim 1/j$, а парциальный импульс области имеет вид

$$P_k = s_0(y_k^+) - s_0(y_k^-).$$

В областях сгущения (на фронтах) накапливаются частицы с общей массой:

$$m_k = y_{k+1}^- - y_k^+ = [u_0(y_{k+1}^-) - u_0(y_k^+)] t,$$

откуда для импульса такой тяжелой частицы имеем

$$\tilde{P}_k = m_k V_k = s_0(y_{k+1}^-) - s_0(y_k^+).$$

Суммируя, находим

$$\sum_k (P_k + \tilde{P}_k) = M = \text{const}, \quad (3.13)$$

т. е. при такой интерпретации (3.4) представляет собой закон сохранения импульса для газа, состоящего из частиц двух сортов. Передача импульса от легких частиц к тяжелым происходит по законам абсолютно неупругих соударений.

При $t \gg t_n$ вся масса практически сосредотачивается в областях разрывов, которые можно рассматривать как газ тяжелых частиц с массами $m_k = y_{k+1}^- - y_k^+$ и скоростями

$$V_k = \frac{s_0(y_{k+1}^-) - s_0(y_k^+)}{y_{k+1}^- - y_k^+}.$$

Различие скоростей разрывов приводит также к их неупругим соударениям, в результате которых происходит их слияние. Амплитуды ($u_k = m_k/2t$) и скорости слившихся разрывов определяются законами сохранения массы и импульса⁷.

скорости описывается автомодельным решением УР и УБ: $u = (x - y_k)/t$. Совокупность линейных участков образует пилообразную волну с наклоном зубцов: $1/t$ (рис. 5).

При разной глубине минимумов начального действия разрывы движутся в сторону менее глубоких, т. е. получают преобладание парциальные потоки, связанные со все более глубокими минимумами, за счет чего растет масштаб зубцов пилообразной волны.

в) Модель соударяющихся частиц

Если рассматривать поток частиц с равномерной начальной плотностью $\rho = 1$, то эволюция волны приводит к образованию областей сгущения и разрежения.

Более строго разрыв должен рассматриваться как квазичастица, обладающая внутренней структурой и размером, расплывание которой ограничивается давлением со стороны области разрежения. Заметим, что структура разрыва носит квазиодномерный характер. Используя это, можно получить принцип отбора доминирующей частицы по минимуму действия и поле скорости при $t \gg t_n$, минуя точное решение УБ^{21,22}. Это дает возможность обобщения полученных результатов на уравнения с более общим типом нелинейности вида $Q(u) \frac{du}{dx}$.

Следует сказать, что существует определенная аналогия между образованием разрывов в ударной волне и каустик в волне световой. Последние также представляют собой области сгущения поля, обладающие не зависящей от начальных условий структурой и возникающие на определенном этапе эволюции начального распределения.

г) Однополярная и периодическая волны

Проиллюстрируем прохождение волной указанных в п. (а) трех стадий на двух, важных для понимания свойств ТБ, примерах.

1. Однополярный начальный импульс ($M \neq 0$, рис. 6). На временах $t > t_n$ он стремится к автомодельному решению УБ, следующему из (3.5)

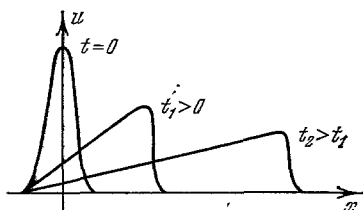


Рис. 6. Эволюция однополярного начального возмущения.

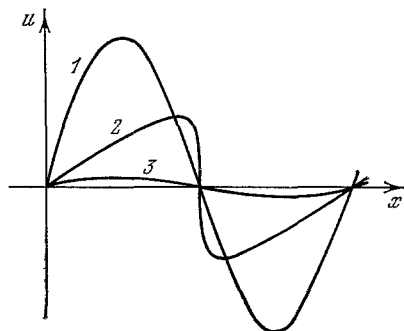


Рис. 7. Эволюция синусоидальной волны.

1 — начальное распределение, 2 — пилообразная волна, 3 — волна на стадии затухания.

при $u_0(x) = M\delta(x)$ ¹⁷, главная особенность которого в том, что его текущее число Рейнольдса $R = M/\nu \sim R_0$ неизменно во времени. Поэтому при $R_0 \gg 1$ волна не достигает стадии III линейной диссипации и на временах $t \gg t_n$ имеет вид треугольника:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{x}{t}, & 0 < x < \sqrt{2Mt}, \\ 0, & x \leq 0, x > \sqrt{2Mt}, \end{cases}$$

передний фронт которого описывается формулой (3.3) с $u_- = u_+ = \sqrt{2Mt}$.

2. Синусоидальное начальное поле (рис. 7)

$$u_0(x) = u_0 \sin \frac{2\pi x}{l_0}, \quad R_0 = \frac{u_0 l_0}{\nu} \gg 1.$$

Его эволюция обсуждена, например, в¹⁴. Здесь же укажем, что при $R_0 \gg 1$ волна пройдет все три стадии. Когда $t < t^* = t_n/2\pi$, нелинейность эффективно генерирует высшие гармоники, но ударных фронтов еще нет и диссипация практически отсутствует. На стадии II ($t_n \ll t \ll t_g$) волна имеет вид последовательности треугольных импульсов с неподвиж-

ными ударными фронтами шириной $\delta(t) \sim vt/l_0$ и амплитудой $u_- = l_0/t$. Подчеркнем, что на этой стадии периодическая волна, а значит, и ее энергия $u^2 \sim l_0^2/t^2$ забывают о начальной амплитуде u_0 . На стадии III ($t \geq t_n$) ширина ударных фронтов сравнивается с периодом поля, волна снова стремится к синусоидальной, но уже не зависящей от u_0 .

При квазигармоническом начальном поле волна также должна пройти все три стадии. Однако из-за возможного различия скоростей ударных фронтов они время от времени будут сливаться, а среднее расстояние между ними $l(t)$ — расти. В итоге текущее число Рейнольдса $R(t) \sim l(t)/\delta(t)$ уменьшается медленнее, чем для периодической волны, и выход на линейную стадию задерживается. Этот вывод тем более справедлив для ТБ с широкополосным начальным спектром. В этом смысле эволюция ТБ ближе к эволюции однополярного импульса. Важный для акустических приложений случай квазигармонических начальных волн рассмотрен в ¹⁴, ⁵⁰⁻⁵².

4. СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

а) Методы анализа

Статистическое описание случайных нелинейных волн представляет собой особую проблему, даже если известно точное решение динамической задачи, так как оно оставляет в неприкосновенности трудности, связанные с усреднением. Одна из возможностей преодоления этих трудностей состоит в формулировке замкнутых уравнений для моментов, исходя из общих соображений о характере статистических соотношений в данной задаче ³.

Если рассматривать эволюцию регулярного волнового пакета на фоне шумовой волны, то естественно попытаться замкнуть уравнение для среднего поля с помощью введения турбулентной вязкости, описывающей перекачку энергии от когерентной компоненты к некогерентной ⁵³, ⁵⁴. Обоснование такого подхода обсуждается в разделе 6 настоящей статьи.

Для корреляционной функции статистически однородной турбулентности Бюргерса

$$B(\rho, t) = \langle u(x, t) u(x + \rho, t) \rangle \quad (4.1)$$

из УБ следует уравнение, аналогичное уравнению Кармана — Хорвата теории гидродинамической турбулентности ³. Это уравнение незамкнуто, так как содержит третью моментную функцию $\langle u^2(x + \rho, t) u(x, t) \rangle$, в уравнение для которой входит четвертый момент и т. д. Суть основной группы приемов замыкания состоит в попытках оборвать эту бесконечную цепочку уравнений, полагая равными нулю высшие моменты или кумулянты. Эти допущения справедливы при малых числах Рейнольдса или при близости вероятностных свойств турбулентности к гауссовым (гипотеза Миллионщикова). Однако при $R_0 \gg 1$ такое замыкание ведет к физически противоречивым выводам, например к появлению отрицательных значений энергетического спектра ⁵⁷, что является следствием знакопеременности модельных распределений с конечным числом кумулянтов ⁵⁵, ⁵⁶.

Подробный обзор подобных приемов применительно к турбулентности разного числа измерений дан в ¹⁰ (см. также ⁵⁸, ⁵⁹).

В приближении «прямых взаимодействий» Крейчнана ⁶⁰⁻⁶³ и в методе «марковских стохастических моделей» ⁶⁴⁻⁶⁵ незамкнутое уравнение для функции корреляции заменяют модельным, которое правильно учитывает

тенденцию эволюции $B(\rho, t)$, а именно нарушение аналитичности при $\nu \rightarrow 0$ и затухание энергии из-за образования разрывов, но не позволяет проследить процессы на больших временах ^{66, 67}.

При анализе ТБ часто используется разложение в ряд по стохастическим ортогональным функциям (метод Винера — Камерона — Мартина) ⁶⁸⁻⁷⁵, первый член которого учитывает гауссову составляющую, а остальные негауссовы эффекты. Нелинейность УБ приводит к бесконечной цепочке уравнений для ядер ряда, обрывание которой не позволяет исследовать ТБ при $R_0 \gg 1$.

Упомянем еще работы ^{76, 77}, где разложение ТБ по модам применялось для построения каскадной модели турбулентности.

Более последовательный подход к проблеме состоит в анализе уравнения для характеристического функционала Хопфа ^{78, 79}. Одномерность и наличие точного решения УБ позволяют продвинуться на этом пути дальше ^{9, 80-82}, чем в вихревой турбулентности.

Подводя итог сказанному, отметим, что попытки получить описание ТБ, решая приближенные уравнения для корреляционной функции или другими близкими методами, не приводят к успеху при больших значениях числа Рейнольдса.

Другой подход к статистическому описанию нелинейных систем основывается на попытках представить их как ансамбль устойчивых и слабозаимодействующих элементов. Таков ансамбль частиц при описании разреженного газа или ансамбль мод-осцилляторов при описании слабой турбулентности. Для волн, удовлетворяющих УР и УБ, такой ансамбль может основываться на моделях невзаимодействующих или слабозаимодействующих частиц ^{4, 7, 49, 83-86}.

б) Лагранжев подход

Указанная в разделе 3 связь решений уравнений УР и УБ с потоком невзаимодействующих частиц делает естественным лагранжев подход к анализу статистики ТБ. Речь идет об исследовании лагранжевой статистики и дальнейшем восстановлении по ней статистики эйлеровых полей. Ключевыми здесь являются универсальные формулы связи, представляющие самостоятельный интерес для сравнения экспериментов различных типов.

