

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

539.12.01

## РАССЛОЕНИЯ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ\*)

Г. Бернстейн, Э. Филлипс

*Раздел математики, обобщающий понятие кривизны на топологические аналоги листа Мёбиуса, может быть полезным для интерпретации преобладающих в настоящее время теорий взаимодействия элементарных частиц.*

Тесная связь между математикой и физикой может показаться удивительной обывателю, но тот, кто хорошо знаком с обеими областями, сочтет эту связь естественной для развития науки. Физические проблемы стимулируют математическое мышление по крайней мере с того времени, когда в древнем Египте стали использовать геометрию в качестве средства для точного измерения земель. Изобретение интегрального исчисления Ньютоном явилось отчасти практическим разрешением трудностей, возникших при его попытке сформулировать закон всемирного тяготения. Бесконечные тригонометрические ряды были введены для описания тепловых потоков. Абстрактные конструкции, исследуемые современными математиками, все еще основываются, хотя иногда довольно опосредованным образом, на реальных структурах, обнаруживаемых физическим миром.

Математика не преминула вернуть долг с благодарностью. Теории, созданные математиками для решения чисто математических задач, нередко оказываются как раз тем, в чем нуждаются физики для исследования и предсказания явлений природы. Тензорное исчисление, явившееся результатом почти столетних усилий, в которых приняли участие такие математики, как Карл Фридрих Гаусс, Бернгард Риман и Тулио Леви-Чивита, сыграло существенную роль при построении Эйнштейном общей теории относительности. В последнее время такими потребителями математических результатов стали физики, изучающие силы и квантовые поля, переносящие взаимодействия элементарных частиц.

---

\*) Bernstein H. J., Phillips A. V. Fiber Bundles and Quantum Theory. Scientific American, July, 1981, v. 245, pp. 94—109.— Перевод М. А. Ольшанецкого.

Герберт Дж. Бернстейн преподает в Колумбийском университете, Энтони В. Филлипс — профессор математики Университета штата Нью-Йорк в Стони-Брук, США.

© Scientific American, Inc., 1981.

© Перевод на русский язык,  
издательство «Наука». Главная редакция  
физико-математической литературы,  
«Успехи физических наук», 1982.

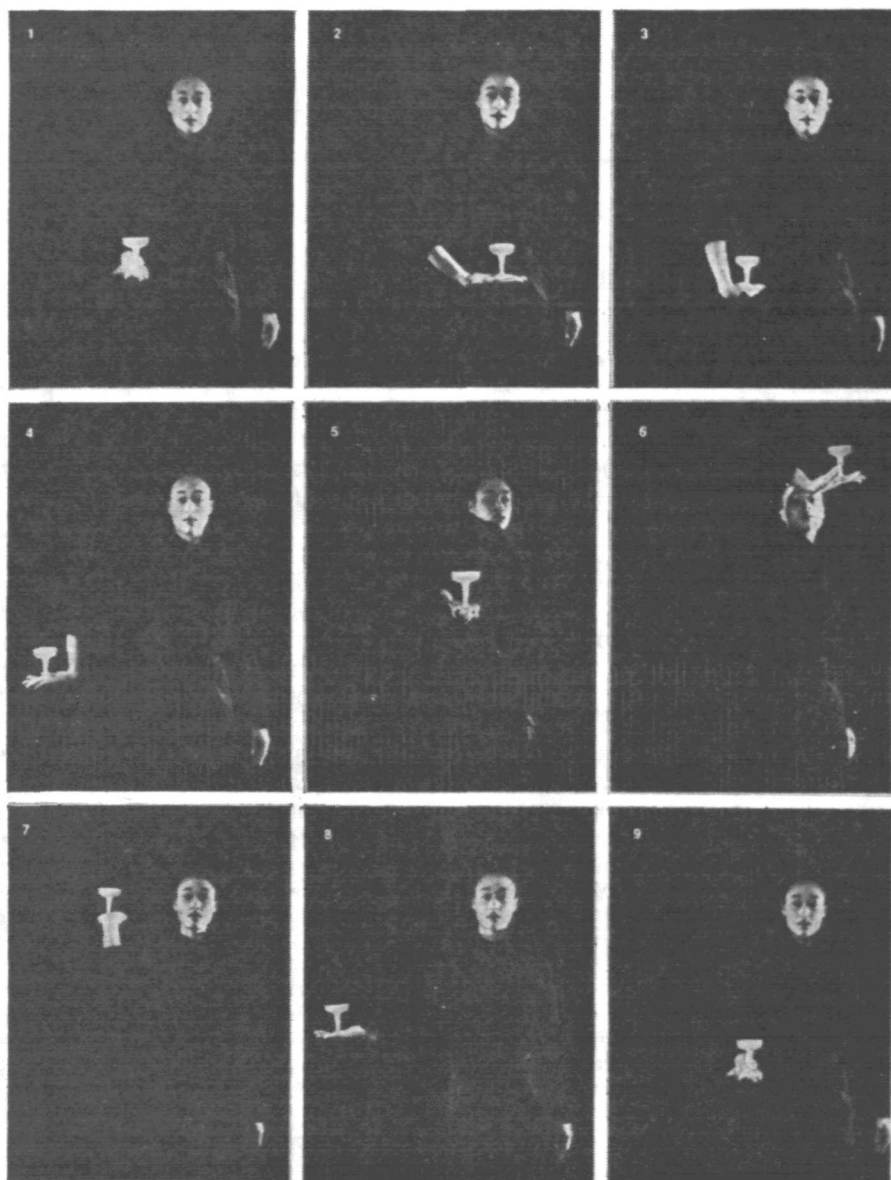


Рис. 1. Понятие расслоения может выразить точную математическую аналогию между движениями филиппинского народного танца бинасуан («танец вина») и квантовым эффектом воздействия магнитного поля на спин нейтрона.

В этом танце ориентация бокала с вином в пространстве при вращении бокала вокруг вертикальной оси не совпадает с относительным вращением бокала и тела танцовщицы. Если ноги танцовщицы остаются на месте, то один оборот руки с бокалом на  $360^\circ$  приводит к перекручиванию ее тела. Следующий полный оборот руки в том же направлении возвращает и руку, и тело танцовщицы в исходное положение. В таком же соотношении находятся обобщенная фаза состояния нейтрона и ориентация его спинного вектора.

□

Поля, наиболее многообещающие с этой точки зрения, называются калибровочными. Их использование дает возможность выразить внутренние взаимосвязи действующих между частицами сил, которые кажутся совершенно различными на поверхности явлений. Калибровочные поля играют основную роль в современных попытках создать единую теорию, описывающую три из четырех известных фундаментальных сил в природе, т. е. силы, определяющие сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия. Что касается четвертой силы, тяготения, то для нее пока нет квантовой теории, однако общая теория относительности указывает, что в конечном счете и тяготение возможно будет описано калибровочной теорией.

Идея калибровочного поля была введена Германом Вейлем в 20-х годах, однако современное развитие теории калибровочных полей началось в 1954 г. В тот год вышла работа, в которой Ч. Н. Янг и Роберт Л. Миллз, которые тогда сотрудничали в Брукхейвенской Национальной Лаборатории, применили понятие калибровочного поля к ядерным силам. После почти двух десятилетий дальнейшей отделки физикам удалось выразить понятие калибровочного поля таким образом, что в нем можно стало узнать пример известных в математике более абстрактных структур, называемых связностями в расслоенных пространствах. Открытие этой эквивалентности сделало возможным использование высокоразвитых и исключительно мощных математических понятий для описания физической реальности.

Что же такое калибровочное поле? Что такое расслоенные пространства и каково их место в физике? Что означает введение связности в расслоенном пространстве и каким образом соотносятся понятия связности и калибровочного поля? Мы попытаемся ответить на эти вопросы, анализируя два физических эксперимента. Первый из них демонстрирует, что происходит, когда нейтроны вращаются магнитным полем на  $360^\circ$ , а второй выявляет действие, оказываемое на пару электронных пучков магнитным полем, сосредоточенным в области между ними. Оба эти опыта по-разному показывают, как в квантовой теории возникает расслоенное пространство. В опыте с вращением нейтронов существенна глобальная структура расслоенного пространства, а в опыте с электронными пучками основной особенностью является связность, внутренняя локальная структура, которую можно ввести в расслоении. Эта связность — элементарный, но фундаментальный пример калибровочного поля.

□

Изучение расслоенных пространств служит предметом топологии, но расслоения изучаются также в дифференциальной геометрии, так как они связаны с геометрическим понятием кривизны. Идея введения связности в расслоенном пространстве возникла из попытки обобщить понятие кривизны двумерной поверхности, каковой является, например, поверхность Земли, на кривизну в пространстве трех и большего числа измерений. На таком языке можно по-другому описать математическое различие между двумя указанными экспериментами: вращение нейтронов выявляет топологию некоторого расслоенного пространства, а опыт с электронными пучками проверяет геометрию расслоения.

Эксперимент с вращением нейтрона на  $360^\circ$  был предложен одним из авторов (Бернштейном) в 1967 г. Аналогичный мысленный эксперимент был описан почти одновременно в работе Якира Ааронова и Леонарда Зускинда из Университета Иешива. Предметом этого опыта является совершенно противоречащий интуитивному представлению эффект, который математически эквивалентен односторонности листа Мёбиуса. Ос-

новным объектом опыта является спин, внутренний угловой момент, микрочастицы. Согласно квантовой теории нейтрон или другая частица с таким же спином, не возвращается в исходное состояние, когда его

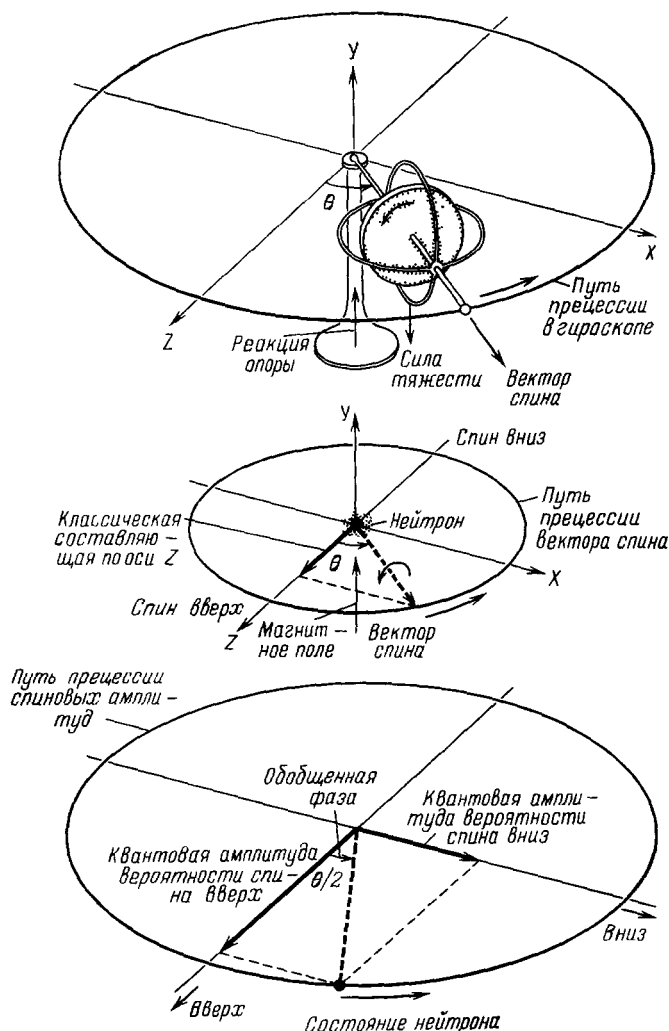


Рис. 2. Прецессия вектора спина нейтрона в магнитном поле аналогична прецессии гироскопа в поле тяжести.

