

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

536.76

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ, КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
И НЕУСТОЙЧИВОСТИ *)

П. Флэри

Переходы между многими различными состояниями вещества происходят в результате микроскопических взаимодействий с участием огромного (приблизительно 10^{23}) числа частиц, из которых состоит вещество, и приводят к драматическим изменениям его макроскопических свойств. Значения некоторых физических параметров при этом обращаются в нуль, тогда как другие параметры — в бесконечность. Эти превращения и характер их протекания обладают удивительными чертами сходства в таких, казалось бы, непохожих системах, как жидкости, магнитные вещества, сверхпроводники, сегнетоэлектрики и жидкие кристаллы, что свидетельствует о принципиальной общности явлений фазовых переходов. В статье обсуждается природа и степень этой общности для равновесных многочастичных систем и указываются аналогии с явлениями неустойчивости в системах, далеких от равновесия (таких, как лазеры, течения жидкостей и каскадные электронные устройства).

Существует тесная связь между физическими свойствами материалов и состояниями вещества, образующего эти материалы. Нам всем хорошо известно, как сильно отличаются, например, свойства воды в жидком и твердом состояниях. К не менее ярким изменениям физических свойств приводят и многие другие типы изменений состояния вещества, или фазовые переходы, хотя большинству они менее знакомы, чем переход «жидкость — твердое тело». Такие свойства, как намагнитченность, вязкость и электропроводность материалов изменяются на порядки величины, когда они переходят соответственно в магнитное, сверхтекучее или металлическое состояние. Что вызывает столь сильные изменения и как их можно понять?

В некоторых случаях (таких, как переход «жидкость — твердое тело») изменения наступают внезапно, в результате того, что при изменении какого-либо внешнего параметра, например температуры, свободная энергия новой фазы оказывается ниже свободной энергии старой фазы. Такие скачкообразные переходы называют переходами первого рода, поскольку при них испытывают скачок первые производные различных термодинамических потенциалов. В других случаях (таких, как возникновение магнетизма, сверхтекучести или начало разделения фаз в жидком растворе) новая фаза вырастает из старой непрерывно и однородно по пространству. При этом в окрестности точки перехода многие физические величины обнаруживают аномальное поведение. О таких переходах говорят как о непрерывных переходах, или фазовых переходах второго рода. Настоящая статья целиком посвящена именно этим переходам.

*) Fleury P. A. Phase Transitions, Critical Phenomena and Instabilities. — Science, 1981, v. 211, No. 4478, pp. 125—131. — Перевод А. А. Собянина.

П. А. Флэри — директор Лаборатории исследования материалов в «Bell Laboratories», Меррей-Хилл, шт. Нью-Джерси, США.

© The American Association for the Advancement of Science 1981.

© Перевод на русский язык, издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Успехи физических наук», 1982.

Расходимость сжимаемости в жидкости, восприимчивости в магнетике, диэлектрической проницаемости в сегнетоэлектрике, все это — примеры аномального поведения, которое возникает вследствие кооперативного участия в изменении макроскопических свойств материалов астрономически большого числа микрочастиц ($\sim 10^{23}$). Как понять и чем объяснить эти черты сходства в системах, состоящих из столь различных частиц, как, например, атомы гелия и молекулы жидких кристаллов? Эта проблема бросала вызов науке на протяжении многих десятилетий.

Благодаря напряженным усилиям как теоретиков, так и экспериментаторов в течение последних 15 лет, мы в состоянии теперь описать это множество явлений с единой точки зрения и даже можем делать количественные предсказания относительно поведения систем, пока еще не изученных экспериментально. В настоящей статье освещаются некоторые теоретические идеи и экспериментальные достижения, которые привели к современному общему подходу к описанию фазовых переходов и критических явлений в равновесных системах. В ней указываются также некоторые возможные направления распространения этого подхода применительно к процессам, протекающим в сильно неравновесных системах. Исследование фазовых переходов и критических явлений представляет научный интерес с точки зрения установления связи между аномалиями макроскопических свойств и характером взаимодействий огромного ($\sim 10^{23}$) числа микрочастиц. Однако оно имеет и технологическое значение в связи с возможностью контролировать и изменять свойства материалов на основе правильного понимания микроскопической природы этих свойств. Например, теперь мы понимаем, что резкое повышение качества сплавов, полученных методом спинодального распада, появление «высокотемпературных» сверхпроводников, акусто-оптических модуляторов, магнитных ферритов и т. д. стали возможными благодаря явлениям, ответственным за фазовые переходы в этих материалах.

В данной статье мы коснемся многих сложных и тонких представлений современной теории критических явлений, по необходимости, лишь весьма поверхностным образом. Для читателей, желающих глубже познакомиться с этим кругом вопросов, можно указать ряд прекрасных критических обзорных статей, посвященных различным научным аспектам этой области исследований¹⁻⁶. Кроме того, исследования в данных направлениях развивались в течение последнего десятилетия так бурно, а число авторов, внесших вклад в эти исследования, было так велико, что процитировать их сколько-нибудь исчерпывающим образом просто невозможно. Вместо этого, с целью иллюстрации основных идей и достижений, мы ссылаемся на отдельные избранные работы. Отбор носит, разумеется, субъективный характер и предполагает неявные извинения в адрес тех многих исследователей, работы которых не нашли здесь непосредственного упоминания.

Я начну с классической теории фазовых переходов в приближении среднего поля, поскольку эта теория позволяет ввести многие основные понятия (параметра порядка, корреляционной функции, критического показателя и т. д.) и служит отправным пунктом для обсуждения более тонких (флуктуационных) эффектов, играющих центральную роль в современном понимании природы критических явлений. Затем я остановлюсь на ряде отклонений от предсказаний теории среднего поля, наблюдаемых экспериментально, и перейду к обсуждению современных достижений, а именно теории масштабных преобразований и теории группы перенормировок, вещающих современный уровень наших знаний в этой области. Наконец, я коснусь вопроса о появлении порядка и роли флуктуаций в системах, далеких от состояния равновесия, таких, как лазеры, гидродинамические неустойчивости и электронные устройства. Указанные систе-

мы обнаруживают ряд далеко идущих аналогий с непрерывными фазовыми переходами. Последнее вселяет надежду, что некоторые мощные методы, оказавшиеся столь плодотворными во второй из вышеупомянутых областей, могут быть с успехом применены и в первой области.

ТЕОРИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Все рассматриваемые здесь фазовые переходы характеризуются установлением дальнего порядка относительно некоторого физического свойства *). Это свойство можно использовать в качестве количественной характеристики новой фазы. Оно называется параметром порядка и обозначается ниже через ψ_0 . В ферромагнетике параметру ψ_0 отвечает намагниченность. В жидком кристалле ему можно сопоставить коэффициент оптического двойного лучепреломления. Параметр порядка по определению равен нулю по одну сторону от точки перехода и отличен от нуля по другую сторону от этой точки. Если параметр порядка монотонно увеличивается в новой фазе, начиная с нулевого значения, то такой переход называется непрерывным переходом или фазовым переходом второго рода. Если же параметр порядка возникает скачком, то переход называют скачкообразным или фазовым переходом первого рода (рис. 1). Возникновение порядка можно рассматривать как результат нарушения (понижения) симметрии системы. Например, при структурном фазовом переходе из непьезоэлектрического состояния в сегнетоэлектрическое кристалл теряет симметрию относительно центра инверсии. На языке теории групп упорядоченной (менее симметричной) фазе отвечает при этом подгруппа группы симметрии исходной (более симметричной) фазы, а исчезающая часть элементов симметрии отвечает параметру порядка. В общем случае параметр порядка не обязательно должен быть простой, однокомпонентной скалярной величиной; он может быть и весьма сложным, в зависимости от степени сложности структуры двух фаз, которые этот параметр связывает. Сложность параметра порядка характеризуется числом компонент n , которые необходимо задать, чтобы определить его полностью.

