

# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

839.12.01

## ИНСТАНТОННАЯ АЗБУКА

**А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков,  
М. А. Шифман**

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Квантовая механика, мнимое время, интегралы по траекториям . . . . .	554
2. Двугорбый потенциал. Туннелирование . . . . .	559
3. Детерминант и нулевые моды . . . . .	562
4. Инстантонный газ . . . . .	566
5. Евклидова формулировка КХД . . . . .	567
6. BPST-инстантоны. Общие свойства . . . . .	569
а) Конечность действия и топологический заряд (569). б) Выделенность $SU(2)$ -группы (571). в) Величина действия для инстантонных решений (572).	
7. Явный вид BPST-инстантона . . . . .	573
а) Решение с $n = 1$ (573). б) Сингулярная калибровка. Анзац Хоофта (574). в) Соотношения для $\eta$ -символов (575).	
8. Вычисление предэкспоненты для BPST-инстантона . . . . .	576
а) Разложение вблизи перевальной точки. Выбор калибровки и регуляризация (576). б) Нулевые моды (576). в) Ненулевые моды. Эффективный заряд (577). г) Двухпетлевое приближение (579). д) Плотность инстантонов в группе $SU(N)$ (579).	
9. Инстантонный газ и общие теоремы . . . . .	581
10. Инстантоны в КХД-вакууме . . . . .	584
11. Фермионы в инстантонном поле . . . . .	587
Цитированная литература . . . . .	591

По-видимому, все фундаментальные взаимодействия в природе калибровочные. Не составляет исключения и современная теория адронов — квантовая хромодинамика (КХД). В ее основе лежит локальная калибровочная инвариантность относительно цветовой группы  $SU(3)$ , реализуемая восьмеркой безмассовых глюонов. Идея калибровочной инвариантности, однако, гораздо старше: она восходит к квантовой электродинамике — исторически первой полевой модели, в которой были получены успешные предсказания. Еще в конце 40-х годов теоретики научились вычислять все наблюдаемые величины в электродинамике в виде ряда по  $\alpha = 1/137$ . Первые шаги в КХД в конце 70-х годов также были сделаны в рамках теории возмущений. Постепенно выяснилось, однако, что в отличие от электродинамики кварк-глюонная физика не исчерпывается теорией возмущений. Самые интересные явления — пленение цветных объектов, формирование адронного спектра — связаны с непертурбативными (не описываемыми в рамках теории возмущений) эффектами, а точнее, со сложной структурой вакуума КХД, наполненного флуктуациями глюонного поля.

Построение полной «волновой функции» вакуума является, по-видимому, труднейшей задачей. Она все еще остается нерешенной, несмотря

на многочисленные атаки теоретиков. Тем не менее довольно много известно уже сегодня. Изучение «старых», традиционных адронов дает сведения о фундаментальных свойствах вакуума. В свою очередь, получив эти сведения, мы можем сделать ряд нетривиальных предсказаний, касающихся глюония и других столь же мало исследованных аспектов адронной феноменологии.

Соответствующий подход развивался авторами на протяжении ряда лет, но здесь не будет обсуждаться. Отметим только, что основным моментом является введение некоторых вакуумных средних. Например, интенсивность глюонных полей в вакууме, очевидно, измеряется величиной

$$\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle,$$

где  $G_{\mu\nu}^a$  — тензор напряженности глюонного поля ( $a = 1, \dots, 8$  — цветовой индекс). Аналогично величина кваркового конденсата  $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$  служит мерой кварковых полей.

В «окончательной теории», если такая будет создана, все феноменологические матричные элементы можно будет вычислять, исходя из лагранжиана КХД. Уже сейчас можно сказать, что для этого потребуются знание непертурбативных флуктуаций в физическом вакууме. Здесь феноменология соприкасается с чисто теоретическим развитием, которое пока не имело больших приложений, хотя и позволило по-новому взглянуть на ряд проблем.

В 1975 г. было открыто одно из самых красивых явлений в квантовой хромодинамике. Мы имеем в виду инстантоны — классические решения полевых уравнений с нетривиальной топологией. Красота теоретических построений привлекла внимание многих физиков и математиков, и популярность инстантов трудно переоценить. Несомненна важность инстантонов как первого примера флуктуации глюонного поля, не ухватываемого теорией возмущений. Поэтому, хотя вряд ли можно говорить о каких-либо практических выходах, кажется уместным остановиться на физической сущности явления и привести основные формулы, чтобы читатель мог свободно ориентироваться в текущей литературе.

Один из основных выводов, который мы постараемся аргументировать в дальнейшем, состоит в том, что оригинальное решение Беламина — Полякова — Шварца — Тюпкина<sup>1</sup> (BPST-инстантон), видимо, не является флуктуацией, доминирующей в волновой функции вакуума. Несомненно, однако, что такая красота не может пропасть даром. В той или иной форме она наверняка войдет в будущую теорию сильных взаимодействий.