Действующий на спин нейтрона момент вращения, обусловленный магнитным полем, вызывает прецессию со скоростью, пропорциональной напряженности поля и не зависящей от ориентации нейтрона. Если считать, что в начальном состоянии спин нейтрона направлен вверх, а поле перпендикулярно к нему, то прецессия на угол  $180^\circ$  поворачивает вектор спина вниз. Классическая физика предсказывает, что при промежуточных положениях составляющая вектора спина вдоль оси  $z$  может принимать только два значения:  $+\hbar/2$  или  $-\hbar/2$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка. Изменяющейся во время прецессии величиной является вероятность обнаружить нейтрон со спином вверх или со спином вниз. Каждая вероятность находится возведением в квадрат амплитуды вероятности. Поэтому квантовомеханическая прецессия нейтрона может быть изображена как вращение нейтронного состояния в некотором абстрактном пространстве, координатами точек которого являются амплитуды вероятности обнаружить нейтрон со спином вверх или со спином вниз.

ориентация в пространстве меняется на  $360^\circ$ . Чтобы вернуть частицу в исходное состояние, необходимо совершить два полных поворота, т. е. вращение на  $720^\circ$ .

Чтобы понять принцип этого эксперимента, необходимы некоторые сведения из квантовой теории спина. Понятие внутреннего углового момента перенесено физиками с волчка или гироскопа на элементарные частицы. И в том, и в другом случае спин — векторная величина, характеризующаяся как длиной, так и направлением. Принято считать, что этот вектор направлен вдоль оси волчка в сторону, определяемую так называемым правилом правой руки. Если пальцы правой руки охватывают ось вращения, указывая направление поворота волчка, то положение большого пальца на оси укажет направление вектора спина.

В отличие от углового момента веретена или гироскопа, спин элементарной частицы квантуется: его величина принимает только определенные дискретные значения, кратные наименьшей возможной величине спина. Кроме того, для каждой данной элементарной частицы величина спина фиксирована и не может меняться, это одна из присущих ей внутренних черт. Электрон, протон и нейтрон (а также целый ряд других частиц) обладают наименьшим возможным ненулевым спином. Этот минимальный спин равен  $\hbar/2$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка, размер которой — порядка  $10^{-27}$  эрг·с.

Это ограничение на величину вектора спина в квантовой теории отражает еще более любопытную экспериментальную закономерность. Как и все векторы, спин имеет составляющие вдоль осей заданной системы координат. Экспериментатор вправе выбрать любую ось, вдоль которой он будет измерять составляющую спина. И какое бы направление ни было выбрано для измерения проекции спина, результатом всегда будет одно из двух чисел,  $+\hbar/2$  или  $-\hbar/2$ . Промежуточные значения наблюдаться не могут. Несмотря на это противоречащее нашему повседневному опыту свойство спинов элементарных частиц, представление о векторе спина остается полезным для описания нейтронов. Можно так поляризовать нейтронный пучок, чтобы абсолютно все векторы спинов указывали в одну сторону. Экспериментатор может найти это направление, поворачивая ось измерения так, чтобы вероятность обнаружения величины  $+\hbar/2$  была наибольшей. Если все нейтроны находятся в одном и том же состоянии, все они дадут этот результат. Назовем ось, вдоль которой поляризуются нейтроны, осью  $z$ , и будем говорить, что спин направлен вверх (проекция  $+\hbar/2$ ) или вниз (проекция  $-\hbar/2$ ).

□

Предположим, что у каждого нейтрона вектор спина отворачивается от зафиксированной нами оси. При этом составляющая вдоль оси не может меняться плавно, так как любое измерение всегда дает лишь одно из двух указанных значений,  $+\hbar/2$  или  $-\hbar/2$ . Меняются лишь вероятности обнаружить нейтроны в состоянии со спином вверх или со спином вниз. В начальном состоянии вероятность обнаружить нейтрон со спином вверх равна 1, а нейтрон со спином вниз — равна нулю. После поворота вектора спина на четверть оборота, т. е. на  $90^\circ$ , от исходной оси, проекция на ось  $z$ , согласно классической (не квантовой) модели, должна была бы обратиться в нуль. Вектор спина был бы ориентирован так, чтобы не указывать ни вверх, ни вниз. Однако для нейтронов нулевая проекция спина невозможна. Согласно квантовой теории, при повороте на  $90^\circ$  нейтрон приходит в такое состояние, что вероятности найти спин вверх и спин вниз одинаковы и равны  $1/2$ .

В этом смысле квантование спина согласуется с классическим описанием. Измерение проекции спина для нейтронного ансамбля при условии, что вектор спина перпендикулярен оси, даст в половине случаев величину

$+\hbar/2$ , а в другой половине — величину  $-\hbar/2$ . Таким образом, сумма всех измеренных компонент равна нулю, как и среднее значение спина, что находится в соответствии с классическим результатом.

Таким же образом вращение на  $180^\circ$  ориентирует нейтроны спином вниз. Вероятность найти нейтрон со спином вверх обращается в нуль, а вероятность найти спин, направленный вниз, становится единицей. После

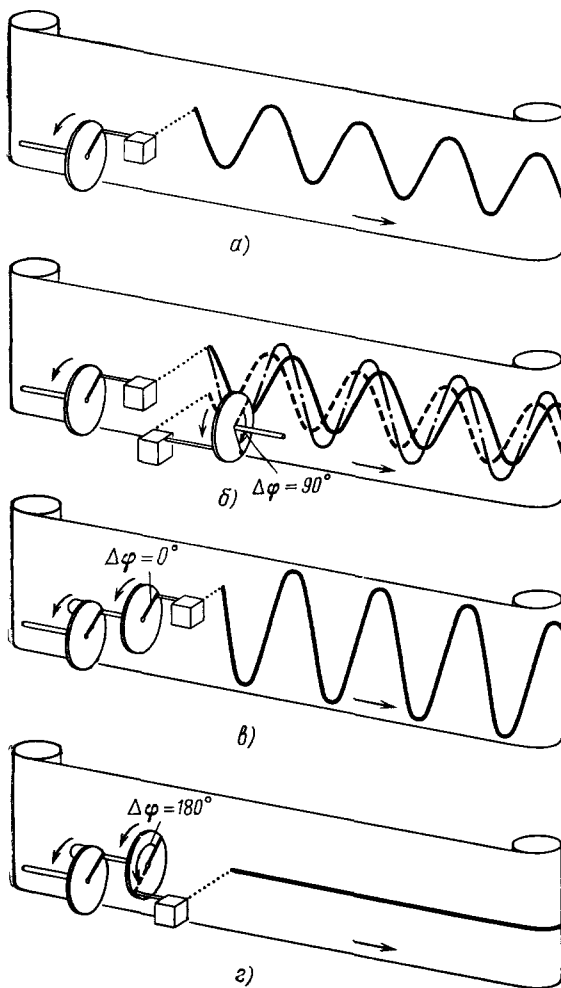


Рис. 3. Фаза волны, обычно выражаемая через угол, может быть обнаружена только как разность фаз двух волн.

Для синусоидальных волн форму волны можно изобразить, проектируя точку на равномерно вращающемся круге на экран, движущийся с постоянной скоростью под прямым углом к направлению проекции. Любое положение точки на круге может быть выбрано за нулевой угол. Тогда угол поворота от этого произвольно выбранного положения определяет фазу (рис. 3, а). Относительная фаза двух волн четко определена тем, что каждый гребень и впадина на одной волне на некоторый угол опережает соответствующий элемент другой волны. При интерференции волн их амплитуды в каждый момент складываются, высота результирующего максимума зависит от относительной фазы (рис. 3, б). Это сложение можно выполнить автоматически, совместив центр второго диска с периметром первого. Если интерференция конструктивна (рис. 3, в), то и гребни, и впадины обеих волн совпадают, и максимальная высота результирующей волны равна сумме высот интерферирующих волн. Если интерференция деструктивна, что отвечает разности фаз  $180^\circ$  (рис. 3, г), то впадины совпадают с гребнями и волны в точности гасятся.

того как ориентация нейтронов описывает полный круг, вероятность спина вверх, т. е. вероятность измерить  $z$ -компоненту спина, равную  $+\hbar/2$ , вновь становится единицей, а вероятность спина вниз обращается в нуль.

Дискретность спиновых состояний и вероятностное описание приняты в физике в качестве постулатов квантовой теории. Вероятности находятся из математического описания каждого состояния частицы с помощью волновой функции. В любой точке пространства задается число, называемое амплитудой вероятности нейтронной волновой функции, для каждого отдельного состояния. Термин «амплитуда» относится к волнам, связанным с материальными частицами в квантовой теории. Амплитуда вероятности может быть как положительной, так и отрицательной, в соответствии с

наблюдаемой возможностью конструктивной или деструктивной интерференции волн. Вероятность найти частицы в данном состоянии является

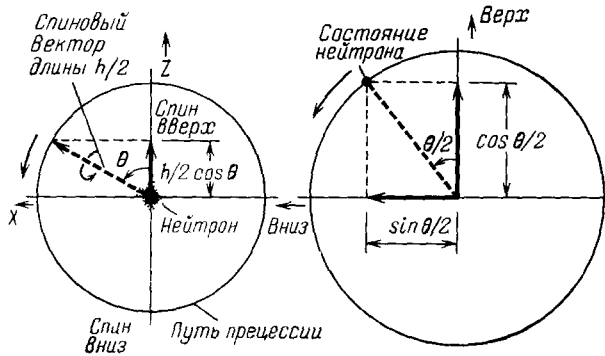


Рис. 4. Вектор спина нейтрона может прецессировать, однако нет возможности правильно изобразить геометрию этой прецессии классической моделью (рис. 4, а), так как измерение составляющей спина вдоль любой заданной оси может дать только два значения:  $+\hbar/2$  или  $-\hbar/2$ .

В квантовой механике прецессия проявляется в изменении вероятностей обнаружить нейтрон сепроекцией спина  $+\hbar/2$  (спин вверх) или  $-\hbar/2$  (спин вниз). Пара амплитуд, определяющих эти вероятности, может рассматриваться как координаты в абстрактном пространстве с осями «вверх» и «вниз» (рис. 4, б). После прецессии на  $90^\circ$  от оси  $z$  вектор спина оказывается не направленным ни вверх, ни вниз. Измеряя проекцию вектора спина, можно обнаружить при этом, что половину времени спин смотрит вверх, половину — вниз. Поэтому среднее значение спина равно нулю, в соответствии с классической картиной. Так как вероятности равны, то можно выбрать равные значения для амплитуд вероятности: соответствующая точка в пространстве нейтронных состояний отклоняется на  $45^\circ$  от оси «вверх». Физическая прецессия на угол  $\theta$  вызывает сдвиг обобщенной фазы на  $\theta/2$ , который изображается соответствующим поворотом в пространстве нейтронных состояний.

квадратом соответствующей амплитуды вероятности. Поэтому каков бы ни был знак амплитуды, вероятность всегда положительна.

□

Так как нейтрон существует в двух спиновых состояниях, его полное описание осуществляется заданием пар чисел во всех точках пространства: амплитуды вероятности спина вверх и амплитуды вероятности спина вниз. Эту пару амплитуд можно изобразить на взаимно перпендикулярных осях, соответствующих состояниям со спином вверх и вниз, в некотором абстрактном пространстве, которое можно назвать пространством спиновых состояний нейтрона (рис. 4). Состояние нейтрона изображается точкой на этой диаграмме. Если в начальном состоянии спин направлен вверх, то амплитуда вероятности для спина вверх равна  $+1$ , а амплитуда для спина вниз равна  $0$ . Эта комбинация чисел изображается точкой, расположенной на вертикальной оси на единицу выше начала координат.