Для того чтобы пояснить, как устанавливается порядок, рассмотрим совокупность большого числа N_0 микроскопических объектов, каждый из которых описывается некоторой динамической переменной $\psi_i(\mathbf{r}_i, t)$. Последней может отвечать локальное значение спина, совокупность смещений атомов и т. д. Если величины ψ_i выбраны правильно, макроскопический параметр порядка $\langle \psi \rangle$ дается выражением

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{N_0} \left\langle \sum_i \psi_i(\mathbf{r}_i, t) \right\rangle, \quad (1)$$

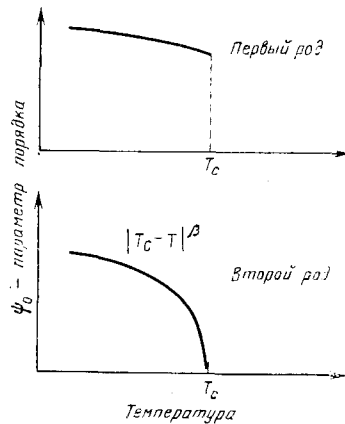


Рис. 1. Схематический вид температурной зависимости равновесного значения параметра порядка ψ_0 вблизи критической температуры T_c для фазовых переходов первого и второго рода.

*) Значительное внимание привлек в последнее время новый класс фазовых переходов, для которых понятия параметра порядка и дальнего порядка отсутствуют. Начало обсуждению таких переходов было положено в работе ⁷.

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по статическому ансамблю. Например, в ферромагнетике величина ψ_i характеризует направление в пространстве элементарного магнитного, или спинового, вектора. Условие $\langle \psi \rangle \neq 0$ выражает тот факт, что в упорядоченной фазе имеется некоторый общий порядок в расположении спинов даже в отсутствие внешнего поля. Физически это может происходить за счет взаимодействия отдельных (элементарных) спинов, обнаруживающего так или иначе кооперативный характер, поскольку оно приводит к дальнему порядку. В противном случае не могло бы возникнуть отличное от нуля макроскопическое среднее значение ψ . Простейший способ описания кооперативного характера этого взаимодействия известен под названием теории среднего поля. В ней предполагается, что поведение данного спина ψ_i можно рассчитать, зная отклик этого спина на локальное поле, создаваемого средней конфигурацией соседних с ним спинов, т. е. зная среднее поле, которое они создают. В этом подходе пренебрегают отклонениями конфигурации спинов от средней, т. е. флуктуациями. Отсюда следует, что разность энергий упорядоченной и неупорядоченной фаз можно выразить исключительно через $\langle \psi \rangle \equiv \psi_0$. В приближении среднего поля (теории фазовых переходов Ландау) разложение указанной разности свободных энергий A можно записать в виде ¹⁻³

$$A = a\psi_0^2 + b\psi_0^4 + c\psi_0^6 + \dots, \quad (2)$$

где a, b, c, \dots — аналитические функции от $T - T_c$ (T — температура, T_c — критическая температура), и мы ограничились случаем, когда члены с нечетными степенями ψ_0 запрещены в силу соображений симметрии.

Строгое утверждение состоит в том, что для равновесной системы величину A можно выразить через величины $\langle \psi^p \rangle$. Теория среднего поля отвечает предположению, что $\langle \psi^p \rangle = \langle \psi \rangle^p$. Поскольку A является термодинамической величиной, из вышепринятого выражения для A можно получить ряд важных и непосредственно измеряемых физических характеристик. Например, значение ψ_0 получается путем простого дифференцирования A с применением соответствующих критериев устойчивости ⁶. Уравнение $\partial A / \partial \psi_0 = 0 = (2a + 4b\psi_0^2)\psi_0$ имеет два решения: $\psi_0 = 0$ и $\psi_0 = -a/2b$. Таким образом, полагая $a = a'\tau$ (где $\tau = (T - T_c)/T_c$), мы сразу же видим, что при приближении T к T_c снизу, ψ_0 обращается в нуль как некоторая степень приведенной температуры τ . Конкретно $\psi_0 = C|\tau|^\beta$. Величина β называется критическим показателем (а также критическим индексом или критической экспонентой) параметра порядка; в теории среднего поля ее значение равно $1/2$. Для многих типов фазовых переходов показатель β может быть определен непосредственно из опытных данных (например, путем измерения макроскопической намагниченности, поляризации, коэффициента оптического двойного лучепреломления или плотности). При этом лишь в специальных случаях — теперь мы в основном знаем, каких именно, — для β получают значение, совпадающее с предсказываемым теорией среднего поля. То же можно сказать и о других важных физических величинах, имеющих особенность при $|\tau| \rightarrow 0$. Из таких величин, возможно, наиболее хорошо знакомыми читателю являются две: статическая восприимчивость χ (критический показатель γ) и теплоемкость C_p (критический показатель α) (рис. 2).

Согласно определению статической восприимчивости ⁶

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \psi^2} \Big|_{\psi=\psi_0} \equiv \chi^{-1}, \quad (3)$$

$$\chi^{-1} = 2a + 12b\psi_0^2 = \begin{cases} 2a = 2a'\tau, & \tau > 0, \\ -4a = 4a'|\tau|, & \tau < 0. \end{cases}$$

Таким образом, в теории среднего поля $\chi \sim \tau^{-1} \sim \tau^{-\nu}$, и, стало быть, χ расходится при приближении к T_c как сверху, так и снизу по одному и тому же степенному закону с показателем $\nu = 1$. Заметим, что коэффициенты («амплитуды») при зависимости $\chi(\tau)$ выше и ниже T_c отличаются в два раза.