Мы начнем с простого квантовомеханического примера, иллюстрирующего роль непертурбативных флуктуаций. Этот пример был подробно разобран Поляковым<sup>2</sup>, внесшим существеннейший вклад в развитие всего предмета. Лишь отработав основные технические элементы, мы перейдем к более сложному случаю — квантовой хромодинамике. В самом конце мы обсудим вопрос о том, насколько существен BPST-инстантон в реальном мире.

## 1. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, МНИМОЕ ВРЕМЯ, ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

В этом разделе мы рассмотрим задачу одномерного движения бесспиновой частицы в потенциале  $V(x)$ . Эта задача обычно приводится во всех учебниках квантовой механики, мы, однако, обратимся к несколько необычному способу ее решения. Возможно, читатель сочтет его неудобным, аналогично тому, как «неудобны» правила сумм для отыскания

собственных значений уравнения Шрёдингера. Зато — и это самое важное свойство — он непосредственно обобщается на теорию поля.

Если положить массу частицы  $m = 1$ , то лагранжиан системы имеет простой вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x). \quad (1)$$

Пусть частица в начальный момент времени  $(-t_0/2)$  находилась в точке  $x_i$ , а в конечный момент времени  $(+t_0/2)$  — в точке  $x_f$ . Изящный способ записать амплитуду подобного процесса придумал Р. Фейнман (см. книгу<sup>3</sup>). Рецепт состоит в том, что амплитуда равна сумме по *всем* траекториям, соединяющим мировые точки  $(-t_0/2, x_i)$  и  $(t_0/2, x_f)$ , взятой с весом  $e^{i(\text{действие})}$ .

Действие, которое мы в дальнейшем будем обозначать буквой  $S$ , связано с лагранжианом следующим образом:

$$S = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} dt \mathcal{L}(x, \dot{x}). \quad (2)$$

Итак, амплитуда перехода равна

$$\langle x_f | e^{-iHt_0} | x_i \rangle = N \int [Dx] e^{iS[x(t)]}, \quad (3)$$

где  $H$  — гамильтониан и  $\exp(-iHt_0)$  — обычный оператор эволюции системы. Множитель  $N$  в правой части представляет собой нормировочный фактор, к обсуждению которого мы еще вернемся ниже.  $[Dx]$  обозначает интегрирование по всем функциям  $x(t)$  с граничными условиями  $x(-t_0/2) = x_i$ ,  $x(t_0/2) = x_f$ .

Прежде чем заняться динамическими вопросами, рассмотрим левую часть. Если перейти от состояний с определенной координатой к состояниям с определенной энергией,

$$H | n \rangle = E_n | n \rangle,$$

то, очевидно,

$$\langle x_f | e^{-iHt_0} | x_i \rangle = \sum_n e^{-iE_n t_0} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle, \quad (4)$$

и мы получаем сумму осциллирующих экспонент. Если мы интересуемся основным состоянием (а в теории поля мы всегда интересуемся наинизшим состоянием — вакуумом), то гораздо удобнее превратить осциллирующие экспоненты в падающие. Сделаем с этой целью замену  $t \rightarrow -i\tau$ . Тогда при  $t_0 \rightarrow \infty$  в сумме (4) выживает лишь один член, который сразу же сообщает нам, чему равна энергия  $E_0$  и волновая функция  $\psi_0(x)$  низшего уровня,  $e^{-E_0 \tau_0} \psi_0(x_f) \psi_0^*(x_i)$ .

Переход к мнимому времени часто называется в литературе виковским поворотом, а соответствующий вариант теории — евклидовым. Ниже мы увидим, что замена  $t \rightarrow -i\tau$  является в определенном смысле не только вопросом удобства, так как дает новый язык для описания одного очень важного аспекта теории.

Обратимся теперь к правой части уравнения (3). В евклидовской формулировке действие принимает вид

$$iS[x(t)] \rightarrow \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \right] d\tau, \quad (5)$$

причем подразумевается следующее граничное условие:  $x(-\tau_0/2) = x_i$ ,  $x(\tau_0/2) = x_f$ , и отсчет энергии выбран так, что  $\min V(x) = 0$ .

Назовем евклидовым действием следующую величину:

$$S_E = \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] d\tau. \quad (6)$$

Так как  $S_E \geq 0$ , мы заработали экспоненциально падающий вес и в правой части уравнения (3). В этом обзоре мы так и останемся в евклидовом пространстве и не вернемся в пространство Минковского (т. е. к действительному времени); договоримся поэтому индекс «E» всюду опускать.