По мере того как меняется ориентация спина нейтрона, происходит и непрерывное изменение обеих амплитуд вероятности. При этом, однако, сумма вероятностей всегда равна  $1$ , так как нейтрон может находиться только в одном из двух указанных состояний — со спином вверх или со спином вниз. Поэтому сумма квадратов амплитуд вероятности должна быть равна  $1$ , так что точка, изображающая состояние нейтрона, лежит на окружности единичного радиуса. Тогда любое возможное состояние нейтрона можно обозначить углом между вертикальной осью и радиусом-вектором изображающей точки. Этот угол называется обобщенной фазой нейтронного состояния.

После поворота физического вектора спина на  $90^\circ$  от оси  $z$  амплитуды вероятности для спина вверх и спина вниз должны быть равны по абсолют-

ной величине, так как соответствующие вероятности равны  $1/2$  каждая. Поэтому точка в пространстве нейтронных состояний лежит на полпути между вертикальной («спин вверх») и горизонтальной («спин вниз») осями. Таким образом, при повороте вектора спина нейтрона на  $90^\circ$  обобщенная фаза нейтронного состояния меняется на  $45^\circ$ .

Эта пропорция сохраняется и в дальнейшем. Когда физический вектор спина поворачивается на  $180^\circ$ , амплитуда вероятности найти нейтрон со спином вниз обращается в  $+1$ ; амплитуда вероятности для спина вверх равна при этом 0. Соответствующая точка на плоскости состояний нейтрона отклоняется на  $90^\circ$  от начального положения. При повороте спина на  $360^\circ$  обе амплитуды вероятности меняют знак. Амплитуды возвращаются к исходным значениям лишь после двух полных оборотов, при вращении на  $720^\circ$ .

На первый взгляд эта особенность квантовой теории может показаться парадоксальной. Когда обычный макроскопический объект совершает в пространстве полный оборот, он возвращается в исходное положение. Вращение на  $360^\circ$  не меняет пространственной ориентации человеческого тела или вращающегося гироскопа. Повседневный опыт столь глубоко укоренил это представление в нашем сознании, что, хотя теория спина нейтрона известна уже более 50 лет, до 1967 г. даже многие физики полагали, что вращение на  $360^\circ$  не может привести к непосредственно измеряемому результату. Квантовая теория подразумевает, что амплитуду вероятности нельзя измерить непосредственно, и изменение знака амплитуды, вызванное таким вращением, исчезает при возведении в квадрат, когда вычисляется вероятность.

□

С другой стороны, в макромире существуют такие ситуации, когда вращение на  $360^\circ$  приводит к наблюдаемому эффекту. Например, если два объекта соединены гибкой лентой, очевидно, что полный оборот одного из объектов не возвращает систему в исходное состояние: на ленте появляется перекрут. Несколько менее очевидно, что еще один полный оборот в том же направлении может привести систему в исходное положение. Этот эффект можно продемонстрировать также, держа бокал с вином на ладони и вращая его вокруг вертикальной оси, не меняя положения тела в целом. После поворота на  $360^\circ$  бокал возвращается в исходное положение, но рука оказывается скрученной, следующий поворот на  $360^\circ$  возвращает в исходное положение и бокал, и руку (см. рис. 1).

Оба эти явления, и макроскопическое, и квантовомеханическое, могут быть представлены свойствами одного и того же расслоения. Расслоение — это математическая структура, состоящая из двух различных систем точек, называемых базой  $B$  и полным пространством  $E$ , и правила  $p$ , называемого проекцией, которое ставит в соответствие каждой точке из  $E$  некоторую точку из  $B$ . В основанной на понятии расслоения модели вращения бокала на ладони точки базы изображают различные ориентации бокала и руки в пространстве. Точки полного пространства изображают вращение руки относительно неподвижного тела. Проекция определяет соответствие между каждым поворотом и относительной ориентацией, вызванной этим поворотом.

В аналогичной модели вращения спина нейтрона точки базы изображают ориентацию вектора спина. В рассматриваемом нами частном случае этот вектор вращается в заданной плоскости, так что любая его ориентация задается углом относительно оси  $z$ . Так же можно рассмотреть и другие движения. Точки полного пространства представляют собой обобщенную фазу нейтронного состояния, они лежат на единичном круге



в пространстве состояний нейтрона, а их координаты — амплитуды вероятности найти спин вверх и спин вниз. Таким образом, положение этих точек задается углом относительно оси, изображающей состояние со спином вверх. Проекция в этой модели сопоставляет каждой точке

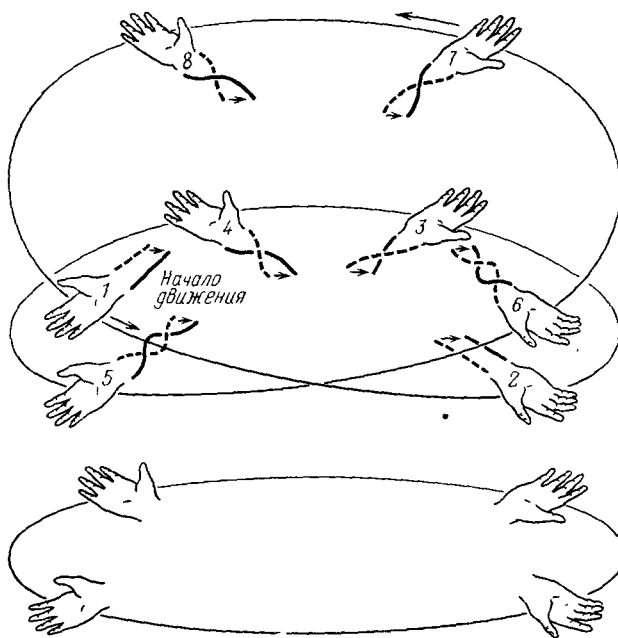


Рис. 5. Дважды накрывающее расслоение изображает множество относительных вращений руки и тела танцовщицы (см. рис. 1).

Стрелками показано фиксированное положение ног танцовщицы. Круг внизу изображает ориентации руки в пространстве. Перемещение по этому кругу связано с движением по одному из отрезков перекрученной кривой, помещенной прямо над кругом. Топология этой кривой показывает, что относительный поворот на  $90^\circ$  против часовой стрелки эквивалентен относительноному повороту на  $630^\circ$  по часовой стрелке.

полного пространства точку базы по правилу  $p(\varphi) = 2\varphi$  (по модулю  $360^\circ$ ). Применение этого правила эквивалентно обертыванию окружности обобщенных фаз дважды вокруг окружности ориентаций вектора спина, так что две фазы  $\varphi$  и  $\varphi + 180^\circ$ , отвечают одной и той же ориентации.

Соответствие между точками полного пространства и точками базы обычно описывается так, как будто полное пространство лежит «над» базой. Точка или точки полного пространства, проектируемые в данную точку базы, помещаются вертикально над ней. Множество точек полного пространства над заданной точкой базы называется слоем. Определение расслоенного пространства требует также, чтобы слои над любыми двумя точками базы были топологически эквивалентны, т. е. топологическая структура слоя не должна меняться при переходе от одной точки базы к другой. В некоторых примерах слой над каждой точкой базы является линией; именно этот геометрический образ описывается английским названием расслоенного пространства *fiber bundle*: если каждый слой — это линия, то полное пространство выглядит как пучок слоев. Вообще, так как все слои топологически эквивалентны, их можно представлять себе как копии единственного слоя  $F$ , идеального для данного расслоения.

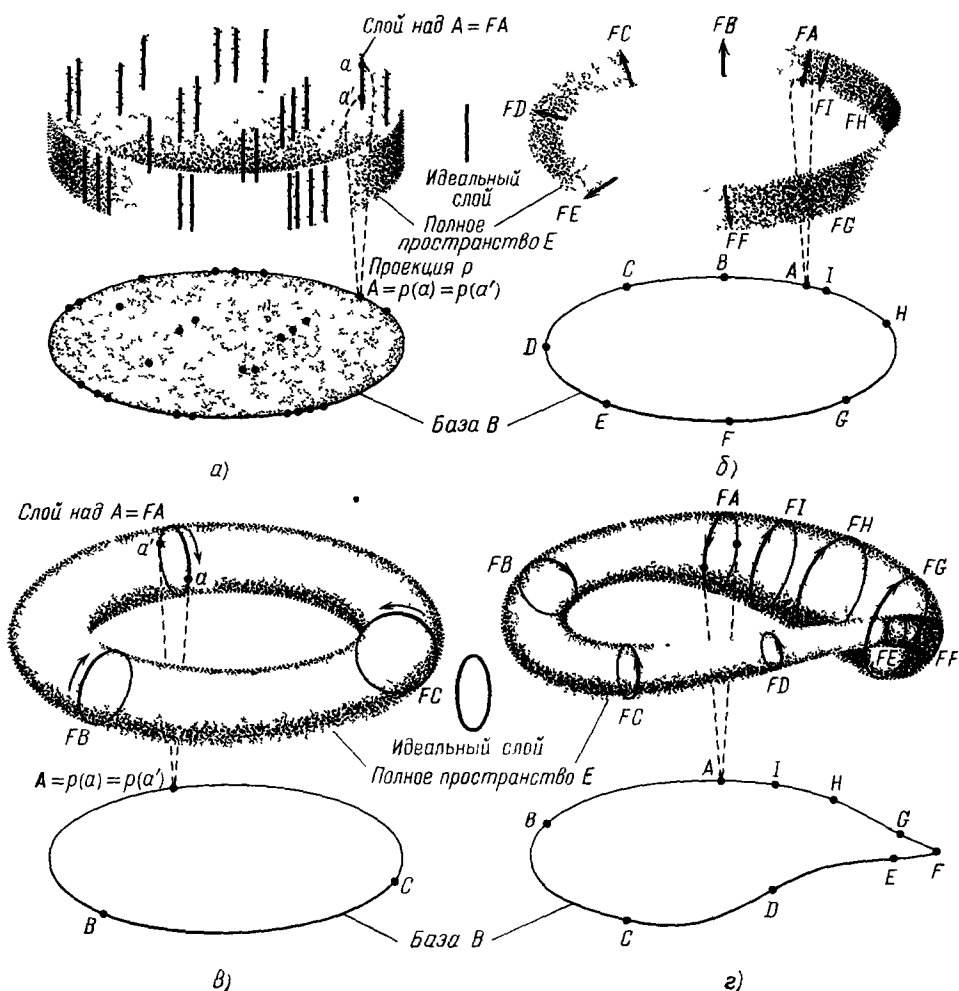


Рис. 6. Расслоенное пространство состоит из базы, полного пространства и отображения, проектирующего каждую точку полного пространства на некоторую точку базы.

Множество всех точек полного пространства, отображаемых в одну и ту же точку базы, называется слоем (жирные линии и кружки). Полное пространство бывает похожим на сноп или пучок слоев. Каждый слой в пучке обладает одинаковой топологической структурой, поэтому все слои могут быть представлены единственным «идеальным» слоем. Для сплошного цилиндра (рис. 6, а) или листа Мебиуса (рис. 6, б) слоями являются прямые линии над точками базы. Для тора (рис. 6, в) или бутылки Клейна (рис. 6, г) слой, соответствующий каждой точке, является окружностью. Движение по базе может вызвать изменение ориентации слоя в зависимости от топологической структуры полного пространства. Один обход по лежащему в базе пути меняет ориентацию слоев на листе Мебиуса или бутылке Клейна, в то время как для тора и цилиндра обход по такому пути не меняет ориентации слоев. В случае бутылки Клейна переход со слоя на слой приводит к тому, что поверхность протыкает самих себя. Этого самопересечения нельзя избежать, изображая бутылку Клейна в трехмерном пространстве.

В модели вращения нейтронного спина идеальный слой состоит из двух точек. Например, точке 0 базы отвечают две точки полного пространства, соответствующие значениям обобщенной фазы 0 и  $180^\circ$ . Поэтому слой над 0 — это множество из двух элементов, 0 и  $180^\circ$ . Аналогично, слой над  $90^\circ$  содержит точки  $45^\circ$  и  $225^\circ$  полного пространства. В этом расслоении и полное пространство, и база топологически эквивалентны окружности. Проекция в этом случае соответствует тому способу, которым края листа Мёбиуса проектируются на окружность в центре полосы.