С более общей точки зрения полезно ввести понятие пространственно-временной корреляционной функции $C(\mathbf{r}, t)$ параметра порядка

$$C(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \psi(\mathbf{r}', t') \rangle, \quad (4)$$

фурье-образ которой прямо связан с динамической восприимчивостью $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ (см. ⁶). Выражение (4) определяет вероятность того, что если микроскопический параметр порядка ψ имеет данное значение $\psi(\mathbf{r}', t')$ в точке с пространственными координатами \mathbf{r}' и в момент времени t' , то в точке с координатами $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и в момент времени $t - t'$ он будет иметь некоторое другое значение $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$. Особенный интерес представляет одновременная корреляционная функция $C(\mathbf{r}, 0)$, определяющая степень пространственных корреляций параметра порядка. На малых расстояниях r конкретный вид функции $C(r)$ зависит от характера упорядочившихся выше микроскопических взаимодействий, но на больших расстояниях $C(r)$ обычно спадает экспоненциально ⁸:

$$C(\mathbf{r}, 0) \sim C_0 e^{-r/\xi}. \quad (5)$$

Характерное расстояние ξ , на котором происходит этот спад, называется длиной корреляции и представляет собой еще одну важную величину, обнаруживающую особенность в точке перехода. Простые соображения показывают, что в теории среднего поля длина корреляции расходится с критическим показателем ν , имеющим значение $1/2$:

$$\xi = \xi_0 \tau^{-\nu} = \xi_0 \tau^{-1/2}. \quad (6)$$

Наиболее непосредственно длина ξ и в целом функция $C(\mathbf{r}, t)$ определяются в экспериментах по рассеянию ⁶.

В теории среднего поля теплоемкость C_p испытывает скачок, но не расходится в точке перехода, что соответствует значению $\alpha = 0$ для ее критического показателя. Теплоемкость тоже можно выразить через одновременную автокорреляционную функцию — в данном случае корреляционную функцию плотности энергии, которая содержит более высокие степени ψ , чем корреляционная функция (4). Соответствующие общие пространственно-временные корреляционные функции не исследовались столь подробно, как функция $C(\mathbf{r}, 0)$, хотя отдельные эксперименты (по рассеянию света, поглощению звука) позволяют получать информацию о некоторых свойствах этих функций.

Включая в себя большинство понятий (параметра порядка, корреляционной длины, критических показателей), требующихся для единого опи-

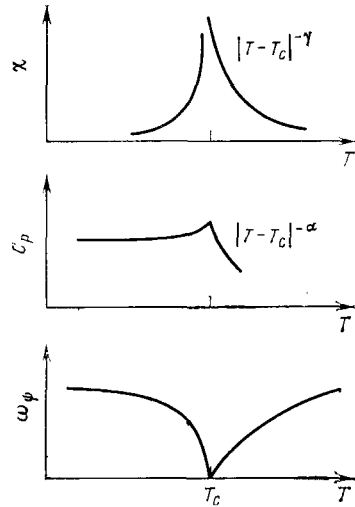


Рис. 2. Характер температурной зависимости вблизи T_c статической восприимчивости χ , удельной теплоемкости C_p и частоты мягкой моды ω_ϕ для непрерывных фазовых переходов, или фазовых переходов второго рода.

сания фазовых переходов, теория среднего поля обладает в то же время тем серьезнейшим недостатком, что в ней не учитываются коррелированные флуктуации параметра порядка и, значит, их существенное влияние на аномалии физических величин. Особенно примечательно, что в отсутствие флуктуационных эффектов все непрерывные фазовые переходы характеризовались бы одним и тем же типом особенностей, т. е. для всех таких переходов предсказывается один и тот же набор критических показателей: $\alpha = 0$, $\gamma = 1$, $\beta = 1/2$ и $\nu = 1/2$.

Фактически уверенность в том, что так и обстоит дело в действительности, существовала на протяжении многих десятилетий. Эта уверенность доходила даже до такой степени, что когда в экспериментах по определению формы кривой сосуществования вблизи критической точки «жидкость — пар» получались значения β более близкие к $1/3$, чем к $1/2$, то такие эксперименты объявлялись ошибочными. Слово «ошибочные» вовсе не обязательно означает в данном случае недоверие к искусству экспериментатора получать правильные результаты; оно может употребляться и в том смысле, что система исследовалась недостаточно близко к T_c , чтобы обнаружить асимптотическое поведение, предсказываемое теорией для исчезающе малых t . Этим подчеркивается, что критические показатели вводятся для описания основного («ведущего») типа особенностей, а такое описание справедливо лишь при достаточно малых значениях t . Насколько малы должны быть эти значения, или какова ширина асимптотической области, — общего ответа на этот вопрос не существует и поныне, хотя в отдельных случаях теория группы перенормировок позволяет получать некоторые предсказания на этот счет.

ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ТЕОРИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Подробные описания экспериментальных наблюдений, находящихся в противоречии с предсказаниями теории среднего поля, публикуются начиная с 50-х годов⁶. Здесь достаточно указать, что в большом числе измерений, выполняемых со все возрастающей точностью в магнетиках, сверхтекучем гелии, жидких растворах и т. п., для критических показателей, характеризующих температурную зависимость параметра порядка, восприимчивости, корреляционной длины и теплоемкости, получают значения, заметно отличающиеся от предсказываемых теорией среднего поля.

Несмотря на эти различия, имеется несколько типов фазовых переходов (в системах, столь различных по своим физическим свойствам, как жидкости и магнитные вещества), для которых были найдены одни и те же значения критических показателей. Таким образом, на смену представлению об абсолютной универсальности критического поведения, предсказываемой теорией среднего поля, пришел более ограниченный принцип универсальности. О системах, обнаруживающих один и тот же тип критических аномалий, говорят, что они принадлежат к одному и тому же классу универсальности.

С теоретической точки зрения принадлежность системы тому или иному классу универсальности² определяется видом ее функции Гамильтона (или гамильтониана), в особенности свойствами симметрии этого гамильтониана (т. е. степенями и комбинациями членов, типа ψ^p , размерностью пространства d , и числом компонент параметра порядка n). В соответствии с такой («ограниченной») гипотезой универсальности, добавляемые в гамильтониан члены (или параметры, варьируемые в ходе эксперимента), которые не меняют его симметрии, не должны влиять на критическое поведение системы (хотя они могут сдвигать T_c). Например, критические

показатели, описывающие сверхтекучий переход в жидком гелии, не должны зависеть от давления.

Еще до того, как была сформулирована гипотеза универсальности, связывающая характер критического поведения в различных системах, была выдвинута особая гипотеза, называемая гипотезой подобия, которая позволяет находить значения ряда критических показателей при условии, что некоторые из этих показателей (для этой же самой системы) уже известны¹⁻⁴. Например, соотношение подобия $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ выполняется уже в рамках теории среднего поля, но его справедливость была проверена и для тех систем, значения критических показателей в которых по отдельности существенно отличаются от предсказываемых теорий среднего поля.

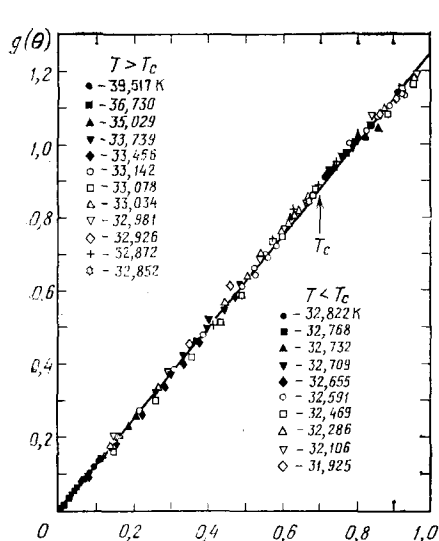


Рис. 3. Сравнение результатов экспериментальных измерений приведенной намагниченности (значки) с теоретическими предсказаниями, основанными на использовании магнитного уравнения состояния (сплошная кривая), с определенным выбором масштабов измерения переменных, диктуемым статической теорией подобия.