Евклидов вариант (3) таков:

$$\langle x_1 | e^{-H\tau_0} | x_1 \rangle = N \int [Dx] e^{-S}. \quad (7)$$

Теперь пора сделать следующий важный шаг и пояснить, что же фактически означает интегрирование по всем траекториям. Пусть  $X(\tau)$  — какая-либо функция, удовлетворяющая граничным условиям. Тогда произвольная функция с теми же граничными условиями представляется в виде

$$x(\tau) = X(\tau) + \sum_n c_n x_n(\tau), \quad (8)$$

где  $x_n(\tau)$  — полный набор ортонормированных функций, обращающихся в нуль на границе:

$$\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau x_n(\tau) x_m(\tau) = \delta_{nm}, \quad x_n\left(\pm \frac{\tau_0}{2}\right) = 0.$$

Меру  $[Dx]$  можно выбрать в следующем виде:

$$[Dx] = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}}. \quad (9)$$

Коэффициент пропорциональности в этом соотношении, вообще говоря, не имеет сам по себе особого смысла до тех пор, пока не фиксирован нормировочный множитель  $N$ .

Предположим теперь, что в рассматриваемой задаче характерное значение действия по тем или иным причинам велико. Хорошо известная ситуация, когда «работает» квазиклассическое приближение, или, что то же самое, метод перевала (последний, «математический» термин, возможно, будет более понятен некоторым из читателей). Иными словами, весь интеграл в (7) набирается от областей вблизи экстремума (минимума)  $S$ . Траектория, соответствующая минимуму действия — обозначим ее через  $X(\tau)$  — в литературе называется экстремальной траекторией, экстремалью или стационарной точкой. Если экстремаль одна и  $S[X(\tau)] = S_0$ , то

$$N \int [Dx] e^{-S} \sim e^{-S_0}. \quad (10)$$

Таким образом, чтобы найти главный, экспоненциальный фактор в ответе, достаточно заложить информацию об одной единственной, экстремальной траектории. (Если стационарных точек несколько, то входит, вообще говоря, сумма вкладов всех стационарных точек.)

Существует стандартная процедура, позволяющая сделать следующий шаг и фиксировать предэкспоненциальный множитель. Эта операция уже несколько более трудоемкая. Предположим для простоты, что стационарная точка одна,  $X(\tau)$ . Следующая формула выражает на математическом языке тот факт, что  $X(\tau)$  реализует минимум действия

$$\delta S = S[X(\tau) + \delta x(\tau)] - S[X(\tau)] = \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \delta x(\tau) \left[ -\frac{d^2 X}{d\tau^2} + V'(X) \right] = 0,$$

где  $V' = dV/dx$ . Уравнение

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = V'(X), \quad (11)$$

конечно же, хорошо знакомо читателю еще со школьных времен (вспомним: «масса, помноженная на ускорение, равна силе»). Оно представляет собой классическое уравнение движения частицы, находящейся в потенциале минус  $V(x)$  \*).

Чуть ниже мы еще вернемся к этому обстоятельству, а пока напомним, как вычисляется предэкспонента в (10). Она определяется целым «пучком» траекторий, близких к экстремальной, т. е. траекториями с действием, мало отличающимся от  $S_0$ . Иными словами, учитываем лишь квадратичное отклонение

$$S[X(\tau) + \delta x(\tau)] = S_0 + \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \delta x \left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \delta x + \frac{1}{2} V''(X) \delta x \right] \quad (12)$$

(член, линейный по отклонению, как помнит читатель, отсутствует).

Предположим, что нам известен полный набор собственных функций и собственных значений уравнения

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} x_n(\tau) + V''(X) x_n(\tau) = \varepsilon_n x_n(\tau). \quad (13)$$

Тогда мы можем выбрать эти функции в качестве ортонормированной системы, фигурирующей в (8), и действие (12) преобразуется к простой диагональной форме

$$S = S_0 + \frac{1}{2} \sum_n \varepsilon_n c_n^2.$$

Вспоминая определение (9) и правило гауссова интегрирования

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dc \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon c^2\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

(важно, что после диагонализации каждое такое интегрирование можно провести независимо от остальных), получаем

$$\langle x_f | e^{-H\tau_0} | x_i \rangle = e^{-S_0} N \prod_n \varepsilon_n^{-1/2}. \quad (14)$$

Иногда вместо произведения собственных значений употребляется следующая запись:

$$\prod_n \varepsilon_n^{-1/2} = \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(X(\tau)) \right) \right]^{-1/2}, \quad (15)$$

которая, конечно же, восходит к теории обычных конечномерных матриц. Соотношение (15) можно фактически рассматривать как определение детерминанта дифференциального оператора. Здесь уместно сделать три замечания. Во-первых, ответ (14) не зависит от явного вида собственных функций, а только от собственных значений. Во-вторых, мы предположили, что все  $\varepsilon_n$  положительны. В большинстве случаев так оно и бывает, однако в инстантонном примере, который является конечной целью настоящего обзора, несколько собственных значений обращается в нуль. Возникающая при этом бесконечность имеет простой физический смысл. Вопросу,

\* ) Знак «минус» связан с тем, что рассматривается евклидовская формулировка см. 6)).