□

Как расслоение моделирует соотношение между вращением и обобщенной фазой в случае нейтронного спина? Предположим, что вначале вектор спина нейтрона направлен вдоль оси  $z$  в положительную сторону ( $\theta = 0$ ), так что амплитуда вероятности для спина вверх равна  $+1$ , а

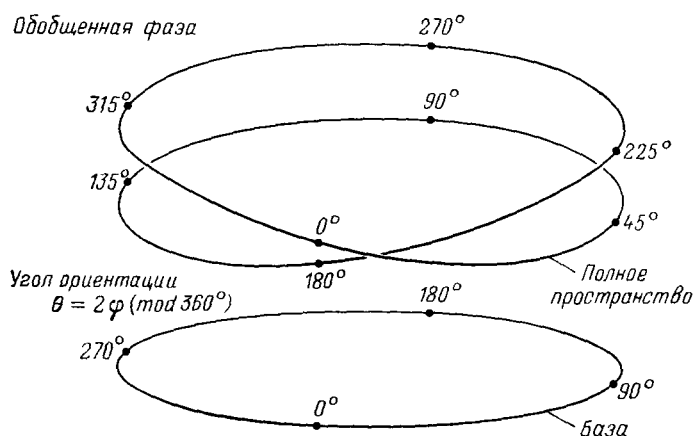


Рис. 7. Описывающее фазовые сдвиги расслоение показывает соотношение между угловой прецессией нейтрона и сдвигом обобщенной фазы нейтронного состояния. Точки на базе расслоения изображают ориентации вектора спина нейтрона. Точки полного пространства отвечают обобщенным фазовым сдвигам в пространстве нейтронных состояний, соответствующим данной ориентации вектора спина. Например, точкам  $45^\circ$  и  $225^\circ$  в полном пространстве отвечает точка  $90^\circ$  в базе. Это означает, что при значениях обобщенной фазы  $45^\circ$  и  $225^\circ$  вектор спина образует прямой угол с осью  $z$ . Однако топологическая структура полного пространства показывает, что когда фаза достигает  $225^\circ$ , вектор спина поворачивается на  $450^\circ$ , т. е. на оборот с четвертью.

амплитуда вероятности для спина вниз равна 0. (Это соответствует точке  $\varphi = 0$  на единичном круге в абстрактном пространстве нейтронных состояний.) При физическом повороте вектора спина на  $90^\circ$  от оси  $z$  к точке  $\theta = 90^\circ$ , как мы показывали выше, обобщенная фаза приходит в точку  $\varphi = 45^\circ$ . При повороте еще на  $90^\circ$  к точке  $\theta = 180^\circ$ , точка на фазовом круге приходит к  $\varphi = 90^\circ$ . Соответствие между вращением спина и обобщенной фазой можно изобразить, помещая точки фазового круга над соответствующими точками круга, изображающего вращение вектора спина. Этот геометрический принцип вместе с топологической структурой расслоения учитывает изменение знака амплитуды нейтронного состояния как эффект сдвига фазы. Один полный оборот на базе приводит обобщенную фазу в противоположную точку (рис. 7).

Как же повернуть вектор спина нейтрона на  $360^\circ$ ? Современные экспериментальные установки используют магнитные свойства электрически нейтральных частиц. У нейтрона есть не только спиновый угловой момент, но и магнитный момент, что делает его похожим на магнитный стержень, вращающийся вокруг оси, соединяющий полюса. Предположим, что

вначале вектор спина нейтрона был направлен вдоль оси  $z$ , и включилось магнитное поле под прямым углом к этой оси. Внешнее магнитное поле, действующее на магнитный стержень, вызывает момент вращения, приводящий к прецессии вращающегося вокруг своей оси магнита относительно направления поля. Вектор спина нейтрона будет прецессировать в плоскости, ортогональной магнитному полю так же, как вращающийся гироскоп прецессирует под действием силы тяжести. Итак, чтобы повернуть вектор спина нейтрона от первоначального направления, можно воспользоваться его магнитным моментом. В действительности, даже если магнитное поле не перпендикулярно начальному спину, нейтрон прецессирует со скоростью, которая пропорциональна напряженности магнитного поля и не зависит от ориентации нейтрона. Таким образом, все нейтроны в неполяризованном пучке, проходящем сквозь магнитное поле, прецессируют с одной и той же скоростью; эта скорость называется ларморовой частотой.

□

Таким образом, существует возможность вращать спин нейтрона. Однако одного лишь поворота на  $360^\circ$  еще не достаточно. Нужно суметь сравнить амплитуды вероятности повернутого нейтрона с амплитудами начального состояния. Эти амплитуды равны по величине, но противоположны по знаку. Такое различие в знаке может быть обнаружено, так как в квантовой механике есть возможность доставить частицу в заданную точку пространства двумя различными путями, в том смысле, что вероятность обнаружить частицу на каждом из этих путей отлична от нуля. Как всегда, эти вероятности определяются как квадраты амплитуд для каждой из точек данного пути. В точке пересечения, где оба пути дают вклад в вероятность обнаружения частицы, амплитуда вероятности равна сумме амплитуд для каждого из путей. Сложение следует выполнить прежде, чем возведением в квадрат будет вычислена вероятность. Это правило, обусловленное явлением квантовой интерференции, дает метод демонстрации изменения знака, связанного с поворотом на  $360^\circ$ . Созданный недавно нейтронный интерферометр позволяет расщепить пучок нейтронов, так чтобы частицы двигались по двум различным траекториям, а также совместить отдельные пучки. Кроме того, можно вращать векторы спинов нейтронов в одном из пучков, в то время как в другом пучке спины не вращаются. Если относительный поворот равен  $360^\circ$ , то получаемое различие в знаке проявляется как деструктивная интерференция двух нейтронных пучков.

Эксперименты по обнаружению вращения спина на  $360^\circ$  были сделаны несколькими группами. Г. Раух, У. Бонзе и их коллеги первыми продемонстрировали этот эффект в 1975 г. в Институте им. Лауэ и Ланжевена в Гренобле. Приблизительно в это же время аналогичный опыт был поставлен американской группой, возглавляемой С. А. Вернером, в Университете Миссури. В 1976 г. Э. Клейн и Дж. И. Опат из Мельбурнского университета использовали новейшую дифракционную технику для исследования эффекта вращения спина нейтрона. Этот опыт также был поставлен в Институте им. Лауэ и Ланжевена.

□

Главный элемент типичного нейтронного интерферометра — это идеальный кремниевый кристалл, вырезанный таким образом, что на едином цельном основании сделаны три полированные выступа. При попадании нейтронного пучка на первый выступ, он расщепляется на прямой пучок и преломленный пучок. На втором выступе каждый из пучков вновь

расщепляется. На третьем выступе пара отдельных пучков сливается в один пучок. Эти два пучка интерферируют конструктивно или деструктивно в зависимости от разности их обобщенных фаз. Затем результирую-

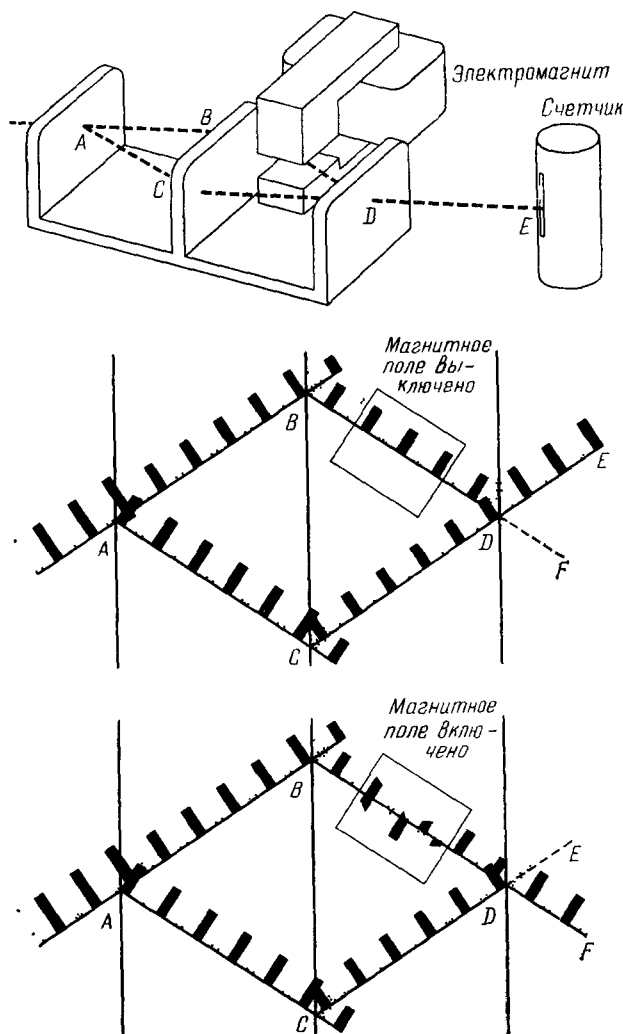


Рис. 8. Нейтронный интерферометр, вырезанный из цельного кристалла кремния, имеет три выступа.

Каждый выступ разделяет нейтронный пучок на прошедший и преломленный. В этом эксперименте один пучок проходит сквозь магнитное поле, причем поворачиваются спинные векторы нейтронов и меняется обобщенная фаза нейтронного состояния. Когда два отдельных пучка сливаются вместе, они интерферируют в соответствии с их разностью фаз. Если магнитное поле равно нулю, то разность фаз не возникает и пучки интерферируют конструктивно. Если магнитное поле поворачивает один из пучков на  $360^\circ$ , то разность фаз равна  $180^\circ$  и пучки интерферируют деструктивно в счетчике E. Гребни нейтронных волн изображены темными полосками, а впадины — заштрихованными полосками. Величины амплитуд вероятности показаны относительными длинами полосок. Так как эффект изображен для нейтронов со спином вверх, ненулевые амплитуды вероятности спина вниз, показанные полосками, расположенными ниже линии распространения нейтронного пучка, возникают только в области действия поля. Отрицательные амплитуды вероятности показаны заменой гребней на впадины и наоборот. Рассеяние нейтронов на каждом из выступов связано со сдвигом фазы на  $90^\circ$  (изображается удалением одной полоски) для преломленного пучка, для прошедшего пучка сдвиг фазы не происходит.

щий пучок вновь расщепляется, и помещенные за третьим выступом счетчики, или детекторы, регистрируют числа нейтронов в каждом из этих двух пучков.

Вероятность попадания нейтронов в счетчик, поставленный на пути результирующего пучка, меняется в зависимости от обобщенной фазы того пучка, в котором происходило вращение спина нейтрона. Эта вероятность измеряется по числу нейтронов, регистрируемых за единицу времени. Если оба интерферирующих пучка оказываются точно в фазе в отсутствие вращения, первоначальная скорость отсчетов высока. Так бывает при конструктивной интерференции: обе амплитуды — одного знака, и квадрат их суммы — максимален. Действительно, конструктивная интерференция возникает, когда разность обобщенных фаз равна нулю или кратна  $360^\circ$ . После одного полного оборота вектора спина разность фаз равна  $180^\circ$ , и знаки амплитуд противоположны. В идеальной ситуации их сумма обратилась бы в нуль, практически же скорость отсчетов достигает минимума. Возникает деструктивная интерференция.