Параметр θ характеризует положение точек в плоскости «температура — магнитное поле» вдоль линий постоянной теплоемкости (заимствовано из⁹).

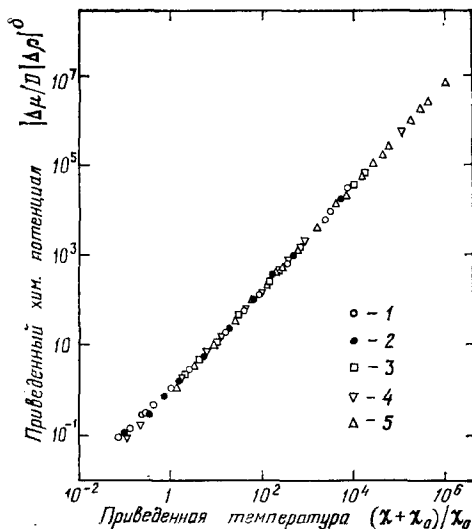


Рис. 4. Зависимость приведенного химического потенциала от приведенной температуры для пяти разных жидкостей вблизи критических точек «жидкость — пар»:

1 — гелий-3, 2 — гелий-4, 3 — ксенон, 4 — двуокись углерода, 5 — вода (заимствовано из¹⁰).

Соотношения подобия между критическими показателями следуют из предположения, что свободная энергия и корреляционная функция являются однородными функциями тех термодинамических переменных, масштаб измерения которых можно выбрать зависящим от единственной характерной длины (длины корреляции ξ). Соотношения подобия должны выполняться независимо от того, к какому классу универсальности принадлежит та или иная система. Проверке свойств однородности и подобия (инвариантности при преобразованиях масштаба) были посвящены значительные экспериментальные усилия. Особенно яркие примеры приведены на рис. 3 для случая ферромагнитного перехода в Sr Br_2 ⁹ и на рис. 4 для ряда критических точек «жидкость — пар» в простых жидкостях¹⁰.

Справедливость гипотез подобия и универсальности неоднократно проверена в опытах по исследованию аномалий статистических физических величин вблизи обычных критических точек. В настоящее время изучаются значительно более сложные типы поведения в ситуациях, условно именуемых «мультикритическими» явлениями. К ним относятся точки пересечения двух и более линий особых точек в плоскости термодинамических состояний системы. Эти явления привлекают к себе большое внимание как теоретиков, так и экспериментаторов, однако обсуждение этих явлений выходит за рамки настоящей статьи (см. ^{2, 4, 5}).

ТЕОРИЯ ГРУППЫ ПЕРЕНОРМИРОВОК

Принципы подобия и универсальности знаменуют собой определенный прогресс по сравнению с теорией среднего поля. Однако эти принципы являются всего лишь гипотезами, а не теориями в полном смысле

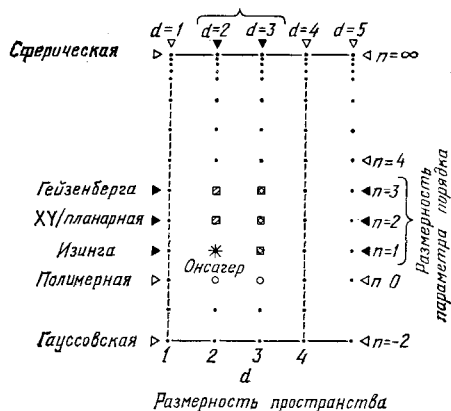


Рис. 5. Диаграмма плоскости переменных d, n .

Квадратиками и кружками показаны конкретные системы, представляющие наибольший интерес, в том числе двумерная ($d=2$) модель Изинга ($n=1$), точное решение которой было получено Онзагером (заимствовано из ²).

Вильсон не предложил подход с использованием группы перенормировок. Для желающих составить себе сколько-нибудь ясное представление о данном подходе можно рекомендовать ряд обзорных статей ^{2, 5, 11} и книг ^{3, 4} на эту тему. Здесь мы сумеем остановиться лишь на некоторых наиболее очевидных особенностях этого метода. Одна из таких особенностей — существование так называемой пороговой размерности d^* . В общем случае систему, испытывающую фазовый переход, можно охарактеризовать размерностью пространства d (для математических моделей эта размерность, разумеется, вовсе не обязательно должна быть равна трем) и числом n компонент параметра порядка. В пространстве, образуемом переменными d и n , несколькими наиболее известным и иногда точно решаемым моделям отвечают особо важные точки. В математическом отношении n и d удобно считать непрерывными переменными и исследовать, как меняется характер критического поведения при изменении этих переменных (рис. 5).

Напомним, что главная проблема теории состоит в правильном учете флуктуаций. Чем сильнее флуктуации, тем хуже описывается приближением среднего поля поведение системы в целом. Относительную роль флуктуаций можно оценить с помощью метода, предложенного Гинзбургом ¹². Для того чтобы теория среднего поля оставалась справедливой

ниже T_c , флуктуации $\delta\psi$ параметра порядка ψ должны оставаться малы-ми по сравнению с его средним значением ψ_0 :

$$(\delta\psi)_{\Omega_\xi}^2 \ll (\psi_0)_{\Omega_\xi}^2.$$

Флуктуации коррелируют (взаимодействуют) между собой лишь на расстояниях порядка ξ . Поэтому усреднение вышеприведенных величин следует проводить по соответствующему корреляционному объему Ω_ξ (этот объем, очевидно, расходится при $\tau \rightarrow 0$). Легко показать, что критерий Гинзбурга можно переписать в виде ⁸

$$\tau^{-\gamma} \ll \tau^{2\beta - \nu d}, \quad (7)$$

где использовано то обстоятельство, что $\Omega_\xi = \xi^d$. Условие (7) выполняется при сколько-нибудь малых τ , очевидно, только в том случае, если $\gamma + 2\beta < \nu d$, или, что то же самое, если $d > (\gamma + 2\beta)/\nu$. В теории среднего поля $(\gamma + 2\beta)/\nu = 4$. Следовательно, пренебрежение флуктуациями в теории среднего поля является самосогласованным приемом лишь при $d > 4$. Когда $d = 4$, то мы имеем дело с пространством пороговой размерности $d = d^*$, в котором теория среднего поля применима с точностью до слабых (обычно логарифмических) поправок. При $d < d^*$ должны выполняться соотношения подобия. В некоторых случаях ⁸ — например для сильно анизотропных систем — объем Ω_ξ увеличивается пропорционально не ξ^d , а ξ^{d+m} . Условие $m > 0$ означает, что корреляционный объем возрастает быстрее, чем ξ^d . При этом флуктуации усредняются по все большему объему и, стало быть, ослабляются, в результате чего теория среднего поля оказывается более хорошим приближением. Отличие m от нуля приводит к тому, что в критерии (7) величину d нужно заменить на $d + m$; пороговая размерность пространства d^* оказывается при этом ниже четырех и попадает в область значений, отвечающих реальным физическим системам. Каково конкретное значение m , зависит от вида и радиуса действия микроскопического потенциала взаимодействия частиц в системе ⁸. Для потенциалов с коротким радиусом действия $m = 0$ и, стало быть, $d^* = 4$. Таким образом, в двумерной ($d = 2$) изинговской системе, типа K_2CoF_4 , для которой разность $d^* - d$ достаточно велика, флуктуации должны быть большими, и ее поведение должно сильно отличаться от предсказываемого теорией среднего поля. Трехмерная изинговская система, которой отвечает $d^* = 4 > d = 3$, должна обнаруживать не столь сильные, но все же значительные отклонения от предсказаний теории среднего поля. Можно показать, что для одноосной системы с дипольным взаимодействием $m = 1$ и, значит, $d^* = 3$. Поэтому в случае трехмерного одноосного кристалла $d^* = d = 3$, и для него следует ожидать наличия лишь логарифмических отклонений от поведения, предсказываемого теорией среднего поля. Наблюдения ¹³ количественно согласуются с этим заключением для кристалла $LiTbF_4$. Существуют и такие системы, для которых $m = 2$ и, значит, $d^* = 2$. К данному классу относятся некоторые структурные фазовые переходы в трехмерных кристаллах. Следует ожидать, что во всех случаях, когда $d > d^*$, теория среднего поля применима. Представленные на рис. 6 экспериментальные данные служат хорошим доказательством правильности этих идей ⁸.