как «раскрыть» эту бесконечность, посвящен следующий параграф. Наконец, третье и последнее замечание. Нормировочный фактор  $N$  все еще не фиксирован. Мы даже не будем пытаться привести какой-либо общий рецепт, а рассмотрим простой пример, который послужит нам и в будущем. Пусть исходная частица с массой  $m = 1$  помещена в потенциал  $V(x)$ , изображенный на рис. 1. Конкретная форма этого потенциала нам не понадобится, но чтобы «отнормироваться» на гармонический осциллятор

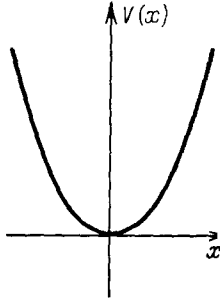


Рис. 1.

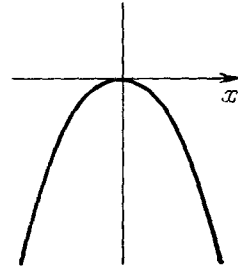


Рис. 2.

(где потенциал обычно считается равным  $m\omega^2 x^2/2$ ), положим  $V''(x=0) = \omega^2$ . В качестве начальной и конечной точки движения выберем  $x_1 = x_f = 0$ .

Богатая физическая интуиция, которую каждый имеет по отношению к потенциальному механическому движению, поможет найти экстремаль из уравнения (11), не зная явного вида  $V(x)$ . Действительно, это уравнение описывает движение шарика на профиле, изображенном на рис. 2. В момент времени  $-\tau_0/2$  шарик выпущен из верхней точки, в момент времени  $+\tau_0/2$  — вернулся обратно. Совершенно ясно, что существует лишь одна траектория, обладающая подобными свойствами,  $X(\tau) \equiv 0$ . Любая другая траектория соответствует инфинитному движению, уходу шарика на плюс или минус  $\infty$ . Ясно также, что действие на траектории  $X(\tau) = 0$  обращается в нуль.

Итак, в данной конкретной задаче общая формула (14) принимает следующий вид:

$$\langle x_f = 0 | e^{-H\tau_0} | x_i = 0 \rangle = N \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1/2} (1 + \text{след. члены}),$$

и все собственные значения  $\varepsilon_n$  сразу же фиксируются граничными условиями  $x_n(\pm\tau_0/2) = 0$

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} + \omega^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теперь мы подошли к тому моменту, когда невозможно двигаться дальше, не сказав, чему равняется  $N$ . Разобьем детерминант на две скобки:

$$N \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1/2} = \left[ N \left( \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} \right)^{-1/2} \right] \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\omega^2 \tau_0^2}{\pi^2 n^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (16)$$

Очевидно, что первая квадратная скобка отвечает *свободному* движению частицы, и поэтому, конечно же, должна воспроизводить свободный

результат

$$N \left( \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} \right)^{-1/2} = \langle x_f = 0 | e^{-\hat{p}^2 \tau_0 / 2} | x_i = 0 \rangle = \sum_n | \langle p_n | x = 0 \rangle |^2 e^{-p_n^2 \tau_0 / 2} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-p^2 \tau_0 / 2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}}. \quad (17)$$

Разумеется, равенство (17) несколько символическое, но его можно считать определением нормировочного фактора  $N$ . Займемся теперь второй, менее тривиальной скобкой. Для бесконечного произведения, входящего в нее, имеется хорошая формула (см., например, Градштейн и Рыжик <sup>4</sup> 1.431.2):

$$\pi y \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{y^2}{n^2} \right) = \operatorname{sh} \pi y,$$

где для нашего случая  $y = \omega \tau_0 / \pi$ .

Соберем теперь все факторы, учтем (16) и (17) и запишем окончательный результат:

$$\langle x_f = 0 | e^{-H\tau_0} | x_i = 0 \rangle = N \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1/2} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0}} \left( \frac{\operatorname{sh} \omega \tau_0}{\omega \tau_0} \right)^{-1/2} = \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^{1/2} (2 \operatorname{sh} \omega \tau_0)^{-1/2}. \quad (18)$$

Устремляя  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , находим

$$\langle x_f = 0 | e^{-H\tau_0} | x_i = 0 \rangle \xrightarrow{\tau_0 \rightarrow \infty} \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\omega \tau_0 / 2} \left( 1 + \frac{1}{2} e^{-2\omega \tau_0} + \dots \right),$$

откуда следует, что для наинизшего состояния  $E_0 = \omega/2$ ,  $(\psi_0(0))^2 = (\omega/\pi)^{1/2}$ . Следующий член разложения отвечает уровню осциллятора с  $n = 2$  (нечетные  $n$  не дают вклада, так как для них  $\psi_n(0) = 0$ ). Результаты являются точными для гармонического осциллятора и служат нулевым приближением для потенциала с малой ангармоничностью, скажем,  $(\omega^2/2) x^2 + \lambda x^4$ .