Для сжимаемой жидкости эти формулы получены в ⁹⁰⁻⁹². Аналогичные формулы для несжимаемой жидкости приведены в ⁸⁷⁻⁸⁹. Если рассматривать жидкую частицу с начальной координатой y , то W_π — распределение ее параметров (текущей координаты x , (y, t) , скорости $u(y, t)$ и расходимости $j(y, t)$) связано с W_\bullet — распределением полей $u(x, t)$ и $j(x, t)$ в точке x формулой

$$W_\bullet(j, u; x, t) = |j| \int_{-\infty}^{+\infty} W_\pi(j, u, x; t|y) dy. \quad (4.2)$$

Для статистически однородной жидкости это равенство переходит в

$$W_\bullet(j, u; t) = |j| W_\pi(j, u; t). \quad (4.3)$$

Таким образом, эйлерово и лагранжево распределения одних и тех же параметров статистически однородной жидкости различаются на $|j|$, так как точка в пространстве имеет большую вероятность попасть в расширившуюся частицу, чем в сжавшуюся (см. рис. 8).

Приведенные формулы учитывают многопотоковость движения. Для среднего числа приходящих в точку потоков $\langle N \rangle$ имеем

$$\langle |j| \rangle_x = \langle N \rangle. \quad (4.4)$$

Формулы, аналогичные (4.2) и (4.3), связывают многоточечные распределения, а также спектры⁹³.

Применяя формулы связи к потоку невзаимодействующих частиц и используя формулы, описывающие изменение параметров s , u , q , j

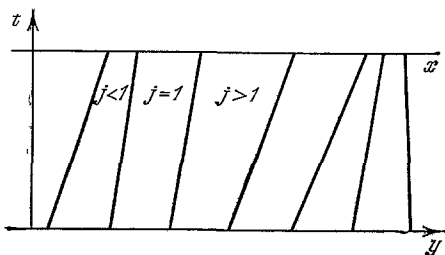


Рис. 8. Различие лагранжева и эйлерова распределений скорости, вследствие расширения и сжатия частиц жидкости. j — коэффициент расширения, y — координата частицы в начальный момент, x — координата в текущий момент.

вдоль лагранжевых траекторий, получим эйлерово распределение в виде

$$W_s(s, u, j, q; x, t) = |j| w_0 \left(s - \frac{1}{2} u^2 t, u, q; x - ut \right) \delta(j - 1 - qt), \quad (4.5)$$

где $w_0(s, u, q; x)$ — одноточечное распределение начального действия, скорости и ее производной ($s_0(x)$; $u_0(x)$; $u'_0(x)$).

в) Начальная стадия турбулентности

На начальной стадии эволюции возмущения ($t \ll t_n$), когда поле скорости подчиняется УР и движение можно считать однопотоковым, для описания статистических характеристик волны можно пользоваться выражением (4.5) и аналогичными ему многоточечными распределениями. Если в качестве начального возмущения задано статистически-однородное гауссово поле скорости с корреляционной функцией вида

$$\begin{aligned} \langle u_0(x) u_0(x + \rho) \rangle &= B_0(\rho), \quad B_0(0) = \delta^2, \\ -B''(0) &= k_1^2 = \frac{\sigma^2}{l_0^2}, \quad B^{IV}(0) = k_2^2 \sim \frac{\sigma^2}{l_0^4}, \end{aligned}$$

то зависимость среднего числа потоков $\langle N \rangle$ от $z = k_1 \cdot t$ показана на рис. 9.

При $t \leq t_n = l_0/\sigma$ можно считать, что число потоков в точке не больше трех, и получить формулу для среднего числа разрывов на единицу длины:

$$n(t) = \frac{k_2}{2\pi k_1} \exp\left(-\frac{1}{2z^2}\right). \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) дает критерий для пренебрежения разрывами. В области,

где такое пренебрежение относительно справедливо, $t \ll t_n$, распределение скорости в волне получается из (4.5) интегрированием по всем остальным параметрам. Для статистически однородного начального поля распределение скорости сохраняется: $W(u, t) = w_0(u)$ ^{93, 94, 95}. Это объяс-

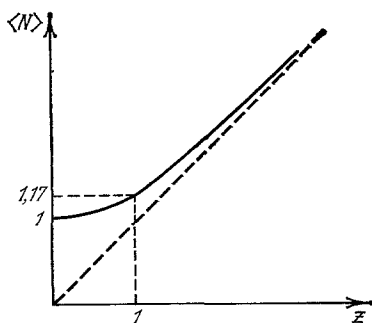


Рис. 9. Зависимость среднего числа потоков, частиц, приходящих в заданную точку от безразмерного времени.

няется тем, что сжатие укрупняющихся фронтов компенсируется таким же уширением растягивающихся участков (рис. 10). С появлением разрывов компенсация нарушается и $W(u, t)$ начинает меняться⁹⁶.

Для спектра поля скорости

$$g(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\rho, t) \cos k\rho \, d\rho$$

при гауссовом поле начальной скорости лагранжев подход дает

$$g(k, t) = \frac{1}{2\pi k^2 t^2} \exp(-\sigma^2 k^2 t^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \{\exp[B_0(\rho) k^2 t^2] - 1\} \exp(ik\rho) \, d\rho. \quad (4.7)$$

Особенности эволюции спектра римановых волн, полученного независимо в^{97, 98}, обсуждались для разных физических ситуаций в^{14, 21, 98-100}. Укажем на некоторые характерные черты спектра (4.7).

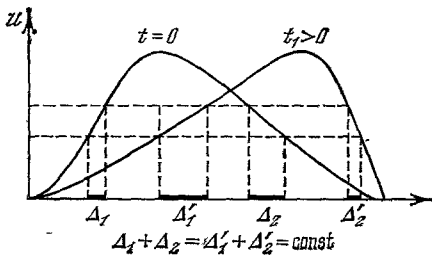


Рис. 10. Сохранение распределения скорости для ТБ до опрокидывания волны. Δ_1 и Δ_2 — пространственные интервалы, соответствующие интервалу скоростей Δu в начальном возмущении. Δ'_1 и Δ'_2 — те же интервалы после укрупнения профиля.

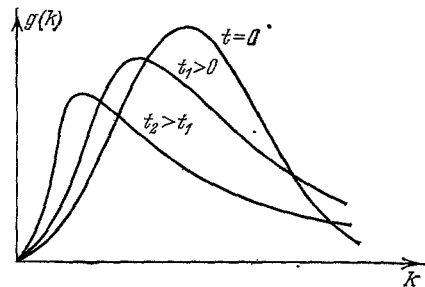


Рис. 11. Эволюция спектра ТБ до опрокидывания волны.

Нелинейное взаимодействие гармоник ведет к тому, что спектр всего быстрее растет при больших k . Если начальный спектр $g_0(k)$ максимален при $k_0 \neq 0$, то генерация разностных гармоник приводит к перетеканию спектра в сторону $k < k_0$ (рис. 11)⁹⁷.

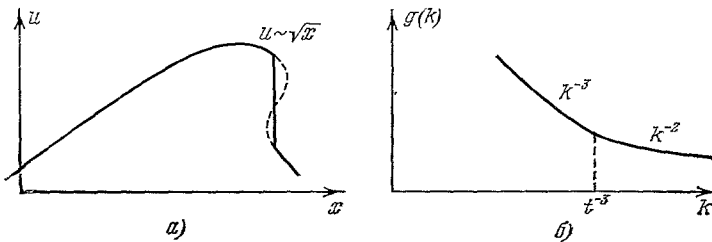


Рис. 12. Характеристики случайной волны после возникновения разрыва. а) Характерный профиль, б) спектр турбулентности. Сразу после опрокидывания волна имеет особенность $u \sim \sqrt{x}$, которой соответствует спектр $g \sim k^{-3}$. Наличие разрыва приводит к асимптотике спектра $g \sim k^{-2}$.

При $k \rightarrow \infty$ из (4.7) имеем универсальную асимптотику $g \sim k^{-3}$ ^{97, 98, 101}, связанную с особенностями поля типа $u \sim \sqrt{x}$ при опрокидывании волны⁹⁸ (см. рис. 12, а). Появление разрывов ведет к более медленному спадающему спектра $g \sim k^{-2}$ ⁶. Однако на начальной стадии образова-

ния разрывов в интервале

$$\frac{1}{l_0} \ll k \ll \frac{1}{l_0} \left(\frac{t_n}{t} \right)^3$$

сохраняется асимптотика $g \sim k^{-3}$, заменяемая, по мере роста амплитуды и числа разрывов, асимптотикой $g \sim k^{-2}$ ⁹⁶ (рис. 12, б).

г) Учет разрывов

В рамках общей аналогии с потоком невзаимодействующих частиц учет разрывов означает учет конкуренции между потоками с помощью отбора доминирующего потока. Вероятностное распределение скорости в заданной точке при этом может быть представлено в виде

$$W(u; x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(s, u; x, t) \tilde{W}(s) ds, \quad (4.8)$$

где W_s — совместное распределение действия и скорости для волны Римана, а обрезающий множитель \tilde{W} — вероятность того, что при попадании в точку наблюдения частицы с параметрами s все остальные попадающие в точку частицы имеют действие $s' > s$. Общее выражение для \tilde{W} можно найти, как решение задачи об отсутствии пересечений случайного процесса с заданным уровнем, в виде континуального интеграла. Практически континуальный интеграл можно свести к конечномерному и рассчитать численными методами. Аналитические результаты с учетом правила отбора доминирующей частицы, справедливые для любых t , можно получить, пользуясь упрощенными выражениями для обрезающего множителя^{48, 49}. Строгие аналитические результаты возможны в двух предельных случаях, когда число учитываемых потоков мало или очень велико.

д) Гипотеза автомодельности

На стадии пилообразных волн $t \gg t_n$, когда, как отмечалось в разделе 3, возможна аналогия между разрывами и газом частиц с массами $m_k = y_{k+1} - y_k$ и расстояниями между ними $l_k = x_{k+1} - x_k$, привлекателен анализ ТБ методом кинетических уравнений для вероятностных распределений параметров m_k и l_k ⁷. С учетом сохранения масс и импульсов частиц при их столкновениях в⁷ была получена цепочка уравнений для функций распределения. Замыкание уравнений оказалось возможным при помощи гипотезы автомодельности вероятностных распределений для ТБ, которые, согласно этой гипотезе, зависят от времени только через автомодельный масштаб $l(t)$, представляющий собой среднее расстояние между частицами (разрывами). Гипотеза автомодельности приводит к уравнениям для среднего числа разрывов на единицу длины $\langle n \rangle$ и масштаба $l(t) = \langle n \rangle^{-1}$:

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = -\frac{\alpha}{t} \langle n \rangle, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\alpha}{t} l, \quad (4.9)$$

где α — константа, определяющая частоту соударений.