Исходя из факта существования пороговой размерности, выше которой справедлива теория среднего поля, К. Вильсон и др. развили формальную процедуру вычислений, в которой d рассматривается как непрерывная переменная, а $\varepsilon = 4 - d$ — как параметр разложения. В итоге для ряда систем удалось вычислить значения критических показателей

в различных порядках малости по ε . Типичные результаты таковы ²:

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$\alpha = \frac{4-n}{2(n+8)} \varepsilon + \frac{(n+2)^2(n+28)}{4(n+8)^3} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(n+8)} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Полагать в конце вычислений, выполненных по теории возмущений, $\varepsilon = 1$ кажется математически безрассудным, однако это дает весьма неплохое

согласие с экспериментом. Например, результаты расчетов ¹⁴ критических показателей γ , α и ν для трехмерной модели Изинга находятся в прекрасном согласии с экспериментальными данными для бинарных жидких растворов ⁵.

Указанный метод расчета — лишь одно из существенных достижений теории Вильсона. Другое ее достижение состоит, безусловно, в обобщении обычной точки зрения, при котором данной системе (испытывающей фазовый переход) сопоставляется не один единственный гамильтониан, а целое пространство гамильтонианов, движение точки в котором осуществляется путем применения вполне определенных математических преобразований. Если эти преобразования выполняются в пространстве реальных переменных, то их можно рассматривать как суммирование по все большему и большему объемам. При этом учитывается существенная часть взаимодействий, ответственных за упорядочение, и в то же время при каждом новом шаге самосогласованным образом перенормируются масштабы измерения пространства. Операцию получения нового гамильтониана из ста-

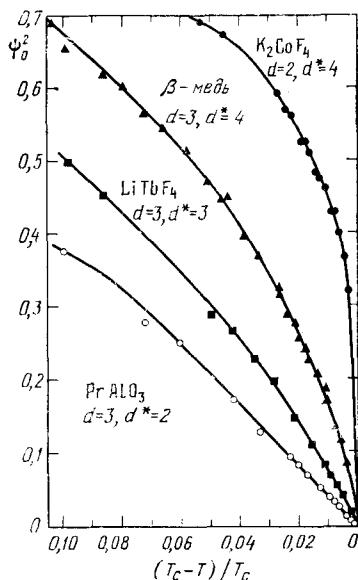


Рис. 6. Квадрат параметра порядка, определенный из данных экспериментов по рассеянию нейтронов, для переходов с различной пространственной размерностью d и пороговой размерностью d^* .

При $d > d^*$ наблюдаемая зависимость ψ_0^2 от температуры при $[1 - (T/T_c)] \rightarrow 0$ описывается прямой линией в соответствии с предсказаниями теории среднего поля. По мере того как d^* становится больше d , наблюдаются все возрастающие отклонения от теории среднего поля (заимствовано из ⁸).

рого с помощью оператора преобразования R схематически можно записать в виде

$$RH = H'.$$

Указанная форма записи не зависит от того, производится ли эта операция в реальном пространстве или с помощью какого-либо другого удобного математического приема.

Результаты последовательных применений оператора группы перенормировок R можно наглядно представить себе как некоторые «линии токов» в пространстве гамильтонианов. Отдельные гамильтонианы (или точки), которые первоначально могут выглядеть совершенно разными, сходятся к одной и той же «фиксированной» (стационарной, неподвижной)

точке при условии, что первоначальные различия между ними можно выразить исключительно на языке так называемых несущественных переменных. Гамильтониан фиксированной точки обладает тем свойством, что ^{2, 4}

$$RH^* = H^*.$$

Собственные значения этого уравнения как раз и дают величины критических показателей. Хотя техника группы перенормировок во всем ее объеме кажется большинству из нас недоступной для понимания, красоту и силу этого метода можно оценить, в известных пределах, и не вникая в его подробности. Особенно важно подчеркнуть, что метод группы перенормировок вскрывает математический механизм и дает физическое обоснование гипотез подобия и универсальности. И, конечно же, он представляет средства для вычисления как критических показателей, так и однородных («скейлинговых») функций. Этот метод следует признать одним из главных теоретических достижений в современной физике конденсированного состояния.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали лишь статические критические явления, которые происходят в равновесных условиях и описываются одновременными корреляционными функциями. Динамика фазовых переходов ставит перед исследователями значительно более сложные проблемы ⁵. В самых общих чертах изучение динамики требует: в теоретическом плане — вычисления пространственно-временных корреляционных функций, а в экспериментальном — проведения измерений в нестационарных и неравновесных условиях. Критические динамические процессы можно изучать с помощью макроскопических измерений коэффициентов переноса ¹⁶ (таких, как теплопроводность или вязкость), однако значительно более полную информацию об этих процессах дают прямые измерения временных зависимостей флуктуаций параметра порядка и некоторых других величин в опытах по неупругому рассеянию излучений ¹⁷. При приближении к T_c характерная частота флуктуаций параметра порядка ψ понижается, что отражает возрастающую восприимчивость системы по отношению к искажениям, отвечающим переходу в новую фазу. Это уменьшение частоты флуктуаций называется «критическим замедлением».

Динамическим аналогом ⁵ статической теории среднего поля является так называемая теория Ван-Хова, или традиционная теория «замедления». В традиционной теории никакие кинетические коэффициенты или коэффициенты переноса не испытывают аномального поведения, а поэтому замедление флуктуаций можно описать с помощью одних лишь статических критических показателей (особенно важен показатель статической восприимчивости). Поскольку характерное время релаксации параметра порядка ⁵ определяется отношением статической восприимчивости к кинетическому коэффициенту или коэффициенту переноса, обнаружение аномального поведения коэффициента переноса свидетельствует о нарушении традиционного подхода.

