1983 г. Октябрь Том 141, вып. 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

НОБЕЛЕВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ 1982 ГОДА

536.4

# РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ *)

*К. Дж. Вильсон*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа состоит из трех частей. Первая часть представляет собой упрощенное изложение основных идей ренормгруппы и ε-разложения применительно к критическим явлениям, что приблизительно соответствует обзору 1972 г. [1]. Вторая часть посвящена истории (насколько я ее помню) работы, приведшей к статьям 1971—1972 гг. по ренормгруппе. Наконец, будет резюмировано развитие этих идей после 1971 г., и будет сделана попытка прогнозов на будущее.

## 2. МНОЖЕСТВО МАСШТАБОВ ДЛИН И РЕНОРМГРУППА

Есть много проблем в науке, характеризующихся тем, что за макроскопическими эффектами стоит сложное микроскопическое поведение.

В простейших случаях микроскопические флуктуации усредняются, если рассматриваются явления на больших масштабах. Причем усредненные величины удовлетворяют непрерывным классическим уравнениям. Стандартный пример — гидродинамика, где атомные флуктуации усредняются и возникают классические гидродинамические уравнения. К сожалению, есть гораздо более трудный класс проблем, где флуктуации тянутся до макроскопических длин волн, причем существенны также флуктуации на всех промежуточных масштабах.

К этой последней категории принадлежат проблемы сильно развитой турбулентности потока жидкости, критические явления и физика элементарных частиц. Проблема магнитных примесей в немагнитных металлах (проблема Кондо), оказывается, тоже принадлежит к этой категории.

В сильноразвитой турбулентности в атмосфере глобальная циркуляция воздуха становится нестабильной, что приводит к вихрям на масштабах в тысячи миль. Эти вихри распадаются на меньшие, которые в свою очередь распадаются на еще меньшие, пока не возбудятся хаотические движения на масштабах длин вплоть до миллиметров. На масштабах миллиметров вязкость подавляет турбулентные флуктуации и меньшие масштабы уже не существенны, вплоть до атомных [2].

В квантовой теории поля «элементарные» частицы, такие как электроны, фотоны, протоны и нейтроны, оказывается, имеют сложную внутреннюю

*) Wilson K. G. The Renormalization Group and Critical Phenomena: Nobel Lecture, 8 December 1982. — Перевод А. А. Мигдала.

структуру на всех масштабах длин вплоть до нуля. По крайней мере, таковы предсказания квантовой теории поля. Трудно наблюдать эту микроструктуру непосредственно; вместо этого можно рассматривать сечения рассеяния частиц, которые измеряются экспериментаторами, и интерпретировать эти сечения с помощью квантовой теории поля. Без учета внутренней структуры, появляющейся в теории, предсказания квантовой теории поля не согласовывались бы с экспериментальными наблюдениями [3].

Критическая точка — особый случай фазового перехода. Рассмотрим, например, переход воды в пар. Предположим, что вода и пар находятся под давлением при температуре кипения. В критической точке (давление 218 атм., и температура 374 °C) разница между водой и паром исчезает, и при этом пропадает само явление кипения. Существенная разница между водой и паром в том, что у них разные плотности. Когда температура и давление приближаются к критическим значениям, разница в плотности между водой и паром стремится к нулю. В критической точке пузырьки пара и капли жидкости перемешаны на всех масштабах длин, начиная с макроскопических видимых размеров вплоть до атомных. Вдали от критической точки поверхностное натяжение приводит к нестабильности маленьких капель или пузырьков. Но поскольку вода и пар становятся неразличимыми в критической точке, поверхностное натяжение между двумя фазами исчезает. В частности, капли и пузырьки размером порядка микрона приводят к сильному рассеянию света, так называемой «критической опалесценции», вода и пар при этом приобретают молочный цвет.

В эффекте Кондо электроны с длинами волн, начиная от атомных и до весьма больших, в зоне проводимости металла взаимодействуют с магнитным моментом каждой примеси в этом металле [5].

Теоретики сталкиваются с трудностями при решении этих проблем, в связи с большим числом взаимодействующих степеней свободы. Нужно много переменных, чтобы характеризовать турбулентный поток или состояние жидкости около критической точки. Аналитические методы наиболее эффективны, когда в задаче участвуют функции только одной переменной (одна степень свободы). Некоторые чрезвычайно остроумные преобразования позволили в особых случаях при решении упомянутых проблем выделить независимые степени свободы и найти аналитическое решение. Эти особые случаи включают решение Онзагера двумерной изинговой модели критической точки [6], решение Андрея и Вигмана проблемы Кондо [7], решение модели Тирринга в квантовой теории поля [8] и простые решения невзаимодействующих квантовых теорий. Однако это очень специальные случаи; вся проблема сильноразвитой турбулентности, многие проблемы критических явлений и пока что все примеры сильно связанных квантовых полей не поддавались аналитическим методам.

Компьютеры расширяют возможности теоретиков, но даже численные компьютерные методы ограничены на практике числом степеней свободы. Нормальные методы численного интегрирования неприменимы при числе переменных интегрирования свыше 5—10: уравнения в частных производных также становятся чрезвычайно сложными, когда число независимых переменных превышает 3. Методы Монте-Карло и статистического усреднения позволяют рассматривать некоторые случаи тысяч и даже миллионов переменных, но медленная сходимость этих методов с ростом компьютерного времени постоянно создает проблемы. Моделирование на компьютере атмосферного потока, покрывающего все масштабы длин турбулентности, потребовало бы создания сетки с миллиметровым шагом, покрывающей тысячи миль по горизонтали и десятки миль по вертикали: общее число точек сетки было бы порядка $10^{25}$ — далеко за пределами возможностей любого мыслимого компьютера.

Подход, основанный на «ренормгруппе», дает стратегию для решения проблем, в которых участвует много масштабов длин. Стратегия сводится к тому, чтобы двигаться маленькими шагами — по шагу на каждый масштаб длин. В случае критических явлений проблема технически сводится к статистическому усреднению по температурным флуктуациям на всех масштабах длин. Подход ренормгруппы сводится к интегрированию по флуктуациям по очереди, начиная с флуктуаций на атомном масштабе, постепенно двигаясь к бо́льшим масштабам, пока не будет произведено усреднение по флуктуациям всех масштабов.

Для иллюстрации идей ренормгруппы мы рассмотрим подробнее случай критических явлений. Сначала будет описана теория самосогласованного поля Ландау и будут поставлены важные вопросы. Ренормгруппа будет описана как улучшение теории Ландау.

Точка Кюри ферромагнетика будет использована в качестве конкретного примера критической точки. Ниже температуры Кюри идеальный ферромагнетик спонтанно намагничен в отсутствие внешнего магнитного поля; направление намагниченности зависит от истории магнита. Выше температуры Кюри спонтанная намагниченность отсутствует. Немного ниже температуры Кюри наблюдаемая намагниченность ведет себя как $(T_c - T)^\beta$, где $\beta$ — показатель, приблизительно равный 1/3 (в трехмерном пространстве)[9].

На атомном уровне магнетизм вызывается неспаренными электронами с магнитными моментами, а в ферромагнетике пара соседних электронов с параллельными моментами имеет более низкую энергию, чем с антипараллельными [10]. При высоких температурах температурные флуктуации разрушают магнитное упорядочение. Когда температура опускается ниже точки Кюри, выстраивание моментов параллельно друг другу приводит к общему выстраиванию моментов на больших расстояниях, называемых корреляционной длиной $\xi$. При температуре Кюри корреляционная длина становится бесконечной, что означает начало выстраивания моментов во всей системе. Немного выше температуры Кюри наблюдаемая корреляционная длина ведет себя как $(T - T_c)^{-\nu}$, где $\nu$ приблизительно 0,64 (в трехмерном пространстве) [11].

Простая статистическая модель ферромагнетика использует гамильтониан, который представляет собой сумму по парам моментов ближайших соседей, причем параллельным и антипараллельным моментам соседей отвечают различные энергии. В простейшем случае моменты могут быть либо положительны, либо отрицательны и направлены вдоль выделенной пространственной оси; эта модель называется моделью Изинга [12].

Формальное предписание для определения свойств этой модели сводится к вычислению статистической суммы $Z$, которая представляет собой сумму больцмановских факторов $\exp(-H/kT)$ по всем конфигурациям магнитных моментов (здесь $k$ — постоянная Больцмана). Свободная энергия $F$ пропорциональна взятому со знаком минус логарифму $Z$.

Фактор Больцмана $\exp(-H/kT)$ представляет собой аналитическую функцию $T$ вблизи $T_c$, фактически для всех $T$ кроме $T = 0$. Сумма аналитических функций тоже аналитична. Поэтому удивительно, что магнетики (включая их описание в модели Изинга) проявляют сложную неаналитическую зависимость при $T = T_c$. Подлинное неаналитическое поведение возникает только в термодинамическом пределе ферромагнетика бесконечного размера: в этом пределе имеется бесконечное число конфигураций и нет теорем об аналитичности для бесконечных сумм, которые в нем возникают. Однако трудно понять, как даже бесконечная сумма может привести к существенно неаналитичному поведению. Вызовом для теоретиков была такая задача: показать, как возникает неаналитичность.

Предложение Ландау [13] состояло в том, что если рассмотреть конфигурации с заданной плотностью намагниченности $M$, то свободная энергия будет аналитичной функцией $M$. Для малых $M$, исходя из предположения об аналитичности, мы приходим к следующей форме свободной энергии (до четвертого порядка по $M$):

$$F = V\,(RM^2 + UM^4), \tag{1}$$

где $V$ — объем магнита, а $R$ и $U$ — зависящие от температуры константы (мы опустили постоянный член, не зависящий от $M$). В отсутствие внешнего магнитного поля свободная энергия не может зависеть от знака $M$, поэтому возникают только четные степени $M$. Подлинная свободная энергия — это минимум $F$ по всем возможным значениям $M$. В теории Ландау $R$ обращается в 0 в критической температуре, а $U$ должно быть положительно, так что минимум $F$ возникает при $M = 0$, когда температура равна критической. Минимум $F$ остается при $M = 0$, если $R$ положительно: это соответствует температурам выше критической. Если же $R$ отрицательно, то минимум возникает при $M$, отличном от нуля и определяемом уравнением

$$0 = \frac{\partial F}{\partial M} = 2RM + 4UM^3, \tag{2}$$

или

$$M = \sqrt{-\frac{R}{2U}}. \tag{3}$$

Это соответствует температурам ниже критической.

Кроме аналитичности свободной энергии по $M$ Ландау предположил аналитичность по $T$, а именно, что $R$ и $U$ — аналитичные функции $T$. Около $T_c$ это означает, что в первом приближении $U$ постоянно, а $R$, которое обращается в нуль при $T_c$, пропорционально $T - T_c$ (предположено, что $\mathrm{d}R/\mathrm{d}T$ не обращается в нуль в $T_c$). Тогда ниже $T_c$ намагниченность ведет себя как

$$M \propto (T_c - T)^{1/2}, \tag{4}$$

т. е. показатель $\beta$ равен 1/2, что противоречит экспериментальным и теоретическим данным, согласно которым [9] $\beta$ около 1/3.

Теория Ландау позволяет рассматривать медленно меняющуюся в пространстве намагниченность. Свободная энергия в данном случае принимает форму Ландау — Гинзбурга [14]

$$F = \int \mathrm{d}^3x\,\{[\nabla M(x)]^2 + RM^2(x) + UM^4(x) - B(x)\,M(x)\}, \tag{5}$$

где $B(x)$ — внешнее магнитное поле. Градиентный член — это главный член разложения, включающего произвольное число градиентов, так же как и высшие степени $M$. Для медленно меняющихся полей $M(x)$ высшие степени градиентов малы и потому отброшены. (Обычно член $[\nabla M]^2(x)$ входит с постоянным коэффициентом. В данной статье этот коэффициент принят за единицу.) Можно использовать эту обобщенную свободную энергию для вычисления корреляционной длины $\xi$ выше $T_c$. С этой целью рассмотрим поле $B(x)$, локализованное вблизи точки $x = 0$, т. е. пропорциональное $\delta$-функции. Можно пренебречь (в случае слабых полей) $U$-членом в $F$, и мы приходим к следующему уравнению для намагниченности, минимизирующей свободную энергию

$$-\nabla^2 M(x) + RM(x) = B\delta^3(x). \tag{6}$$

Решение $M(x)$ имеет вид

$$M(x) \propto \frac{Be^{-\sqrt{R}|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}. \tag{7}$$

Отсюда можно извлечь корреляционную длину:

$$\xi \propto \frac{1}{\sqrt{R}}. \qquad (8)$$

Около $T_c$ длина $\xi$ ведет себя как $(T - T_c)^{-1/2}$, что опять-таки не согласуется с экспериментальными и теоретическими данными [11].