Чтобы найти α , приходится привлекать дополнительные соображения. Особенно полезным здесь оказывается статистический инвариант, следующий из динамического инварианта (3.1) и аналогичный инва-

рианту Лойцянского в гидродинамической турбулентности:

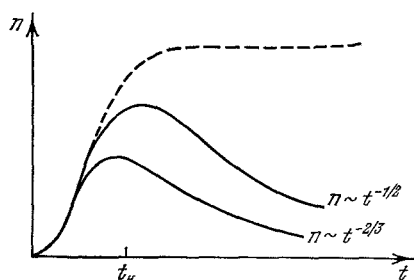
$$D = 2\pi g(0, t) = 2\pi g_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_0(\rho) d\rho. \quad (4.10)$$

Физический смысл (4.10) — сохранение постоянной составляющей в спектре энергии ТБ.

По гипотезе автомодельности $D \sim l^3/t^2$, откуда следует $\alpha = 2/3$. Более сложен случай $D = 0$. В этой ситуации в⁷ α определялось с помощью дополнительных, недостаточно обоснованных гипотез, приведших, однако, к правильному результату $\alpha = 1/2$.

Рис. 13. Зависимость среднего на единицу длины числа разрывов от времени.

После опрокидывания волны $t > t_n$ число разрывов постепенно начинает падать, вследствие их слияния. Асимптотический закон спада $t^{-1/2}$ ($D = 0$) и $t^{-2/3}$ ($D \neq 0$).



Несколько иные соображения использовались в⁸⁵, где из предположения, что $dn/dt \sim -n/\tau$, где $\tau \sim l/v$ — время свободного пробега разрыва (v — среднеквадратичная скорость движения разрыва), было получено соотношение $v \sim l/t$. С другой стороны, формула (3.12) позволяет связать скорость v с распределением начального действия:

$$v^2 \approx \frac{1}{l^2} \int_0^l (l - \rho) B_0(\rho) d\rho. \quad (4.11)$$

На временах $t \gg t_n$ ($l \gg l_0$) v существенно зависит от поведения начального спектра энергии при $k \rightarrow 0$. Действительно, при $l \gg l_0$ имеем

$$\begin{aligned} v^2 &\sim \frac{1}{l} \int_0^\infty B_0(\rho) d\rho = \frac{2D}{l} \quad (D \neq 0), \\ v^2 &\sim -\frac{1}{l^2} \int_0^\infty \rho B_0(\rho) d\rho \sim \sigma^2 l_0^2 l^{-2} \quad (D = 0). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Учитывая связь $v \sim \frac{l}{t}$, из (4.12) находим

$$l(t) \sim \sqrt[3]{Dt^2} \quad (D \neq 0), \quad l(t) \sim \sqrt{\sigma l_0 t} \quad (D = 0). \quad (4.13)$$

Из (4.13) следуют законы спада среднего числа разрывов, корректирующие при $t \gg t_n$ формулу (4.6) (см. рис. 13).

Скорость диссипации энергии, как следует из (3.2) и гипотезы автомодельности, связана с масштабом $l(t)$ соотношением

$$\frac{dE}{dt} \sim v \frac{l^2}{t^2 \cdot l \cdot \delta} \sim \frac{l^2}{t^3} \quad (E(t) = \langle u^2(x, t) \rangle),$$

откуда с учетом (4.13) имеем

$$\begin{aligned} E(t) &\sim \left(\frac{D}{t}\right)^{2/3} \quad (D \neq 0), \\ E(t) &\sim \frac{\sigma l_0}{t} \quad (D = 0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Заметим, что, если бы разрывы не сливались, то энергия убывала по закону $E \sim t^{-2}$, хорошо известному специалистам по нелинейной акустике¹⁴. Уменьшение скорости диссипации энергии связано с движением и сливанием разрывов.

Автомодельный масштаб играет роль внешнего масштаба ТБ. За внутренний масштаб можно принять $\delta \sim \nu t/l$. Их отношение дает изменяющееся во времени, текущее число Рейнольдса:

$$R(t) = \frac{l}{\delta} = \frac{l^2}{\nu t}. \quad (4.15)$$

Таким образом, слияние разрывов при $D \neq 0$ ведет к росту числа Рейнольдса, в результате чего линейная стадия никогда не достигается. Тот же вывод можно сделать из (4.15) для случая $D = 0$, однако, как показывает строгая теория, он оказывается неверным. При $D = 0$ ТБ все же выходит на линейную стадию, однако время выхода очень велико: $t_d \gg \gg t_d = t_n R_0$.

Гипотеза автомодельности и ее основные следствия, как будет показано в разделе 5, подтверждаются более корректным анализом. Что касается других предположений кинетической теории⁷, то они не оправдываются и ведут к частично неправильным результатам.

5. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПИЛООБРАЗНЫХ ВОЛН

а) М а с ш т а б к о р р е л я ц и й и а с и м п т о т и ч е с к а я т е о р и я

Турбулентность (ТБ) пилообразных волн представляет наиболее интересную стадию ТБ, сочетающую в себе черты стохастического и упорядоченного поведения. Рост корреляционного масштаба приводит на этой стадии к появлению большого параметра l/l_0 , благодаря которому начальное поле скорости можно считать близким к дельта-коррелированному. Асимптотическая теория, следующая отсюда, однако, оказывается сильно зависящей от характера поля начального действия, так как с минимумами именно этого поля связаны доминирующие частицы. Как отмечалось, свойства ТБ различны при $D \neq 0$ и $D = 0$, что непосредственным образом связывается с различиями поля действия.

При $D \neq 0$ начальное действие можно рассматривать как винеровский процесс. Этот случай был подробно разобран Бюргерсом⁴⁶.

При $D = 0$ из статистической однородности начального поля скорости следует и статистическая однородность начального действия. Поскольку правило отбора частиц с минимальным действием позволяет учитывать при $t \gg t_n$ только большие отрицательные значения начального действия, то к анализу ТБ удастся привлечь теорию выбросов стационарных случайных процессов^{102, 103}. Идейно близкий, но несколько различный по технике анализ статистически однородной ТБ был дан в⁸⁴⁻⁸⁶.

Помимо двух основных типов ТБ ($D = 0$, $D \neq 0$), рассмотренных в настоящем разделе, могут существовать и промежуточные типы, зависящие от конкретного вида спектра начальной скорости и реализующиеся на определенных временах.

б) С в о й с т в а т у р б у л е н т н о с т и п р и $D = 0$.

Обсудим подробнее свойства ТБ на стадии $t \gg t_n$, предполагая, что начальное поле скорости статистически однородно, гауссово (хотя это и не обязательно) и его корреляционная функция имеет характерный масштаб l_0 . Предположим также, что начальный спектр $g_0(k) \rightarrow k^n$ ($n > 2$)

при $k \rightarrow 0$, откуда следует, что начальное действие имеет дисперсию

$$\sigma_s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(k) \frac{dk}{k^2} = \frac{\sigma^2}{\Omega^2}, \quad \Omega \sim \frac{1}{l_0}.$$

Свойства ТБ в точке определяются той из попадающих в точку частиц, которая обладает минимальным действием. При $t \gg t_n$ конкурирующие частицы связаны с большими отрицательными выбросами s_0 , которые в случае одномасштабной функции $B_0(\rho)$ можно считать некоррелированными, что позволяет получить распределение скорости доминирующих частиц с наименьшим действием⁴⁹:

$$W(u; t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(s, u; t) \exp \left[- \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} W_s(s, u; t) ds \right] ds. \quad (5.1)$$

Здесь $W_s(s, u; t)$ — следующее из (4.5) эйлерово совместное распределение действия и скорости. При $l \gg l_0$ доминирующими будут частицы, выходящие из малых окрестностей выбросов начального действия за очень низкий уровень $H_0 = -\sigma_s \xi$ ($\xi \gg 1$), определяемый условием экстремума подинтегрального выражения (5.1) по s :

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\xi}} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) = 1, \quad \xi \approx \sqrt{\ln \gamma}, \quad \gamma = \frac{\sigma \Omega t}{2\pi} \sim \frac{t}{t_n}. \quad (5.2)$$

Беря интеграл в (5.1) методом перевала, получим для одноточечной плотности вероятности ТБ гауссово распределение:

$$W(u; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi E}} \exp \left(-\frac{u^2}{2E} \right), \quad (5.3)$$

$$E(t) = \frac{l^2(t)}{t^2} \approx \frac{\sigma}{\Omega t \sqrt{\ln \gamma(t)}}, \quad (5.4)$$

$$l^2(t) = \frac{\sigma t}{\Omega \xi} \approx \frac{\sigma t}{\Omega \sqrt{\ln \gamma(t)}}. \quad (5.5)$$

Относительное движение разрывов приводит к двум главным отличиям поведения энергии ТБ (5.4) от энергии периодической волны $E \approx \approx l_0^2/t^2$ на той же стадии $t \gg t_n$ (см. пункт 3г). Это, во-первых, уже упомянутое более медленное затухание энергии ТБ, с точностью до логарифмической коррекции⁸⁴⁻⁸⁶ описываемое законом $E \sim t^{-1}$ (4.14), следующим и из качественных оценок. Во-вторых, это зависимость E от начальной амплитуды ТБ $\sigma \sim u_0$. Память энергии ТБ о начальной амплитуде, отсутствующая у периодической волны, обусловлена зависимостью от σ скорости движения разрывов: чем больше σ — тем чаще сливаются разрывы, слабее диссипация и больше энергия ТБ.

Аналогично, при $l \gg l_0$, можно найти асимптотические выражения для совместной плотности вероятности ТБ в двух точках, разделенных интервалом 2ρ . Как и одноточечное распределение (5.3), она оказывается автомодельной — зависящей от одного пространственного масштаба $l(t)$ (5.5) — внешнего масштаба ТБ. Поэтому удобно перейти к безразмерным переменным:

$$v_1 = \frac{t}{l(t)} u(-\rho, t), \quad v_2 = \frac{t}{l(t)} u(\rho, t), \quad s = \frac{\rho}{l(t)}. \quad (5.6)$$

Совместное распределение v_1 и v_2 имеет вид ⁸⁵:

$$W(v_1, v_2; 2s) = \frac{\delta(v_2 - v_1 - 2s)}{\Phi(-v_1) \exp[(1/2)v_1^2] + \Phi(v_2) \exp[(1/2)v_2^2]} + \\ + \exp\left(-\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right) \int_{-s-v_1}^{s-v_2} \frac{2s \, dz}{[\Phi(s+z) \exp(zs) + \Phi(s-z) \exp(-zs)]^2}, \quad (5.7)$$

где Φ — интеграл вероятности.