Нарушение традиционной теории подтверждают, например, экспериментальные наблюдения аномальных температурных зависимостей коэффициента теплопроводности вблизи точки сверхтекучего перехода и ширины линии рэлеевского рассеяния ¹⁸ вблизи критических точек в жидкостях и жидких смесях. Усовершенствования в области теории начались с рассмотрения взаимодействия мягкой моды, отвечающей параметру порядка, с другими возможными низкочастотными модами в системе. Эти

так называемые теории связанных мод¹⁹ описывают динамическое критическое поведение лишь приближенно, однако их результаты зачастую хорошо согласуются с экспериментом (рис. 7). В основе более общего подхода, называемого теорией динамического подобия⁵, лежит идея изменения масштаба частоты по аналогии с идеей изменения масштаба длины в теории статического подобия. Теория динамического подобия, хотя и

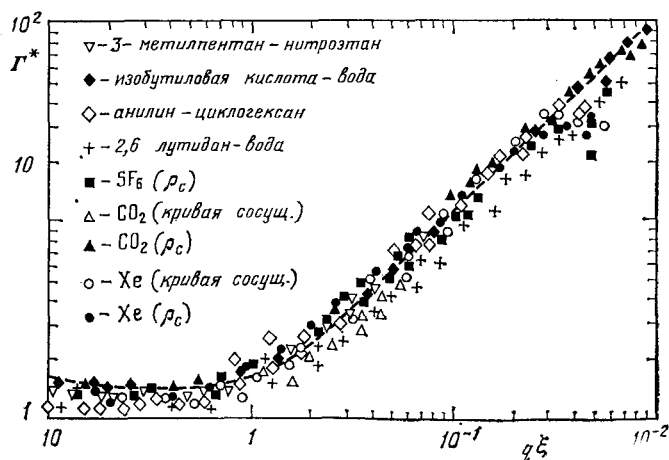


Рис. 7. Зависимость приведенной критической частоты Γ^* от произведения $q\xi$ (где q — волновой вектор рассеяния и ξ — корреляционная длина) для семи различных жидкостей и жидких растворов.

Штриховая кривая, почти полностью покрытая значками, отвечает предсказаниям теории (заимствовано из¹⁸).

успешная во многих отношениях, является тем не менее феноменологической; недавно она вошла составной частью в динамические обобщения подхода с использованием группы перенормировок.

Как из принципа динамического подобия, так и из теории группы перенормировок вытекает, что для определения принадлежности системы к тому или иному динамическому классу универсальности нужно знать не только значения величин n и d , но также конкретный вид законов сохранения и соотношения, типа скобок Пуассона, между параметром порядка и плотностями сохраняющихся величин¹⁵. Таким образом, динамические критические показатели, вообще говоря, нельзя вычислить с помощью одних лишь статических критических показателей.

Современные теории динамических критических явлений успешно описывают свойства некоторых систем, в частности жидкостей и жидких растворов. В то же время в ряде других случаев (как, например, в случае структурных фазовых переходов) ситуация является менее удовлетворительной. Рассмотрим кратко некоторые примеры экспериментальной информации, полученной в той и другой области.

Задаче исследования динамики флуктуаций почти идеально отвечают эксперименты по неупругому рассеянию (электромагнитного излучения и нейтронов), поскольку в них определяются непосредственно те пространственно-временные функции, которые представляют основной интерес¹⁷. Спектр рассеяния $S(q, \omega)$ как раз пропорционален числу частиц, рассеиваемых в данном интервале значений энергии или частоты при фиксированном значении импульса передачи $\hbar q$ (\hbar — постоянная

Планка, деленная на 2π). Во многих случаях этот спектр можно выразить в виде

$$S(q, \omega) = \text{const} \cdot \text{Im} \chi(q, \omega),$$

где $\text{Im} \chi(q, \omega)$ — мнимая часть фурье-компоненты пространственно-временной восприимчивости, упоминавшейся после формулы (4). Таким образом, критическая температурная зависимость флуктуаций параметра порядка ярче всего должна проявляться в спектре.

Например, эффект «критического замедления» прямо проявляется в уменьшении при приближении T к T_c одной из характеристических частот спектра $S(q, \omega)$. В простейших квазигармонических ситуациях ²⁰ спектр $S(q, \omega)$ можно описать лоренцианом

$$S(q, \omega) = \text{const} \cdot \frac{2\Gamma_q \omega}{(\omega_q^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \Gamma_q^2}.$$

В самом простом случае, когда затуханием можно пренебречь ($\Gamma_q = 0$), температурная эволюция спектра описывается степенным законом $\omega_q \sim \tau^2$. Это соответствует простой концепции «мягкой моды», оказавшейся столь полезной при расшифровке данных о сегнетоэлектрических и других структурных фазовых переходах. Однако очень близко к T_c , где доминирующую роль играют эффекты взаимодействия мод, спектральное распределение интенсивности $S(q, \omega)$ не сохраняет в целом такого простого вида.

Для жидкостей и жидких растворов предсказания теории «критического замедления» полностью подтверждаются экспериментально ¹⁵ (см. рис. 7). С другой стороны, вблизи точек структурных фазовых переходов, где мягкой модой является оптический или акустический фонон, спектры оказываются обычно гораздо более сложными. Для объяснения сложной структуры этих спектров привлекались различные механизмы: взаимодействие фононов, эффекты ангармонизма и даже кристаллические дефекты ²¹. Ни одно из предложенных простых или общих объяснений не принесло удовлетворительных результатов, а в экспериментах по рассеянию было выявлено несколько разных механизмов, действующих в тех или иных ситуациях ²⁰. К настоящему времени экспериментально удалось выявить следующие механизмы возникновения температурно-зависящих центральных пиков, обуславливающих отклонения от квазигармонического поведения: 1) флуктуации энтропии, 2) флуктуации плотности фононов, 3) собственные (intrinsic) дефекты, исчезающие при термообработке, 4) «внешние» (extrinsic) дефекты, не исчезающие при термообработке. Особенно показательны результаты исследования с помощью рассеяния света ^{20, 22} и нейтронов ²³ сегнетоэлектрического фазового перехода типа смещения в германате свинца. Этот переход принадлежит к статическому классу универсальности одноосных дипольных систем, пороговая размерность которого $d^* = 3$. Первоначально в ходе нейтронных экспериментов ²³ был обнаружен зависящий от температуры центральный пик, ширину которого разрешить не удалось. Эксперименты по рассеянию света ²², обладающие более высоким разрешением, позволили установить, что центральный пик в германате свинца состоит из двух зависящих от температуры компонент, одна из которых является статической, а вторая — динамической (рис. 8). Статический центральный пик, интенсивность которого расходится вблизи T_c по сильному степенному закону, приписывается неподвижным дефектам, вызывающим нарушение симметрии. Возрастание интенсивности динамического пика происходит по гораздо более слабому закону, чем статического пика, и согласуется с логарифмической зависимостью, предсказываемой теорией группы перенормировок для системы с $d^* = 3$. Динамический пик, который не зависит по своей

природе от внешних факторов, обусловлен нелинейным взаимодействием мягкой моды с акустическими фононами и многофононными процессами. Последний механизм должен быть весьма характерным для ряда типов структурных переходов. Надежных теоретических основ для этого механизма пока не развито. Аналогично, хотя статический центральный пик

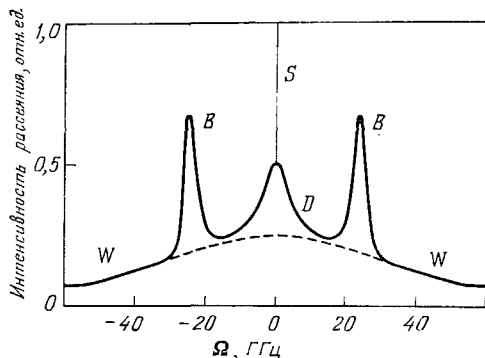


Рис. 8. Схематический вид вблизи T_c спектра рассеяния света, наблюдаемого в германате свинца.