Теория Ландау предполагает аналитичность после усреднения по всем флуктуациям, зависящим от координат. Потеря аналитичности возникает только от усреднения по величинам полной средней намагниченности $M$. Именно это глобальное усреднение фактора $e^{-F/kT}$ и ведет к правилу, что $F$ нужно минимизировать по $M$, и к вытекающей отсюда неаналитичной формуле (4) для $M$. Точнее говоря, если объем магнетика конечен, $e^{-F/kT}$ нужно интегрировать по $M$, что дает аналитичный результат. Только в термодинамическом пределе $V$ будет стремиться к бесконечности, среднее от $e^{-F/kT}$ соответствует минимизации $F$ по отношению к $M$, после чего и возникает неаналитичность уравнения (4).

Теория Ландау имеет ту же физическую мотивировку, что и гидродинамика. Ландау предположил, что играют роль только флуктуации на атомном масштабе. После того как по ним усреднили, намагниченность $M(x)$ становится непрерывной функцией, которая флуктуирует только в ответ на внешнее пространственно неоднородное воздействие. $M(x)$ (или, если оно постоянно, $M$) в этом случае определяется простым классическим уравнением. Возле критической точки корреляционная функция в свою очередь является решением классического уравнения (6).

В мире более чем четырех измерений картина Ландау верна [15]. Четыре измерения — это граница, ниже четырех измерений флуктуации всех масштабов вплоть до корреляционного размера играют важную роль, и теория Ландау нарушается [16], как будет показано ниже.

Роль длинноволновых флуктуаций намного проще установить возле четырех измерений, где их эффекты малы. Только этот случай и будет рассматриваться здесь. Только эффекты больших по сравнению с атомными масштабами длин волн будут обсуждаться, и будет предполагаться, что нужны только умеренные поправки к теории Ландау. Более тщательное обсуждение можно найти в работе [17].

После того как произведено усреднение по флуктуациям атомного масштаба, намагниченность становится функцией $M(x)$ в непрерывной среде, как и в теории Ландау. Однако длинноволновые флуктуации все еще присутствуют в $M(x)$ — по ним не было произведено усреднение — и надо тщательно изучить допустимые формы $M(x)$. Для определенности предположим, что флуктуации с длинами волн меньше $2\pi L$ были исключены путем усреднения. Здесь $L$ — длина, несколько большая, чем атомные размеры. Тогда $M(x)$ может содержать фурье-гармоники с длинами волн больше $2\pi L$. Это требование в явном виде пишется так:

$$M(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} M_{\mathbf{k}}, \qquad (9)$$

где интеграл по $\mathbf{k}$ означает $(2\pi)^{-d}\int \mathbf{d}^d k$, а $d$ — это число измерений пространства, и ограничение на длины волн означает, что интегрирование по $\mathbf{k}$ ограничено областью $|\mathbf{k}| < L^{-1}$.

Усреднение по длинноволновым флуктуациям теперь сводится к интегрированию по переменным $M_{\mathbf{k}}$ для всех $|\mathbf{k}| < L^{-1}$. Этих переменных много; обычно это приводит к большому числу связанных друг с другом интегралов — задача безнадежная. Ниже мы сделаем существенное упрощение, чтобы можно было выполнить все эти интегрирования.

Надо найти интегранд для этих интегрирований. Интегранд — это подчиненная ограничениям сумма больцмановских факторов по всем атомным конфигурациям. Ограничения состоят в том, что все $M_{\mathbf{k}}$ для $|\mathbf{k}| < L^{-1}$ зафиксированы. Это обобщение ограниченной суммы в теории Ландау; разница в том, что в теории Ландау зафиксирована только средняя намагниченность. Результат этой ограниченной суммы будет записан как $e^{-F}$, аналогично теории Ландау; только для удобства показатель будет записан как $F$, а не как $F/kT$, (т. е. фактор $1/kT$ включен в нестандартное определение $F$). Показатель $F$ зависит от функции намагниченности, определенной уравнением (9). Мы предположим, что анализ Ландау все еще верен применительно к форме $F$, а именно, что $F$ дается уравнением (5). Однако существенное влияние длинноволновых флуктуаций приводит к тому, что параметры $R$ и $U$ зависят от $L$. Поэтому $F$ нужно обозначать как $F_L$:

$$F_L = \int d^dx\,[(\nabla M)^2(x) + R_L M^2(x) + U_L M^4(x)] \tag{10}$$

(мы считаем, что магнитного поля нет). В упрощенном анализе, который будет рассмотрен здесь, коэффициент при градиенте $\nabla M^2(x)$ будет оставаться равным 1.

Зависимость от $L$ коэффициентов $R_L$ и $U_L$ скоро будет найдена. Однако уже сам факт этой зависимости объясняет нарушение аналитичности в критической точке. Зависимость от $L$ продолжается только до корреляционной длины $\xi$: флуктуации с длинами волн больше $\xi$, как мы увидим, всегда пренебрежимы. Когда флуктуации со всеми длинами волн вплоть до $L \sim \xi$ будут исключены интегрированием, можно будет использовать теорию Ландау; это означает (грубо говоря), что можно будет подставить $R_\xi$ и $U_\xi$ в формулы (4) и (8) для спонтанной намагниченности и корреляционной длины. Поскольку $\xi$ само неаналитично, при $T = T_c$ зависимость $R_\xi$ и $U_\xi$ от $\xi$ усложняет критическое поведение. Детали мы обсудим чуть позже. Чтобы изучить эффекты флуктуации, мы рассмотрим только один масштаб длины; это исходный шаг в методе ренормгруппы. Точнее говоря, рассмотрим только флуктуации с длинами волн в бесконечно малом интервале от $L$ до $L + \delta L$. Чтобы усреднить по флуктуациям этих длин волн, надо стартовать от больцмановского фактора $e^{-F_L}$, в котором длины волн между $L$ и $L + \delta L$ все еще присутствуют в $M(x)$, после чего надо усреднить по флуктуациям в $M(x)$ с длинами волн между $L$ и $L + \delta L$. Результат усреднения по этим флуктуациям дает свободную энергию $F_{L+\delta L}$ для функции намагниченности (которую мы обозначим $M_H(x)$), где присутствуют длины волн только больше $L + \delta L$. Фурье-компоненты $M_H(x)$ — это те же самые $M_{\mathbf{k}}$, которые появлялись в $M(x)$, но только для $|\mathbf{k}|$, ограниченных величиной $1/(L + \delta L)$.

Следующий шаг — сосчитать число переменных интегрирования с $|\mathbf{k}|$, лежащими между $1/L$ и $1/(L + \delta L)$. Для такого подсчета необходимо рассмотреть конечную систему объема $V$. Тогда число степеней свободы с длинами волн между $2\pi L$ и $2\pi(L + \delta L)$ дается соответствующим объемом фазового пространства, а именно, произведением объемов $k$-пространства и координатного пространства. Это произведение (отвлекаясь от постоянных факторов вроде $\pi$ и так далее) таково: $L^{-(d+1)}V\delta L$.

Удобно выбрать в качестве переменных интегрирования не сами $M_{\mathbf{k}}$, а их линейные комбинации, соответствующие локализованным волновым пакетам вместо плоских волн. Т. е. разницу $M_H(x) - M(x)$ мы разложим по системе функций волновых пакетов $\psi_n(x)$, каждая из которых имеет импульсы только в интервале от $1/L$ до $1/(L + \delta L)$, но по возможности локализована в $x$-пространстве. Поскольку каждая функция $\psi_n(x)$ должна (по принципу неопределенности) заполнять единичный объем в фазовом пространстве, объем координатного пространства для каждой $\psi_n(x)$

$$\delta V = \frac{L^{d+1}}{\delta L} \tag{11}$$

и всего имеется $V/\delta V$ волновых функций $\psi_n(x)$. Мы можем написать

$$M(x) = M_H(x) + \sum_n m_n \psi_n(x), \tag{12}$$

и интегрирование, которое надо выполнить — это интегрирование по коэффициентам $m_n$.

Ввиду локальности свободной энергии Гинзбурга — Ландау, мы предположим, что можно пренебречь перекрытием различных волновых функций. Тогда можно рассматривать отдельно каждое из интегрирований $m_n$. Здесь мы рассмотрим только одно такое интегрирование. Для этого одного интегрирования можно записать следующую форму $M(x)$:

$$M(x) = M_H(x) + m\psi(x), \tag{13}$$

поскольку только один член из суммы по $n$ вносит вклад в пределах пространственного объема, занятого волновой функцией $\psi(x)$.

Мы сделаем еще одно упрощение, а именно будем рассматривать $M_H(x)$ так, как будто бы в пределах этого объема он постоянен. Иными словами, мы пренебрежем длинами волн, близкими к $M_H(x)$, оставив только очень длинные волны в $L$. Нам надо вычислить следующий интеграл:

$$e^{-F_{L+\delta L}[M_H]} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}m\, e^{-F_L[M_H+m\psi]}, \tag{14}$$

где $F_{L+\delta L}$ и $F_L$ (в этой формуле) проинтегрированы только по объему, занятому $\psi(x)$. В разложении $F_L[M_H + m\psi]$ мы сделаем следующее упрощение. Прежде всего будем считать, что все члены, линейные по $\psi(x)$, дают 0 после интегрирования по $x$, содержащегося в $F_L$. Членами третьего и высших порядков по $\psi$ мы тоже пренебрежем. Будем считать, что функция $\psi(x)$ нормирована обычным образом:

$$\int \mathrm{d}^d x\, \psi^2(x) = 1, \tag{15}$$

и благодаря ограниченному интервалу волновых векторов в $\psi(x)$ мы приходим к оценке

$$\int [\nabla\psi(x)]^2\, \mathrm{d}^d x \approx \frac{1}{L^2}. \tag{16}$$

В результате этих упрощений интеграл принимает вид

$$e^{-F_{L+\delta L}[M_H]} = e^{-F_L[M_H]} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}m \exp\left[\left(R_L + \frac{1}{L^2}\right) m^2 + 6U_L M_H^2 m^2\right], \tag{17}$$

или

$$F_{L+\delta L}[M_H] = F_L[M_H] + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{L^2} + R_L + 6U_L M_H^2\right). \tag{18}$$

Логарифм надо переписать как интеграл по объему, занятому $\psi(x)$; потом этот интеграл можно расширить до интеграла по всему объему $V$, когда мы включим вклады от интегрирования по остальным коэффициентам $m_n$. К тому же логарифм надо разложить по степеням $M_H$ и оставить только члены $M_H^2$ и $M_H^4$. Наконец, предположим, что $R_L$ медленно меняется с

$L$. Когда $L$ достигает корреляционной длины $\xi$, $1/L^2$ и $R_L$ совпадают, как мы уже говорили, так что для промежуточных значений $L$ между атомными размерами и корреляционной длиной $R_L$ мало по сравнению с $1/L^2$. Раскладывая логарифм по степеням $R_L + 6U_L M_H^2$ до второго порядка (чтобы получить член $M_H^4$) и используя уравнение (11), находим

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{L^2}+R_L+6U_L M_H^2\right) = \text{члены, не зависящие от } M_H,$$
$$+\,\delta L\times L^{-d-1}\times\delta V\,(3U_L M_H^2 L^2 - 9U_L^2 M_H^4 L^4 - 3R_L U_L M_H^2 L^4). \qquad (19)$$

Можно переписать $\delta V$ как интеграл по объему $\delta V$. В результате получаем уравнение

$$R_{L+\delta L} = R_L + (3U_L L^{1-d} - 3R_L U_L L^{3-d})\,\delta L, \qquad (20)$$
$$U_{L+\delta L} = U_L - 9U_L^2 L^{3-d}\delta L \qquad (21)$$

или

$$\frac{\mathrm{d}R_L}{\mathrm{d}L} = 3L^{1-d}U_L - 3R_L U_L L^{3-d}, \qquad (22)$$
$$\frac{\mathrm{d}U_L}{\mathrm{d}L} = -9U_L^2 L^{3-d}. \qquad (23)$$

Эти уравнения верны только для $L<\xi$; для $L>\xi$ $R_L$ и $U_L$ дальше уже мало меняются. Это происходит из-за смены режима под логарифмом после того, как $R_L$ начинает доминировать над $1/L^2$. Если $d$ больше 4, можно показать, что $R_L U_L$ постоянно для больших $L$, как ожидается в теории Ландау. Например, если предположить, что $R_L$ и $U_L$ постоянны для больших $L$, то нетрудно увидеть, что интегрирование (22) и (23) дает только отрицательные степени $L$. Для $d<4$ решения непостоянные. Вместо этого $U_L$ ведет себя для достаточно больших $L$ таким образом (легко видеть, что это решение для (23)):

$$U_L = \frac{4-d}{9}L^{d-4}. \qquad (24)$$

$R_L$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}R_L}{\mathrm{d}L} + \frac{4-d}{3L}R_L = \frac{4-d}{3}L^{-3}, \qquad (25)$$

решение которого

$$R_L = cL^{(d-4)/3} - \frac{4-d}{3}\,\frac{1}{2-[(4-d)/3]}\,L^{-2}, \qquad (26)$$

где $c$ связано со значением $R_L$ в каком-то начальном значении $L$. При достаточно большом $L$ можно пренебречь членом $L^{-2}$.

