

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

535+523.11

**ЛАБОРАТОРНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ КАУСТИК,  
ОПТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ  
И КОСМОЛОГИЯ***Я. Б. Зельдович, А. В. Мамаев, С. Ф. Шандарин*

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	153
2. Невзаимодействующие частицы . . . . .	154
3. Оптическая модель . . . . .	155
а) Одномерный случай (155). б) Двумерный случай (157). . . . .	
4. Крупномасштабная структура Вселенной . . . . .	161
Цитированная литература . . . . .	163

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В оптике хорошо известно явление каустик, когда сходящиеся лучи света в определенных точках создают резкое увеличение светового потока. На сегодняшнем языке можно говорить о катастрофах в геометрической оптике. Это явление можно воспроизвести в лаборатории. Наглядно на фотографии оказываются зафиксированными характерные особенности разного типа, предсказываемые теорией.

Геометрическую оптику можно рассматривать как частный случай механического движения частиц, не взаимодействующих друг с другом. Поэтому фотографии, полученные нами, оказываются хорошим пособием для иллюстрации некоторых результатов, полученных в механике.

Более того, эти результаты сохраняются в теории коллективного движения частиц в собственном поле тяготения. Такая теория является неотъемлемой частью современной космологии, она описывает возникновение структуры Вселенной. Поэтому в заглавии заметки и поставлена космология.

Глубокая причина подобия рассматриваемых здесь оптических и механических явлений лежит в известной оптико-механической аналогии (см., например, <sup>1</sup>).

Простые лабораторные эксперименты не предназначены для замены точной теории и трудоемких численных расчетов на быстродействующих ЭВМ. Эти эксперименты, однако, могут быть полезны для облегчения интуитивного понимания сути рассматриваемых явлений. Моделирующий эксперимент может быть полезен и в педагогической и популяризаторской деятельности.

Ниже материал расположен в порядке, отличающемся от введения. Сперва рассматривается механика невзаимодействующих частиц (гл. 2),

затем описываются оптические модели и результаты, полученные на этих моделях (гл. 3): в одномерном (п. а)) и двумерном (п. б)) случае. Наконец, в гл. 4 мы производим гигантскую экстраполяцию, переходя к вопросу о крупномасштабной структуре Вселенной.

## 2. НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ЧАСТИЦЫ

Современная механика широко пользуется понятиями векторного поля и его преобразованиями. Систематическое изложение такого подхода дано в книге В. И. Арнольда<sup>1</sup>.

Основная идея восходит к Лагранжу; движение вещества можно описать, задавая мгновенное положение каждой частицы  $\mathbf{r}$  (ее «эйлеровы» координаты  $x, y, z$ ) в зависимости от начального ее положения  $\psi$  (от ее «лагранжевых» координат  $\xi, \eta, \zeta$ ) и времени  $t$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\psi, t).$$

Можно сказать, что движение состоит в непрерывном преобразовании векторного поля  $\mathbf{r}$  в зависимости от непрерывно изменяющегося скалярного параметра  $t$ . Закон этого преобразования определяется заданием поля скорости  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}.$$

В свою очередь поле скорости может быть задано тем или иным законом в зависимости от действующих сил, однако мы здесь не касаемся этой стороны дела.

Возьмем самый простой случай, когда на вещество не действуют никакие внешние силы. Более того, опустим и внутренние силы, т. е. всякое взаимодействие частиц вещества между собой. Другими словами, в уравнениях пренебрежем напряжениями или, в случае жидкости или газа, пренебрежем давлением и вязкостью. При этом каждая частица вещества движется с постоянной скоростью.

Казалось бы, задача упрощена настолько, что от ее решения нельзя ожидать ничего интересного. Мы имеем дело теперь с простым равномерным и прямолинейным движением отдельных частиц вещества:

$$\mathbf{r} = \psi + (t - t_0) \mathbf{u},$$

причем для каждой частицы величина  $\mathbf{u}$  постоянна. Это значит, что  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\psi)$ , но не зависит от времени.

Тем не менее оказывается, что рассмотрение сплошной среды, т. е. не одной, а целого ансамбля частиц, приводит к интересным и нетривиальным результатам даже в этом простом случае.