## 2. ДВУГОРБЫЙ ПОТЕНЦИАЛ. ТУННЕЛИРОВАНИЕ

В предыдущем разделе мы переформулировали на язык евклидовского пространства и функционального интегрирования одну из самых фундаментальных задач — об осцилляторной системе вблизи положения равновесия. Эта задача лежит в основе всей теории поля. Фактически мы учли малые колебания, малые отклонения от положения равновесия и сделали первый шаг к обычной теории возмущений. На протяжении более чем 20 лет, вплоть до середины 70-х, любая теоретико-полевая модель (за небольшим исключением точно решаемой двумерии) развивалась в этом и только в этом направлении. Полевые переменные рассматривались как система бесконечно большого числа осцилляторов, сцепленных друг с другом, каждый из которых обладает нулевыми колебаниями, и затем рассматривались небольшие отклонения, по которым последовательно строилась теория возмущений. В этом смысле «детский» период квантовой хромодинамики, когда была создана кварк-глюонная теория возмущений, не внес ничего принципиально нового. Лишь открытие инстантонов показало, что в ней присутствуют эффекты, которые невозможно описать, не выйдя за рамки малых отклонений от равновесного положения. Они принципиально не разлагаются в ряд по константе связи. Здесь мы обра-

тимся к простой квантовомеханической аналогии, в которой, однако, уже присутствуют все основные моменты.

Итак, снова рассмотрим одномерное потенциальное движение бесспиновой частицы с массой единица. Потенциал

$$V(x) = \lambda (x^2 - \eta^2)^2 \quad (19)$$

изображен на рис. 3. Параметры  $\lambda$  и  $\eta$  мы фиксируем таким образом, чтобы  $8\lambda\eta^2 = \omega^2$ , где  $\omega$  — частота, введенная в предыдущем параграфе. Тогда

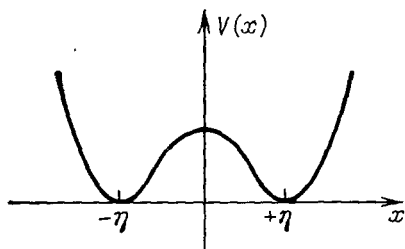


Рис. 3.

вблизи каждого из минимумов, помеченного значками  $\pm\eta$ , кривая совпадает с потенциалом предыдущего раздела. Если  $\lambda \ll \omega^3$ , то стенка, отделяющая два минимума, — высокая. Ее высота равна  $\omega^4/64\lambda$ . Давайте примем на минуту, что она вообще равна бесконечности. Тогда наимизшее состояние системы двукратно вырождено — частица может находиться в правой яме, либо в точно такой же левой яме, т. е. совершать малые колебания вблизи точек

$\pm\eta$  или  $-\eta$ . На первый взгляд, именно так и должно быть устроено решение нашей задачи. Среднее значение координаты в основном состоянии

$$\langle x \rangle_0 = +\eta (1 + \text{поправки}) \quad \text{или} \quad \langle x \rangle_0 = -\eta (1 + \text{поправки}),$$

исходная симметрия системы относительно замены  $x \rightarrow -x$  нарушена,  $E_0 = (\omega/2) (1 + \text{поправки})$  в обоих случаях, и при малых  $\lambda$  поправки малы. На самом деле, из курсов квантовой механики известно, что подобная картина *качественно* неправильна. Симметрия *не* нарушена, среднее значение  $x$  для основного уровня *равно* нулю, вырождение *отсутствует*:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} e^{-\omega^3/12\lambda} \frac{\omega}{2}, \\ E_1 &= \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} e^{-\omega^3/12\lambda} \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Обратим внимание на тот факт, что  $E_1 - E_0 \sim \exp(-\omega^3/12\lambda)$  и не разлагается в ряд по  $\lambda$ . (Подразумевается, что  $\omega^3/\lambda \gg 1$ . Реально формулы (20) начинают «работать» при  $\omega^3/12\lambda \gtrsim 6$ .)

Таким образом, мы упустили из рассмотрения, не учли какой-то существенный элемент, приведший к качественным изменениям. Что же это за элемент? Всем, конечно, известен стандартный ответ, содержащийся в курсах квантовой механики. Если в начальный момент времени частица сосредоточена, скажем, в левом минимуме, она все равно чувствует существование правой ямы, несмотря на то, что последняя недоступна по классическим законам движения. Квантовомеханическое туннелирование перекачивает волновую функцию из одной ямы в другую и «размешивает», по терминологии Полякова, основные состояния. Правильной волновой функцией основного состояния является четная суперпозиция волновых функций в каждой из ям.

Посмотрим теперь, как это явление выглядит в мнимом времени, как меняется техника, изложенная в предыдущем параграфе. Оказывается — и это большая удача — все принципиальные технические моменты остаются без изменений. Нужно учесть лишь, что классические уравнения движения в мнимом времени, помимо тривиальных решений  $X(\tau) = \text{const}$ ,



рассмотренных ранее, приобретают дополнительные топологические нетривиальные решения, которые далеко уходят от обоих минимумов. Эти решения связывают точки  $\pm\eta$ , и именно они несут полную ответственность за обсуждаемое явление. Подчеркнем, что в действительном времени никаких дополнительных классических решений нет, поскольку перекачка из одного минимума в другой происходит под барьером и классически запрещена. Они возникают только после эвклидова поворота.