Параметр $c$ должен быть аналитичен при температуре, а фактически пропорционален $T - T_c$. Таким образом, для больших $L$

$$R_L \propto L^{(d-4)/3}(T-T_c), \qquad (27$$

что аналитично по $T$ при фиксированном $L$. Однако уравнение для $\xi$ таково:

$$\xi \propto R_\xi^{-\frac{1}{2}} = (T-T_c)^{-1/2}\,\xi^{(4-d)/6}. \qquad (28)$$

Обозначим

$$\varepsilon = 4-d, \qquad (29)$$

тогда показатель корреляционной длины

$$\nu = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(\varepsilon/6)}, \qquad (30)$$

что дает $\nu = 0{,}6$ в трех измерениях. Аналогично спонтанная намагниченность ниже $T_c$ ведет себя как $(R_\xi/U_\xi)^{1/2}$, что дает

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{1-(\varepsilon/6)}. \tag{31}$$

Эти вычисления показывают, как можно получить нетривиальные значения для $\beta$ и $\nu$. Выведенные здесь формулы неточны из-за сделанных серьезных упрощений, но по крайней мере они показывают, что $\beta$ и $\nu$ не обязаны быть равными 1/2 и фактически сложным образом зависят от размерности $d$.

Корректный подход гораздо сложнее. Поскольку $M_H(x)$ не считается постоянным, можно представить себе, что $M_H(x)$ раскладывается в ряд Тейлора вблизи его значения в некоторой центральной точке $X_0$, связанной с локализацией функции $\psi(x)$, что приводит к градиентам $M_H$. К тому же высшие члены разложения логарифма дают высшие степени $M_H$. Все это приводит к более сложной форме функционала $F_L$ свободной энергии с дополнительными градиентными членами и высшими степенями $M_H$. Фактически можно поставить под вопрос всю идею разложения по степеням $M_H$ и степеням градиента. Флуктуации имеют внутренний масштаб (т. е. $m^2$ имеет масштаб $\sim L^2$ вследствие формы интегранда в уравнении (17)), и не очевидно, что в присутствии этих флуктуаций $M$ мало. Поскольку существенны произвольные длины волн в флуктуации, функция $M$ недостаточно медленно меняется, чтобы было обосновано разложение по степеням градиентов. Это означает, что $F_L[M]$ может быть произвольным сложным функционалом от $M$, явный вид которого даже трудно написать, с тысячью параметров, вместо простой формы Ландау — Гинзбурга с двумя параметрами $R_L$ и $U_L$.

К счастью, проблема упрощается вблизи четырех измерений, благодаря малой величине $U_L$, пропорциональной $\varepsilon = 4 - d$. Все усложнения, которыми мы пренебрегли выше, возникают только во втором и следующих порядках разложения по степеням $U_L$, т. е. во втором и следующих порядках по $\varepsilon$. Описанные здесь вычисления точны в первом порядке по $\varepsilon$ (см. [17]).

Методы ренормгруппы, определенные таким образом в 1971 г., соединяют в себе как практические приближения, ведущие к реальным вычислениям, так и общий формализм [17]. Мы не можем описать здесь формализм во всем объеме, но можем проиллюстрировать центральную идею «фиксированных точек».

После того как флуктуации на каждом масштабе длины исключены интегрированием, возникает новый функционал свободной энергии $F_{L+\delta L}$, который зависит от предыдущего функционала $F_L$. Этот процесс повторяется много раз. Если $F_L$ и $F_{L+\delta L}$ выражены в безразмерной форме, оказывается, что преобразования, ведущие от $F_L$ к $F_{L+\delta L}$, повторяются в неизменном виде много раз. Таким образом, возникают преобразования так называемой «группы ренормировок». Когда $L$ становится большим, свободная энергия $F_L$ приближается к фиксированной точке преобразования и таким образом становится независящей от деталей системы на атомном уровне. Это дает объяснение универсальности [18] критического поведения систем, различающихся на атомном уровне. Переходы жидкость — газ, магнитный переход, переходы в смесях и так далее — все обнаруживают на эксперименте одни и те же критические индексы. Теоретически это можно понять, исходя из гипотезы, что одна и та же фиксированная точка для $F_L$ описывает все эти системы.

Чтобы продемонстрировать форму функционала свободной энергии фиксированной точки, его нужно привести к безразмерному виду. Длины надо выразить в единицах $L$, а $M$, $R_L$ и $U_L$ надо переписать в безразмерном виде. Эти изменения очень легко произвести: напишем

$$x = Ly, \tag{32}$$

$$M(x) = L^{1-(d/2)} m(y), \tag{33}$$

$$R_L = 1/L^2 r_L, \tag{34}$$

$$U_L = L^{d-4} U_L, \tag{35}$$

$$F_L = \int \mathrm{d}^d y \, [(\nabla m)^2 + r_L m^2(y) + u_L m^4(y)]. \tag{36}$$

Асимптотическое решение для безразмерных параметров $r_L$ и $u_L$-

$$r_L = cL^{2-(\varepsilon/3)} - \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2-(\varepsilon/3)}, \tag{37}$$

$$u_L = \frac{\varepsilon}{9}. \tag{38}$$

Не считая $c$-члена в $r_L$, эти безразмерные параметры не зависят от $L$, что приводит к форме свободной энергии, также не зависящей от $L$. $C$-член дает нестабильность фиксированной точки, а именно, он дает отклонение от фиксированной точки, растущее с ростом $L$. Фиксированная точка достигается только, когда термодинамическая система находится в критической температуре, при которой $c$ обращается в нуль. Любое отклонение от критической температуры приводит к развитию неустойчивости.

Дальнейший анализ формализма ренормгруппы и его связь с общими идеями, касающимися критического поведения, можно найти в работе [17].

## 3. ИСТОРИЯ ПРОБЛЕМЫ ДО 1971 Г.

Первое описание критической точки было описанием критической точки жидкость — газ, сделанное Ван-дер-Ваальсом [19] и развитое через столетие в связи с экспериментами Эндрюса [19]. Затем Вейсс дал описание точки Кюри магнетика [20]. Как теория Ван-дер-Ваальса, так и теория Вейсса представляли собой частные случаи теории самосогласованного поля Ландау [13]. Даже до 1900 г. эксперименты указывали на несоответствие с теорией самосогласованного поля. В частности, эксперименты указывали, что $\beta$ ближе к 1/3, чем к 1/2 [19]. В 1944 г. Онзагер [6] опубликовал свое знаменитое решение двумерной модели Изинга [13], которое явно нарушало предсказания теории самосогласованного поля. Например, Онзагер получил $\nu = 1$, вместо предсказания теории самосогласованного поля $\nu = 1/2$. В 50-х годах Домб, Сайкс, Фишер и другие изучали простые модели критических явлений в трехмерных системах с помощью высокотемпературных разложений, продолженных до высокого порядка. Критические показатели находились с помощью различных методов экстраполяции. Они получили показатели, не согласующиеся с теорией самосогласованного поля, но разумно согласующиеся с экспериментом В течение 60-х годов главные экспериментальные усилия сводились к уточнению критических показателей и в целом подвели серьезные экспериментальные основания под теоретические исследования за пределами теории самосогласованного поля. Экспериментаторы, такие как Воронель, Фербенкс, Букингем и Келлер, Хеллер и Бенедек, Хо и Литстер, Кувель и Родбелл, Комли, Зенгерс, Лоренцен, Альс-Нильсон и Дитрих, Биркено и Ширан, Райс, Чу, Тиней, Молдовер, Вольф и Алерс, все внесли вклад в эти исследования. Их работы координировались М. Грином, Фишером, Вайдомом и Кадановым [22].

Теоретически Вайдом [23] предложил закон подобия для уравнения состояния в критической точке, который допускал отклоняющиеся от теории самосогласованного поля индексы и предсказывал соотношения между ними. Полная система гипотез подобия была развита Эссамом и Фишером, Домбом и Хантером, Кадановым, Паташинским и Покровским [24].

Моя собственная работа началась в квантовой теории поля, а не в статистической механике. Пожалуй, следует начать с развития теории перенормировок Бете, Швингером, Томонагой, Фейнманом, Дайсоном и другими [25] в конце 40-х годов. Первое описание «ренормгруппы» появилось в работе Штюкельберга и Петермана [26], опубликованной в 1953 г.

В 1954 г. Мюррей Гелл-Манн и Френсис Лоу опубликовали работу, названную «Квантовая электродинамика на малых расстояниях» [27], которая оказала определяющее влияние на мою собственную работу, вплоть до появления кадановской формулировки [28] гипотезы подобия критических явлений в 1966 г.

Следуя определению квантовой электродинамики (КЭД), данному в 30-х годах Дираком, Ферми, Гейзенбергом, Паули Иорданом, Вигнером и другими [25], решение КЭД было найдено в виде ряда по степеням $e_0$, «голому заряду» КЭД. Лагранжиан (или гамильтониан) КЭД содержит два параметра: $e_0$ и $m_0$; последний — это «голая» масса электрона. Как говорилось во введении, в КЭД физический электрон и фотон имеют составную структуру. Вследствие этой структуры наблюдаемый электрический заряд $e$ и электронная масса $m$ не совпадают с $e_0$ и $m_0$, а даются рядами теории возмущений по степеням $e_0$. Только в самом низшем порядке $e = e_0$ и $m = m_0$. К сожалению, как было обнаружено в 30-х годах, высшие члены этих рядов для $e$ и $m$ все бесконечны из-за интегралов по импульсам, расходящихся в пределе больших импульсов (или малых расстояний) [25].

В конце 40-х годов была развита теория перенормировок, которая показала, что расходимости КЭД можно все исключить, изменив параметры $e_0$ и $m_0$ затравочного лагранжиана, т.е. перейдя к наблюдаемым величинам $e$ и $m$. Одновременно нужно изменить масштаб электронного и электромагнитного полей, входящих в лагранжиан, так, чтобы сделать конечными наблюдаемые матричные элементы (особенно для электромагнитного поля) [25].

Существует много репараметризаций в КЭД, устраняющих расходимости с помощью различных определений конечных величин вместо $e$ и $m$ в качестве замены $e_0$ и $m_0$. Штюкельберг и Петерман заметили, что можно определить группы преобразования, связывающие различные репараметризации,— они назвали эти группы «groupes de normalization», что переводится как «ренормгруппа». Работа Гелл-Манна и Лоу [27] годом позже, но независимо, содержала гораздо более глубокое исследование смысла неоднозначности в выборе репараметризации и ренормгруппы, связывающей различные выборы репараметризаций. Гелл-Манн и Лоу подчеркнули, что $e$, наблюдаемое в классических экспериментах, соответствует очень длинноволновому пределу КЭД (например, $e$ можно измерить с помощью заряженных шариков, разведенных на сантиметры, тогда как натуральный масштаб КЭД — это комптоновская длина волны электрона $\sim 10^{-11}$ см). Гелл-Манн и Лоу показали, что можно ввести семейство альтернативных параметров $e_\lambda$, каждый из которых можно использовать вместо $e$ для замены $e_0$. Параметр $e_\lambda$ связан с поведением КЭД на произвольном импульсном масштабе $\lambda$ вместо очень малых импульсов, соответствующих $e$.

Семейство параметров $e_\lambda$, введенное ими, интерполирует между физическим зарядом $e$ и затравочным зарядом $e_0$. А именно, $e$ получается в пределе малых импульсов $(\lambda \to 0)$ из $e_\lambda$, а $e_0$ получается из $(\lambda \to \infty)$в пределе больших импульсов $e_\lambda$.

Гелл-Манн и Лоу обнаружили, что $e_\lambda^2$ подчиняется дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\gamma^2\, d l_\lambda^2}{d(\lambda^2)} = \psi\left(e_\lambda^2,\ \frac{m^2}{\lambda^2}\right), \qquad (39)$$

где функция $\psi$ имеет простое разложение в ряд с нерасходящимися коэффициентами независимо от величины $\lambda$; фактически, при $\lambda \to \infty$ $\psi$ становится функцией только от $e_\lambda^2$. Это уравнение — предвестник моего собственного уравнения ренормгруппы типа (22) и (23).