Для определенности предположим, что начальная плотность среды в момент  $t = t_0 = 0$  везде постоянна,  $\rho = \rho_0$ . Движение задано в лагранжевой системе простой формулой

$$\mathbf{r} = \psi + t\mathbf{u}(\psi).$$

Поставим вопрос о том, как с течением времени меняется распределение плотности.

Специфика задачи состоит в том, что траектории частиц, не взаимодействующих между собой, могут пересекаться.

Возьмем самый простой случай одномерного движения

$$x = \xi + tv(\xi).$$

Случай этот подробно рассмотрен в книге Зельдовича и Мышкиса<sup>2</sup>.

Две частицы, начальные положения которых  $\xi_1$  и  $\xi_2$  окажутся в одной и той же точке  $x'$ , если имеет место равенство

$$x' = x_1 = x_2 = \xi_1 + t'_{1,2} v(\xi_1) = \xi_2 + t'_{1,2} v(\xi_2)$$

в момент

$$t'_{1,2} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{v(\xi_1) - v(\xi_2)}.$$

Такой момент существует в будущем, если при  $\xi_2 > \xi_1$  имеет место  $v(\xi_2) < v(\xi_1)$ .

Для двух соседних частиц (индекс при  $t'$  не пишем)

$$\xi_2 = \xi_1 + d\xi, \quad t' = - \left( \frac{dv}{d\xi} \right)^{-1}.$$

Количество вещества, заключенное в малом интервале  $d\xi$ , равно

$$dm = \rho_0 d\xi.$$

Величина  $dm$  сохраняется в ходе движения. Можно записать

$$dm = \rho dx,$$

где  $dx$  надо брать в соответствии с выбором  $d\xi$ .

Таким образом, получим

$$\rho = \frac{dm}{dx} = \frac{dm}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \rho_0 \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1},$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + t \frac{dv}{d\xi} \right)^{-1}.$$

Отсюда следует, что момент пересечения соседних траекторий  $t'$  — это как раз тот момент, когда плотность вещества обращается в бесконечность. Кривые зависимости плотности от координаты  $x$  с бесконечными пиками рассматриваются в упомянутой книге<sup>2</sup>.

Как было показано в<sup>3</sup>, учет давления устраняет каустическую особенность в механической системе. Аналогично конечность длины волны света устраняет бесконечность светового потока на оптической каустике. Строго говоря, каустики существуют лишь в пределе бесконечно малой длины волны или бесконечно малого давления. Поэтому представление о каустиках полезно, когда можно пренебречь длиной волны света или соответственно давлением.

Теоретик может сказать, что выписанные формулы достаточно просты и наглядны. В принципе, наглядность могла бы быть достигнута выводом соответствующих распределений на дисплей ЭВМ и съемкой соответствующего фильма. Однако в настоящее время невозможно приложить к каждому экземпляру УФН такой фильм или видеоленту и предложить каждому читателю просмотреть ее.

Однако есть способ — и мы опишем его в следующей главе — добиться наглядности в буквальном смысле этого слова, т. е. увидеть глазами такое распределение яркости света, которое соответствует распределению плотности по выписанным выше формулам.

### 3. ОПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

#### а) Одномерный случай

Заменим траектории частиц лучами света. Все дальнейшее рассмотрение ведется в рамках геометрической оптики.

Представим себе горизонтальную пластинку, освещенную снизу параллельным потоком лучей, например от точечного источника после прохождения собирающей линзы (рис. 1).

Если пластинка плоскопараллельна, лучи остаются вертикальными. Возьмем теперь пластинку с плавно меняющейся толщиной (рис. 2). При прохождении такой пластинки наклон лучей несколько меняется, притом по-разному в разных точках.

Обозначим угол отклонения  $\alpha$ ; считая его малым, заменим  $\operatorname{tg} \alpha$  на  $\alpha$ , при этом для каждого луча  $\alpha$  задано:  $\alpha$  есть функция точки  $\alpha = \alpha(\xi)$ . Итак, теперь  $x = \xi + z\alpha(\xi)$ .

Получилась полная аналогия с одномерным движением частиц по инерции! Вертикальная координата  $z$  играет роль времени.

Подставим экран на пути лучей. В зависимости от величины освещенность экрана показывает совершенно различную картину.