Вращение векторов нейтронных спинов происходит при установке электромагнита между вторым и третьим выступами. Один из пучков проходит сквозь область действия магнита, другой никакого поля не чувствует. Поэтому магнитное поле вращает спины в одном пучке, а в другом пучке спины не вращаются. Угол вращения пропорционален напряженности магнитного поля. В результате обобщенная фаза первого пучка непрерывно возрастает при увеличении тока в электромагните от нуля до максимального значения. При увеличении сдвига фаз скорость отсчетов вначале падает в одном из счетчиков: конструктивная интерференция постепенно превращается в деструктивную. После достижения минимума скорость отсчетов вновь начинает расти и достигает максимума, когда обобщенная фаза совершает полный оборот. При дальнейшем росте тока цикл изменения скорости отсчетов повторяется. Так как скорость вращения не зависит от начальной ориентации спина, то эксперимент не требует поляризованного нейтронного пучка.

□

Полный угол поворота, набранный на пути сквозь область с магнитным полем, равен частоте ларморовской прецессии, умноженной на время, которое нейтроны провели в поле. Поэтому этот угол можно найти, измерив скорость пучка, напряженность поля и расстояние, пройденное в поле. В опыте, реализованном Раухом, Бонзе и их сотрудниками, нейтроны пролетали расстояние в 1,5 см в магнитном поле со скоростью 2170 м/с, так что каждый нейтрон проводил в поле несколько менее семи микросекунд. При максимальном токе в электромагните напряженность поля была равна 400 Гс, что соответствует ларморовской частоте  $4,33 \cdot 10^8$  град/с. При такой угловой скорости за семь микросекунд вектор спина каждого нейтрона успевает совершить около восьми полных оборотов. Если бы каждый оборот вектора спина на  $360^\circ$  возвращал нейтрон в исходное состояние, то можно было бы ожидать обнаружения восьми циклов максимумов и минимумов в числе отсчетов. На самом деле, результат явно другой. При увеличении магнитного поля от нуля до максимального значения число зарегистрированных счетчиком нейтронов проходит только через четыре цикла.

В некотором смысле, этот результат опыта по вращению спина нейтрона в магнитном поле указывает, что расслоения действительно существуют в квантовой механике и могут быть предметом наблюдения. Расслоение, связанное с вращением нейтронного спина, устроено, однако, исключительно просто, так как и база, и полное пространство в этом случае одномерны. (Напомним, что база и полное пространство — окружности, и полное пространство дважды намотано на базу, как край листа Мёбиуса.) Соответствие между вращениями и фазовыми сдвигами содержится

в правиле, согласно которому точка полного пространства должна непрерывно двигаться, оставаясь все время над точкой базы. Так как полное пространство имеет лишь одну степень свободы, это правило позволяет однозначно найти фазовый сдвиг для данного вращения.

Дело обстоит совсем не так просто в расслоениях более общего вида. Например, если слоем является линия, а не пара точек, движение на базе связано с переходом со слоя на слой, однако следует еще указать, какая

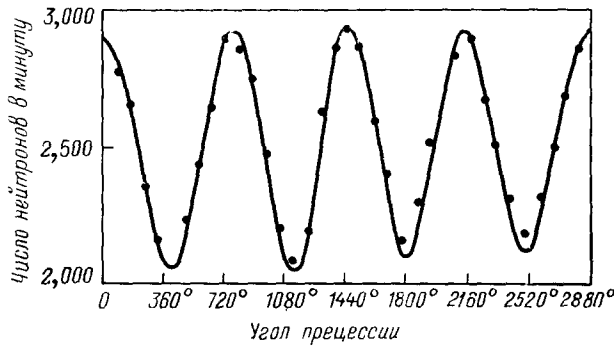


Рис. 9. Даже умеренное магнитное поле может вызвать появление нескольких циклов интерференции.

Полный угол прецессии  $\theta$  для пучка, проходящего через поле, можно вычислить, зная напряженность волн. Изображение интенсивности результирующего пучка в зависимости от угла  $\theta$  дает экспериментальную кривую, напоминающую график функции  $\cos(\theta/2)$ . Из-за наличия фоновых нейтронов число отсчетов в минимуме отлично от нуля. Восемь полных оборотов спина в пучке дает только четыре пика в интенсивности.

именно точка должна при этом быть выбрана в каждом слое. Чтобы однозначно задать путь в полном пространстве для такого расслоения, необходимо дополнительное построение. Процедура, задающая в полном пространстве путь, лежащий непосредственно над путем в базе и проходящий через заданную точку полного пространства, называется правилом поднятия пути.

Изучение расслоенных пространств возникло из попыток упростить анализ кривизны в многообразии — абстрактном топологическом пространстве произвольного числа измерений. Идея расслоенного пространства неявно содержалась в работе французского математика Э. Ж. Картана, но впервые она была явно высказана около 1935 г. Х. Уитни, который работает в настоящее время в Институте высших исследований. Идея поднятия пути была разработана в качестве систематического метода сравнения эффектов кривизны в различных точках многообразия и обобщена на расслоенные пространства французскими математиками Шарлем Эресманом и Анри Картаном, а также другими, около 1950 г.

Рассмотрим простейшее неплоское многообразие — двумерную сферическую поверхность. Для наблюдателя, стоящего на поверхности, существует полный круг направлений, по которым он может смотреть вдоль поверхности. Предположим, что наблюдатель смотрит только в горизонтальном направлении, не вверх и не вниз. Для каждой точки поверхности имеется такой круг направлений. Совокупность всех этих окружностей естественным образом объединяется в расслоение, называемое расслоением линейных элементов \*) на сферической поверхности. База этого расслоения — сама сфера. Слой над каждой точкой базы представляет собой мно-

\*) В оригинале — bundle of directions — пучок направлений. (Прим. перев.)

жество всех направлений на поверхности сферы, которые могут просматриваться из данной точки. Таким образом, каждый слой является окружностью.

□

Невозможно дать точную картину, описывающую расслоение линейных элементов на сфере. Одна из причин этого заключается в невозможности задать непрерывным образом в каждой точке сферы определенное направление. Как принято говорить, «невозможно причесать волосы на сфере» — по крайней мере над одной точкой всегда будет торчать вихор. С другой стороны, можно «причесать» любую окрестность на сфере, если даже эта окрестность покрывает всю сферу за исключением одной точки. Для такой окрестности возможно задать непрерывное множество направлений и, таким образом, нарисовать топологически точную картину пространства расслоения над ней. Например, на плоской карте северного полушария можно нарисовать непрерывное множество направлений, указывающих, скажем, влево и вниз. Отображая это множество на сферу, получим «причесанные волосы» в ее северном полушарии.

«Причесывание волос» на полусфере эквивалентно указанию направления в каждой точке. Пространство расслоения над полусферой можно нарисовать, изображая каждый слой в виде вертикального отрезка. Если основание слоя соответствует выбранному направлению, то угол между ним и любым другим направлением может быть представлен в виде высоты слоя (рис. 10). Середина слоя соответствует углу  $180^\circ$ , а верхняя точка — углу  $360^\circ$ . Так как при повороте на  $360^\circ$  мы приходим к исходному направлению, то верхняя и нижняя точки слоя отождествляются в пространстве расслоения.

Как определить правило подъема пути в расслоении линейных элементов над сферой? Путь на базе расслоения есть просто путь на поверхности сферы. Подъем такого пути в пространство расслоения требует указания какого-то выбранного направления в каждой точке пути. Представим себе часы с одной стрелкой, центр которых движется вдоль пути на сфере, в то время как стрелка свободно движется по циферблату. Правило подъема пути определяет положение стрелки на циферблате в каждой точке пути при заданном начальном положении стрелки. Если рассматривать только топологию сферы, позволив ее поверхности растягиваться и деформироваться, но не разрываться, как если бы она была сделана из резины, то не существует предпочтительного способа задать такое правило. Основная причина заключается в том, что нет топологической связи между направлениями в различных точках сферы. Однако если рассматривается геометрия сферы, то существует естественный принцип, который определяет движение стрелки по циферблату. Этот принцип называется параллельным переносом.

Параллельный перенос на сфере можно понять наилучшим образом, представив себе, что сфера катится по плоскости. Предположим, что на плоскости нанесены чернилами кривые и прямые линии со стрелками, которые параллельны друг другу и смотрят, скажем, влево и вниз. Термин «параллельный перенос» основан на этой картине. Стрелки, отпечатавшиеся на сфере, служат примером параллельного переноса вдоль соответствующих кривых.

□

Параллельный перенос определяет правило подъема пути в расслоении линейных элементов над сферой. Сферу с заданной на ней кривой и стрелкой, указывающей направление в начальной точке кривой, можно



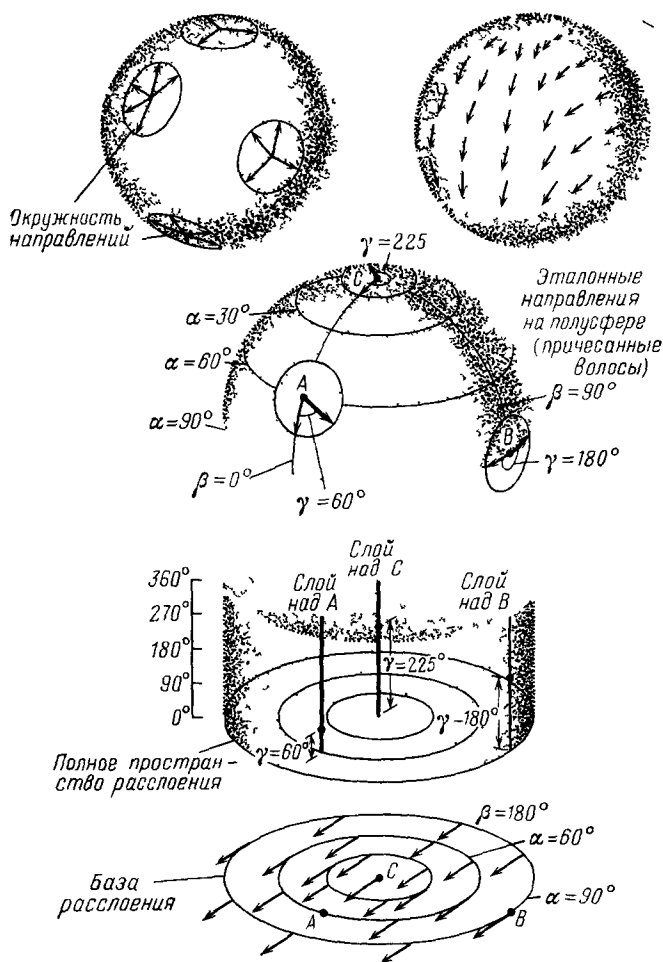


Рис 10 Расслоение линейных элементов над сферой является важным примером расслоенного пространства

Каждой точке сферы ставится в соответствие единичная окружность, определяющая множество исходящих из этой точки направлений. Чтобы направления можно было задавать углами необходимо в каждой точке указать эталонное направление. Если бы эталонное направление можно было определить непрерывным образом во всех точках, то были бы «причесаны волосы» на сфере. Но сделать это невозможно, так как всегда остается «вихор». Однако «волосы» могут быть «причесаны» над любой областью сферы, не совпадающей со всей ее поверхностью. Например, указывая в каждой точке плоской карты северного полушария направление влево и вниз, мы тем самым определяем непрерывное множество эталонных направлений на полусфере. Можно изобразить расслоение линейных элементов над полусферой, если взять в качестве базы расслоения плоскую карту полушария. Каждое направление указывается на вертикали, проведенной из соответствующей точки карты. Высота соответствует углу между выбранным направлением и эталонным. Высоты 0 и 360° указывают одно и то же направление. Полное пространство расслоения есть цилиндр с отождествленными основанием и вершином. Стрелки, указывающие эталонные направления на карте, параллельны. Их изображения на сфере не могут быть получены друг из друга с помощью параллельного переноса.