Первое слагаемое здесь описывает свойства ТБ при условии, что в интервале длины 2ρ разрывов нет, а второе — при условии, что в него попал

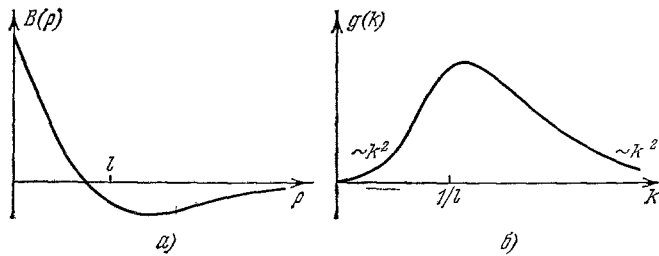


Рис. 14. Статистические характеристики ТБ в режиме пилообразных волн.
а) Корреляционная функция; б) спектр l — автомодельный масштаб турбулентности.

хотя бы один разрыв. В отличие от одноточечного, двухточечное распределение (5.7) негауссово, но, естественно, стремится к гауссову при больших и малых, в сравнении с $l(t)$, разнесениях точек наблюдения:

$$W(v_1, v_2; s) = \begin{cases} \delta(v_1 - v_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) & (s \rightarrow 0), \\ \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right) & (s \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (5.8)$$

Из (5.6), (5.7) нетрудно найти корреляционную функцию и спектральную плотность энергии ТБ (рис. 14). Разрывы пилообразных волн ведут к неаналитичности корреляционной функции и степенному спаду спектра

$$g(k, t) = \frac{2l(t)}{k^2 \pi^{3/2} t^2} \left(k \gg \frac{1}{l(t)}\right). \quad (5.9)$$

При малых k спектр также имеет степенную асимптотику

$$g(k, t) \sim \frac{k^2 l^5}{t^2} \sim k^2 \sqrt{t}, \quad (5.10)$$

а максимум спектра смещается в сторону малых k как $\frac{1}{l}$.

Заметим, что следующие из асимптотической теории законы $E \sim t^{-1}$ и $g \sim k^{-2}$ согласуются с натурными и численными экспериментами (см. ^{104, 105}).

Следует добавить, что представляет также интерес статистика параметров «тяжелых частиц» (разрывов) m_k и l_k , тоже дающая полную информацию о свойствах ТБ ⁸⁴.

в) Поле диссипации

Полученные выше закономерности ТБ по существу не учитывают конечной величины вязкости. При учете толщины ударных фронтов поле диссипации — градиент ТБ имеет вид (рис. 15).

$$q(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \sum_k \frac{m_k}{\delta_k} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{x - x_k}{\delta_k} \right),$$

$$\delta_k = \frac{4vt}{m_k}. \quad (5.11)$$

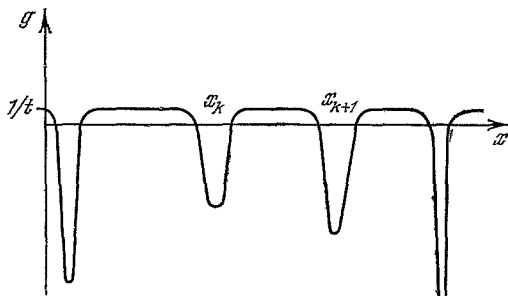


Рис. 15. Поле диссипации ТБ.

$q(x, t)$ — градиент поля скорости, x_k — точки расположения ударных фронтов.

Пока текущее число Рейнольдса велико, поле диссипации, как и в гидродинамической турбулентности³, носит «перемежающийся» характер — сконцентрировано в хаотически разбросанных сгустках, между которыми диссипации практически нет. Из (5.11) легко заключить, что поле диссипации сильно негауссово.

Конечность толщины ударных фронтов нарушает степенную асимптотику спектра ТБ и приводит к его более быстрому спадаанию в диссипативном интервале $k \cdot \delta \gg 1$ ⁸⁵:

$$g(k, t) = \frac{16\pi v^2}{\sqrt{3} \cdot l} \sqrt[3]{\pi \delta k} \cdot \exp[-3(\pi k \delta)^{2/3}], \quad \delta = \frac{vt}{l}. \quad (5.12)$$

Заметим, что спектр ТБ спадает медленнее, чем для периодической волны, что объясняется флуктуациями внутреннего масштаба ТБ.

г) Вырождение турбулентности

Приведенные выше асимптотики справедливы на временах $t_{\pi} \gg t \gg t_n$, где t_{π} — время выхода ТБ на заключительный линейный этап вырождения. Оценим его из условия равенства единице текущего числа Рейнольдса. Используя (5.5), имеем

$$R(t) = \frac{l^2}{vt} \sim R_0 \left(\ln \frac{t}{t_{\pi}} \right)^{-1/2};$$

$$t_{\pi} \sim t_n \exp R_0^2. \quad (5.13)$$

Переход к линейной стадии у ТБ происходит много позже, чем у периодической волны, для которой $t_{\pi} \sim t_{\pi} \sim t_n R_0$.

На линейной стадии свойства ТБ удобнее исследовать, опираясь на точное решение уравнения диффузии, к которому УБ сводится подстановкой, так как на этих временах его среднее значение много больше флуктуаций¹⁰⁶.

Анализ показывает, что при $t \gg t_{\pi}$ спектр энергии ТБ также автомоделен:

$$g(k, t) \approx 4v^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(R_0^2/4)}{\Omega R_0} \exp(-2vk^2t^2), \quad (5.14)$$

а энергия спадает по закону

$$E(t) \sim t^{-3/2}.$$

Большая крутизна спектра ТБ на линейной стадии объясняется большим временем выхода на линейный режим.

д) Стационарная турбулентность

Важным для теории турбулентности примером возникновения стационарной турбулентности может служить ТБ, возбуждаемая случайной внешней силой и удовлетворяющая неоднородному УБ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

где $f(x, t)$ — гауссово поле с корреляционной функцией

$$\langle f(x, t) f(x + \rho, t + \tau) \rangle = \theta(\rho) \delta(\tau).$$

Нетрудно показать, пользуясь, например, формулой Фурутцу — Новикова, что имеет место равенство⁹⁸

$$g(0, t) = \frac{1}{2\pi} (D + bt), \quad (5.15)$$

обобщающее инвариант (4.10) на случай ТБ, возбуждаемой внешней силой. Здесь

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\rho) d\rho.$$

Из (5.15) видно, что ТБ может стремиться к строго стационарному режиму лишь при $b = 0$. Физически это связано с тем, что при $b \neq 0$ подкачка энергии в длинноволновую часть спектра не успевает компенсироваться вязкой диссипацией.

В⁸¹ методами теории подобия показано, что в стационарном режиме закон распределения энергии ТБ по спектру имеет вид

$$g_{\infty}(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \psi(kl, kL), \quad (5.16)$$

где $l = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ — микромасштаб турбулентности, L — длина корреляции возбуждающей силы $f(x, t)$, а $\varepsilon = \theta(0)/2L$ — скорость диссипации энергии.

В⁴⁸ свойства стационарной ТБ исследовались с помощью анализа статистики скоростей доминирующих частиц. Отбор их в⁴⁸ опирался на гипотезу статистической независимости действия и скорости. При этом удалось показать, что стационарная ТБ имеет гауссово распределение, вычислить энергию и некоторые другие характеристики стационарной ТБ. Так, для спектра ТБ в инерционном интервале получено $g_{\infty}(k) \sim \varepsilon^{2/3}/k^2 L^{1/3}$, что согласуется с (5.16), но противоречит выводу⁸¹ о существовании инерционного интервала с универсальным спектром $k^{-5/3}$. Следует, однако, отметить, что выводы⁴⁸ не вполне строгие и нуждаются в обосновании.

е) Турбулентность при отсутствии
вырождения ($D \neq 0$)

Принципиальное отличие ТБ с $D \neq 0$ от выше рассмотренного случая с $D = 0$ состоит в нарастании нелинейных эффектов и безграничном росте числа Рейнольдса с течением времени. Это связано с различием статистик начального действия и более быстрым при $t \gg t_n$ ростом авто-модельного масштаба по закону $l \sim (Dt^2)^{1/3}$.

Линейная стадия ТБ при $D \neq 0$ может реализовываться только при $R_0 \ll 1$ и то лишь на сравнительно малых временах. Действительно, если $R_0 \ll 1$, то нелинейные эффекты вначале малы, но сглаживание поля вязкой диссипацией приводит на временах $t > t_d$ к росту его пространственного масштаба $l = 2\sqrt{\nu t}$. Так как при $D \neq 0$ энергия поля затухает

по закону $E \sim \sigma^2 l_0 / l$, текущее число Рейнольдса растет:

$$R(t) = \frac{V \bar{E} l}{\nu} \sim R_0 \left(\frac{t}{t_n} \right)^{\frac{1}{2}},$$

и при $t > \frac{t_n}{R_0^2}$ становится больше единицы, после чего на распространении волны начинают сказываться нелинейные эффекты. Таким образом, на достаточно больших временах ТБ при $D \neq 0$ ведет себя как пилообразная волна, хотя и с сильно размытыми фронтами.

Переходя к нормированным координатам $\bar{x} = x/l(t)$ и $\bar{y} = y/l(t)$, получим, что начальное поле скорости

$$\bar{u}_0(\bar{x}, t) = \frac{t}{l(t)} u_0(\bar{x}l(t))$$

имеет корреляционную функцию

$$\langle \bar{u}_0(\bar{x}, t) \bar{u}_0(\bar{x} + \lambda, t) \rangle = \left(\frac{t}{l} \right)^2 B_0(l\lambda)$$

с длиной корреляции $\lambda_0 = l_0/l$. На временах $t \gg t_n$, когда $l \gg l_0$, \bar{u}_0 стремится к дельта-коррелированному полю. Что касается начального распределения действия, то задавая его в виде

$$s_0(\bar{x}, \bar{y}, t) = \int_{\bar{x}}^{\bar{y}} \bar{u}_0(\bar{x}, t) d\bar{x},$$

находим, что при $l \gg l_0$ оно стремится к винеровскому процессу, все статистические свойства которого полностью определяются его первыми двумя моментами

$$\langle s_0 \rangle = 0, \quad \langle s_0^2 \rangle = |\bar{x} - \bar{y}| \quad (5.17)$$

и не зависят от времени.