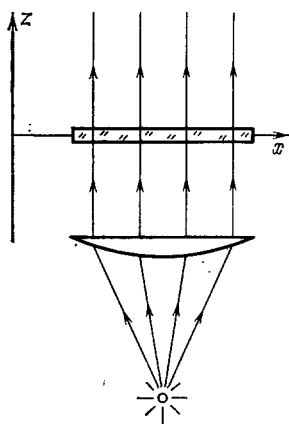


Рис. 1.

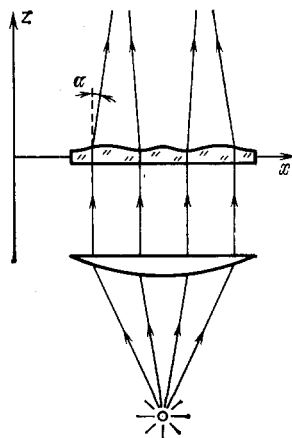


Рис. 2.

Вблизи, при малом  $z$ , освещенность почти постоянна. Различие в освещенности при малых  $z$  растет пропорционально  $z$ . Будем освещенность обозначать той же буквой  $\rho$ , что и плотность в механической задаче:

$$\rho(x, z) = \rho_0 \left( 1 - z \frac{d\alpha}{d\xi} + \dots \right).$$

Оставленный в формуле первый член соответствует линейной теории возмущений, когда  $\delta\rho = \rho_0 - \rho_0 \ll \rho_0$ .

Однако при дальнейшем увеличении  $z$  — расстояния между экраном и пластинкой — внезапно вспыхивает яркая точка — каустика \*). Затем эта точка разбивается на две, вспыхивают другие каустики и т. д.

Предполагается, что поверхность преломляющей пластинки задана достаточно гладкой случайной функцией.

Рис. 3 представляет серию снимков, иллюстрирующих сказанное. Отметим далее, что при отсутствии изломов на поверхности преломляющей пластинки, т. е. при ограниченной величине  $d\alpha/d\xi$ , нигде на экране не возникает полная тень.

В одних частях экрана  $\rho > \rho_0$  и в отдельных точках  $\rho = \infty$ , но эта бесконечность интегрируема,  $\int \rho dx$  всегда сходится. Однако нигде нет  $\rho = 0$ , тем более нет абсурдного  $\rho < 0$ .

\*) Если однородная задача воспроизводится с помощью пластинки, у которой одна из поверхностей изогнута лишь в одном направлении  $z = z(x)$ , а ширина пластины равна  $\Delta y$ , то точка превращается в полосу длиной  $\Delta y$ .

Внезапное появление точек с  $\rho = \infty$ , т. е. каустик, представляет собой пример тех явлений, которыми занимается теория катастроф. В этой связи мы рекомендуем читателю элементарную, но очень содержательную брошюру В. И. Арнольда <sup>4</sup>, выпущенную обществом «Знание»,

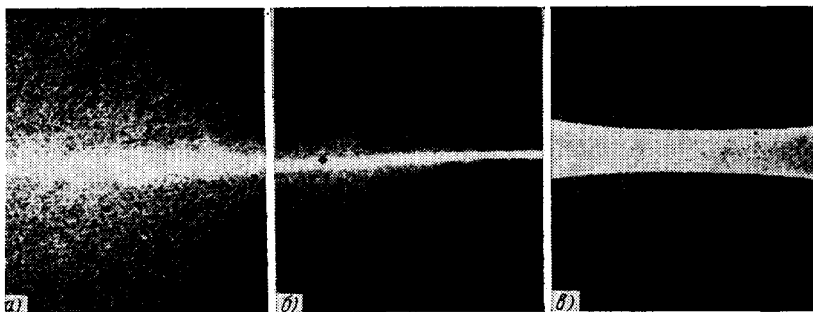


Рис. 3.

и его популярную статью в журнале «Природа» <sup>5</sup>. Для тех же, кто хочет познакомиться с теорией катастроф основательно, можно рекомендовать книги <sup>6, 29</sup>.

В качестве упражнения рекомендуем читателю построить кривые  $(x, z)$  при  $z < z'$  и  $z > z'$  до и после появления первой каустики. Рекомендуем также подумать о том, что будет при устранении собирающей линзы на рис. 2. В этом случае снизу на пластину падает расходящийся поток лучей.