Главное наблюдение Гелл-Манна и Лоу состояло в том, что, несмотря на обычную природу дифференциального уравнения (39), решение было *необычным*; фактически оно предсказывало, что разложение физического заряда по степеням $e_0$ (или наоборот) имеет раходимости. Более общо: если $e_\lambda$ разложить по степеням $e_{\lambda'}$, высшие коэффициенты содержат степени $\ln(\lambda^2/\lambda'^2)$ и потому расходятся, если $\lambda$ или $\lambda'$ идет к бесконечности; они очень велики, если $\lambda^2/\lambda'^2$ либо очень мало, либо очень велико.

Более того, Гелл-Манн и Лоу привели аргументы, что вследствие уравнения (39) $e_0$ должно иметь фиксированное значение, независимо от значение $e$. Это фиксированное значение $e_0$ может быть либо конечным, либо бесконечным.

Когда я поступил в аспирантуру Калифорнийского технологического института в 1956 г., среди лучших студентов считалось, что заняться теорией элементарных частиц равносильно тому, что заранее обречь себя на поражение. Этой областью занимались Мюррей Гелл-Манн, Ричард Фейнман и Йон Мэтьюз. Я восстал против такой перспективы и провел лето в Главной Атомной Корпорации, работая с Маршаллом Розенблютом над физикой плазмы и разговаривая с С. Чандрасекаром, который тоже проводил лето в Корпорации. Через месяц работы меня попросили написать о полученных результатах, после чего я поклялся себе, что выберу предмет исследования, где понадобится по крайней мере пять лет, прежде чем получится что-либо, о чем можно написать. Теория элементарных частиц казалась наиболее перспективной областью, удовлетворяющей этому требованию, и я попросил задачу у Мюррея. Сначала он предложил тему в теории слабых взаимодействий сильновзаимодействующих частиц (К-мезоны и так далее). Через несколько месяцев мне опротивели попытки учесть совершенно неизвестные следствия сильных взаимодействий, и я попросил Мюррея найти мне задачу, связанную непосредственно с сильными взаимодействиями, поскольку они и были самым узким местом. Мюррей предложил, чтобы я занимался К-мезон-нуклонным рассеянием с помощью уравнения Лоу в одномезонном приближении. Мне не слишком нравились методы, которые в то время использовались для решения уравнения Лоу, так что я начал возиться с различными методами, чтобы решить более простой случай пион-нуклонного рассеяния. Хотя одномезонное приближение было применимо (если оно вообще применимо) только при низких энергиях, я исследовал предел высоких энергий и обнаружил, что могу просуммировать «главные логарифмы», что напоминало очень таинственную главу в учебнике теории поля Боголюбова и Ширкова [29]; глава была посвящена ренормгруппе.

В 1960 г. я начал писать диссертацию, содержащую сваленные в кучу любопытные вычисления. Я уже был младшим научным сотрудником в Гарварде. В 1962 г. я на год поехал в ЦЕРН. В течение 1960—1963 г. я отчасти следовал модам времени. Теория статических мезонных источников — исходный пункт для уравнения Лоу,— умерла и была заменена теорией S-матрицы. Я заново открыл «приближение срыва» (Тер-Мартиросян изобрел его первым) [30] и изучал теорию Амати — Фубини — Стангеллини — теорию множественного рождения [31]. Я ходил на семинары (единственный период в моей жизни, когда мне хотелось на них бодрствовать) и толок воду в ступе в связи с приближением сильной связи к теории статического мезонного источника [32].

В 1963 г. стало ясно, что единственное, чем я хочу заниматься,— это квантовая теория поля применительно к сильным взаимодействиям. Я отверг теорию S-матрицы, потому что ее уравнения, даже если их удалось бы написать, были слишком сложными и некрасивыми, чтобы быть теорией. Напротив, существование предела сильной и слабой связи в теории статического мезонного источника помогало мне верить, что квантовая теория поля может иметь смысл. Что же касается сильных взаимодействий, все, что можно было сказать — что теории, которые можно было тогда написать, такие, как псевдоскалярная мезонная теория, были явно неверны. Никто не представлял себе, какая теория может быть правильной. Это можно было утверждать, хотя ни у кого не было представления, как решать эти теории в области сильной связи. Мое сильнейшее желание работать в квантовой теории поля не вело к скорым публикациям; но я уже обнаружил, что мне удается находить работу, даже не публикуя ничего, так что для меня не стоял вопрос «публикуй, либо помирай».

Я мало что мог сделать в квантовой теории поля — над этим работало мало людей, было мало открытых проблем. В 1963—66 гг. мне приходилось хвататься за соломинки. Я думал о «$\xi$-предельном» процессе Ли и Янга [33]. Я потратил много сил, опровергая утверждение Кена Джонсона [34], что можно определить КЭД для произвольно малого $e_0$, в противоречии с результатами Гелл-Манна и Лоу. Я слушал К. Хеппа и других, когда они описывали свои результаты по аксиоматической теории поля [35]; я не понимал деталей, но уловил главную идею — что надо рассуждать в координатном пространстве, а не в импульсном. Часть работы, которую я делал по фейнмановским диаграммам с большими импульсами (чтобы опровергнуть идеи Кена Джонсона), я перевел в координатное пространство и пришел к разложению произведений операторов квантовой теории поля на малых расстояниях. Я описал совокупность правил для этого разложения в препринте 1964 г. Я послал работу в печать; референт предложил мне проиллюстрировать это разложение с помощью решения модели Тирринга. К сожалению, когда я проверил модель Тирринга, оказалось, что на самом деле, хотя разложение на малых расстояниях и имело место для этой модели [36], мои правила для поведения коэффициентных функций в области сильной связи были совершенно неверны. Я отложил этот препринт в сторону до тех пор, пока проблема не будет решена.

Изучив теорию статического мезонного источника во время аспирантуры, я продолжал о ней думать впоследствии. Мой анализ фейнмановских диаграмм, в которых часть импульсов были большими, а некоторые небольшими, я применил к модели статического мезонного источника. Я понял, что результаты, полученные при этом, становятся гораздо яснее, если упростить саму модель статического источника, заменив непрерывное импульсное пространство импульсными слоями [37]. Иными словами, я выбросил все импульсы кроме хорошо разделенных слоев, например $1 \leqslant |k| \leqslant 2$, $\Lambda \leqslant |k| \leqslant 2\Lambda$, $\Lambda^2 \leqslant |k| \leqslant 2\Lambda^2$, ..., $\Lambda^n \leqslant |k| \leqslant 2\Lambda^n$, и так далее, с большим числом $\Lambda$.

Эту модель можно было решить с помощью теории возмущений, очень отличающейся от ранее используемых в теории поля методов. Энергетические масштабы для каждого слоя были весьма различны, порядка $\Lambda^n$ для $n$-го слоя. Поэтому естественная процедура состояла в том, чтобы выбрать в качестве невозмущенного гамильтониана гамильтониан для слоя с наибольшим импульсом, а члены с меньшими слоями взять в качестве возмущения. В каждом слое гамильтониан содержал как энергию свободных мезонов, так и член взаимодействия, поэтому эта новая теория возмущений не сводилась к возмущению типа слабой или сильной связи.

Я показал, что в результате этого пертурбативного подхода оказывалось, что если стартовать с $n$-импульсных слоев и выбрать основное состояние невозмущенного гамильтониана невозмущенного слоя, то можно получить эффективный гамильтониан для оставшихся $n - 1$ слоев. Этот новый гамильтониан совпадал с исходным гамильтонианом с $n-1$ слоем, только мезон-нуклонная константа связи $g$ была ренормирована, т.е. модифицирована: возникал фактор, содержащий нетривиальный матричный элемент по основному состоянию гамильтониана $n$-го слоя [37]. Эта работа была для меня настоящим прорывом. Впервые я обнаружил естественную основу для ренормгруппового анализа: решение и исключение из всей задачи проблемы, соответствующей одному масштабу импульсов. Оставалось сделать еще много, но я уже не хватался за соломинки. Мои идеи ренормировок уже напоминали дайсоновский анализ КЭД[38]. Дайсон привел аргументы в пользу того, что надо решать и исключать область больших энергий в квантовой электродинамике до того, как заниматься малыми энергиями. Я внимательно изучал работы Дайсона, но не смог извлечь из них особой пользы.

Следуя этой линии развития, я глубоко размышлял о том, «что такое теория поля», используя в качестве примера $\psi^4$ теорию скалярного поля (совпадающую с моделью Гинзбурга — Ландау критической точки [14], которую я обсуждал в работах 1971 г.). В течение 60-х годов я часто преподавал квантовую механику, и на меня произвело большое впечатление, как хорошо можно понять простые квантовомеханические системы. В качестве первого шага проводится качественный анализ минимума энергии (определенной с помощью гамильтониана), используя принцип неопределенности. Вторым шагом может служить вариационное вычисление с помощью волновых функций, построенных с использованием качественной информации, полученной из первого шага. Последняя стадия (для высокой точности) может быть численным расчетом с помощью компьютера. Мне казалось, что нужно научиться на таком же уровне понимать квантовую теорию поля.

Я понял, что необходимо размышлять о степенях свободы, которые составляют теорию поля. Проблема решения теории $\varphi^4$ сводилась к тому, что кинетический член в гамильтониане, содержащий градиент $(\nabla\varphi)^2$, был диагонален только в терминах фурье-компонент $\varphi_k$ поля, тогда как член $\varphi^4$ был диагонален только в терминах самого поля $\varphi(x)$. Поэтому я стал искать компромиссное представление, в котором как кинетический член, так и член взаимодействия, были бы хотя бы приближенно диагональны. Мне нужно было разложить поле $\varphi(x)$ в терминах волновых функций, которые имели бы минимальную протяженность как в координатном, так и в импульсном пространстве; иными словами, волновых функций, занимающих минимальный объем в фазовом пространстве. Принцип неопределенности дает нижнюю границу для этого объема, а именно 1, в подходящей системе единиц. Я размышлял о разбиении фазового пространства на блоки единичного объема. Анализ импульсных слоев подсказывал, что надо разбить импульсное пространство в логарифмическом масштабе, т. е. каждый объемчик в импульсном пространстве должен соответствовать слою, вроде того, о котором говорилось раньше. Нельзя было только выкидывать никакие интервалы импульсов в слоях, так что слои должны быть, например, $1 < |k| < 2$, $2 < |k| < 4$, и так далее. В силу трансляционной инвариантности блоки в координатном пространстве должны быть одного и того же размера для каждого импульсного слоя, что даст простую решетку из блоков. Блоки в координатном пространстве должны быть, однако, разных размеров для разных импульсных слоев.

Я не очень далеко зашел в изучении этого гамильтониана. Было ясно, что члены с малыми импульсами должны быть возмущением по отношению к членам с большими импульсами, но детали этого пертурбативного подхода стали слишком сложными. К тому же мой анализ был слишком грубым, чтобы хорошо описывать физику ультрарелятивистских частиц, которые должны содержаться в гамильтониане теории поля [39].

Однако эта картина гамильтониана научила меня тому, что гамильтониан должен содержать радиус обрезания при большом, но конечном значении импульса, чтобы иметь хоть какой-то смысл. А раз это так, значит, я имел дело с решеточной теорией. Грубо говоря, решетка соответствовала координатным блокам, соответствующим наибольшей шкале импульсов. Точнее говоря, разумная процедура определения решеточной теории состояла бы в том, чтобы определить ячейки фазового пространства, покрывающие все обрезанное пространство импульсов. В этом случае был бы один набор пространственных блоков, что сводилось бы к пространственной решетке, на которой было бы определено поле $\varphi$ Таким образом я понял, что для того чтобы понять квантовую теорию поля, мне нужно сначала понять квантовую теорию поля на решетке.

Рассматривая с разных сторон вопрос «что такое теория поля», я нашел очень полезным предъявить требование, чтобы корректно сформулированная теория поля была в принципе решаема на компьютере, точно так же, как обыкновенное дифференциальное уравнение можно решить на компьютере с произвольной точностью при достаточной мощности компьютера. В 60-х годах было ясно, что такая мощность недостижима на практике. Все, что я мог на деле,— простые упражнения для свободных полей на конечной решетке.

Летом 1966 г. я провел много времени в Аспене. Там я выполнил обещание, которое дал себе, будучи аспирантом,— разобрался в решении Онзагера для двумерной модели Изинга. Я прочел его в переводе, изучая теоретико-полевую форму Либа, Маттиса и Шульца [40].