Отсюда следует, что при $R(t) \gg 1$, $t \gg t_n$ все статистические характеристики ТБ становятся автомодельными и определяются вероятностными свойствами процесса Винера. В частности, корреляционная функция и вероятностное распределение ТБ представимы в виде

$$\begin{aligned} W(u; t) &= \frac{t}{l} w_{\infty} \left(\frac{ut}{l} \right), \\ B(\rho, t) &= \left(\frac{l}{t} \right)^2 \langle y^2 \rangle R \left(\frac{\rho}{l} \right) \quad (R(0) = 1), \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$\langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 w_{\infty}(y) dy.$$

Конкретный вид функций, входящих в (5.18), можно определить численно, методом статистических испытаний или привлекая теорию марковских процессов. В работе Бюргерса⁴⁶ получена связь функции w_{∞} с вероятностью недостижения винеровским процессом параболической границы, которая в свою очередь выражается через решение уравнения диффузии. Опираясь на полученное представление, Бюргерс рассчитал вероятностные распределения амплитуд разрывов и расстояний между ними.

ж) Авто модельность и диссипативная структура

ТБ, как и вихревая турбулентность, дает пример системы, выходящей на автомодельный режим, возникающий как промежуточная асимптотика при $t_n \ll t \ll t_d$.

Реализующиеся на этой стадии пилообразные волны обладают свойством локальной автомодельности. Вместе с тем автомодельными оказываются статистические характеристики случайных пилообразных волн — развитой ТБ. При этом автомодельность ТБ может быть полной или неполной¹⁰⁷, т. е. определяемой лишь анализом размерности или зависящей от начальных условий, в зависимости от вида начального спектра (см. 46, 7, 49, 84–86). Автомодельный масштаб ТБ играет роль внешнего масштаба турбулентности и указывает на средние размеры локально-упорядоченной области — домена.

Доменная структура ТБ может считаться примером диссипативной структуры^{108–110}. Узкие зоны диссипации, куда поступает энергия, расположены на границах между доменами. Каждый домен связан с некоторой парциальной волной, которую можно выделить в начальном возмущении, характеризующейся величиной действия, играющего в данной задаче роль параметра порядка. В результате конкуренции доменов их масштаб, т. е. радиус корреляции ТБ, растет. При увеличении вязкости ТБ возможно нечто вроде фазового перехода: режим доменов уступает место режиму слабо связанных гармоник; однако этот переход носит непрерывный характер.

Области диссипации, служащие стенками доменов, могут быть интерпретированы как области повышенной плотности, образующиеся в результате неупругих соударений разлетающихся невзаимодействующих частиц. Заметим, что аналогичные явления могут возникать и при других типах взаимодействия между частицами, если энергия взаимодействия много меньше их кинетической энергии. Задача о разлете частиц с учетом их гравитационного взаимодействия приводит к ячеистой или доменной структуре¹¹¹, весьма похожей на ту, какую можно ожидать для системы, описываемой трехмерным обобщением уравнения Бюргерса. При этом следует иметь в виду, что если считать гравитационное взаимодействие существенным только в областях сгущения частиц, то его роль на определенном этапе аналогична роли диссипации. Оно переводит энергию поступательного движения частиц в энергию их колебательного и хаотического вихревого движения в зоне фронта. Поэтому, по-видимому, начальная стадия образования ячеистой гравитационной структуры (пока еще не сказывается эволюция доменных границ) во многом близка к явлениям, описываемым моделью неупругих соударений.

Возможен и несколько иной взгляд на ТБ. При конечном ν в областях фронтов возникают квазиодномерные структуры, носящие характер бегущих волн с медленно меняющимися параметрами. Эти структуры сливаются между собой с помощью отдельных пил, которые могут рассматриваться как связанный с начальным состоянием риманов пьедестал. Энергия пьедестала постепенно перекачивается в область фронтов, где происходит ее диссипация. Такую перекачку энергии можно рассматривать как результат столкновений некоторых квазичастиц с фоном. Для систем, допускающих образование солитонов, сходный подход развивался в¹¹².

В связи со сказанным становится яснее также аналогия между сильной турбулентностью в континуальных системах и стохастическим движением систем с небольшим числом степеней свободы⁸. Для последних

наряду со структурами типа странных аттракторов и т. д. характерны также траектории, сочетающие участки стохастического и упорядоченного движения⁸⁶. В ТБ мы также имеем пример движения такого типа. Рассматривая поведение решения УБ при $t = \text{const}$, можно сказать, что имеют место хаотические автоколебания «переключательного типа».

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

а) Качественная классификация

До сих пор в основном предполагалось, что начальное возмущение является одномасштабным шумом. Между тем в акустических приложениях, например, часто реализуются многомасштабные нелинейные волны¹⁴. Типичные примеры — квазимонохроматическое возмущение или сигнал, взаимодействующий с шумом, не перекрывающимся с ним по спектру. Возникающие при этом явления определяются набором нелинейных времен отдельных составляющих и времен их взаимодействия. Основные физические закономерности поведения многомасштабных волн могут быть поняты на основе исследования распространения суммы двух разномасштабных возмущений. Ниже такой анализ проведен на примере периодического сигнала с нулевой постоянной составляющей, взаимодействующего со стационарным шумом¹¹³.

В отличие от линейной задачи рассеяния волны на заданных неоднородностях здесь важную роль играет самовоздействие составляющих. Из-за нелинейных искажений, образования и слияния разрывов, свойства взаимодействующих волн меняются по мере их распространения, что приводит к принципиально различным механизмам взаимодействия на разных этапах. Кроме того, в отличие от сред с дисперсией, где выполнение условий синхронизма — скорее исключение, чем правило, и при взаимодействии волн рано или поздно когерентность нарушается¹¹⁴, в недиспергирующей среде нарушение когерентности взаимодействия может быть вызвано лишь самовоздействием достаточно интенсивного шума.

Выделим основные вопросы, возникающие при анализе взаимодействия сигнала и шума: 1) Влияние шума на затухание среднего поля регулярной волны и тесно связанная с этим вопросом проблема турбулентной вязкости. 2) Перераспределение энергий сигнала и шума по спектру за счет взаимодействия. 3) Влияние интенсивного сигнала на трансформацию статистических свойств шума.

Для характеристики взаимодействия двух компонент начального возмущения удобно ввести понятие длины турбулентной диффузии l_d^{113} — масштаба, описывающего размытие структуры первой компоненты начального поля $u_1(x)$ из-за взаимодействия со второй $u_2(x)$ ($u_0(x) = u_1(x) + u_2(x)$). Характерные амплитуды, пространственные масштабы и нелинейные времена составляющих начального возмущения обозначим, соответственно, a_1, l_1, t_1 и a_2, l_2, t_2 . Как и прежде, этапы эволюции волн здесь уместно характеризовать на языке гидродинамических потоков невзаимодействующих частиц.

При однопотоковом распространении длина диффузии определяется смещением начальной координаты попавшей в данную точку частицы за счет влияния компоненты u_2 . При многопотоковом распространении l_d зависит от смещения доминирующей частицы, которое ограничивается условием компенсации регулярного увеличения действия его возможным

уменьшением за счет s_2 :

$$\frac{l_d^2}{2t} = \Delta s_2(l_d).$$

Полученные из этих соображений формулы для длины турбулентной диффузии сигнала u_1 за счет шума u_2 имеют вид

$$l_d = a_2 t \quad (t < t_2), \quad (6.1)$$

$$l_d = \begin{cases} \sqrt{a_2 l_2 t} & (D=0), \\ \sqrt[3]{D t^2} & (D \neq 0) \end{cases} \quad (t > t_2). \quad (6.2)$$

Время взаимодействия u_1 с u_2 определяется из условия $l_1(t) = l_d(t)$, где $l_1(t)$ учитывает возможное изменение масштаба u_1 за счет самовоздействия.

Опишем основные типы взаимодействия составляющих начального возмущения, считая u_1 крупномасштабной составляющей ($l_1 > l_2$)¹¹³.

1. Разрушение когерентной структуры мелкомасштабной компоненты за счет фазовой модуляции со стороны крупномасштабной. Если u_2 — сигнал, то время взаимодействия $\tau = l_2/a_1$, если u_2 — шум, то индекс модуляции достигает единицы только при условии $a_1 l_1 > a_2 l_2$ и при этом $\tau = l_2(\tau)/a_1$.

2. Разрушение спектральной структуры мелкомасштабной компоненты и перекачка ее энергии в область низких частот. Этот процесс грубо можно характеризовать временем опрокидывания крупномасштабной компоненты $\tau \sim t_1$. Если u_2 — шум, то, как и в предыдущем случае, разрушение эффективно идет только при $a_1 l_1 > a_2 l_2$.

3. Разрушение спектральной структуры крупномасштабной компоненты и перекачка ее энергии в область малых k за счет остаточной модуляции со стороны мелкомасштабной компоненты. Этот тип взаимодействия проявляется, если u_1 — сигнал, и характеризуется временем

$$\tau = \frac{l_1^2}{l_2 a_2} \quad (D=0), \quad \tau = \sqrt[3]{l_1^3 D} \quad (D \neq 0).$$

Как показывает сопоставление времен опрокидывания и времен взаимодействий, при совместном распространении периодического сигнала и стационарного шума возможны следующие основные ситуации:

1. Взаимодействие крупномасштабного сигнала со слабым мелкомасштабным шумом ($a_1 l_1 > a_2 l_2$). При этом происходит модуляция шума сигналом, приводящая к разрушению структуры шума и установлению пилообразных волн сигнала, слабо промодулированных шумом. При $\tau = t_1$ модуляция размывает структуру сигнала и начинается переход к режиму ТБ с растущим во времени масштабом.

2. Взаимодействие крупномасштабного сигнала с сильным мелкомасштабным шумом ($a_1 l_1 < a_2 l_2$). На начальной стадии шум оказывает слабо промодулированным сигналом. После опрокидывания шума его масштаб начинает расти, что ведет к разрушению крупномасштабной компоненты до ее опрокидывания при $t = l_1^2/l_2 a_2$ и переходу к чисто шумовому турбулентному режиму.

3. Взаимодействие крупномасштабного шума с мелкомасштабным сигналом. Разрушение когерентной структуры сигнала происходит при $t = l_2/a_1$, а его окончательное размытие и переход к шумовому режиму — при $t = l_1/a_1$.