Наконец, в качестве последней задачи рассмотрите случай, когда поверхность изломана, имеет малый угол. При этом имеет разрыв и угол наклона луча: два бесконечно близких луча имеют наклоны, отличающиеся на конечную величину  $\alpha(x - 0) \neq \alpha(x + 0)$ . Рассмотрите два случая в зависимости от знака разности наклона лучей.

### б) Д в у м е р н ы й с л у ч а й

Обратимся теперь к двумерному случаю (рис. 4). Мы рассматриваем пластинку, лежащую в плоскости  $x, y$  при  $z = 0$  (приближенно считая малой толщину пластинки). Снизу она освещена потоком лучей, параллельных оси  $z$ . Соответствующее устройство — источник света и линза (ср. здесь рис. 1 и 2) — на рис. 4 не показано. Экран располагается параллельно пластинке, т. е. при различных (но в каждом отдельном опыте постоянных) значениях  $z$ .

Каждый индивидуальный луч проходит через пластинку в точке  $\psi_2 = (x = \xi, y = \eta, z = 0)$ ; здесь  $\psi_2$  — двумерный вектор  $(\xi, \eta)$ . В общем случае луч слегка отклоняется от направления, параллельного оси  $z$ , так что дальше изменяется как  $x$ , так и  $y$ . Имеем для луча

$$x = \xi + z\alpha_x(\xi, \eta),$$

$$y = \eta + z\alpha_y(\xi, \eta),$$

или в векторной форме

$$\mathbf{r}_2 = \psi_2 + z\alpha_2(\psi_2),$$

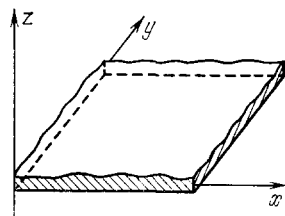


Рис. 4.

где  $\mathbf{r}_2$ ,  $\psi_2$ ,  $\alpha_2$  — двумерные векторы, лежащие в плоскостях, перпендикулярных  $z$ , а координата  $z$  снова играет особую роль. Вектор  $\alpha_2 = (\alpha_x, \alpha_y)$  — двумерная скорость,  $z$  играет роль времени. Снова с течением времени, т. е. с ростом  $z$ , небольшие сперва контрасты освещенности увеличиваются, а затем появляются и яркие участки — каустики. Теперь, однако, наблюдаемая картина обладает некоторыми особенностями, наглядно видимыми на фотографиях, но не столь тривиальными (рис. 5).

Каустики возникают в виде маленьких черточек. Когда они чуть-чуть подросли, легко видеть, что яркая граница совсем не похожа на кружок или эллипс, даже вытянутый — скорее она похожа на контур того, что называется «губки бантиком».

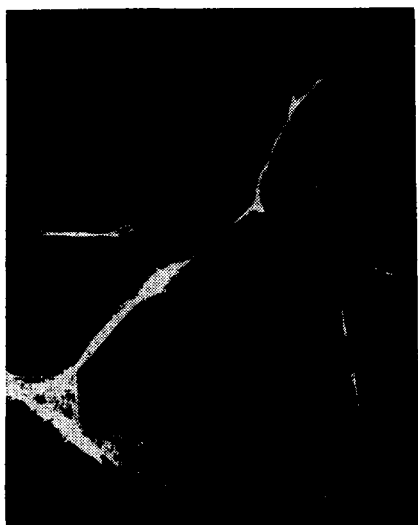


Рис. 5.

Анализ показывает, что с течением времени, т. е. по мере удаления экрана по  $z$  от критического  $z'$ , при котором каустика рождается, толщина освещенной области растет как  $d \propto (z - z')^{3/2}$ , а длина — как  $l \propto (z - z')^{1/2}$ . Следовательно, отношение  $l/d$ , характеризующее степень вытянутости, растет с уменьшением  $(z - z')$ :  $l/d \propto (z - z')^{-1}$ . Это значит, что каустика рождается как черточка, а не как пятнышко.

В дальнейшем происходит пересечение каустик и возникновение более сложных структур, приведенных на рис. 6—9.