Поступив в аспирантуру, я последовал советам моего отца, постучал в двери Мюррея Гелл-Мана и Фейнмана и спросил их, чем они занимались. Мюррей написал статистическую сумму для трехмерной модели Изинга и сказал, что было бы хорошо, если бы я ее решил (по крайней мере, так я запомнил этот разговор). Фейнман ответил, что занимался «ничем». Позже Йон Мэтьюз объяснил некоторые фейнмановские трюки, придуманные для того чтобы воспроизвести решение двумерной модели Изинга. Я не разобрался в том, что говорил Йон, но именно тогда и дал себе обещание разобраться в этом. Перед поездкой в Аспен я присутствовал на семинаре в Корнелле, где Бен Вайдом рассказывал о своем масштабном уравнении состояния [23]. Меня озадачило отсутствие какого бы то ни было теоретического базиса для формы, написанной Вайдомом. Я в то время был совершенно невежественным в основах критических явлений, а ведь именно они оправдывали важность работы Вайдома.

Когда я разобрался в работе Маттиса, Либа и Шульца, я понял, что мои ренормгрупповые идеи могут быть применимы к критическим явлениям. Я обсуждал это с некоторыми физиками, работавшими в области физики твердого тела, бывшими в то время в Аспене. Мне сказали, что меня уже опередил Лео Каданов, и мне надо посмотреть его препринт [28].

Идея Каданова сводилась к тому, что вблизи критической точки можно представлять себе блоки магнитных моментов, например, содержащих $2 \times 2 \times 2$ атомов в блоке, которые ведут себя как один эффективный момент, причем эти эффективные моменты будут иметь простые взаимодействия ближайших соседей, как в простых моделях для исходной системы. Единственная разница состоит в том, что у этой системы будет эфективная температура и внешнее магнитное поле, которое может отличаться от исходного. В более общем случае можно ввести эффективные моменты на решетке с произвольным интервалом в терминах исходного атомного расстояния. Идея Каданова состояла в том, что температура и полевые переменные $T_L$ и $h_L$ будут зависеть от $L$, причем $T_{2L}$ и $h_{2L}$ будут аналитичными функциями от $T_L$ и $h_L$. В критической точке $T_L$ и $h_L$ будут иметь фиксированные значения независимо от $L$. Из этой гипотезы Каданов сумел вывести законы подобия Вайдома [23], Фишера и других [24].

Я теперь объединил мои рассуждения о теории поля на решетке и о критических явлениях. Я узнал об евклидовой (в мнимом времени) квантовой теории поля и о методе «трансфер-матрицы» для моделей статистической механики и обнаружил, что между ними имеется близкая аналогия. Я понял, что для того чтобы теория поля была релятивистской, соответствующая модель статистической механики должна иметь большую корреляционную длину, т.е. быть близкой к критической точке. Я изучил приближение сильной связи Шиффа к теории $\varphi^4$ скалярного поля [41] и обнаружил, что он игнорировал эффекты перенормировок. Если их принять во внимание, то разложение сильной связи станет вовсе не таким простым, как он утверждал. Я думал о приложениях масштабной теории Каданова, Вайдома и других в квантовой теории поля в связи с масштабной инвариантностью решения модели Тирринга [48] и обсуждением Каструпа и Мака масштабной инвариантности в квантовой теории поля [42]. Эти идеи говорили о том, что масштабная инвариантность может быть применимой, по крайней мере на малых расстояниях, но что операторы поля будут иметь нетривиальные масштабные размерности, соответствующие нетривиальным показателям в критических явлениях. Я переделал мою теорию разложения на малых расстояниях на основе этих масштабных идей и опубликовал результат [43]. Моя теория не очень-то соответствовала основным экспериментальным идеям о поведении на малых расстояниях (идущих от анализа Бьоркена и Фейнмана [44] глубоко неупругого рассеяния электронов); хотя меня несколько смущала эта проблема, я не слишком задумывался над ней.

Я вернулся к модели статического источника и приближению импульсных слоев и существенно упростил ее. Затем более тщательно проделал пертурбативный анализ. Поскольку в реальном мире фактор $\Lambda$, разделяющий импульсные слои, равен 2 (а не очень велик), отношение $1/\Lambda$ последующих энергетических маштабов будет 1/2 (а не очень мало), так что надо было бы рассматривать все порядки теории возмущения по $1/\Lambda$. Когда низкоэнергетические масштабы рассматривались во всех порядках по отношению к высокоэнергетическим, возникал чересчур сложный эффективный гамильтониан с бесконечным набором констант связи. Каждый раз когда какой-нибудь масштаб энергии включался с помощью теории возмущений, возникал новый все более сложный гамильтониан. Все же я обнаружил, что при достаточно больших $\Lambda$ я могу математически строго контролировать возникающие эффективные гамильтонианы. Несмотря на бесконечное число связей я смог доказать, что высшие порядки теории возмущений имели только малый и ограниченный сверху эффект на эффективные гамильтонианы, даже после бесконечного числа операций [45].

Эта работа показала мне, что преобразование ренормгруппы, задачей которого было исключить энергетический масштаб или масштаб длин, или что-нибудь в этом роде из исходной проблемы, может приводить к эффективному взаимодействию с большим числом констант связи, не приводя тем не менее к катастрофам. Формализм ренормгруппы, основанный на фиксированных точках, может все равно быть верен, и более того, можно надеяться, что только небольшое количество этих констант связи будет существенно для качественного преобразования, а остальные константы будут важны только для количественных расчетов. Иными словами, константы связи можно упорядочить по их важности, и для любой желаемой заданной степени точности понадобится только конечный набор констант. В моей модели порядок важности определялся порядками разложения по степеням $1/\Lambda$. Однако я понял, что в рамках взаимодействия на решетке, особенно для моделей типа Изинга, локальность дает естественный порядок важности; в любом конечном решеточном объеме имеется только конечное количество изинговских спиновых взаимодействий, которые можно определить. Я решил, что кадановское подчеркивание роли взаимодействий ближайших соседей в модели Изинга [28] надо переформулировать. Связи ближайших соседей — это самые главные связи, потому что это самые ближайшие связи, которые можно определить. Но и другие связи будут присутствовать в кадановском эффективном гамильтониане для «блокспинов». Разумная процедура ограничения этих связей — рассмотреть конечный объем, скажем $3^3$ или $4^3$ решеточных точек, и рассмотреть только многоспиновые связи, которые могут поместиться в этом объеме (плюс трансляция и вращение этих же связей).

Раньше все преобразования ренормгруппы, с которыми я был знаком, использовали фиксированное количество связей. В случае Гелл-Манна — Лоу — только электрический заряд $e_\lambda$, в случае Каданова — эффективную температуру и внешнее поле. Я по-всякому пытался определить преобразование только для этого фиксированного набора связей, но безуспешно. Освободившись от этого ограничения, оказалось легко определить преобразования ренормгруппы. Тяжелой проблемой было найти приближения к этим преобразованиям, которыми можно было бы пользоваться для практических исчислений. Впрочем, теперь уже существует много таких ренормгрупповых преобразований (см. раздел 4 и ссылки в нем).

Осенью 1970 г. Бен Вайдом попросил меня выступить на его семинаре по статистической механике с докладом о ренормгруппе. Он особенно заинтересовался этим, потому что Ди Кастро и Йона-Лазинио предложили применять формализм теоретико-полевой ренормгруппы к критическим явлениям [46], но никто из группы Вайдома не мог понять их работу. Во время лекций об общих идеях фиксированных точек и тому подобном, я понял, что хорошо бы придумать вычислимую модель, даже если она не будет точной и надежной. Я применил анализ, основанный на решетках в фазовом пространстве, к модели критической точки Ландау — Гинзбурга и попытался упростить ее так, чтобы получилось поддающееся расчету уравнение, не требуя точности, но просто пытаясь сохранить суть картины фазовых ячеек. В результате возникла рекуррентная формула в виде нелинейного интегрального преобразования функции одной переменной, которую я смог решить, итерируя преобразования на компьютере [47]. Я смог вычислить критические показатели из рекурсионной формулы и одновременно показать (по крайней мере частично), что она имела фиксированную точку и что из формализма фиксированной точки вытекала масштабная теория критических явлений Вайдома и других. Эта работа была изложена в двух статьях 1971 г. [47].

Через несколько месяцев я показывал Майклу Фишеру некоторые численные результаты из рекурсионной формулы, когда мы вместе поняли, что нетривиальная фиксированная точка, которую я изучал, становится тривиальной в четырех измерениях и должна поддаваться простому анализу в окрестностях четырех измерений. Размерность появлялась простым образом, как параметр в рекурсионной формуле, так что разработать детали было несложно; Майкл и я опубликовали заметку с результатами [48]. Почти немедленно стало очевидно, что тот же анализ можно применить к полной модели Ландау — Гинзбурга без приближений, сделанных в рекурсионной формуле. Поскольку упрощение вытекало из присутствия маленького коэффициента при члене $\varphi^4$, требовалось разложение по фейнмановским диаграммам. Я использовал мой опыт в теории поля, чтобы раскрутить диаграммы, и мое понимание формализма фиксированных точек ренормгруппы, чтобы определить, как использовать диаграммы, которые я вычислил [49]. Результаты были опубликованы во второй заметке в начале 1972 г. Последовавший взрыв исследований обсуждается в разделе 4.

Пока я заканчивал работу, в этой области велась независимая работа другими авторами. Связь между критическими явлениями и квантовой теорией поля была осознана Грибовым, Мигдалом и Поляковым [50] и аксиоматиками теории поля, такими, как Симанзик [51]. Т. Т. Ву [52] работал и в теории поля, и в модели Изинга. Ларкин и Хмельницкий применили теоретико-полевую ренормгруппу Гелл-Манна и Лоу к критическим явлениям в четырех измерениях и к особому случаю одноосного ферромагнетика в трех измерениях [53], в обоих случаях получив логарифмические поправки к теории Ландау. Дайсон сформулировал несколько искусственную иерархическую модель фазового перехода, которая точно решалась одномерной интегральной рекуррентной формулой [54]. Эта формула была почти идентична той, которую я написал позже, в 1971 г. Андерсон [5] разработал простую, но приближенную процедуру исключения импульсных масштабов, в проблеме Кондо, заложив основы для моей работы по проблеме Кондо (см. раздел 4). Много теоретиков пытались применить в физике твердого тела диаграммное разложение для описания критических явлений: и Абе [55], и Скалапино и Феррел [56] заложили основы диаграммного подхода к моделям с большим числом внутренних степеней свободы для любого числа измерений пространства. (Предел бесконечного числа степеней свободы уже был решен Стенли [57].) Каданов интенсивно занимался исследованием модели Изинга [58] и обнаружил разложение на малых расстояниях для нее, похожее на мое разложение в теории поля. Дробные размерности вводились и раньше в критических явлениях [59]. Продолжение фейнмановских диаграмм на нецелые размерности пространства было введено в квантовую теорию поля, чтобы дать калибровочно-инвариантную процедуру регуляризации для неабелевых калибровочных теорий [60]. Это было сделано одновременно с использованием этого метода для $\varepsilon$-разложения.

В конце 60-х годов Мигдал и Поляков развили «бутстрапную» формулировку критических явлений [61], основанную на разложении по скелетным диаграммам Фейнмана, в которых все параметры, включая и сам параметр разложения, должны были определяться самосогласованно. Они не смогли решить «бутстрапные» уравнения ввиду их сложности, хотя после того как $\varepsilon$-разложение вблизи четырех измерений было открыто, Мак показал, что «бутстрап» можно решить в первых порядках по $\varepsilon$ [62]. Если бы не были развиты идеи ренормгруппы в 1971 г., их «бутстрап» остался бы наиболее перспективным подходом для дальнейшего понимания критических явлений. К сожалению, методы ренормгруппы оказались проще для использования и более гибки, так что «бутстрап» привлекает сегодня мало внимания.

В ретроспективе бутстрап решил проблему, которую я пытался и не смог решить, а именно: как получить фиксированную точку с всего лишь одной или двумя константами, о которой мечтали Гелл-Манн, Лоу и Каданов. В бутстрапе Мигдала — Полякова была только одна, подлежащая определению, константа связи. Однако для меня бутстрапный подход был неприемлем, поскольку до открытия $\varepsilon$-разложения не было известно формальных аргументов, чтобы обосновать обрыв скелетного разложения на конечном числе членов. К тому же скелетные диаграммы были слишком сложными, чтобы проверить такой обрыв на практике с помощью непосредственного вычисления большого числа диаграмм. Даже теперь, когда я пересматриваю проблемы, оставшиеся нерешенными методами ε-разложения или ренормгруппы, проблема сходимости скелетного разложения лишает меня энтузиазма для развития бутстрапного подхода, хотя эта сходимость фактически никогда не была проверена. Тем временем ренормгруппа Монте Карло [63] недавно дала возможность использовать небольшое количество констант довольно эффективным и непертурбативным способом; см. раздел 4.