Как мы видим, физическая картина взаимодействия сигнала и шума различна при разных соотношениях пространственных масштабов. Различен и ответ на вопрос, часто возникающий в теории нелинейных волн

и теории рассеяния, о физическом смысле разбиения поля на регулярную и флуктуационную составляющие:

$$u(x, t) = \langle u(x, t) \rangle + \delta u(x, t) \quad (\langle \delta u \rangle = 0).$$

Физическая интерпретация флуктуаций δu и, более того, возможность их экспериментального измерения зависят от соотношения l_c и $l_{ш}$. При крупномасштабном шуме затухание среднего поля — чисто ансамблевый эффект, обусловленный сносом, разным в разных реализациях, регулярной волны $u_c(x, t)$ медленным течением $u_{ш}$. Изменение дисперсии $\langle (\delta u)^2 \rangle$ здесь также определяется случайным сносом регулярной волны и $\langle (\delta u)^2 \rangle \neq \langle u_{ш}^2 \rangle$. В противном случае $l_c \gg l_{ш}$ изменение $\langle (\delta u)^2 \rangle$ связано с истинным искажением статистических свойств шума из-за взаимодействия с сигналом и может быть найдено усреднением одной реализации на интервале $l_{ш} \ll \Delta x \ll l_c$. При $l_c \ll l_{ш}$ спектральные свойства собственно шума не меняются и естественно говорить о шумовой фазовой модуляции сигнала. В случае же $l_c \gg l_{ш}$ взаимодействие действительно ведет к перераспределению энергии шума по пространственному спектру.

б) Взаимодействие волн Римана

Обсудим возможности количественного описания взаимодействия волн на начальном этапе. До опрокидывания волны процесс взаимодействия ее компонент может, как указывалось выше, рассматриваться как модуляция мелкомасштабной компоненты со стороны крупномасштабной. При $l_1 \gg l_2$ суммарная волна на этом этапе представима в виде ^{117, 118}

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(\tilde{x}, \tilde{t}) \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x} \tilde{t} \right), \quad (6.3)$$

где u_1 и u_2 — решения УБ для отдельных компонент,

$$\tilde{x} = x - u_1(x, t)t, \quad \tilde{t} = t \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x} t \right).$$

Пусть теперь начальное возмущение задано в виде $u_0 = u_c(x) + u_{ш}(x)$, где $u_{ш}$ — статистически однородный шум. Как следует из (4.5) или (6.3), одноточечная плотность вероятности $W(u; x, t)$ имеет вид

$$W(u; x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_0(v) \delta[u - v - u_c(x - vt, t)] dv, \quad (6.4)$$

где u_c — поле сигнала в отсутствии шума, w_0 — начальная плотность вероятности шума.

Одна из особенностей (6.4) состоит в том, что $W(u; x, t)$ не зависит от характера изменения шума вдоль x .

Для среднего поля имеем из (6.4)

$$\langle u(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(v) u_c(x - vt, t) dv, \quad (6.5)$$

откуда следует для случая $u_c = a_c \sin k_0 x$ и $u_{ш}$ — гауссов шум с дисперсией σ^2 выражение, показывающее характер затухания гармоник среднего поля ⁸³:

$$A_n \sim \exp \left[-\frac{1}{2} (\sigma n k_0 t)^2 \right].$$

При совместном распространении сигнала и шума взаимодействие между ними рассеивает энергию сигнала в новые спектральные области, а заодно

меняет и спектр шума. Наиболее заметно, как следует из (6.3), влияние длинноволновой компоненты на коротковолновую. В предельном случае сильно разнесенных по спектру сигнала и шума их взаимодействие можно рассматривать в приближении заданного (но меняющегося из-за самодействия) крупномасштабного поля. Общая формула для энергетического спектра суммарной волны была получена в ¹¹⁵.

Остановимся подробнее на рассеянии мелкомасштабного сигнала на крупномасштабном шуме ($l_c \ll l_m$). При этом спектры рассеянной компоненты вблизи гармоник сигнала по структуре близки к спектру гармонического сигнала со случайной фазовой модуляцией ¹¹⁶, что объясняется выражением (6.3). Важный параметр здесь — индекс фазовой модуляции гармоники $\gamma_n = \sigma n k_0 t$,

характеризующий отношение сдвига волны шумом $\sim \sigma t$ к периоду n -й гармоники сигнала. При $\gamma_n \ll 1$, когда смещение мало, рассеянные компоненты повторяют форму длинноволнового шума. Отметим, однако, следующую из более точного рассмотрения принципиальную несимметричность формы рассеянного спектра относительно $n k_0$ ¹¹⁵. Его коротковолновое крыло растет несколько быстрее, что следует и из соотношений Мэнли — Роу ¹¹⁴. При $\gamma_n \gg 1$ длинноволновая модуляция приводит к универсальной форме спектра рассеянной компоненты, не зависящей от тонкой структуры спектра шума ¹¹⁷:

$$g_n(k, t) \approx \frac{J_n^2(a_c k t)}{k^3 t^3 \sigma k_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \exp\left(-\frac{2(k - n k_0)^2}{\sigma^2 k^2 t^2 k_1^2}\right), \quad (6.6)$$

где k_1 — ширина спектра шума. Как видно из (6.6), ширина спек-

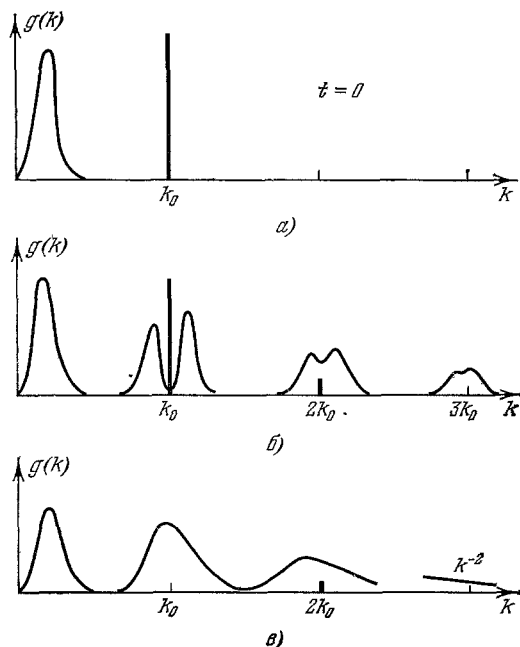


Рис. 16. Спектр сигнала, взаимодействующего с крупномасштабным шумом.

а) Исходный спектр; б) деформация спектра на малых временах; в) спектр в области перекрытия гармоник

тра рассеянной гармоники растет как с номером n , так и с течением времени, за счет чего в достаточно коротковолновой части спектра гармоники перекрываются и образуют сплошной степенной хвост, граница которого с увеличением t сдвигается в сторону все меньших k . Таким образом, из-за взаимодействия с шумом энергия первоначально гармонического сигнала имеет тенденцию растечься по всем k , причем нелинейное искажение самого сигнала повышает эффективность этого процесса (рис. 16). Взаимодействие сигнала и шума, искажая сигнал, меняет и вероятностные свойства шума, как это видно из (6.4). Однако, если $\sigma \ll a_c$, то форма распределения сохраняется, а меняется лишь его дисперсия. Она растет на укручающихся участках сигнала ($u'_c(x) > 0$) и убывает на растягивающихся ($u'_c(x) < 0$). Так, при $k_0 x = 0$, π для гармонического сигнала имеем

$$\sigma_1^2\left(kx = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, t\right) = \sigma^2 \times \begin{cases} (1 + \sigma k_0 t)^{-2}, \\ (1 - \sigma k_0 t)^{-2}. \end{cases}$$

Рост дисперсии при $kx = \pi$ ограничивается на временах $t \sim t_c$. При этом меняется и форма распределения шума. Заметим, впрочем, что общая картина взаимодействия коротковолнового сигнала с шумом не изменится после опрокидывания сигнала, но при $t < t_{ш}$. Здесь по-прежнему справедлива концепция модуляции сигнала длинноволновым течением, имеют место формулы (6.3)—(6.5), где теперь $u_c(x, t)$ — поле сигнала с учетом разрывов^{117, 118}. Также остается справедливой и (6.6), если положить $J_n^2(a_c k_0 t) = 1$ ¹¹⁷.

в) Шумы и течения

Механизм искажения спектральных свойств шума из-за взаимодействия с крупномасштабным сигналом наглядно иллюстрируется примером взаимодействия шума с регулярным течением $u_c(x) = \beta(x - x_*)$. Поле при этом равно¹¹⁷ (см. 6.3)

$$u(x, t) = \beta \frac{x - x_*}{1 + \beta t} + u_{ш} \left(\frac{x + \beta t x_*}{1 + \beta t}, \frac{t}{1 + \beta t} \right) \frac{1}{1 + \beta t}, \quad (6.7)$$

где первый член — течение в отсутствие шума, а $u_{ш}(x, t)$ — шум в отсутствие течения. Для энергетического спектра шума, искаженного течением, из (6.11) имеем

$$\bar{g}(k, t) = \frac{1}{1 + \beta t} g \left(k(1 + \beta t), \frac{t}{1 + \beta t} \right), \quad (6.8)$$

где $g(k, t)$ — спектр неискаженного шума. Из (6.11), (6.12) видно, что взаимодействие шума с течением ведет к трем эффектам: изменению дисперсии шума $\bar{\sigma}^2(t) = E(t/1 + \beta t)/(1 + \beta t)^2$, его пространственного масштаба $\bar{l}(t) = l(t/1 + \beta t)/(1 + \beta t)$ и времени нелинейного самовоздействия $\bar{t}_{ш} = t_{ш}/(1 - \beta t_{ш})$. Здесь $t_{ш} = l_0/\sigma$, $E(t)$ и $l(t)$ — ранее исследованные дисперсия и пространственный масштаб шума в отсутствие течения (энергия и внешний масштаб ТБ).

При взаимодействии с волной сжатия ($\beta < 0$), градиент которой обращается в бесконечность за время $t_r = |\beta|^{-1}$, происходит рост дисперсии шума, уменьшение $t_{ш}$, вследствие чего, вне зависимости от $R_0 = \sigma l_0/\nu$, шум выходит на режим пилообразных волн за время, меньшее t_r .

При взаимодействии с волной разрежения ($\beta > 0$), из-за уменьшения дисперсии и роста пространственного масштаба шума, его нелинейное самовоздействие стабилизируется, и при $t > \beta^{-1} = t_r$ форма спектра шума остается неизменной, совпадающей с формой спектра ТБ при $t = t_r$. Происходит лишь нелинейное растяжение масштаба и уменьшение дисперсии шума вследствие взаимодействия.

Подчеркнем еще, что анализ взаимодействия шума с волной разрежения, представляя самостоятельный интерес, полезен также при исследовании взаимодействия шума с гармоническим сигналом, так как нули его растягивающихся участков определяют статистику доминирующих частиц и их параметров порядка.