На рис. 6 показаны два типичных события: происходит слияние двух «губок» и перестройка типа «ласточкин хвост». Названия «ласточкин хвост», «кошелек», «пирамида» (см. ниже) особенности получили за характерную форму в трехмерном пространстве. Фотография на рис. 6 снабжена рисунком, «расшифровывающим» изображение. Сфотографировать некоторые особенности непросто. Например, в крайних точках «губок», где сходятся, касаясь, две яркие границы, яркость особенно велика (в приближении геометрической оптики — бесконечна), но она велика также и в некоторой окрестности этой точки (но конечна), там, где каустики еще нет, но скоро будет. Изображение таких точек на фотографии оказывается размытым, аморфным.

Строгая классификация таких структур — не простая задача, она требует профессиональных математических знаний. Мы отсылаем читателя к работам Арнольда — его одного<sup>7-9</sup> и совместно с членами нашей группы<sup>10</sup>.

Структура на рис. 7 называется «пирамида», рис. 8 демонстрирует так называемый «кошелек».

Отметим общую тенденцию к образованию темных областей, разделенных сеткой сравнительно ярких полос (см. рис. 9). Особенно хорошо это видно на фотографиях экрана, намеренно снятых расфокусированным фотоаппаратом. Такой снимок сглаживает детали, но зато облегчает восприятие общей структуры.

Общее наиболее сильное впечатление состоит в том, что мы берем гладкую пластинку с плавно меняющейся толщиной. Отсутствие



Рис. 6.

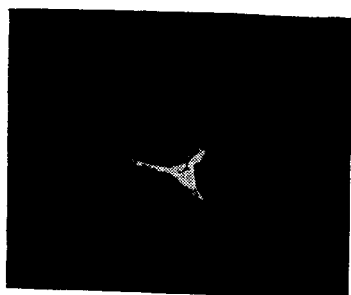


Рис. 7.

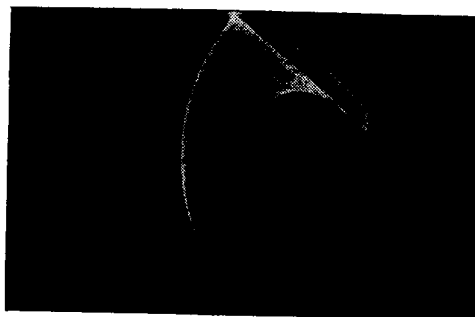


Рис. 8.

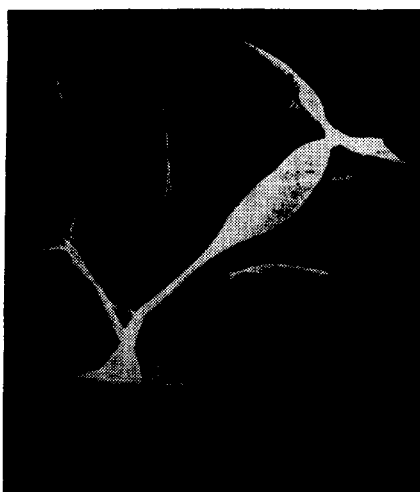


Рис. 9.

изломов, зазубрин и т. п. доказывается тем, что экран вблизи пластинки оказывается равномерно освещенным.

Яркие области и резкие границы этих областей возникают лишь на достаточном расстоянии от пластинки. Внезапность, резкость их появления и резкость границ являются общей у одномерной и двумерной задачи. Новым в двумерной задаче является определенная структура, рисунок, создаваемый лучами (см. рис. 5—9). Таких рисунков нет на исходной пластинке, линии уровня ее толщины имеют плавные очертания!

Отметим еще один принципиальный момент в постановке опыта. Опишем подробнее механизм искривления лучей, рассматривая форму пластинки.