Наряду с максимумами, отвечающими мягкой моде (W) и акустической ветви (B), показаны динамический центральный максимум (D) и аномально зависящий от температуры примесный центральный пик (S) (заимствовано из ²²).

и связан, по всей вероятности, с дефектами, многие интересные вопросы, касающиеся влияния дефектов на динамику систем вблизи критических точек ²⁴, остаются нерешенными.

Главными проблемами в области изучения динамических критических явлений остаются: для экспериментаторов — проблема измерения универсальных, т. е. не зависящих от посторонних факторов, характеристик динамических процессов, протекающих в неидеальных твердых телах, а для теоретиков — описание влияния, которое оказывают на эти процессы неуниверсальные побочные (посторонние) факторы, всегда присутствующие в таких системах. Для жидкостей, жидких растворов и сверхтекучих жидкостей теория и эксперимент согласуются друг с другом ^{18, 25}. Что же касается динамики твердых тел, то здесь многое еще предстоит сделать.

НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИЛЬНО НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

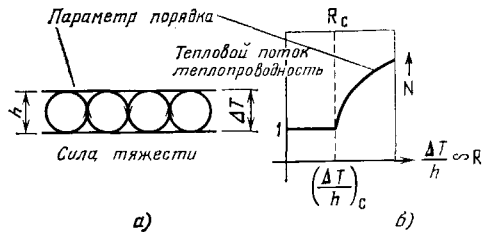
В последние годы было предпринято наступление на еще один класс задач, связанных с флуктуациями и неустойчивостями. Частично оно было вызвано аналогией между фазовыми переходами в равновесных системах и неустойчивостями в системах, далеких от равновесия ²⁶⁻²⁸, таких, как лазеры вблизи порога генерации, течения жидкостей и электронные устройства.

В целях иллюстрации мы рассмотрим ниже лишь простейшую гидродинамическую неустойчивость — неустойчивость Рэлея — Бенара, определяющую начало конвекции в горизонтальном слое жидкости в присутствии вертикального градиента температуры (рис. 9). Безразмерный поток тепла, нормированный на коэффициент теплопроводности, описывают при этом числом Нуссельта N , а безразмерный градиент температуры характеризуют числом Рэлея $R \equiv g\beta h^3 \Delta T / K\nu$, где g — ускорение силы тяжести, ΔT — разность температур, K — коэффициент термодиффузии, h — толщина слоя, ν — кинематическая вязкость и β — коэффициент теплового расширения. На рис. 9 изображен типичный график зависимости N от R для указанного жидкого слоя. При $R < R_c$ число Нуссельта $N = 1$, и перенос тепла осуществляется только за счет теплопроводности. При $R \geq R_c$ возникает конвективный поток, и число N начинает по-

степенно увеличиваться подобно тому, как увеличивается параметр порядка при непрерывном фазовом переходе. Физической причиной, приводящей к появлению отличного от нуля конвективного порога R_c является конкуренция между движущей силой, связанной с тепловым расширением и приложенным градиентом температуры, и диссипативными процессами, обусловленными вязкостью и теплопроводностью. Таким образом, величина R_c аналогична температуре фазового перехода T_c , а условие $R < R_c$ аналогично условию $T > T_c$. Кроме того, разность $N - 1$ аналогична параметру порядка ψ_0 . Анализ на устойчивость гидродинамических уравнений для жидкого слоя в присутствии заданного градиента температуры ²⁹

Рис. 9. Простейшая гидродинамическая неустойчивость — начало конвекции.

а) Вид сбоку на слой жидкости, на который в вертикальном направлении действует градиент температуры, и схематическая картина течения, возникающая выше R_c . Рис. б) иллюстрирует возникновение конвективного течения при $R > R_c$ на примере зависимости нормированного теплового потока N в вертикальном направлении от нормированного же приложенного градиента температуры R .



позволяет даже определить «мягкую моду» для этой конвективной неустойчивости. Та конкретная фурье-компонента поля скоростей, которая становится неустойчивой, отвечает конфигурации течения, схематически показанной на рис. 9. Собственный волновой вектор этого поля скоростей определяет период пространственно неоднородной структуры, возникающей при $R > R_c$ и зависящей от граничных условий на поверхности жидкого слоя. Экспериментально ^{26, 30} удалось даже наблюдать «смягчение» частоты мягкой моды при приближении R к R_c .

Аналогичным способом можно рассмотреть и другие неустойчивости (например, пороги генерации в лазерах). При этом нужно лишь должным образом изменить смысл рассматриваемых физических величин. Особенно важен вопрос о том, как описывать и какова роль флуктуаций в таких пороговых явлениях. Этот вопрос привлек значительное внимание теоретиков. Простейший способ описания пороговых явлений соответствует на языке фазовых переходов приближению среднего поля. Вблизи R_c наблюдаемый наклон кривой $N(R)$, действительно, отвечает значению $\beta = 1/2$. Более строгое математическое рассмотрение ²⁶ приводит к заключению, что отклонения от теории среднего поля должны становиться значительными лишь крайне близко к порогу (для задачи Рэлея — Бенара при $(R - R_c)/R_c \leq 10^{-7}$). Поэтому можно ожидать, что для переходов от одного стационарного неравновесного состояния к другому область, аналогичная критической области в случае фазовых переходов, является недоступной экспериментально (скорее, вследствие граничных эффектов, размывающих переход, чем из-за невозможности достаточно точного контроля температуры).

Хотя дополнительные точные эксперименты по исследованию упомянутых переходов еще предстоит сделать, более плодотворным и многообещающим, с точки зрения изучения роли флуктуаций в неравновесных системах, является исследование не переходов между стационарными состояниями (таких, как начало конвекции), а перехода от стационарного или периодического во времени режима к хаотическому или случайно меняющемуся во времени режиму. К указанному кругу задач относятся и такие фундаментальные проблемы, как развитие турбулентности, взаимодействие сильных флуктуаций и природа явлений необратимости. Уже

в первых измерениях ³⁰ спектров интенсивности для задачи Рэлея — Бенара в области значительно выше R_c выявилось неожиданное богатство нелинейных процессов, предшествующих возникновению турбулентности. На рис. 10 приведена последовательность таких спектров при $R \sim \sim 10R_c$ в окрестности точки перехода в турбулентный режим. При $R/R_c < 7,4$ течение полностью стационарно. Выше $R/R_c = 7,4$ течение становится периодическим с одной единственной характерной частотой. Эта частота наряду с одной из ее гармоник показана на рис. 10, а.