положить на плоскость, так что начальная точка будет точкой касания. Вообразим на минуту, что в каждой точке плоскости нанесены чернилами стрелки, параллельные стрелке, заданной в точке касания. Когда сфера катится на плоскости, оставляя на ней след от кривой, то стрелки, в свою очередь, будут отпечатываться на сфере. Эти стрелки и представляют

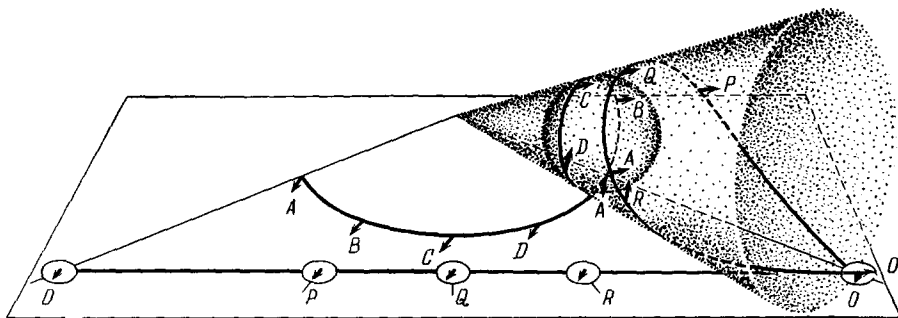


Рис. 11. Параллельный перенос вдоль любой кривой на плоскости осуществляется таким образом, что стрелки в любой точке смотрят в одном направлении.

Чтобы обобщить понятие параллельного переноса на неплоскую поверхность, нужно вообразить, что параллельные стрелки отпечатываются на поверхности, которая катится по плоскости без скольжения или вращения вокруг вертикальной оси. Точка касания при этом должна всегда оставаться на кривой. Если сфера катится по плоскости, касаясь плоскости одной из своих широт, то удобно нарисовать конус, касающийся этой широты. Когда конус катится по плоскости, сфера катится вдоль широты. Если поверхность катится вдоль прямой на плоскости, то отпечатавшаяся на поверхности кривая есть геодезическая. Геодезическая, отпечатавшаяся на конусе с достаточно малым углом при вершине, может охватить конус и самопересечься. Угол самопересечения называется угловым избытком. Он измеряет кривизну области, охватываемой замкнутым путем.

собой путь в пространстве расслоения, который начинается с начальной стрелки и лежит над заданной кривой.

След прямой линии, отпечатавшийся на катящейся сфере (или любой другой кривой поверхности) называется геодезической. На сфере геодезической является большая окружность. Наикратчайший путь между двумя точками на сфере есть отрезок геодезической. Стрелки на плоскости, имеющие одинаковое направление, сохраняют в некотором смысле это свойство, когда они отпечатываются вдоль геодезической — в каждой точке геодезической угол между касательной и стрелкой один и тот же.

Параллельный перенос вдоль кривой можно описать, не апеллируя к качению сферы на плоскости. Для этого кривую нужно составить из отрезков геодезических и переносить стрелки, сохраняя постоянные углы с касательными к геодезическим отрезкам. При взгляде на сферу со стороны параллельный перенос вдоль геодезических может не показаться параллельным, так как стрелки могут поворачиваться. Если же на сфере оставляет след произвольная кривая, то вращение стрелок кажется еще более хаотическим. Параллельный перенос позволяет выразить в явной количественной форме интуитивно ясное различие между кривой и плоской поверхностью. При параллельном переносе стрелок на плоскости их направления совпадают после обхода вдоль замкнутого пути. Однако параллельный перенос вдоль замкнутого пути на кривой поверхности может не давать такого совпадения. Угол между начальным и конечным направлениями стрелки при однократном обходе контура называется угловым избытком контура. Из конструкции параллельного переноса следует, что угловой избыток не зависит от начального направления стрелки.

Математики обычно измеряют углы не в градусах, а в радианах. (Градусы переводятся в радианы умножением на постоянную  $2\pi/360$ . Таким образом, один радиан приблизительно равен  $57^\circ$ .) Измеренный в радианах

избыток называется полной кривизной области, охватываемой контуром. Средняя кривизна области определяется как полная кривизна, деленная на ее площадь. Условимся, что правильный знак средней кривизны получается при обходе контура против часовой стрелки, т. е. область находится слева от контура. Кривизна поверхности в точке есть предел средней кривизны при бесконечном уменьшении области, содержащей точку.

□

Параллельный перенос дает возможность определить правило подъема кривой с поверхности сферы в пространство расслоения. Угловой избыток в пространстве расслоения измеряется как расстояние в слое над точкой, в которой параллельный перенос начинается и заканчивается (рис. 12). Следовательно, полная кривизна области, охватываемой замкнутым контуром на базе, определяется расстоянием вдоль одного из слоев при поднятии контура. Оказывается, что замена параллельного переноса произвольным правилом подъема пути обобщает определение кривизны на другие расслоенные пространства, в которых операция параллельного переноса не имеет смысла. Такие правила подъема должны быть сформулированы, не используя понятия геодезических или углов.

Можно осуществить подъем кривой, вводя дополнительную структуру в само пространство расслоения, вместо того, чтобы рассматривать геометрию базы расслоения, как это делается при параллельном переносе. Один из способов сделать это — провести в каждом слое наклонные к нему параллельные плоскости. Наклон плоскостей указывает, насколько быстро поднятый в пространство расслоения путь спадает или поднимается при переходе от слоя к слою. Плоскости не должны быть параллельными слоям. Их наклоны должны меняться непрерывно от слоя к слою. Наклон в точках данного слоя постоянен. При параллельном переносе последнее условие означает независимость углового избытка (и, следовательно, кривизны) от начального направления переносимой стрелки. Такое множество непрерывных плоскостей в пространстве расслоения называется связностью. Поднятый путь, проходящий через данную точку слоя, должен касаться наклонной плоскости, связанной с этой точкой. Таким образом, плоскость определяет наклон поднятого пути в точке. На рис. 12 проиллюстрировано, как связность осуществляет подъем пути на сфере, подобно тому, как это происходит при параллельном переносе.

Кривизна связности может быть определена при помощи той же процедуры, которая использовалась при измерении кривизны поверхности. Цель такой процедуры — поставить в соответствие каждой точке базы число, которое является кривизной в данной точке. (У поверхности большой размерности кривизна определяется не одним числом, а набором чисел, которые являются компонентами математического объекта, называемого тензором.) Число, измеряющее кривизну связности, получается из величины, соответствующей угловому избытку бесконечно малого контура, охватывающего точку. Связность имеет нулевую кривизну над некоторой областью базы, если каждый достаточно малый замкнутый контур в области может быть поднят до замкнутого контура в пространстве расслоения. В этом случае, по аналогии с параллельным переносом на плоскости, связность называется плоской. Если связность имеет ненулевую кривизну, малые замкнутые контуры в базе поднимаются до путей в пространстве расслоения, которые не замыкаются.

Движение вдоль пути, поднятого над областью с плоской связностью, аналогично движению по склону горы. Можно подниматься на различные высоты над уровнем моря, двигаясь вдоль замкнутого пути. Каким бы, однако, кружным ни был путь, приходя в точку с начальной широтой и

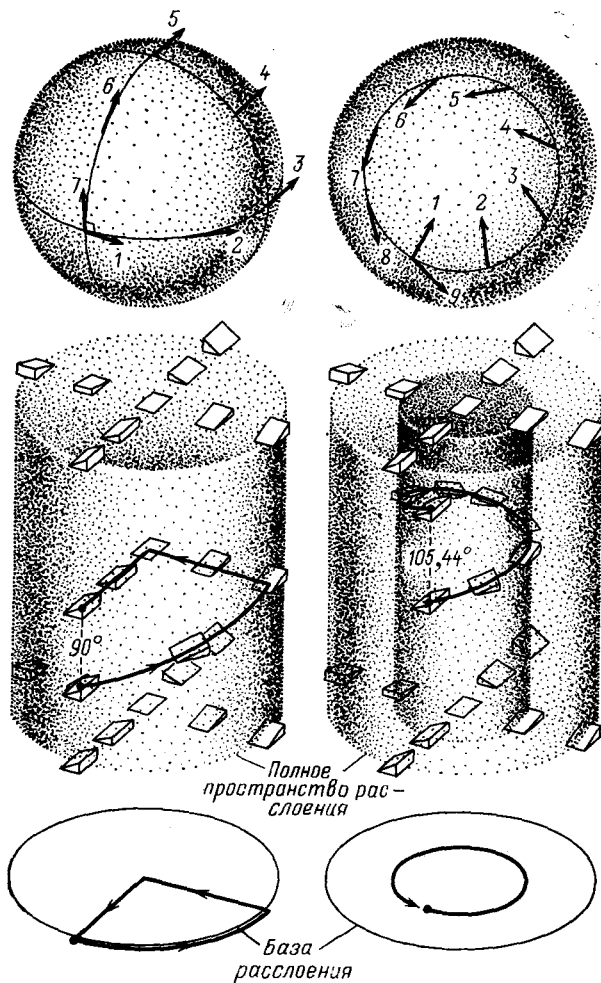


Рис. 12. Подъем пути в расслоении означает построение пути в полном пространстве расслоения, начинающемся в заданной точке и лежащем непосредственно над путем в базе.

В расслоении линейных элементов над сферой параллельный перенос направления по поверхности сферы однозначно определяет подъем любого пути. Полное пространство расслоения линейных элементов над северным полушарием может быть изображено в виде цилиндра. Каждое направление определяется высотой в слое, соответствующей углу между заданным направлением и эталонным. В рассматриваемом примере на плоской карте северного полушария эталонные направления указывают влево и вниз. В начальной точке замкнутого контура, образованного сторонами сферического геодезического треугольника, эталонное направление указывает на юг. Угол между переносимым направлением (жирные стрелки) и касательной к геодезической постояен. Геодезическая, составляющая первую сторону треугольника, искривляется по отношению к эталонному направлению. Поэтому угол между переносимым вдоль геодезической направлением и эталонным направлением постоянно увеличивается. При переносе вдоль второй и третьей сторон треугольника этот угол не меняется и составляет  $180^\circ$ . При возвращении в начальную точку стрелка, обозначающая переносимое направление, оказывается повернутой на  $90^\circ$ . Это и есть угловой эксцесс треугольного контура. Повороты переносимых направлений изображаются как подъем пути в расслоении линейных элементов над полусферой. Направление, переносимое вдоль широты  $45^\circ$ , начинается под углом  $180^\circ$  к эталонному направлению. При движении вдоль широты этот угол постоянно увеличивается. Связность может определять правила подъема пути, не опираясь на понятие параллельного переноса. Для этого точкам полного пространства расслоения ставятся в соответствие плоскости. Поднятый путь должен касаться этих плоскостей. Наклон плоскостей постояен вдоль слоя, но непрерывно меняется при переходе от слоя к слою. Плоскости не должны быть вертикальны. Такое множество плоскостей определяет связность в расслоении.

долготой, мы возвращаемся и на первоначальную высоту. Движение над областью с ненулевой кривизной связности похоже на движение в пещере. Некоторые пути по пещерным переходам могут приводить назад в точку с исходной широтой и долготой, но высота при этом может совершенно отличаться от той, с которой начиналось движение. Выражаясь математически, можно сказать, что связностью над областью является плоской, если только направляющие плоскости, определяющие связность, касаются некоторого семейства поверхностей. Каждая поверхность соответствует, по аналогии, стороне холма. Поверхности должны подходить друг другу и упаковываться в пространстве расслоения над рассматриваемой областью как одинаковые ложки. Каждая поверхность должна иметь ту же размерность, что и база.

□

Обратимся теперь к вопросу о том, как характерные свойства калибровочных полей представляются с помощью расслоенных пространств. В сущности, калибровочное поле лучше было бы назвать «полем, сдвигающим фазу». В современных калибровочных теориях ядерных сил квантовые волны подвергаются фазовым сдвигам, что приводит к изменению типа частиц, описываемых этими волнами. Например, для того чтобы превратить амплитуду вероятности протонного поля в амплитуду вероятности нейтронного и наоборот, т. е. на самом деле, непрерывно изменить вероятность того, что частица есть протон или нейтрон, достаточно сдвинуть обобщенные фазы.