г) Проблема турбулентной вязкости

При крупномасштабном шуме и $t \gg t_{ш}$ волна практически забывает о сигнале и переходит в турбулентный режим. Если шум мелкомасштабен, то турбулентный режим, формирующийся на временах $t > t_{ш}$, если $t_{ш} < t_c$, и $t > l_c^2/l_{ш}\sigma$, если $t_c < t_{ш}$, в большей степени сохраняет память о сигнале. Для описания турбулентного режима в случае шума с $D = 0$ можно использовать метод, аналогичный изложенному в п. 5б.

Используя правило отбора частицы с минимальным действием, в области развитой турбулентности ($t \gg t_{\text{ш}}$) получим следующее вероятностное распределение поля $u(x, t)$ ⁴⁹:

$$W(u; x, t) = \frac{\Phi(u; x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u; x, t) du}, \quad (6.9)$$

$$\Phi(u; x, t) = \exp \left\{ -\frac{\xi}{\sigma l_{\text{ш}}} \left[s_c(x-ut) + \frac{u^2 t}{2} - s_c(0) \right] - \frac{u_c^2 (x-ut)}{\sigma^2} \right\},$$

где $s_c(x) \rightarrow$ начальное действие сигнала, а ξ определяется решением трансцендентного уравнения, аналогичного (5.2), из которого следует $\xi \approx \sqrt{\ln A}$, а A в зависимости от соотношений между параметрами может зависеть от времени t , амплитуды и масштаба шума и сигнала ⁴⁹.

Пользуясь (6.9), можно исследовать поведение средней и флуктуационной компонент поля $u(x, t)$ на разных стадиях распространения. В интервале $t_{\text{ш}} < t < t_c$ среднее поле совпадает с волной Римана сигнала, а шум преобразуется в пилообразные волны, промодулированные сигналом. При $t_c < t < \frac{l_c^2}{\sigma l_{\text{ш}}}$ среднее поле имеет вид пилообразной волны с размытыми фронтами и масштабом l_c . Главный вклад в шум здесь вносят импульсы в окрестностях фронтов среднего поля. При $t > \frac{l_c^2}{\sigma l_{\text{ш}}}$ среднее поле затухает по закону

$$\langle u \rangle \sim \exp - \frac{k_0^2 t \sigma l_{\text{ш}}}{\xi}.$$

Для характеристик шума на этой стадии имеем

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma l_{\text{ш}}}{2t\xi}, \quad l_{\text{ш}}(t) \sim \sqrt{\frac{\sigma l_{\text{ш}} t}{\xi}}.$$

Как видно, среднее поле проходит в своей эволюции те же стадии, что и сигнал в отсутствие шума. Из этого параллелизма вытекает возможность введения турбулентной вязкости, позволяющей замкнуть уравнение для среднего поля:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u \rangle^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2}.$$

Замкнуть это уравнение введением турбулентной вязкости удастся при условии выполнения соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \langle u \rangle^2}{\partial x} = \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2}. \quad (6.10)$$

При $t \gg t_{\text{ш}}$ для сигнала, взаимодействующего с мелкомасштабным шумом, из (6.9) следует (6.10) с

$$\nu_{\text{т}} = \frac{\sigma l_{\text{ш}}}{2\xi}. \quad (6.11)$$

В этом случае турбулентная вязкость верно отражает и затухание среднего поля и шумовое размытие фронтов в режиме пилообразных волн. Заметим, что в отличие от молекулярной вязкости, введенная так турбулентная вязкость слабо зависит через ξ от времени, а в общем случае и от свойств сигнала ⁴⁹.

При взаимодействии сигнала с крупномасштабным шумом соотношение (6.10) справедливо при $t \ll t_c$ и $t \gg t_{\text{ш}} = l_c/\sigma$ ¹¹¹. Турбулентная

вязкость при этом равна

$$v_T = \sigma^2 t. \quad (6.12)$$

Этот результат, как и формула (6.5), был получен на основе функционального метода в ⁸², однако без указания пределов применимости.

Турбулентная вязкость (6.12) правильно описывает затухание сигнала, взаимодействующего с крупномасштабным шумом $\sim \exp(-k_0^2 \int_0^t v_T dt/2)$. На стадии $t_c < t < l_c/\sigma$ она не дает вполне правильной

структуры среднего поля вблизи ударного фронта, но позволяет оценить его ширину $\delta_T \sim v_T t/l_c \sim \sigma^2 t^2/l_c$.

В целом, вводя турбулентную вязкость (6.12) при $t < t_{ш}$ и (6.11) при $t > t_{ш}$ (при $t \sim t_{ш}$ обе формулы дают величину одного порядка), можно качественно верно описать эволюцию среднего поля. Здесь оказывается удобным также использование турбулентного числа Рейнольдса $R_T = a_c l_c / \sigma l_{ш}$. При $R_T \gg 1$ средняя скорость последовательно проходит стадии волны Римана, пилообразной волны и линейного затухания. При $R_T < 1$ остается только линейная стадия. На всех этапах турбулентная вязкость естественным образом связана с введенной ранее длиной турбулентной диффузии l_d .

Более узки, в сравнении с пределами применимости выражения (6.11) и концепции турбулентной вязкости, пределы применимости метода среднего поля ^{53, 54, 118-122}, основанного на разложении поля по флуктуационной компоненте и учете влияния флуктуаций на среднее поле лишь в первом приближении. Как видно из (6.4) и (6.9), этот метод справедлив при $t < t_{сш} = l_c/\sigma$, t_c , $t_{ш}$. Физически это означает требование малости изменения средней и флуктуационной компонент на диффузионной длине.

Что касается турбулентной вязкости, то ее удастся ввести не только при слабом возмущении сигнала шумом, но и в противоположном случае сильного шума, который оказывается слабо промодулированным сигналом. Создаваемая сигналом пространственная неоднородность шума при этом компенсируется вязкостью. Введение турбулентной вязкости в этом случае во многом аналогично введению молекулярной вязкости в неравновесной термодинамике. Интересно отметить, что при этом и (6.11), и (6.12) приводят к одному и тому же соотношению $v_T = E(t)t$, где $E(t)$ — энергия шума в отсутствии сигнала.

Отметим еще, что любой регулярный периодический режим оказывается неустойчивым по отношению к возмущениям, имеющим крупномасштабные компоненты в спектре, к которым постепенно переходит энергия. Что касается турбулентного режима, то он может считаться устойчивым, т. е. мало меняет свои характеристики под влиянием дополнительного шумового возмущения в том случае, если турбулентное число Рейнольдса первоначального режима по отношению к возмущению велико.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из настоящего обзора, за последние годы достигнут большой прогресс в изучении турбулентности Бюргерса — одного из важных физических примеров сильной турбулентности, имеющей в данном случае вид ансамбля локально-когерентных диссипативных структур.

Анализ ТБ методом выделения доминирующей частицы может быть, по-видимому, с успехом распространен на широкий класс близких задач. Сюда относятся и затронутый в обзоре вопрос о ТБ при наличии вынуждающей силы, и анализ потенциальной турбулентности, удовлетворяющей трехмерному уравнению Бюргерса, а также исследование случайных волн,

удовлетворяющих модифицированному уравнению Бюргерса ¹²³

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Q(u) \frac{\partial u}{\partial x} + a(u, t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) описывает нелинейные акустические волны при учете цилиндрической или сферической расхожимости фронта, неоднородности среды и низкочастотной диссипации, а также волны в активных средах без дисперсии и т. д.

Укажем дальнейшие пути исследований, непосредственно связанные с проблемами нелинейной акустики, опущенные в настоящем обзоре. Это, во-первых, анализ взаимодействия волн, движущихся в разных направлениях, который может быть проведен близкими к рассмотренным в обзоре методами по крайней мере при учете слабой связи встречных волн. Во-вторых, это переход от режима турбулентности Бюргерса к слаботурбулентному режиму ансамбля волн, распространяющихся под малыми углами ¹²⁴. Основные идеи такого перехода намечены в ^{125, 126}, однако он заслуживает дополнительных исследований.

Другое направление исследований заключается в развитии единой статистической теории одномерной сильной турбулентности (и ее некоторых многомерных обобщений) для волн в средах с ограничениями нелинейности за счет взаимодействий разного типа, развивающихся в областях сильных градиентов. В результате этих взаимодействий, которые могут быть представлены как своего рода столкновения, после опрокидывания волны или ее фокусировки происходит перекачка ее энергии в энергию движения другого типа. Полное решение может быть здесь построено путем сшивающих возникающих квазиодномерных структур с остаточным фоном.