Займемся вычислением амплитуд

$$\langle \eta | e^{-H\tau_0} | -\eta \rangle \quad \text{и} \quad \langle \eta | e^{-H\tau_0} | \eta \rangle.$$

Первый шаг, как возможно еще помнит читатель, состоит в решении уравнения (11). «Механический профиль» для этого уравнения приведен на рис. 4. Нас интересуют решения уравнения (11), имеющие конечное действие в пределе  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , — именно такие решения существенны в обсуждаемом квазиклассическом приближении. Большинство же траекторий отвечает либо колебательно-му движению, либо уходу на  $x \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$  и имеет бесконечное действие.

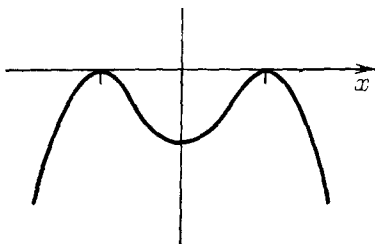


Рис. 4.

Конечное действие при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  получается, очевидно, когда частица стоит на вершине горы, т.е.  $X(\tau) = \eta$  и  $X(\tau) = -\eta$ . Вклад таких траекторий был рассмотрен выше. Другое интересное движение, приводящее к конечному действию при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , соответствует скатыванию частицы с одной вершины и остановке на другой. Таким образом, нам интересна траектория, начинающаяся при  $-\tau_0/2$  в точке  $-\eta$  и заканчивающаяся в точке  $\eta$  в момент времени  $\tau_0/2$  \*). Физическая интуиция подсказывает нам, что такие траектории существуют, однако их явный вид при конечном  $\tau_0$  — сложный. Мы как всегда интересуемся только наимизшим состоянием, поэтому можем сразу считать, что  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . В этом пределе решение выглядит очень просто:

$$X(\tau) = \eta \operatorname{th} \frac{\omega(\tau - \tau_0)}{2} \quad (21)$$

(оно отвечает механическому движению с нулевой энергией  $E = (1/2) \dot{x}^2 - V(x) = 0$ , так что уравнения легко интегрируются).

Подобное решение называется инстантоном (Поляков предложил название «псевдочастица», которое тоже встречается в литературе); произвольный параметр  $\tau_0$  помечает его центр. Существуют, конечно, и антиинстантоны, которые начинаются в  $+\eta$ , а кончаются в  $-\eta$ . Они получаются из (21) заменой  $\tau \rightarrow -\tau$ .

Поскольку все интегралы берутся, легко получить замкнутое выражение для действия инстантона (напомним, что для инстантона  $\frac{1}{2} \dot{x}^2 = V(x)$ ):

$$S_0 = S[X(\tau)]_{\text{Inst}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \dot{X}^2 = \frac{\omega^3}{12\lambda}. \quad (22)$$

Вспомним: главный, экспоненциальный фактор в амплитуде —  $e^{-\text{действие}}$  (см. уравнение (10)). Вот и всплыла экспонента, фигурирующая в (20).

\*) Здесь мы допустили небольшую неточность. Если  $\tau_0$  велико, но не бесконечно, траектория начинается чуть правее  $-\eta$  и заканчивается чуть левее  $+\eta$ . Лишь при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  концевые точки совпадают с  $\pm\eta$ .

Нам, конечно, предстоит еще долгий путь, прежде чем мы сможем воспроизвести весь ответ.

Обратим внимание еще на одно свойство инстантона, имеющее далеко идущие следствия. Центр решения может быть в любой точке, и действие инстантона не зависит от положения центра. Это обстоятельство, очевидно, отражает симметрию исходной задачи. Именно, лагранжиан системы инвариантен относительно сдвигов во времени, начало отсчета может быть выбрано произвольно. Каждое конкретное решение (21) безразлично к началу отсчета, и поэтому существует бесконечное семейство решений, разбросанных произвольно относительно начала отсчета. Интуитивно ясно, что в любую физическую величину инстантон должен входить в виде интеграла по положению его центра. Как возникает этот интеграл формально, и какой при этом получается вес? Ответы на эти вопросы даны в следующем разделе.

### 3. ДЕТЕРМИНАНТ И НУЛЕВЫЕ МОДЫ

В этой главе мы найдем одноинстантонный вклад в  $\langle -\eta | e^{-H\tau_0} | \eta \rangle$ . Речь, конечно, идет не об экспоненциальном факторе, который фактически уже найден, а о предэкспоненте, вычисление которой представляет собой наиболее трудоемкую задачу. Правда, в рассматриваемом случае возможны различные обходные маневры, которые значительно упрощают задачу и иногда обсуждаются в литературе<sup>5</sup>. Мы, однако, будем действовать «лобовым» образом, наиболее близким к методу, использованному 'т Хоофтом<sup>6</sup> при вычислении инстантонного детерминанта в КХД. Мы надеемся, что это позволит читателю в дальнейшем воспроизвести самому все детали работы 'т Хоофта, центральной для всей инстантонной проблематики.