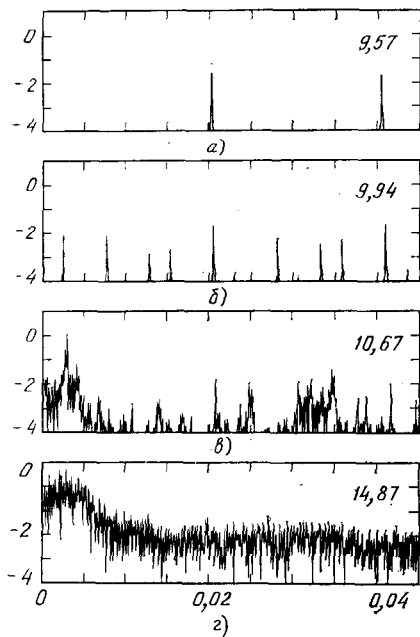


Рис. 10. Спектральные плотности флуктуаций температуры на верхней пластине, ограничивающей жидкий слой, в области значительно выше порога конвекции.

Отметим, что вертикальные оси имеют логарифмический масштаб. Четко выделенная частота в спектре (а) соответствует периодическому во времени режиму течения. По мере того как R увеличивается от $9 R_c$ до $15 R_c$, спектр вначале становится более сложным, оставаясь при этом периодическим (спектр б), и лишь затем обнаруживает аperiodический, или турбулентный, характер (рисунок любезно представлен Г. Алерсом (неопубликовано)).

После $R/R_c = 9,9$ появляется вторая характерная частота, несоизмеримая с первой. В результате спектр, показанный на рис. 10, б, можно полностью описать выражением $m f_1 \pm n f_2$, где m и n — целые числа. При дальнейшем увеличении R самая низкая из частот (на нее указывает стрелка) уменьшается и при $R/R_c = 10,6$ почти достигает нулевого значения. При еще более высоких R спектры становятся сплошными, что указывает на аperiodический или турбулентный характер течения (рис. 10, в, г).

Рассмотренный пример, хотя и яркий сам по себе, иллюстрирует лишь один из многих различных способов перехода в турбулентное состояние, наблюдавшихся в системе Рэлея — Бенара при различных граничных условиях. В настоящее время не существует каких-либо общих принципов даже для классификации этих различий. Тем не менее, имеются основания надеяться, что благодаря: а) прогрессу в теоретическом описании явлений взаимодействия мод и сильных флуктуаций, а также б) применению точных и тонких экспериментальных методов, наши знания в области физики неравновесных процессов достигнут в течение 80-х годов того же уровня систематизации, который был достигнут в 70-е годы в физике равновесных фазовых переходов *).

*) Я благодарен Р. Х. Хоэнбергу и Г. Алерсу за плодотворные обсуждения.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Kadanoff L. P. et al. — *Rev. Mod. Phys.*, **1967**, v. 39, p. 395.
2. Fisher M. E. — *Ibid.*, **1974**, v. 46, p. 597.
3. Phase Transitions and Critical Phenomena/Ed. C. Domb, M. S. Green. — N.Y.: Academic Press, 1976.
4. Pfeuty P., Toulouse G. *Introduction to the Renormalization Group and to Critical Phenomena*. — N.Y.: Wiley, 1977.
5. Hohenberg P. C., Halperin B. I. — *Rev. Mod. Phys.*, **1977**, v. 49, p. 435.
6. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления. — М.: Мир, 1973.
7. Kosterlitz J. M., Thouless D. J. — *J. Phys. Ser. C*, **1973**, v. 6, p. 118.
8. Nilsen J. A., Birgeneau R. J. — *Am. J. Phys.*, **1977**, v. 45, p. 554.
9. Ho J. T., Litster J. D. — *Phys. Rev. Lett.*, **1969**, v. 22, p. 603; *Phys. Rev. Ser. B*, **1970**, v. 2, p. 4523.
10. Levelt-Sengers A., Hocken R., Sengers J. V. — *Phys. Today*, **1977**, v. 30, No. 12, p. 42.
11. Wilson K. G., Kogut J. — *Phys. Rept.*, **1974**, v. 12C, p. 75; Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ϵ -разложение. — М.: Мир, 1975.
12. Гинзбург В. Л., — *ФТТ*, **1960**, т. 2, с. 2031.
13. Ahlers G., Kornblit A., Guggenheim H. J. — *Phys. Rev. Lett.*, **1975**, v. 34, p. 1227.
Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е. — *ЖЭТФ*, **1969**, т. 56, с. 2087.
14. Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. — *Phys. Rev. Lett.*, **1977**, v. 39, p. 95.
15. Chang R. F., Burstyn H., Sengers J. V., Bray A. J. — *Ibid.*, **1976**, v. 37, p. 1481.
16. Ahlers G. — In: *The Physics of Liquid and Solid Helium*/Ed. K. H. Bennemann, J. B. Ketterson. — N.Y.: Wiley, 1976. — P. t. 1, p. 85.
17. *Correlation Functions and Quasiparticle Interactions in Condensed Matter*/Ed. J. W. Halley. — N.Y.: Plenum Press, 1978.
18. Cummins H. Z., Swinney H. Z. — In: *Anharmonic Lattices, Structural Transitions and Melting*/Ed. T. Riste. — Leiden: Noordhoff, 1974. — P. 325.
19. Kawasaki K. — *Phys. Rev.*, **1966**, v. 150, p. 291.
20. Kadanoff L. P., Swift J. — *Ibid.*, **1968**, v. 166, p. 89.
21. Fleury P., Lyons K. B. — *Solid State Commun.*, **1979**, v. 32, p. 103.
22. *Anharmonic Lattices, Structural Transition and Melting*/Ed. T. Riste. Leiden: Noordhoff, 1974.
23. Lyons K. B., Fleury P. — *Phys. Rev. Ser. B*, **1978**, v. 17, p. 2403.
24. Cowley R. A., Axe J. D., Iizumi M. — *Phys. Rev. Lett.*, **1976**, v. 36, p. 806.
25. Halperin B. I., Varma C. M. — *Phys. Rev. Ser. B*, **1976**, v. 14, p. 4030.
26. Tarvin J. A., Vidal F., Greytak T. J. — *Ibid.*, **1977**, v. 15, p. 4193.
27. Hohenberg P. C., Siggia E., Halperin B. I. — *Ibid.*, **1978**, v. 14, p. 2403.
28. *Instabilities and Phase Transitions*/Ed. T. Riste. N.Y.: Plenum Press, 1975.
29. Swinney H. L., Gollub J. — *Phys. Today*, **1978**, v. 31, No. 8, p. 41.
30. Landauer R. — *Ibid.*, p. 23.
31. Chandrasekhar S. *Hydrodynamics and Hydrodynamic Stability*—N.Y.: Oxford Univ. Press, 1961.
32. Ahlers G., Behringer R. P. — *Phys. Rev. Lett.*, **1978**, v. 40, p. 412; *Phys. Lett. Ser. A*, **1977**, v. 62, p. 329; *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **1978**, v. 64, p. 186.