Мне неизвестны какие-либо другие независимые работы, пытающиеся понять ренормгруппу из первых принципов для решения теории поля или критических явлений поочередно на каждом масштабе длин или предлагающие формулировку ренормгруппы с произвольно большим числом констант связи на промежуточных стадиях анализа.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ПОСЛЕ 1971 г.

После 1972 г. начался взрыв активности в изучении ренормгруппы и ε-разложения. Невозможно дать обзор всех работ, появившихся в это время. Я перечислил некоторые обзоры и книги, в которых дана более детальная информация, в конце библиографии. Некоторые принципиальные результаты и предпосылки на будущее будут кратко описаны здесь. «ε-разложение» вблизи четырех измерений дало разумные качественные результаты для трехмерных систем. Оно позволило изучить гораздо большее разнообразие деталей критического поведения, чем это было раньше возможно за пределами самосогласованного поля. Основная критическая точка характеризуется двумя параметрами: размерностью $d$ и числом внутренних компонент $n$. Большие усилия были сделаны, чтобы рассмотреть критическое поведение в зависимости от $d$ и $n$. ε-разложение для высоких порядков, найденное Брезеном, Ле-Гийо, Зинн-Жюстеном [64] и Никелем [65], привело к точным результатам для $d = 3$. Предел больших $n$ и $1/n$-разложения были развиты дальше [66]. Новое разложение в $2 + \varepsilon$ измерениях было развито для $n > 2$ Поляковым [67]. Для $n = 1$ имеется разложение в $1 + \varepsilon$ измерениях пространства [68]. Полное уравнение состояния критической области было получено с помощью ε-разложения [69] и $1/n$-разложения [70]. Особый случай $n = 0$, как показал Де Женн, описывает проблему исключенного объема в полимерных конфигурациях и проблему случайного блуждания [71].

Помимо тщательного изучения главной фиксированной точки были исследованы другие типы фиксированных точек и критического поведения. Трикритические явления были исследованы Риделем и Вегнером [72]. В этом случае теория Ландау нарушается, начиная с трех измерений, а не с четырех. Были проанализированы [73] более общие мультикритические точки. Эффекты дипольных сил [74], других дальнодействующих сил [75], кубические возмущения и анизотропии [76] также были рассмотрены. Интенсивно исследовалась проблема динамики критических явлений [77].

Большой прогресс достигнут и в понимании специальных свойств двумерных критических точек, хотя два измерения слишком далеки от четырех, чтобы практически пользоваться ε-разложением. Теорема Мермина — Вагнера [78] впервые подчеркнула сложность двумерного упорядочения при наличии непрерывных симметрий. Число точно решаемых моделей, обобщающих модель Изинга, постоянно растет [79]. Костерлиц и Таулесс [80] открыли дорогу применениям ренормгруппы к двумерным системам, развивая раннюю работу Березинского [81]. Они анализировали переход к топологическому порядку двумерной «$x$ — $y$»-модели со своей особой критической точкой, присоединяющейся к критической линии при низких температурах. Каданов и Браун описали общую картину взаимосвязи большого числа двумерных моделей [82]. В последнее время разрастается интерес к двумерным переходам растворения [83]. Среди обобщений модели Изинга особое внимание привлекли модели Поттса с тремя и четырьмя состояниями. Модель Поттса с тремя состояниями содержит только фазовый переход первого рода в теории самосогласованного поля и в разложении в $6-\varepsilon$ размерностях, но имеет фазовый переход второго рода в двух измерениях [84]. Модель Поттса с четырьмя состояниями имеет исключительное поведение в двух измерениях, благодаря «маргинальной переменной», что требует разработки специальных приближенных методов ренормгруппы. Заметный прогресс в этой модели был достигнут недавно [85].

Широкая арена исследований касается критического поведения или упорядочения в случайных системах, таких, как разбавленные магнетики, спиновые стекла и системы со случайными внешними полями. Случайные системы имеют качественные характеристики обычной системы с двумя дополнительными измерениями пространства, как это было открыто Имри, Ма, Гринстайном, Арони [86] и подтверждено Паризи и Сурласом [87] в замечательной работе, использующей идею суперсимметрии в квантовой теории поля. «Метод реплик», часто используемый в изучении случайных систем [88], основан на пределе $n \to 0$, где $n$ — число реплик, аналогичный пределу Де Женна $n \to 0$, определяющему случайные пути [71]. Остаются серьезные неясные вопросы вокруг этой предельной процедуры. Другое любопытное открытие — существование $\sqrt{\varepsilon}$-разложения, найденного Хмельницким, Гринстайном и Лютером [89].

Другие области приложения ренормгруппы связаны с перколяцией [90], локализацией электронов или проводимости в случайных средах [91], проблемами структурных переходов и критических точек Лифшица [92] и проблемами перегородок между двумя фазами [93].

В основной части работ по $\varepsilon$-разложению использовалась только техника диаграмм Фейнмана; вычисления в высших порядках были основаны на формулировке Каллана-Симанзика [94] в теории Гелл-Манна — Лоу. Вычисления также были основаны на специальной технике вычисления диаграмм Никеля [65] и приближенной формуле для высоких порядков в теории возмущения, впервые обсужденных Липатовым [95]. В низшем порядке были использованы другие диаграммные методы; например, бутстрап Мигдала — Полякова был решен в первом порядке по $\varepsilon$ Маком [62].

Современная ренормгруппа также существенно развилась. Много практических и формальных исследований [96] основаны на приближенной рекурсионной формуле 1971 г. Мигдал и Каданов [97] развили альтернативную приближенную рекурсионную формулу, основанную на технике передвижения связей, которая становится точной в двух измерениях. Методы ренормгруппы в реальном пространстве были начаты Нимейером и Ван Левеном [98] и с тех пор интенсивно развивались [99]. Простейшее преобразование в реальном пространстве — кадановское преобразование «удвоения спинов» [100], где некоторые спины фиксируются, а по другим производится суммирование, что приводит к эффективному взаимодействию зафиксированных спинов.

Этот метод был очень эффективен в двух измерениях, где спины на чередующихся диагоналях квадратной решетки были зафиксированы [100]. Другие формулировки в реальном пространстве [98, 99] содержали ядра, с помощью которых определялись переменные блочных спинов, связанные с суммами спинов в блоке (блок мог бы быть треугольником, квадратом, кубом, узлом решетки вместе с его ближайшими соседями и т. д.).

Много ранних применений ренормгруппы в реальном пространстве давало случайные результаты, иногда замечательно точные, иногда бесполезные. Нельзя было применять эти методы к совершенно новой проблеме и быть сколько-нибудь уверенным в успехе. Беда в том, что обычно налагались серьезные ограничения, для того чтобы удалось произвести вычисления: взаимодействия, которые в принципе содержали тысячи параметров, ограничивались жалкой горсточкой параметров. К тому же там, где нужно было просуммировать или проинтегрировать по сотне степеней свободы, чтобы сделать преобразование в реальном пространстве, проводилось сильно упрощенное вычисление. Существенное исключение — точно решаемое дифференциальное преобразование ренормгруппы Хилхорста и Ван Лейвена, которое, к сожалению, можно получить только для нескольких двумерных моделей [101].

Два общих метода, не использующих серьезных ограничений, и потому более надежные, возникли в результате исследований. Прежде всего, я провел непосредственные вычисления для двумерной модели Изинга, используя процедуру удвоения Каданова [100] (обобщенную Кадановым). Много параметров взаимодействия (418) было сохранено, и спиновые суммы брались по очень большой конечной решетке. Результаты были точными и полностью подтвердили мою гипотезу, что ближайшие связи — самые важные. Более важно, что результаты удалось оптимизировать с помощью принципа оптимизации. Фиксированная точка кадановской процедуры удвоения зависит от одного произвольного параметра. Оказалось возможным определить наилучшее значение для этого параметра из соображений внутренней согласованности. Сложные вычисления с риском серьезных ошибок всегда становятся эффективней, когда можно сформулировать принцип оптимизации и существуют параметры для оптимизации [102]. Это исследование так и не было доведено до конца, как это часто бывает, когда приходится проводить компьютерные вычисления большого масштаба. Метод ренормгруппы Монте-Карло [63], сравнительно недавно развитый Свендсеном, мною, Шенкером и Тобочником, оказался очень точным и скоро обгонит как высокотемпературное, так и $\varepsilon$-разложение в точности данных о трехмерной модели Изинга. Метод ренормгруппы Монте-Карло пока что наиболее успешно применялся в двумерных задачах, где вычислительные требования менее строги. Он также успешно применен к трикритическим моделям и моделям Поттса с четырьмя состояниями [103]. Напротив, $\varepsilon$-разложение практически бесполезно в двумерных проблемах. К сожалению, ни один из методов в реальном пространстве пока не дал информации о величинах типа корреляционных функций, которые легко получить в $\varepsilon$-разложении.

Серьезная проблема с преобразованиями ренормгруппы (в реальном пространстве или иными) — то, что нет никакой гарантии, что они будут иметь фиксированные точки. Белл и я [104], а также Вегнер в более общем и элегантном варианте, показали, что для некоторых преобразований ренормгруппы итерации критической точки не приводят к фиксированной точке, по всей вероятности приводя вместо этого к взаимодействиям со все возрастающим радиусом действия сил. Сейчас мы не знаем принципа, позволившего бы избежать этой опасности, и, как показал Каданов с помощью своей процедуры удвоения [100], простое приближение к преобразованию может ошибочно давать фиксированную точку, когда ее нет в точном преобразовании. Проведенное мной рассмотрение двумерной модели Изинга содержало проверки на самосогласованность, которые немедленно срабатывали, как только дальнодействующие силы (за пределами оставленных 418 взаимодействий) становились существенными. Пока ничего не известно о том, как может проявиться отсутствие фиксированной точки в вычислениях ренормгруппы Монте-Карло. Предостережения о ренормгруппе в реальном пространстве высказывались также Гриффитсом и другими [106].

Имеется туманная связь между идеями скейлинга в критических явлениях и «фрактальной» теорией Мандельброта — теории скейлинга нерегулярных геометрических структур (таких, как береговые линии) [107].

Методы ренормгруппы применялись и в других областях, а не только к критическим явлениям. Известный пример — проблема Кондо. Ранние работы по ренормгруппе принадлежат Андерсону [5] и Фаулеру и Завадовскому [108]. Я провел после этого тщательный ренормгрупповой анализ гамильтониана Кондо [109], получив эффективный гамильтониан с большим числом констант для все уменьшающихся энергетических масштабов, почти дословно повторяя предписания, которые я нашел в теории критического мезонного источника. В результате была найдена восприимчивость при нулевой температуре с точностью порядка 1%, что было впоследствии подтверждено точным решением Андрея и Вигмана [7]. Методы ренормгруппы были применены к другим гамильтоновым проблемам, главным образом одномерным [110]. В многомерных системах и во многих одномерных эффективные гамильтонианы пока содержат слишком много состояний, чтобы с ними можно было иметь дело.

Ренормгруппа сыграла решающую роль в развитии квантовой хромодинамики — современной теории кварков и ядерных сил. Исходная теория Гелл-Манна — Лоу [27] и ее вариант Каллана и Симанзика [94] были использованы Полицером, Гроссом и Вилчеком [111] для доказательства того, что неабелевы калибровочные теории асимптотически свободны. Это означает, что константы связи на малых расстояниях малы, но возрастают с ростом пространственного масштаба. Теперь уже стало ясно, что это единственная разумная схема, которая может качественно объяснить слабую связь, которая явно видна в анализе результатов глубоконеупругого электронного рассеяния на протонах и нейтронах, а также сильную связь, которая проявляется в объединении кварков в протоны, нейтроны, мезоны и так далее [112]. Я должен был бы предвидеть идею асимптотической свободы [113], но не сделал этого. К сожалению, было трудно изучать квантовую хромодинамику из-за эффектов сильной связи кварков на ядерных расстояниях, которые нельзя было рассматривать диаграммными методами. Развитие решеточной калибровочной теории Поляковым и мной [114] вслед за пионерской работой Вегнера [115] позволило использовать множество решеточных методов в проблемах квантовой хромодинамики [116], включая разложение сильной связи, численные эксперименты по методу Монте-Карло и методы ренормгруппы Монте-Карло [63]. Я ожидаю, что с ростом мощности компьютеров все большую роль будут приобретать современные методы ренормгруппы в этих решеточных исследованиях, что необходимо для точного учета резкого перехода от слабой связи на коротких расстояниях к сильной связи на ядерных расстояниях. Уже давно было очевидно, что должны быть применения ренормгруппы к турбулентности, но пока не было достигнуто особого успеха. Фейгенбаум [117] развил методы типа ренормгруппы для анализа перехода от порядка к хаосу в некоторых простых динамических системах [118], и эта работа может иметь применение к процессу установления турбулентности.