Исходную формулу (14) удобно переписать в следующем виде:

$$\langle -\eta | e^{-H\tau_0} | \eta \rangle = N \left[ \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1/2} \left\{ \frac{\det [-(d^2/d\tau^2) + V''(X)]}{\det [-(d^2/d\tau^2) + \omega^2]} \right\}^{-1/2} e^{-S_0} (1 + \text{поправки}).$$

Мы просто помножили и разделили на известное число — детерминант гармонического осциллятора (см. (18)). Последний будет служить «реперной точкой» при манипуляциях с более сложным детерминантом, стоящим в числителе. Подставив явное выражение  $X(\tau) = \eta \operatorname{th}(\omega\tau/2)$  в  $V''(X)$ , приходим к следующему уравнению на собственные значения:

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} x_n(\tau) + \left( \omega^2 - \frac{3}{2} \omega^2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\omega\tau/2)} \right) x_n(\tau) = \varepsilon_n x_n(\tau). \quad (23)$$

Его можно воспринимать как некое уравнение Шредингера, которое, к счастью, очень хорошо изучено. Буквально уравнение (23) подробно описано, например, в учебнике Ландау и Лифшица<sup>7</sup>, с. 97, 105, и мы воспользуемся этим источником. Напомним, что граничные условия  $x_n(\pm\tau_0/2) = 0$  и  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Эти условия автоматически выполняются с экспоненциальной точностью для связанных уровней — истинно дискретного спектра<sup>\*</sup>). Таких уровней в уравнении (23) два. Одному из них отвечает собственное значение  $\varepsilon_1 = (3/4) \omega^2$ , другому —

$$\varepsilon_0 = 0.$$

<sup>\*</sup>) При наших граничных условиях фактически весь спектр дискретный. Настоящие дискретные уровни легко отличить, однако, от квазидискретных, образовавшихся из непрерывного спектра после замыкания системы в «ящик»  $x(\pm\tau_0/2) = 0$ . Первые разделены интервалами порядка  $\omega^2$ , вторые находятся на расстоянии порядка  $1/\tau_0^2$  от соседей.

Волновая функция последнего, нормированная на единицу, такова:

$$x_0(\tau) = \sqrt{\frac{3\omega}{8}} \frac{1}{\text{ch}^2(\omega\tau/2)}. \quad (24)$$

Обращение в нуль собственного значения, возможно, обескуражит читателя, ведь в ответ входит  $\varepsilon_n^{-1/2}$ ! Этот результат,  $\varepsilon_0 = 0$ , нельзя, однако, считать сюрпризом или неожиданностью. Действительно, уравнение (23) фактически описывает отклик рассматриваемой динамической системы на небольшие возмущения, накладываемые на  $X(\tau)$ . Поскольку  $X(\tau)$  — решение, реализующее (локальный) минимум действия, возмущение  $X(\tau)$  увеличивает действие. Соответствующие  $\varepsilon_n$  положительны. Мы уже знаем, однако, что имеется одно направление в функциональном пространстве, вдоль которого решение можно возмущать, не меняя действия. Имеется в виду сдвиг центра. В силу трансляционной инвариантности

$$S[X(\tau, \tau_c)] - S[X(\tau, \tau_c + \delta\tau_c)] = 0.$$

Так называемая нулевая мода (т. е. мода с  $\varepsilon = 0$ ), очевидно, пропорциональна  $X(\tau, \tau_c) - X(\tau, \tau_c + \delta\tau_c)$ . Правильно нормированная нулевая мода имеет вид

$$x_0(\tau) = S_0^{-1/2} \left( -\frac{d}{d\tau_c} \right) X(\tau, \tau_c),$$

или, что то же самое,

$$x_0(\tau) = S_0^{-1/2} \frac{d}{d\tau} X(\tau). \quad (25)$$

Правильность нормировки следует из выражения (22). Легко убедиться, что (25) в точности совпадает с (24), и мы понимаем теперь, что это совпадение — не случайность, а следствие трансляционной инвариантности.

Итак, интегрирование по коэффициенту  $c_0$ , отвечающему нулевой моде (см. (8), (9)) — негауссово, а интеграл в бесконечных пределах не существует вовсе. Выход прост. Не будем брать этот интеграл явно. Ясно, что интегрирование по  $dc_0$  совпадает с точностью до коэффициента пропорциональности с интегрированием по  $d\tau_c$ . Это — тот самый интеграл по положению центра инстантона, появления которого требовала наша интуиция. Подобный «трюк» в литературе иногда называют введением коллективной координаты.