Пусть ее нижняя поверхность строго плоская,  $z \equiv 0$ , а верхняя — задана уравнением

$$z = z_0 + \zeta(x, y),$$

где  $z_0$  — малая средняя толщина, а  $\zeta$  — случайная, но гладкая функция  $x$  и  $y$ . В идеале мы хотели бы задать  $\zeta$  с помощью фурье-интеграла

$$\zeta = \iint f(|\mathbf{k}|) \zeta_{\mathbf{k}} \cos(k_x x + k_y y + \varphi_{\mathbf{k}}) d^2 k;$$

здесь  $\varphi_{\mathbf{k}}$  — случайная фаза, для которой равновероятны все значения от 0 до  $2\pi$ ;  $\zeta_{\mathbf{k}}$  — случайная величина, распределенная по нормальному закону:  $\langle \zeta_{\mathbf{k}} \rangle = 0$ ,  $\langle \zeta_{\mathbf{k}}^2 \rangle = 1$ , а функция  $f(|\mathbf{k}|)$  — регулярная функция, задающая спектр, например  $k^m e^{-k^2}$  достаточно быстро убывающая как при  $k \rightarrow 0$ , так и при  $k \rightarrow \infty$ .

Практически мы пользовались кюветами, в которых слой воды был налит между плоской и слегка изогнутой умелыми руками верхней пластины из оргстекла. Очень трудно избежать образования осесимметричных выпуклостей и вогнутостей, которые естественно получаются при нажиме пальцем на нагретую размягченную пластинку. Осесимметричные деформации пластинки создают нетипичные осесимметричные структуры. Однако после многих проб появился определенный навык, и, как нам кажется, представленные на фотографиях структуры освещенных областей достаточно типичны.

Однако, независимо от навыков в изгибании пластинок и от конкретной их формы, сама постановка опыта такова, что всегда моделируется определенный — безвихревой — тип движения частиц.

В самом деле, отклонение луча по законам геометрической оптики лежит в плоскости, проходящей через нормаль к поверхности и невозмущенный луч. Для лучей, первоначально распространяющихся по оси  $z$  к поверхности, заданной выражением  $z = z_0 + \zeta(x, y)$ , получим

$$\alpha_x = -(n-1) \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \alpha_y = -(n-1) \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

( $n$  — показатель преломления), или в векторной форме

$$\alpha_2 = -(n-1) \text{grad}_2 \zeta.$$

Вспомним, что  $\alpha_2$  — аналог начальной скорости. Если скорость выражается как градиент функции  $\zeta$ , то ротор скорости тождественно равен нулю \*):

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} = 0.$$

\*) Строго говоря, мы доказываем это для начального распределения скорости при  $z = 0$  в зависимости от  $x$  и  $y$ . Можно показать, что и позже при  $z > 0$ , когда  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ , по-прежнему  $\partial \alpha_x / \partial y - \partial \alpha_y / \partial x = 0$ . Однако это утверждение теряет смысл внутри областей, ограниченных каустиками, где одному  $x$  и  $y$  соответствует три или более различных набора  $\xi$ ,  $\eta$ .



К сожалению, невозможен достаточно простой и удобный способ моделирования трехмерной структуры, каустик в трехмерном пространстве.

В заключение параграфа отметим публикации, в которых читатель может познакомиться с последними результатами применения теории катастроф в геометрической оптике<sup>28,30</sup>.

#### 4. КРУПНОМАСШТАБНАЯ СТРУКТУРА ВСЕЛЕННОЙ

Остается пояснить, откуда в названии статьи появилась «космология». Непохож масштаб опыта — несколько сантиметров и миллиарды световых лет во Вселенной, непохож материал — световые лучи в лаборатории и атомы или тяжелые нейтрино во Вселенной. Впрочем, к таким различиям мы привыкли; на то и моделирование, чтобы масштабы были различны!

При малых отклонениях лучей скорость их движения в плоскости  $x, y$  мала, координата  $z$  действительно играет роль времени, отсчитанного вдоль траектории в плоскости  $x, y$  для ньютоновской частицы.

Мы намерены рассматривать опыты со световыми лучами и каустиками как модель образования крупномасштабной структуры Вселенной.

Начальное отклонение лучей света после прохождения пластинки представляет собой аналог начальных возмущений, образование ярко освещенных областей моделирует, по нашему мнению, возникновение плотных облаков газа. Предполагается, что возникновение атомно-плазменного или тяжелонейтринного гигантского облака, обладающего сильно сплюснутой формой, сопровождается или предшествует образованию отдельных галактик. При этом галактики не занимают всего пространства. Галактики в значительной мере объединены в скопления, и все вместе скопления галактик и изолированные галактики долго — до сегодняшнего дня — помнят об облаке, где родились и располагаются главным образом вблизи поверхностей сверхскоплений и около линий их пересечений. Все чаще и наблюдатели говорят о ячеисто-сетчатой структуре распределения вещества во Вселенной<sup>11-14</sup>. В чем сходство и в чем различие между Вселенной и нашими скромными моделями? Сходство состоит в том, что во Вселенной на этапе образования структуры можно пренебречь давлением плазмы, можно пренебречь случайными тепловыми скоростями тяжелых нейтрино.