Метод Фейгенбаума, вероятно, слишком специализирован, чтобы его можно было широко использовать, но динамические системы могут послужить хорошим исходным пунктом для развития более широких ренормгрупповых методов применительно к классическим уравнениям в частных производных [119].

На мой взгляд широкий круг исследований, который был уже проведен с использованием ренормгруппы и $\varepsilon$-разложения,— это только начало исследования гораздо более широкого круга приложений, которые будут открыты в течение ближайших двадцати лет (или, может быть, понадобится следующее столетие). Быстрый успех $\varepsilon$-разложения уже позади, и я думаю, что теперь прогресс будет зависеть от более сложных, более мучительных упражнений, таких, как мои вычисления двумерной модели Изинга или проблемы Кондо [100], или вычислений методом ренормгруппы Монте-Карло [63]. Часто эти детальные, количественные, требующие больших усилий вычисления должны будут предшествовать простому качественному анализу, чтобы быть уверенным, что многие ловушки, потенциально подстерегающие любой анализ по методу ренормгруппы, действительно остались в стороне.

Важные потенциальные области применимости включают теорию химической связи, где эффективное взаимодействие, описывающее молекулы на уровне связи, до крайности необходимо, чтобы заменить современные вычисления *ab initio*, стартующие на уровне индивидуальных электронов [119]. Нужен метод понимания сечения при высоких энергиях или больших переданных импульсах в квантовой хромодинамике — КХД (включая непертурбативные эффекты). Это позволило бы точно вычислить и вычесть большие фоны, связанные с КХД, из экспериментальных результатов так, чтобы остались маленькие эффекты, не связанные с КХД. Практические области, такие, как перколяция, замораживание, распространение трещин в металле и металлургическая закалка,— все содержат очень сложную микроскопическую физику, лежащую в основе макроскопических эффектов, и весьма вероятно, что здесь замешаны как задачи, в которых флуктуации возникают на всех масштабах длин, так и другие проблемы, которые на больших масштабах сводятся к более простым классическим задачам без флуктуаций.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА И ПРИМЕЧАНИЯ


1. Wilson K. G.— Physica, 1974, v. 73, p. 119.
2. См., например: Rose H. A., Sulem P. L.— J. de Phys., 1978, t. 39, p. 441.
3. См., например: Criegee L., Knies G.— Phys. Rept., 1982, v. 83, p. 151.
4. См.: CRC Handbook of Chemistry and Physics.— 62nd ed./Ed. by R. C. Weast.— Boca Raton, Florida: CRC Press, 1981.— P. F-76.
5. См., например: Anderson P. W.— J. Phys. Ser. C, 1970, v. 3, p. 2346.
6. Onsager L.— Phys. Rev., 1944, v. 65, p. 117.
7. Andrei N.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 379; Phys. Lett. Ser. A, 1982, v. 87, p. 299.
   Andrei N., Lowenstein J. H.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 356.
   Wiegmann P. B.— Phys. Lett. Ser. A, 1980, v. 80, p. 163; J. Phys. Ser. C, 1981, v. 14, p. 1463.
   Filyov V. M., Tzvelik A. M., Weigmann P. B.— Phys. Lett. Ser. A, 1981, v. 81, p. 175.
8. Johnson K.— Nuovo Cimento 1961, v. 20, p. 773.
9. Экспериментальные измерения в жидкостях (например, $SF_6$, $He^3$ и в различных органических жидкостях) дают $\beta = 0{,}32 \pm 0{,}02$, тогда как теоретические расчеты дают $\beta = 0{,}325 \pm 0{,}005$; см.:
   Greer S. C., Moldover M. R.— Ann. Rev. Phys. Chem. 1981, v. 32, p. 233.— Для данных и предостережений.
10. Из экспериментальных обзоров см., например:
    Heller P.— Rept. Prog. Phys., 1967, v. 30, p. 731.
    Kadanoff L., Götze W., Hamblen D., Hecht R., Lewis E.A.S., Palciauskas V. V., Rayl M., Swift J., Aspres D., Kane J.— Rev. Mod. Phys., 1967, v. 39, p. 395.
11. О фазовом переходе смеси в $\beta$ латуни см.: Als-Nielsen J.— In: Phase Transitions and Critical Phenomena/Ed. by C. Domb, M. S. Green. Vol. 5a.— N.Y.: Academic Press, 1978.— P. 87.
    См. в [10] более ранние обзоры других систем.

12. Об истории модели Ленца — Изинга см.: Brush S. G.— Rev. Mod. Phys. 1967, v. 39, p. 883.
13. Landau L. D.— Phys. Zs. Sowjetunion, 1937, Bd. 11, S. 26, 545; English translation: ter Haar D. Men of Physics: L. D. Landau. Vol. II.— Oxford: Pergamon Press, 1969.
14. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.— ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. 1064. См. также: Schrieffer J. Superconductivity.— N.Y.: W. A. Benjamin, 1964.— P. 19.
15. Гинзбург В. Л.— ФТТ, 1960, т. 2, с. 2031; Engl. transl.: Sov. Phys.— Sol. State, 1960, v. 2, p. 1824.
16. Wilson K. G., Fisher M. E.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 240.
17. Wilson K. G., Kogut J.— Phys. Rept., 1974, v. 12C, p. 75.
18. См., например: Guggenheim E. A.— J. Chem. Phys., 1945, v. 13, p. 253.
Griffiths R. B.— Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 1479.
Griffiths R. B., Wheeler J. B.— Phys. Rev. Ser. A, 1970, v. 2, p. 1047.
Kadanoff L.— Цит. в [11] сб.— P. 1.
19. См., например: DeBoer J.— Physica, 1974, v. 73, p. 1.
Klein M. D.— Ibid., p. 28.
Levelt-Sengers J. M. H.— Ibid., p. 73.
20. Weiss P.— J. Phys., 1907, v. 6, p. 661.
21. См.: Domb C.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1949, v. 199, p. 199.
Fisher M. E.— Rept. Progr. Phys., 1967, v. 30, p. 615.
22. См., например, [10] и: Ahlers G.— Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, p. 489.
23. Widom B.— J. Chem. Phys., 1965, v. 43, p. 3898.
24. Essam J. W., Fisher M. E.— Ibid., 1963, v. 38, p. 802.
Domb C., Hunter D. L.— Proc. Phys. Soc., 1965, v. 86, p. 1147.
Kadanoff L. P.— Physics, 1966, v. 2, p. 263.
Паташинский А. З., Покровский В. Л.,— ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 439; Engl. Transl.: Sov. Phys.— JETP, 1966, v. 23, p. 292.
25. См. переизданное собрание: Quantum Electrodynamics/Ed by J. Schwinger.— N.Y.: Dover, 1958.
26. Stueckelberg E. C. G., Petermann A.— Helv. Phys. Acta, 1953, v. 26, p. 499.
См. также: Petermann A.— Phys. Rept., 1979, v. 53, p. 157.
27. Gell-Mann M., Low F. E.— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1300.
28. Kadanoff L. P.— Physics, 1966, v. 2, p. 263.
29. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Гостехиздат, 1957,— Гл. VIII.
30. Тер-Мартиросян К. А.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 827.— Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1961, v. 12, p. 575.
31. См., например, Wilson K. G.— Acta Phys. Austriaca, 1963—64, v. 17, p. 37, и цитируемую там литературу.
32. Wenzel G.— Helv. Phys. Acta, 1940, v. 13, p. 269; 1941, v. 14, p. 633.
См. также: Henley E. M., Thirring W. Elementary Quantum Field Theory.— N.Y.: McGraw Hill, 1962.
33. Lee T. D., Yang C. N.— Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 885.
34. Johnson K., Baker M., Willey R. S.— Phys. Rev. Lett., 1963, v. 11, p. 518.
Последующая точка зрения изложена: Baker M., Johnson K.— Phys. Rev., 1969, v. 183, p. 1292; Ibid, Ser. D, 1971, v. 3, p. 2516, 2541.
35. См., например: Hepp H.— Acta Phys. Austriaca, 1963—64, v. 17, p. 85.
36. См., например: Lowenstein J. H.— Comm. Math. Phys., 1970, v. 16, p. 265.
Wilson K. G.— Phys. Rev. Ser. D, 1970, v. 2, p. 1473.
37. Wilson K. G.— Ibid., Ser. B, 1965, v. 140, p. 445.
38. Dyson F. J.— Ibid., 1951, v. 83, p. 608, 1207.
39. См., например: Kogut J., Susskind L.— Phys. Rept., 1973, v. 8C, p. 75, и цитируемую там литературу.
40. Shultz T. D., Mattis D. C., Lieb E. H.— Rev. Mod. Phys., 1964, v. 36, p. 856.
41. Shiff L. I.— Phys. Rev., 1953, v. 92, p. 766.
42. См., например: Mack G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1968, v. 5, p. 499, и цитируемую там литературу.
43. Wilson K, G.— Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499.
44. Bjorken J.— Ibid., p. 1547.
Feynman R. P.— Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 1415.
Обзоры см.:
Yan T. M.— Ann. Rev. Nucl. Sci., 1976, v. 26, p. 199.

Feynman R. P. Photon-Hadron Interactions.— Reading, Mass.: W. A. Benjamin, 1972.
45. Wilson K. G.— Phys. Rev. Ser. D, 1970, v. 2, p. 1438.
46. Di Castro C., Jona-Lasinio G.— Phys. Lett. Ser. A, 1969, v. 29, p. 322.
47. Wilson K. G.— Phys. Rev. Ser. B, 1971, v. 4, p. 3174, 3184.
48. Wilson K. G., Fisher M. E.—Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 240.
49. Wilson K. G.— Ibid., p. 548.
50. Грибов В. Н., Мигдал А. А.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1498; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1968, v. 28, p. 784.
Мигдал А. А.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 1015; Sov. Phys.— JETP, 1971, v. 32, p. 551, ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1964.
Поляков А. М.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1026 (Sov. Phys.—JETP, 1969, v. 28, p. 533.); ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 271 (Sov. Phys.—JETP, 1970, v. 30, p. 151); ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 542 (Sov. Phys.— JETP, 1971, v. 32, p. 296).
51. Symanzik K.— J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 510.
52. Wu T. T.—Phys. Rev., 1966, v. 149, p. 380.
McCoy B. M., Wu T. T. The Two Dimensional Ising Model.—Cambridge: Harvard Univ. Press, 1973.
McCoy B. M., Tracy C., Wu T. T.— Phys. Lett. Ser. A, 1977, v. 61, p. 383.
53. Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, 2087; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1969, v. 29, p. 1123.
54. Dyson F. J.— Comm. Math. Phys., 1969, v. 12, p. 91.
См. также: Baker G. A., Jr.— Phys. Rev. Ser. B, 1972, v. 5, p. 2622.
55. Abe R.— Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1972, v. 48, p. 1414; 1972, v. 49, p. 113.
Abe R., Hikami S.—Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 45, p. 11.
Hikami S.— Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1973, v. 49, p. 1096.
56. Ferrell R. A., Scalapino D. J.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 413; Phys. Lett. Ser. A, 1972, v. 41, p. 371.
57. Stanley H. E.— Phys. Rev., 1968, v. 176, p. 718.
58. Kadanoff L. P.—Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 1430; Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 859.
59. См., например: Fisher M. E., Gaunt D. S.— Ibid. Ser. A, 1964, v. 133, p. 224.
Widom B.—Mol. Phys., 1973, v. 25, p. 657.
60. 't Hooft G., Veltman M.— Nucl. Phys. Ser. B, 1972, v. 44, p. 189.
Bollini C. G., Giambiagi J. J.— Phys. Lett. Ser. B, 1972, v. 40, p. 566.
Ashmore J. F.— Lett. Nuovo Cimento, 1972, v. 4, p. 289.
61. Паташинский А. З., Покровский В. Л.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 994. Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1964, v. 19, p. 677.
Поляков А. М.— ЖЭТФ, 1970, т. 12, с. 538; Engl. transl.: JETP Lett., 1970, v. 12, p. 381.
Migdal A. A.— Phys. Lett. Ser. B, 1971, v. 37, p. 386.
Mack G., Symanzik K.— Comm. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 247, и цитируемая там литература.
62. Mack G.— In: Strong Interaction Physics/Ed. by W. Rühl, A. Vanira.— Berlin: Springer-Verlag, 1973.— P. 300.
63. Swendsen R. H.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 859; Phys. Rev. Ser. B, 1979, v. 20, p. 2080.
Wilson K. G.— In: Recent Developments in Gauge Theories/Ed. by G. 't Hooft et al.— N.Y.: Plenum Press, 1980.
Shenker S., Tobochnik J.— Phys. Rev. Ser. B, 1980, v. 22, p. 4462.
64. См., например, обзор: Zinn-Justin J.— Phys. Rept., 1981, v. 70, p. 109. И далее: Nickel B.— Physica, Ser. A, 1981, v. 106, p. 48.
65. Nickel B. (не опубликовано), цитируется в [64], и ранние статьи.
66. См., например: Ma S. K.— Цит. в [11] сб.— Vol. 6, 1976, p. 250, и цитируемую там литературу.
67. Polyakov A. M.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 79.
Мигдал А. А.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1457; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1976, v. 42, p. 743.
Brézin E., Zinn-Justin J., Le Guillou J. C.— Phys. Rev. Ser. B, 1976, v. 14, p. 4976.
Bhattacharjee J. K., Cardy J. L., Scalapino D. J.— Ibid., 1982, v. 25, p. 1681.
68. Wallace D. J., Zia R. K.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 35, p. 1399.
Widom B.— Mol. Phys., 1973, v. 25, p. 657.
69. Brézin E., Wallace D., Wilson K. G.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 591; Phys. Rev. Ser. B, 1973, v. 7, p. 232.
Авдеева Г. М., Мигдал А. А.— ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 253; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP Lett., 1972, v. 16, p. 178.