Более простой пример способности калибровочного поля сдвигать фазу можно найти в квантовой теории магнетизма. Рассматриваемое калибровочное поле называется магнитным векторным потенциалом, который определяет взаимодействие электронов с магнитным полем. Наиболее ясный способ, экспериментально демонстрирующий действие магнитного векторного потенциала, использует интерференционные структуры в электронных волнах.

Электрон в пучке может быть описан волнами, длина которых обратно пропорциональна импульсу электрона, а частота пропорциональна его энергии. В каждый момент времени в любой точке пространства такая волна имеет определенную величину так же, как волна на воде имеет в определенный момент высоту выше или ниже среднего уровня воды. Последовательность высот в точке меняется периодически от максимума к минимуму и обратно. Картина изменения высот имеет сходство с графиком косинуса. Так как аргументом косинуса является угол, то высота в определенный момент времени (мгновенная высота волны) может быть установлена заданием максимума волны и угла, который соответствует данному моменту. Кривая достигает своей максимальной высоты, когда, к примеру, угол равен нулю градусов, и минимальной высоты или наибольшего отрицательного значения, когда он равен  $180^\circ$ ; при значениях угла  $90^\circ$  и  $270^\circ$  высота будет нулевая.

□

Угол, соответствующий мгновенной высоте электронной волны, называется фазой волны. Вероятность обнаружить электрон в определенной точке не зависит от фазы, так как амплитуда вероятности пропорциональна максимуму электронной волны. (Как обычно, вероятность вычисляется путем возведения в квадрат амплитуды вероятности.) Таким образом, если произвольно сдвинуть фазу электронной волны в каждой точке пространства, вероятность обнаружения электрона в любой точке не изменится.

Функция, которая определяет такой локальный фазовый сдвиг в каждой точке пространства, называется калибровочным преобразованием.

Общая фаза электронного пучка не влияет на наблюдаемые величины, относительная же фаза двух пучков, приходящих в одну точку, приводит к физическим следствиям. Разность фаз двух интерферирующих пучков может менять максимальную высоту электронной волны и, таким образом, изменять амплитуду вероятности.

Интерференционная картина демонстрирует, как меняется от точки к точке вероятность обнаружения частицы. Следовательно, где бы не пересекались два пучка, они создают интерференционную картину. Предположим, что эксперимент симметричен и фазы пучков точно совпадают в центре детектирующего экрана. Значение фазы в центре экрана может быть по желанию изменено, но такое же изменение должно быть затем сделано в каждом из пучков. Поэтому при любом калибровочном преобразовании в данной точке интерференция конструктивна.

Интерференционная картина возникает потому, что для точек, лежащих на детектирующем экране, скажем, левее центра, волны из левого пучка проходят меньшее расстояние до экрана, чем волны из правого пучка. Для точек, лежащих дальше от центра, разность фаз или относительная фаза принимает большее значение, вызывая периодические изменения интенсивности, создающие интерференционную картину. Картина проявляется как изменение подсчитываемой интенсивности в области пересечения пучков. Если вследствие какого-либо физического эффекта возникает разность фаз двух приходящих в центр пучков, то аналогичная разность фаз будет обнаружена в каждой точке справа или слева от центра. «Бахрома» интерференционной картины будет равномерно сдвинута.

□

Магнитный векторный потенциал является полем, сдвигающим фазы электрически заряженных частиц в каждой точке пространства. Векторный потенциал определяет магнитное поле; на самом деле действие магнитного поля на заряженные частицы может быть полностью описано в терминах фазовых сдвигов, задаваемых векторным потенциалом. Основная причина, по которой поле векторного потенциала может рассматриваться как калибровочное, заключается в том, что магнитная сила, действуя на заряженную частицу, меняет ее направление и не меняет энергию. Следовательно, когда электрон попадает в магнитное поле, то частота электронных волн остается неизменной, но пространственный характер волн меняется. Это происходит так, как если бы длина волны менялась от точки к точке. Таким образом, фазовый сдвиг электрона, вызываемый магнитным полем, зависит от траектории электрона.

В классической теории магнетизма магнитный векторный потенциал рассматривался как вспомогательное средство для вычисления магнитного поля. При этом оказалось, что в областях, в которых магнитное поле отсутствует, магнитный векторный потенциал мог быть ненулевым. Поэтому физики думали, что магнитный векторный потенциал не мог быть наблюдаем сам по себе.

Однако в квантовой механике магнитный векторный потенциал приводит к наблюдаемым эффектам. Его ожидаемое воздействие на фазу было отмечено в 1949 г. У. Эренбергом из Лондонского университета и Э. Сайди из Эдинбургского университета. Однако только в 1959 г. Я. Ааронов из Университета Иешива и Д. Бом из Лондонского университета предложили эксперимент, в котором этот эффект мог наблюдаться непосредственно.

Подобно эксперименту с вращением нейтрона, для эксперимента Ааронова — Боме требуется разделить пучок субатомных частиц и затем соединить разделенные пучки для наблюдения интерференции. В качестве таких частиц вместо нейтронов используются электроны. Это создает трудную техническую проблему, так как максимальное расстояние, на

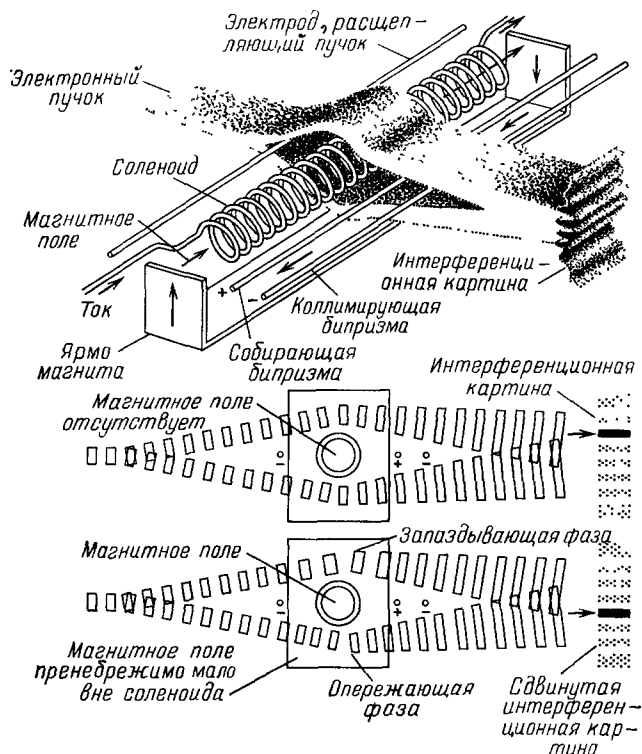


Рис. 13. Фазовый сдвиг электрона может появляться не только непосредственно под действием магнитного поля, но также и в тех случаях, когда электрон пролетает рядом с областью, в которой поле отлично от нуля.

Этот эффект можно обнаружить с помощью установки, в которой электронный пучок разделяется отрицательно заряженной проволокой на два пучка, огибающих с противоположных сторон соленоида. Магнитное поле сосредоточено внутри соленоида. Пучки затем соединяются вместе, и исследуется их интерференция. При увеличении тока в соленоиде магнитное поле возрастает и интерференционная картина сдвигается. Электронные пучки остаются когерентными, если они разведены на расстояние не более чем 60 мкм. Поэтому экспериментальная установка чрезвычайно мала: диаметр соленоида составляет менее одной седьмой толщины человеческого волоса. Подобного рода эксперимент был впервые предложен в 1959 г. Я. Аароновым из Университета Иешива и Д. Бомом из Лондонского университета.

которое можно развести два электронных пучка, сохранив их когерентность, составляет всего 60 мкм. Поэтому экспериментальная установка должна находиться внутри электронного микроскопа. Этот эксперимент был впервые выполнен в 1960 г. Р. Дж. Чэмберсом из Бристольского университета. Этот эффект был подтвержден в более тщательном эксперименте, сделанном в 1961 г. Г. Мелленштатом и В. Байхом из Тюбингенского университета.

□

Входящий электронный пучок разделяется на две когерентные составляющие с помощью проволоки, несущей отрицательный электрический заряд. Разделенные пучки огибают выполненный в виде соленоида электромагнит, имеющий внешний диаметр 14 мкм, что составляет менее чем

одну седьмую часть толщины человеческого волоса. Во внешней части соленоида, где проходят пучки, магнитное поле пренебрежимо мало. Таким образом, все изменения фазы пучка происходят под воздействием поля магнитного векторного потенциала, окружающего соленоид.

Кроме соленоида в электронном микроскопе находится несущая положительный заряд проволока, которая вновь соединяет пучки. Для увеличения ширины полос в интерференционной картине другая отрицательно заряженная проволока отклоняет пучки на небольшой угол. В результате дифракция на электроде, расщепляющем пучок, дает широкие темные полосы на экране, окруженные последовательностью тонких интерференционных линий.

Когда ток в соленоиде увеличивается, магнитное поле начинает возрастать, тонкие интерференционные линии сдвигаются относительно широких дифракционных полос. Зная размеры индукционной катушки и величину электрического тока, можно вычислить магнитный поток. Следовательно, можно точно подсчитать соотношение между магнитным потоком и фазовым сдвигом. Результаты расчетов подтверждают предсказания квантовой теории.

□

Модель этого эксперимента, основанная на теории расслоений, позволяет прояснить общую связь между калибровочными полями и связностями в расслоенных пространствах. Модель описывает параллельный перенос на поверхности, составленной из усеченного конуса, дополненного сглаженным сферическим куполом. Топологически такая поверхность эквивалентна полусфере, но она имеет совершенно отличную от нее геометрию. Заметим, что ее коническая часть, будучи разрезанной в продольном направлении, может быть развернута на плоскости без растяжения или сжатия. При этом длины и углы на конусе сохраняются. Поэтому, если живущий на поверхности конуса наблюдатель захочет вычислить кривизну своего мира, выполняя параллельный перенос вдоль малых замкнутых контуров, он неизменно будет получать нулевой угловой избыток. Поверхность будет казаться ему плоской. Эта часть поверхности подобна области вне соленоида в эксперименте Ааронова — Бома, где магнитное поле пренебрежимо мало.

Однако, если рассмотреть достаточно большой путь на поверхности конуса, разница между конусом и плоскостью станет очевидной. Прямая линия, пересекающая обе стороны разреза развернутого конуса на одинаковом расстоянии от вершины, сворачивается в замкнутый контур, являющийся геодезической линией на конусе. Предположим, что два двумерных наблюдателя находятся в точке на контуре, противоположной точке пересечения контура с разрезом и смотрят в данном направлении вдоль контура. Если один из них начнет двигаться вдоль контура вперед, а другая — пятясь назад, то им покажется, что они удаляются друг от друга по прямой. Тем не менее, при встрече в точке пересечения контура с разрезом, они уже не будут смотреть в одном направлении. Угол между наблюдателями будет равен  $360^\circ$  минус угол при вершине конуса. Наблюдатели должны будут прийти к выводу, что мир, в котором они живут, не плоский, так как этот угол есть угловой избыток замкнутого контура. Кривизна области, находящейся с левой стороны от контура, равна измеренному в радианах угловому избытку. Можно усмотреть аналогию между парой наблюдателей, обходящих конус в противоположных направлениях, и парой огибающих соленоид электронных пучков в эксперименте Ааронова — Бома. Два наблюдателя первоначально смотрят в одном направлении. Аналогично два пучка в момент разделения находятся в фазе. Если



каждый наблюдатель измерит кривизну поверхности в окрестности своего пути, то она окажется равной нулю, так как наблюдатели передвигаются по плоской части сглаженного конуса. Подобно этому, поле магнитного

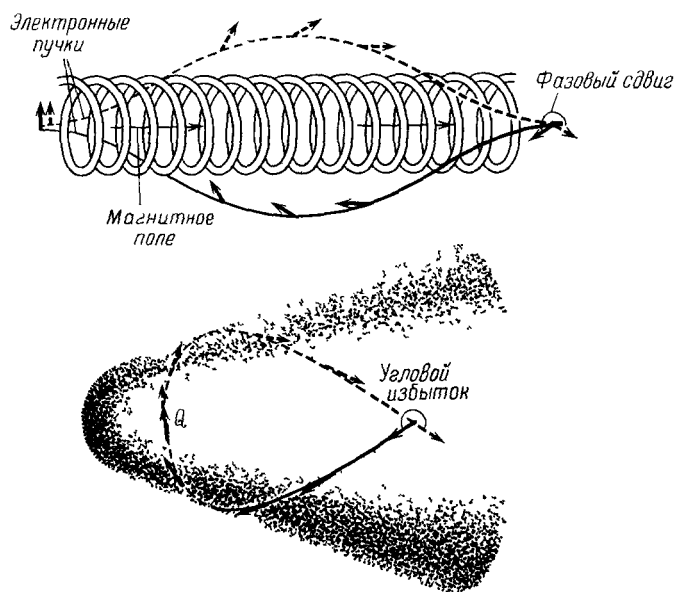


Рис. 14. Фазовый сдвиг электронных пучков в эксперименте Ааронова — Бома может быть промоделирован с помощью параллельного переноса направления вдоль поверхности усеченного конуса, дополненного сглаженным куполом.