Пренебрежение давлением означает, что движение соседних «частиц» во Вселенной независимо, как независимо движение соседних лучей света. Здесь надо, может быть, уточнить: движение соседних лучей независимо, каждый луч — это прямая с заданной точкой  $\psi_2$  ( $\xi = x_0, \eta = y_0$ ) пересечения плоскостей  $z = 0$  и с заданным наклоном  $\alpha_2$  ( $x_0, y_0$ ). Однако движение именно соседних лучей коррелировано в том смысле, что если они соседние, то их наклоны, т. е. векторы  $\alpha_2$ , у них обязательно близки между собой. Это не общее свойство лучей, а свойство пластинки, условие гладкости пластинки. С такой же гладкостью начальных условий мы встречаемся и в космологии по очень глубоким причинам, которые здесь не место обсуждать.

Однако есть и глубокое, на первый взгляд, непреодолимое препятствие: лучи в модели совсем не взаимодействуют между собой. Частицы во Вселенной не взаимодействуют через давление, но решающим, главным для них является гравитационное взаимодействие.

Все вместе они создают определенное, зависящее от координат и меняющееся с течением времени, поле тяготения и движутся в этом поле. Со времен Ньютона (см. известное его письмо Бентли) неустойчивость равномерно распределенного вещества известна на качественном уровне. Джинс<sup>15</sup>

в начале века развил количественную ньютоновскую теорию неустойчивости. Лифшиц<sup>16</sup> в середине нашего века рассмотрел малые возмущения однородной расширяющейся Вселенной. Решающая роль гравитационной неустойчивости в формировании структуры Вселенной несомненна.

Как же это согласовать с предлагаемым моделированием?!

В 1970 г. один из авторов (Я. З.) предложил приближенную нелинейную теорию гравитационной неустойчивости холодного вещества в расширяющейся Вселенной<sup>17</sup> (см. также<sup>14</sup>).

Решение записывается в лагранжевой форме:

$$\mathbf{r} = a(t) [\psi + b(t) \mathbf{u}(\psi)];$$

здесь  $a(t)$  — растущая функция времени, описывающая общее расширение Вселенной,  $b(t)$  — растущая функция времени, описывающая рост возмущений. Пространственное распределение возмущений задано функцией лагранжевых координат  $\mathbf{u}(\psi)$ . Все подробности, касающиеся условий применимости этого решения, его точность и т. п., см. в наших публикациях<sup>18-25</sup>. Здесь мы ограничимся только показом сходства приближенного решения с оптической моделью.

Запишем решение в виде

$$\mathbf{R} = \psi + \tau \mathbf{u}(\psi),$$

где введены новые переменные

$$\tau = b(t), \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{a(t)} = \frac{\mathbf{r}}{a(\tau)}.$$

При определенном выборе масштаба пространственной картины (переход от  $\mathbf{r}$  к  $\mathbf{R}$ ) и эффективного времени  $\tau$  в координатах  $\mathbf{R}$ ,  $\psi$ ,  $\tau$  решение оказывается в точности эквивалентным задаче о движении свободных, никак не взаимодействующих, частиц или лучей.

Гравитационное взаимодействие оказалось спрятанным в определение функции  $\tau = b(t)$ .

Эквивалентность двух задач является приближительной. Однако приближение — достаточно хорошее для того, чтобы структура, возникающая в модели, описала структуру Вселенной.

Отметим еще тот факт, что гравитационное взаимодействие характеризуется *потенциалом*, и поэтому эффективная скорость оказывается *потенциальной*, т. е.  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ . Потенциальность в смысле производных компонент вектора  $\mathbf{u}$  по компонентам лагранжевой координаты  $\psi$  обеспечивает и потенциальность в эйлеровом пространстве. Это свойство  $\mathbf{u}(\psi)$  — общее для нашей оптической модели и для Вселенной.