Авдеева Г. М.— ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 741; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1973, v. 37, p. 372.
70. Brézin E., Wallace D. J.— Phys. Rev. Ser. B, 1973, v. 7, p. 1967. Обзоры см.: Ma S.-K.— Цит. в [59] сб.— Vol. 6, 1976, P. 250.
71. DeGennes P. G.— Phys. Lett. Ser. A, 1972, v. 38, p. 339. Des Cloiseaux J.— J. de Phys., 1975, t. 36, p. 281.
72. Riedel E. K., Wegner F. J.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 349; Phys. Rev. Ser. B, 1973, v. 7, p. 248.
73. См., например: Fisher M. E.— In: A. I. P. Conference Proceedings. No. 24: Magnetism and Magnetic Materials.— 1974.— P. 273.
74. Fisher M. E., Aharony A.— Phys. Rev. Lett, 1973, v. 30, p. 559. Aharony A., Fisher M. E.— Phys. Rev. Ser. B, 1973, v. 8, p. 3323. Aharony A.— Ibid., p. 3342, 3349, 3358, 3363; Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 44, p. 313.
75. Suzuki M.— Ibid., 1972, v. 42, p. 5; Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1973, v. 49, p. 424, 1106, 1440.
Fisher M. E., Ma S., Nickel B. G.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 917.
Baker G. A., Jr., Golner G. R.— Ibid., 1973, v. 31, p. 22.
Suzuki M., Yamazaki Y., Igarishi G.— Phys. Lett. Ser. A, 1972, v. 42, p. 313.
Sak J.— Phys. Rev. Ser. B, 1973, v. 8, p. 281.
76. Pfeuty P., Fisher M. E.— Ibid., 1972, v. 6, p. 1889.
Wallace D. J.— J. Phys. Ser. C, 1973, v. 6, p. 1390.
Ketley L. J., Wallace D. J.— Ibid. Ser. A, 1973, v. 6, p. 1667.
Aharony A.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1494.
Suzuki M.— Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1973, v. 49, p. 1451.
Liu L.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 459.
Grover M. K.— Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 44, p. 253.
Chang T. S., Stanley H. E.— Phys. Rev. Ser. B, 1973, v. 8, p. 4435.
Aharony A.— Ibid., p. 4270.
Последние сообщения см.:
Blankschtein D., Mukamel D.— Ibid., 1982, v. 25, p. 6939.
77. Halperin B. I., Hohenberg P. C., Ma S.-K.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 1548.
Suzuki M., Igarishi G.— Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1973, v. 49, p. 1070.
Suzuki M.— Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 43, p. 245; Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1973, v. 50, p. 1767.
Обзоры см.: Hohenberg P. C., Halperin B. I.— Rev. Mod. Phys., 1977, v. 49, p. 435.
Новые сведения о методе ренормгруппы Монте-Карло см.: Tobochnik J., Sarker S., Cordery R.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 1417.
Прочие новые сообщения:
Ahlers G., Hohenberg P. C., Kornblit A.— Phys. Rev. Ser. B, 1982, v. 25, p. 3136.
Heilig S. J., Luscombe J., Mazenko G. F., Oguz E., Valls O. T.— Ibid., p. 7003.
78. Mermin N. D., Wagner H.— Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 1133.
Mermin N. D.— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 1061.
Hohenberg P. C.— Phys. Rev., 1967, v. 158, p. 383.
79. См., например: Baxter R. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics.— N.Y.: Academic Press, 1982.
80. Kosterlitz J. M., Thouless D. J.— J. Phys. Ser. C, 1973, v. 6, p. 1181.
Kosterlitz J. M.— Ibid., 1974, v. 7, p. 1046.
Обзоры см.: Kosterlitz J. M., Thouless D. J.— Progr. Low Temp. Phys., 1978, v. 7, p. 373.
81. Березинский В. Л.— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 907; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1971, v. 32, p. 493.
Березинский В. Л. — ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 1144; Engl. trans.: Sov. Phys.— JETP, 1972, v. 34, p. 610.
82. Kadanoff L. P., Brown A. C.— Ann. Phys. (N. Y.), 1979, v. 121, p. 318.
83. Nelson D. R., Halperin B. I.— Phys. Rev. Ser. B, 1979, v. 19, p. 2457.
Young A. P.— Ibid., p. 1855.
84. Baxter R. J.— J. Phys. Ser. C, 1973, v. 6, p. 2445 (обычное двумерное решение).
См., например: Banavar J. R., Grest G. S., Jasnow D.— Phys. Rev. Ser. B, 1982, v. 25, p. 4639, и цитируемую там литературу.
85. Nienhuis B., Berker A. N., Riedel E. K., Schick M.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 737.

Swendsen R. H., Andelman D., Berker A. N.— Phys. Rev. Ser. B, 1982, v. 24, p. 6732.
86. Imry Y., Ma S.-K.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1399.
Grinstein G.— Ibid., 1976, v. 37, p. 944.
Aharony A., Imry Y., Ma S.-K.— Ibid., p. 1367.
Последние сообщения: Mukamel D., Grinstein G.— Phys. Rev. Ser. B, 1982, v. 25, p. 381.
87. Parisi G., Sourlas N.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 744.
88. Edwards S. F., Anderson P. W.— J. Phys., Ser. F, 1975, v. 5, p. 965.
89. Хмельницкий Д. Е.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 1960; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1976, v. 41, p. 981.
Grinstein G., Luther A.— Phys. Rev. Ser. B, 1976, v. 13, p. 1329.
90. См., например, обзор: Essman J. W.— Rept. Prog. Phys., 1980, v. 43, p. 833.
Последние сообщения: Lobb C. J., Karasek K. R.— Phys. Rev. Ser. B, 1982, v. 25, p. 492.
91. См., например: Stein J., Krey U.— Physica, Ser. A, 1981, v. 106, p. 326, и цитируемую там литературу.
92. См., например, обзор: Bruce A. D.— Adv. Phys., 1980, v. 29, p. 111, и цитируемую там литературу.
Grinstein G., Jayaprakash C.— Phys. Rev. Ser. B, 1982, v. 25, p. 523.
93. См. [68] и цитируемую там литературу.
94. Callan C. G.— Phys. Rev. Ser. D, 1970, v. 2, p. 1541.
Symanzik K.— Comm. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 227.
Symanzik K.— Springer Tracts in Modern Physics, 1971, v. 57, p. 222.
95. Липатов Л. Н.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 411; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1977, v. 45, p. 216.
Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.— Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 1544, 1558.
96. См., например: Golner G.— Ibid. Ser. B, 1973, v. 8, p. 3419.
Langer J. S., Bar-on M.— Ann. Phys. (N. Y.), 1973, v. 78, p. 421.
Bleher P. M., Sinai Ya. G.— Comm. Math. Phys., 1975, v. 45, p. 247.
97. Мигдал А. А.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 810, 1457; Engl. transl.: Sov. Phys.— JETP, 1975, v. 42, p. 413, 743.
Обзор и дополнительные сообщения см.: Kadanoff L. P.— Rev. Mod. Phys., 1977, v. 49, p. 267.
98. См., например: Niemeijer Th., Van Leeuwen J. M. J.— Цит. в [59] сб.— Vol. 6, 1976, p. 425.
99. См. [80] и, например: Riedel E. K.— Physica Ser. A, 1981, v. 106, p. 110, и цитируемую там литературу.
100. См.: Wilson K. G.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 773.— Особо: Sect. IV.
101. См.: Hilhorst H. J., Van Leeuwen J. M. J.— Physica. Ser. A, 1981, v. 106, p. 301.
102. Я благодарю Ива Парланжа, напомнившего мне об этом.
103. См., например: Swendsen R. H., Andelman D., Berker A. N.— Phys. Rev., Ser. B, 1982, v. 24, p. 6732.
Landau D. P., Sendsen R. H.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 1437.
104. Bell T. L., Wilson K. G.— Phys. Rev. Ser. B, 1974, v. 10, p. 3935.
105. См., например: Wegner F.— Цит. в [59] сб.— Vol. 6.
106. См., например: Griffiths R. B.— Physica. Ser. A, 1981, v. 106, p. 59.
107. См. например: Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature.— San Francisco: W. H. Freeman, 1982.
108. Fowler M., Zawadowski A.— Sol. State Comm., 1971, v. 9, p. 471.
109. Wilson K. G.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 773.
Krishna-Murthy H. R., Wilkins J. N., Wilson K. G.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1101; Phys. Rev. Ser. B, 1980, v. 21, p. 1044, 1104.
110. См., например: Drell S. D., Weinstein M., Yankielowicz S.— Ibid. Ser. D, 1977, v. 17, p. 1769.
Jullien R., Fields J. N., Doniach S.— Ibid., 1977, v. 16, p. 4889.
Последние сообщения: Hanke W., Hirsch J. E.— Phys. Rev. Ser. B, 1982, v. 25, p. 6748.
Penson K. A., Jullien R., Pfeuty P.— Ibid., p. 1837, и цитируемая там литература.
111. Politzer H.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 1346.
Gross D., Wilczek F.— Ibid., p. 1343.
112. См., например: Altarelli G.— Phys. Rept., 1982, v. 81, p. 1.
113. Wilson K. G.— Phys. Rev. Ser. D, 1971, v. 3, p. 1918.
114. Поляков А. М., (не опубликовано).
Wilson K. G.— Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 10, p. 2455.
115. Wegner F.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 2259.

116. См. обзор: Bander M.— Phys. Rept., 1981, v. 75, p. 205.
117. Feigenbaum M. J.— J. Stat. Phys., 1978, v. 19, p. 25.
118. См., например: Eckmann J. P.— Rev. Mod. Phys., 1981, v. 53, p. 643.
Ott E.— Ibid., p. 655.
119. См., например: Coppersmith S., Fisher D. Bell Laboratories preprint.
120. См., например: Mulliken R. S.— Ann. Rev. Phys. Chem., 1975, v. 29, p. 1.
Löwdin P. O.— Adv. Quantum Chem., 1980, v. 12, p. 263.
Hirst D. M.— Adv. Chem. Phys., 1982, v. 50, p. 517.
Bartlett R. J.— Ann. Rev. Phys. Chem., 1981, v. 32, p. 359.
Case D. A.— Ibid., 1982, v. 33, p. 151.

*Литература о ренормгруппе*

Phase Transitions and Critical Phenomena/Ed. by C. Domb, M. S. Green.— Lnd.: Academic Press.— Особенно: Vol. 6, 1976.
Pfeuty P., Toulouse G. Introduction to the Renormalization Group and to Critical Phenomena.— N.Y.: Wiley, 1977.
Ma S.-K. Modern Theory of Critical Phenomena.— Reading, Mass. W.A. Benjamin/Cummings, 1976.
Amit D. J. Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena.— N.Y.: McGraw-Hill, 1978.

*Популярные статьи*

Wilson K. G.— Sci. American, August, 1979, v. 241, p. 158; Adv. Math., 1975, v. 16, p. 176.

*Обзорные статьи*

Greer S. C., Moldover M. R.— Ann. Rev. Phys. Chem., 1981, v. 32, p. 233.— Критическое поведение жидкостей и многие ссылки на предыдущие обзоры.
Bander M.— Phys. Rept., 1981, v. 75, p. 205.— Удержание кварка.
Zinn-Justin J.— Phys. Rept., 1981, v. 70, p. 109.— Точное вычисление критических показателей из $\varepsilon$-разложения.
Baret J. F.— Progr. Surf. Membrane Sci., 1981, v. 14, p. 292.
Cadenhead D. A., Danielli J. F., Eds.— N.Y.: Academic Press, 1981.— Практические применения фазовых переходов.
Wallace D. J., Zia R. K.— Rept. Progr. Phys., 1978, v. 41, p. 1.