Сдвиг фазы вдоль каждого пучка изображается поворотом стрелки. В начальный момент пучки находятся в фазе. Затем фаза вдоль окрашенного пути начинает по отношению к начальной запаздывать и опережать начальную вдоль черного. Фазы сдвигаются, несмотря на то, что магнитное поле вдоль траекторий равно нулю. Сдвиги фаз прямо пропорциональны величине магнитного поля, отличного от нуля в области между пучками. Геометрия конической части сглаженного конуса подобна геометрии плоскости. Эту часть поверхности можно разрезать в продольном направлении и развернуть без деформаций на плоскости. Однако в результате параллельного переноса направления вокруг конуса вдоль противоположных путей получаются различные векторы, хотя кривизна поверхности в окрестности каждого пути равна нулю. Пути, указанные на рисунке, образуют самопересекающуюся геодезическую. Стрелки изображают касательные к ней векторы. Так как параллельный перенос происходит вдоль геодезических, то угловой избыток совпадает с углом самопересечения. Измеренный в радианах угловой избыток равен полной кривизне области, заключенной между путями. Эта кривизна сосредоточена в сглаживающем конус куполе, подобно тому, как магнитное поле сосредоточено внутри соленоида.

векторного потенциала, которое является причиной рассогласования фаз пучков в точке их встречи, не может быть обнаружено локальными измерениями для каждого из пучков в отдельности

□

Ключом к пониманию схожести двух описанных явлений служит интерпретация магнитного векторного потенциала как связности в расслоенном пространстве. Это расслоение называется расслоением фаз. Базой расслоения является обычное трехмерное пространство, в котором проводится эксперимент. Слой над каждой точкой есть множество фаз электрона, находящегося в этой точке. Таким образом, пространство расслоения состоит из множества фаз электронов во всех точках трехмерного пространства. Так как фаза определяется измеренным в градусах или радианах углом, то так же, как и в расслоении линейных элементов, слой представляет собой окружность. Все пространство расслоения четырехмерно. По этой причине расслоение фаз трудно представить себе визуальным. Однако можно нарисовать расслоение фаз над плоскостью, расположен-

ной перпендикулярно оси соленоида. Это трехмерное расслоенное пространство вполне адекватно описывает эксперимент Ааронова — Бома

Теперь расслоенное пространство есть расслоение окружностей над двумерной поверхностью. Его можно нарисовать, изображая слои вертикальными линиями, подобно расслоению линейных элементов над

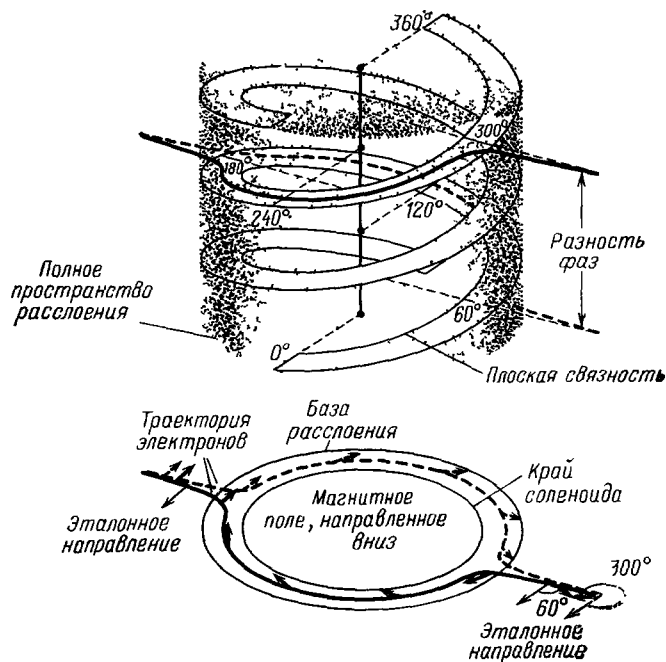


Рис. 15. Расслоение фаз над плоскостью, перпендикулярной оси соленоида в эксперименте Ааронова — Бома, подобно расслоению линейных элементов над усеченным конусом, сглаженным сферическим куполом.

Слой над некоторой точкой базы есть совокупность всевозможных фаз электрона (от 0 до  $360^\circ$ ), находящегося в данной точке. При подходящем выборе магнитного поля связность в расслоении фаз, определяемая магнитным векторным потенциалом, идентична связности, порождающей параллельный перенос на конусе. Кривизна связности соответствует магнитному полю соленоида. При этом области внутри соленоида отвечает сферическая часть поверхности. Правило подъема пути в расслоении фаз то же самое, что и правило, определяющее параллельный перенос на сфере, и может быть описано одной и той же системой наклонных плоскостей (на рисунке не указаны). Области вне соленоида отвечает коническая часть поверхности. В этой области связность плоская. Наклонные плоскости касаются семейства винтовых поверхностей, заполняющих пространство расслоения. Фазовый сдвиг в базе изображается в виде поворачивающихся стрелок.

полусферой или сглаженным конусом. Поле трансверсальных к слоям плоскостей определяет связность в расслоении. Наклон плоскости в данном направлении пропорционален проекции на это направление магнитного векторного потенциала, измеренного в соответствующей точке базы. Кривизна связности пропорциональна интенсивности магнитного поля. Следовательно, кривизна отлична от нуля только внутри соленоида. При подходящем выборе магнитного поля внутри соленоида связность, описываемая магнитным векторным потенциалом над плоскостью, перпендикулярной катушке, и связность, определяющая параллельный перенос на сглаженном конусе, идентичны. Область базы внутри соленоида соответствует сферическому куполу конуса. Следовательно, связность в рассмотренном расслоении фаз эквивалентна связности, осуществляющей параллельный перенос на сфере. Так как магнитное поле вне соленоида равно нулю, то кривизна связности обращается в этой области в нуль. Плоскости, определяющие связность, касаются «плотно упакованного» семейства наклонных поверхностей, закручивающихся спиралью вокруг

центра. Разность фаз между двумя электронными пучками в точности равна высоте, которую набирает спиральная поверхность за один полный оборот.

Кривизна полного расслоения фаз является тензором, так как база расслоения трехмерна. Этот тензор имеет три компоненты, каждая из которых пропорциональна соответствующей компоненте магнитного поля. Такая конструкция может быть обобщена на случай расслоения фаз над пространством-временем, являющимся четырехмерной базой. Рассмотренные совместно электрический и магнитный потенциалы определяют связность, с помощью которой можно объяснить все электромагнитные взаимодействия заряженных частиц. Кривизна связности есть шестикомпонентный тензор, три компоненты которого соответствуют электрическому полю и три компоненты — магнитному.

Все квантовые калибровочные поля можно интерпретировать как связности в расслоениях над пространством-временем. Слой в этом расслоении — это множество преобразований внутренней симметрии частиц, взаимодействующих с помощью калибровочного поля. К настоящему моменту построены расслоения для квантовой электродинамики, для слабого и сильного взаимодействий, а также для теорий, пытающихся объединить эти три взаимодействия. И хотя еще не существует полной схемы объединения всех фундаментальных сил, ясно, что математическому понятию связности в расслоении суждено сыграть важную роль в теоретической физике.

□

По нашему убеждению, не случайно, что подобные математические понятия оказались полезными и наполненными физическим содержанием. Как математики, так и физики не изолированы от окружающей их среды — культурной, политической, физической; идеи и представления исследователей в каждой из этих областей, несомненно, подвергаются взаимному влиянию. Более того, математики и физики неизбежно разделяют неявные предположения о реальном мире и о законах, по которым этот мир отражается в абстрактной науке. И они на деле разделяют страстную причастность к связанному с отражением интеллектуальному труду. Ни так называемая «непомерная эффективность» математических идей в физике, ни плодотворность физической интуиции, породившей новые математические представления, не должны казаться удивительными. Скорее должен вызывать восхищение тот успех, которого добиваются математики и физики в их совместных творческих усилиях по созданию богатой, точной и впечатляющей картины физического мира.

#### ЛИТЕРАТУРА

- S p i v a k M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.— N.Y.: Publish or Perish, 1970.  
Y a n g C. N.— Ann. New York Acad. Sci., 1977, v. 294, p. 86; Phys. Today, June 1980, v. 30, p. 42.

#### ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПЕРЕВОДЧИКОМ

1. W e y l H.— Zs. Phys., 1929, Bd. 56, S. 330.  
Y a n g C. N., M i l l s R. L.— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 191.
2. B e r n s t e i n H. J.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 18, p. 1102.  
A h a r o n o v Y., S u s s k i n d L.— Phys. Rev., 1967, v. 158, p. 1237.  
R a u c h H., Z e i l i n g e r A., B a d u r e k G., W i l f i n g A., B a u s p i e s s W., B o n s e U.— Phys. Lett. Ser. A, 1975, v. 54, p. 425.  
W e r n e r S. A., C o l e l l a R., O v e r h a u s e r A. W., E a g e n C. F.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1053.  
K l e i n A. G., O p a t G. I.— Ibid., 1976, v. 37, p. 238.— Предложение и реализация эксперимента по вращению спина нейтрона на 360°.

3. K l e m p t E.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 3125.  
 S t o l l M. E., W o l f f E. K., M e h r i y M.— Ibid. Ser. A, 1978, v. 17, p. 1561.  
 Neutron Interferometry/Ed. U. Bonse, H. Rauch.— Oxford: Claredon Press, 1979  
 —Более поздние опыты с нейтронными интерферометрами.
4. E h r e n b e r g W., S i d a y E.— Proc. Phys. Soc., Ser. B, 1949, v. 62, p. 8.  
 A h a r o n o v Y., B o h m D.— Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 485.— Обсуждение  
 эффекта магнитного потенциала на электрон.
5. C h a m b e r s R. G.— Phys. Rev. Lett., 1960, v. 5, p. 3.  
 B a y h W., M ö l l e n s t e d t G.— Naturwissenschaften, 1961, Bd. 48, S. 400;  
 Phys. Verh., 1961, Bd. 12, S. 142.— Описания эксперимента Ааронова — Бома.
6. A h a r o n o v Y., C a s h e r A.— Phys. Rev. Ser. A, 1979, v. 19, p. 2461.  
 Д у б р о в и н Б. А., Н о в и к о в С. П.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1006.— Иссле-  
 дования движения электрона в магнитных полях и связь с теорией расслоенных  
 пространств.
7. Д а н и е л ь М., В и а л л е С. М.— УФН, 1982, т. 136, с. 377.— Геометрия  
 расслоенных пространств и ее применение к теории калибровочных полей.