Ограниченность оптической модели, как уже отмечалось, состоит в том, что она двумерна (плюс координата  $z$ , играющая роль времени), тогда как Вселенной трехмерна (плюс время).

Приближенная формула описывает период, далеко выходящий за пределы теории малых возмущений, включая образование каустик \*). Однако и ее область действия ограничена. В областях максимальной плотности вскоре возникают явления, которые приближенная теория не описывает: ударные волны, многопоточковые конфигурации, дробление на галактики и т. п.

И все же структура Вселенной и сегодня несет отпечаток героического периода образования каустик<sup>14</sup>!

\*) Об образовании каустик в задачах общей теории относительности для частиц пыли ( $p = 0$ ), движущихся в синхронной системе отсчета, упоминалось ранее<sup>26, 27</sup>.

Мы сознаем, что описанная оптическая модель методически относится к тому времени, когда физика делалась с помощью сургуча и веревочек. Эта общая характеристика не изменяется, когда источником света является лазер.

Сегодня трехмерная картина, соответствующая приближенному решению, может быть получена на дисплее электронно-вычислительной машины. Соответствующие картины да еще с кодированием плотности с помощью цвета могут быть записаны в виде киноленты.

И все же осознание далеко идущих возможностей современной техники не уменьшает радости прямого наблюдения каустик, вспыхивающих при движении экрана в возмущенном луче в затемненной лаборатории

Институт прикладной математики  
им. М. В. Келдыша АН СССР

# ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
2. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.— М.: Наука, 1973.— С. 86.
3. Лифшиц Е. М., Судаков В. В., Халатников И. М.— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 1847.
4. Арнольд В. И. Теория катастроф.— М.: Знание, 1981.— (Сер. «Математика и кибернетика». № 9).
5. Арнольд В. И.— Природа, 1979, № 10, с. 54.
6. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее применения.— М.: Мир, 1980.
7. Арнольд В. И.— Функц. анализ и его прилож., 1972, т. 6, с. 3.
8. Arnold V. I.— Comm. Pure and Appl. Math., 1976, v. 39, p. 557.
9. Арнольд В. И.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1982, т. 8, с. 21.
10. Arnold V. I., Zeldovich Ya. B., Shandarin S. F. Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics 1982, v. 20, p. 111.
11. Jovee M., Einasto J. Tago E.— Mon. Not. RAS, 1978, v. 185, p. 357.
12. Thompson L. A., Gregory S. A.— Astrophys. J., 1978, v. 220, p. 809.
13. Tarenghi M., Chincarini G., Rood H. J., Thompson L. A.— Ibid., 1978, v. 234, p. 793.
14. Крупномасштабная структура Вселенной/Ред. М. Лонгейр, Я. Эйнасто.— М.: Мир, 1981.
15. Jeans J. H.— Phil. Trans., 1902, v. 129, p. 44.
16. Лифшиц Е. М.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 587.
17. Зельдович Я. Б.— Астрофизика, 1970, т. 6, с. 119.
18. Дорошкевич А. Г., Рябенский В. С., Шандарин С. Ф.— Астрофизика, 1973, т. 9, с. 258.
19. Sunyaev R. A., Zeldovich Ya. B.— Astron. and Astrophys., 1972, v. 20, p. 189.
20. Doroshkevich A. G., Shandarin S. F., Saar E.— Mon. Not. RAS, 1978, v. 184, p. 643.
21. Шандарин С. Ф.— Астрофизика, 1980, т. 16, с. 769.
22. Шукуров А. М.— Астрофизика, 1981, т. 17, с. 469.
23. Зельдович Я. Б., Шандарин С. Ф.— Письма Астрон. ж., 1982, т. 8, с. 131.
24. Зельдович Я. Б.— Ibid., с. 195.
25. Зельдович Я. Б., Шандарин С. Ф.— Ibid., 1982, т. 8, с. 259.
26. Лифшиц Е. М., Халатников И. М.— УФН, 1963, т. 80, с. 391.
27. Грищук Л. П.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 475.
28. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.
29. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений.— М.: Наука, 1982.
30. Berry M. V., Upstill C.— Progr. in Optics, 1980, v. 18, p. 259.