Наиболее важным остается вопрос о связях ТБ с вихревой турбулентностью. Целый ряд результатов, получивших строгое обоснование для ТБ, таких, как автомодельность статистических характеристик, наличие инерционного интервала в спектре, зависимость вырождения от инварианта D , возможность замыкания уравнений для средней скорости с помощью турбулентной вязкости и т. д., представляет несомненную эвристическую ценность для решения задач статистической гидродинамики. Следует также сказать, что, по-видимому, нет оснований считать механизм образования и развития турбулентности — единственным. В последнее время все чаще говорят о турбулентности, имеющей структуру локально-когерентных вихрей, близкую к структуре ТБ ¹⁸. Такова турбулентность на той стадии, когда существуют «зоны перемежаемости». Представления об отдельных взаимодействующих вихрях с успехом используются в теории двумерной турбулентности. С этой точки зрения могут представлять интерес попытки дальнейшего развития лагранжева описания вихревой турбулентности. Взгляд на турбулентность как на структуру, сочетающую стохастичность с локальной когерентностью, предполагает дальнейшее углубленное изучение различных типов случайного движения систем с небольшим числом степеней свободы. Целесообразно также дальнейшее исследование аналитических связей вихревой и потенциальной турбулентности, начатое в ¹⁹.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить В. И. Татарского и А. Н. Малахова за внимание к работе и многочисленные обсуждения и Ю. А. Кравцова за полезные замечания, сделанные при чтении рукописи.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
Институт физики атмосферы
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.— УФН, 1971, т. 103, с. 193.
2. Кадомцев Б. Б., Конторович В. М.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1974, т. 17, с. 511.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, ч. 1, 1965; ч. 2, 1967.
4. Burgers J. M.— а) Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. (Amsterdam), 1940, v. 43, p. 2; б) The Nonlinear Diffusion Equation — Dordrecht. Reidel, 1974.
5. Горев В. В., Кингсеп А. С., Рудаков Л. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1976, т. 19, с. 691.
6. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.— ДАН СССР, 1973, т. 208, с. 794.
7. Tatsumi T., Kida S.— J. Fluid Mech., 1972, v. 55, p. 659.
8. а) Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.— Вестн. АН СССР, 1980, № 10, с. 15.
б) Пиковский А. С., Рабинович М. И.— В кн.: Нелинейные волны/Под ред. А. В. Гапонова-Грехова.— М.: Наука, 1979.
9. Kuwabara S.— Memoirs of the Faculty of Eng. Nagoya Univ., 1978, v. 30, p. 245.
10. Tatsumi T.— Adv. Appl. Mech., 1980, v. 20, p. 39.
11. Яглом А. М.— Новые книги за рубежом. Сер. А, 1976, № 10, с. 40.
12. Lighthill M. J.— Survey in Mechanics.— Cambridge, 1956.
13. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1975.
14. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975.
15. Mendouss J. S.— J. Acoust. Soc. Am., 1953, v. 25, p. 51.
16. Солуян С. И., Хохлов Р. В.— Вестн. МГУ. Сер. физ., астроном., 1961, с. 52.
17. Уизем Дж. Линеинные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
18. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Структурная турбулентность в диссипативных системах; Препринт Ин-та теплофизики СО СССР 74-81.— Новосибирск, 1981.
19. Струминский В. В. а) В кн.: Турбулентные течения.— М.: Наука, 1974; б) В кн.: Механика турбулентных потоков.— М.: Наука, 1980.
20. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.— М.: Наука, 1973.
21. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.
22. Гельфанд И. М.— УМН, 1959, т. 14, с. 87.
23. Хохлов Р. В.— Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, с. 917.
24. Островский Л. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1961, т. 4, с. 955.
25. Островский Л. А.— ЖТФ, 1963, т. 33, с. 1080.
26. Гапонов А. В., Фрейдман Г. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1960, т. 3, с. 79.
27. Хохлов Р. В.— УФН, 1965, т. 87, с. 17.
28. Катаев И. Г. Ударные электромагнитные волны.— М.: Сов. радио, 1963.
29. Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.— Акуст. ж., 1963, т. 9, с. 54.
30. Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.— Вестн. МГУ. Сер. физ., астроном., 1962, т. 4, с. 65.
31. Солуян С. И., Хохлов Р. В.— Акуст. ж., 1962, т. 8, с. 220.
32. Островский Л. А., Фридман В. Е.— Ibid., 1972, т. 18, с. 584.
33. Сутин А. М.— В кн.: Нелинейная акустика/Под ред. В. А. Зверева, Л. А. Островского.— Горький: ИПФ АН СССР, 1980.
34. Webster D. A., Blakstock D. T. Experimental Investigation of Outdoor Propagation of Finite-Amplitude Noise.— NASA, CR-2992, 1978.
35. Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 111.
36. Гусев В. Э., Карабутов А. А.— Акуст. ж., 1981, т. 27, с. 213.
37. Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К. Нелинейные волны деформации.— М.: Наука, 1981.
38. Островский Л. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1976, т. 19, с. 661.
39. Пелиновский Е. Н., Петухов Ю. А., Фридман В. Е.— Изв. вузов. Сер. «Физ. атм. и океана», 1979, т. 15, с. 436.
40. Tatsumi T., Tokunaga H.— J. Fluid Mech., 1974, v. 65, p. 581.
41. Tokunaga H.— J. Phys. Soc. Japan, 1976, v. 41, p. 328.
42. Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В.— Акуст. ж., 1977, т. 23, с. 756.

43. Канер В. В., Руденко О. В.—Вестн. МГУ. Сер. физ., астроф., 1978, т. 4, с. 78.
44. Кравцов Ю. А., Островский Л. А., Степанов Н. С.—ТИИЭР, 1974, т. 62, с. 91.
45. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.—М.: Наука, 1980.
46. а) Норф Е.—Comm. Pure and Appl. Math., 1950, v. 3, p. 201.
б) Cole J. D.—Quart. Appl. Math., 1951, v. 9, p. 226.
47. Benton E. R., Platzman G. M.—Ibid., 1975, v. 30, p. 195.
48. Якушкин И. Г.—Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1981, т. 24, с. 59.
49. Якушкин И. Г.—ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 967.
50. Руденко О. В., Чиркин А. С.—а) ДАН СССР, 1975, т. 225, с. 520.
б) Акуст. ж., 1974, т. 20, с. 297.
51. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н.—Ibid., 1977, т. 23, с. 569.
52. Гурбатов С. Н., Шепелевич Л. Г.—Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1978, т. 21, с. 1629.
53. George A. R., Plotkin K. J.—Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 548.
54. Plotkin K. J., George A. R.—J. Fluid Mech., 1972, v. 54, p. 449.
55. Marcinkiewicz J.—Math. Zs., 1938, Bd. 44, S. 612.
56. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований.—М.: Сов. радио, 1978.
57. Ogura Y.—J. Fluid Mech., 1963, v. 16, p. 33.
58. Tanaka H.—J. Phys. Soc. Japan, 1973, v. 34, p. 1390.
59. Mizushima J., Seyami A.—Phys. Fluids, 1980, v. 23, p. 2559.
60. Kraichnan R. H.—Ibid., 1968, v. 11, p. 265.
61. Walton J. J.—Ibid., 1970, v. 13, p. 1634.
62. Mond M., Knorr G.—Ibid., 1980, v. 23, p. 1306.
63. Herring J. R., Kraichnan R. H.—J. Fluid Mech., 1979, v. 91, p. 581.
64. Frisch U., Lesieur M., Brissand A.—Ibid., 1974, v. 65, p. 145.
65. Brissand A., Frisch U., Leorat J.—Ann. Geophys., 1973, v. 29, p. 539.
66. Bardos C. et al.—Arch. Ration. Mech. and Anal., 1979, v. 71, p. 237.
67. Duyn C. J.—J. Dif. Equat., 1979, v. 33, p. 226.
68. Cameron R. H., Martin W. T.—Ann. Math., 1947, v. 48, p. 385.
69. Meecham W. C., Siegel A.—Phys. Fluids, 1964, v. 7, p. 1178.
70. Siegel A., Imamura F., Meecham W. C.—Math. Phys., 1965, v. 6, p. 385.
71. Orszag S. A., Bissonete L. R.—Phys. Fluids, 1967, v. 10, p. 2603.
72. Jano M., Imamura F.—Ibid., 1972, v. 115, p. 108.
73. Kanagh W. H., Siegel A.—J. Fluid Mech., 1970, v. 41, p. 58.
74. Meecham W. C., Iyer P., Clever W. C.—Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 1610.
75. Христов Х.—Теоретична и приложна механика (София), 1980, т. 11, с. 59.
76. Kerr R. M., Siggia E. D.—J. Stat. Phys., 1978, v. 19, p. 543.
77. Lee F.—J. Fluid Mech., 1980, v. 101, p. 349.
78. Хопф Э.—В кн.: Гидродинамическая неустойчивость.—М.: Мир, 1964.
79. Норф Е., Титт Е. В.—J. Rath. Mech. Analysis, 1953, v. 2, p. 587.
80. Моисеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В. О статистическом описании решений уравнения Бюргерса: Препринт ХТФИ АН УССР.—Харьков, 1978.
81. Моисеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В.—Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1977, т. 20, с. 1032.
82. Моисеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В.—Ibid., 1980, т. 23, с. 68.
83. Гурбатов С. Н., Саичев А. И.—Цит. в³³ сб.
84. Kida Sh.—J. Fluid Mech., 1979, v. 93, p. 337.
85. Гурбатов С. Н., Саичев А. И.—ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 689.
86. Гурбатов С. Н., Саичев А. И.—ДАН СССР, 1981, т. 259, с. 73.
87. Монин А. С.—ДАН СССР, 1960, т. 134, с. 304.
88. Lumley J. L.—J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 309.
89. Любимов Б. Я.—ДАН СССР, 1969, т. 184, с. 1069.
90. Малахов А. Н., Саичев А. И.—ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 940.
91. Малахов А. Н., Саичев А. И.—Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1976, т. 19, с. 1559.
92. Малахов А. Н., Саичев А. И.—Ibid., 1976, т. 19, с. 1363.
93. Саичев А. И.—Прикл. мат. и мех., 1977, т. 41, с. 1107.
94. Малахов А. Н., Саичев А. И.—Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1974, т. 17, с. 699.
95. Webster D. A., Blackstock D. T.—J. Acoust. Soc. Am., 1979, v. 65(4), p. 1053.

96. Гурбатов С. Н.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1977, т. 20, с. 112.
97. Руденко О. В., Чиркин А. С.— ДАН СССР, 1974, т. 214, с. 1045.
98. Саичев А. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1974, т. 17, с. 1025.
99. Гурбатов С. Н.— Ibid., 1980, т. 23, с. 452.
100. Пелиновский Е. Н.— Ibid., 1976, т. 19, с. 373.
101. Кузнецов В. П.— Акуст. ж., 1970, т. 16,⁵ с. 155.
102. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы.— М.: Мир, 1969.
103. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов.— М.: Наука, 1970.
104. Pestorius F. M., Blackstock D. T.— In: Proc. of Symposium on Finite-amplitude Wave Effects in Fluid.— Copenhagen, Business Press, Ltd, 1974.— P. 24.
105. Webster D. A., Blackstock D. T.— JASA, 1978, в. 63, р. 687.
106. Гурбатов С. Н., Дубков А. А., Малахов А. Н.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 456.
107. Баренблатт Г. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1976, т. 19, с. 902.
108. Davis P. O., Jule A. J.— J. Fluid Mech., 1975,⁸ в. 69, р. 513.
109. Автоволновые процессы в системах с диффузией.— Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
110. Хакен Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.
111. Шандарин С. Ф., Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б.— УФН, 1983, т. 139, с. 83.
112. Крылов С. Ф., Янчков В. В. Модели сильной турбулентности: Препринт ИАЭ-3542/6. Москва, 1982.
113. Якушкин И. Г.— ЖЭТФ, 1983, т. 84, с. 947.
114. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике.— М.: Наука, 1975.
115. Руденко О. В., Чиркин А. С.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1903.
116. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах.— М.: Наука, 1968.
117. Гурбатов С. Н.— Акуст. ж., 1980, т. 26, с. 551; 1981, т. 27, с. 862.
118. Пелиновский Е. Н., Саичев А. И., Фридман В. Е.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1974, т. 17, с. 875.
119. Гурбатов С. Н., Пелиновский Е. Н., Саичев А. И.— Ibid., 1978, т. 21, с. 1082.
120. Тамойкин В. В., Файнштейн С. М.— ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 505.
121. Заславский Г. М.— ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 365.
122. Пелиновский Е. Н.— Цит. в ⁸⁶ сб.
123. Якушкин И. Г.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1982, т. 25, с. 35.
124. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З.— ДАН СССР, 1970, т. 192, с. 297.
125. Наугольных К. А., Рыбак С. А.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 78.
126. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Яновский В. В.— Цит. в ⁸⁶ сб.