Определим коэффициент пропорциональности. При изменении  $c_0$  на  $\Delta c_0$  величина  $x(\tau)$  меняется на

$$\Delta x(\tau) = x_0(\tau) \Delta c_0$$

(см. (8)). С другой стороны, изменение  $\Delta x(\tau)$  при сдвиге центра  $\Delta\tau_c$  таково:

$$\Delta x(\tau) = \Delta X(\tau) = \frac{dx}{d\tau_c} \Delta\tau_c = -\sqrt{S_0} x_0(\tau) \Delta\tau_c.$$

Приравняв оба приращения, получаем

$$dc_0 = \sqrt{S_0} d\tau_c. \quad (26)$$

(В формуле (26) мы не поставили знак минус, чтобы при изменении  $c_0$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  параметр  $\tau_c$  менялся бы в тех же пределах). Это еще не все, так как мы договорились нормировать ответ на обычный осциллятор (вспомним, что нас интересует отношение детерминантов). В осцилляторной задаче минимальное собственное значение равно  $\omega^2 + \frac{\pi^2}{\tau_0^2} \rightarrow \omega^2$  при

$\tau_0 \rightarrow \infty$ . В итоге

$$\left\{ \frac{\det [-(d^2/d\tau^2) + V''(X)]}{\det [-(d^2/d\tau^2) + \omega^2]} \right\}^{-1/2} = \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \omega d\tau_c \left\{ \frac{\det' [-(d^2/d\tau^2) + V''(X)]}{\omega^{-2} \det [-(d^2/d\tau^2) + \omega^2]} \right\}^{-1/2}, \quad (27)$$

где  $\det'$  означает редуцированный детерминант с выкинутой нулевой модой.

Подчеркнем, что хотя мы разобрали лишь конкретный пример с простейшим инстантоном  $\eta \text{ th}(\omega\tau/2)$ , способ обращения с нулевыми модами фактически общий. Так, и в BPST-инстантоне любая инвариантность будет порождать нулевую моду, и интегрирование по соответствующему коэффициенту нужно будет заменить на интегрирование по той или иной коллективной переменной. Находить якобиан преобразования мы уже научились.

Займемся теперь ненулевыми модами. Легче всего разделаться со вторым дискретным уровнем, чье собственное значение равно  $(3/4)\omega^2$ . Если обозначить через  $\Phi$  отношение

$$\Phi = \frac{\det' [-(d^2/d\tau^2) + V''(X)]}{\omega^{-2} \det [-(d^2/d\tau^2) + \omega^2]}, \quad (28)$$

то вклад этого уровня в  $\Phi$  при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , очевидно, равен

$$\frac{3}{4}. \quad (29)$$

Перейдем к другим модам с  $\varepsilon > \omega^2$ . Если бы не граничное условие  $x(\pm\tau_0/2) = 0$ , уравнение (23) в этой области имело бы непрерывный спектр. Забудем на минуту о граничных условиях. Общее решение (23) выписано в книге Ландау и Лифшица; его явный вид нам, однако, не требуется. Достаточно знать следующее. Первое: решения с  $\varepsilon > \omega^2$  нумеруются непрерывным индексом  $p$ . Этот индекс связан с собственным значением  $\varepsilon$  следующим образом:  $p = \sqrt{\varepsilon_p - \omega^2}$  и пробегает весь интервал  $(0, \infty)$ . Второе: при тех значениях параметров, которые входят в (23), отражение отсутствует. Иными словами, выбрав одно из линейно-независимых решений так, что

$$x_p(\tau) = e^{ip\tau} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

в другой асимптотике имеем ту же экспоненту:

$$x_p(\tau) = e^{ip\tau + i\delta_p} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow -\infty.$$

Вторая экспонента,  $e^{-ip\tau}$ , которая в принципе должна была бы возникнуть, отсутствует, и весь динамический эффект свелся к фазе

$$e^{i\delta_p} = \frac{1 + (ip/\omega)}{1 - (ip/\omega)} \frac{1 + (2ip/\omega)}{1 - (2ip/\omega)}. \quad (30)$$

(мы воспользовались здесь формулой из учебника <sup>7</sup>, с. 106). Второе линейно-независимое решение можно выбрать в виде  $x_p(-\tau)$ . Общее решение  $Ax_p(\tau) + Bx_p(-\tau)$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Этой информации уже достаточно, чтобы, вспомнив о граничном условии  $x(\pm\tau_0/2) = 0$ , найти спектр. Уравнения на  $A$  и  $B$

$$Ax_p\left(\frac{\tau_0}{2}\right) + Bx_p\left(-\frac{\tau_0}{2}\right) = 0, \quad Ax_p\left(-\frac{\tau_0}{2}\right) + Bx_p\left(\frac{\tau_0}{2}\right) = 0$$

имеют нетривиальные решения в том и только том случае, если

$$\frac{x_p(\tau_0/2)}{x_p(-\tau_0/2)} = \pm 1.$$

Это дает уравнение на  $p$ :

$$e^{ip\tau_0 - i\delta p} = \pm 1,$$

или, что то же самое

$$p\tau_0 - \delta p = \pi n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (31)$$

Обозначим  $n$ -е решение через  $\tilde{p}_n$ . В случае  $\det[-(d^2/d\tau^2) + \omega^2]$ , на который мы нормируемся, уравнение  $p\tau_0 = \pi n$  и  $n$ -е решение  $p_n = \pi n/\tau_0$ . Требуется вычислить произведение \*)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 + \tilde{p}_n^2}{\omega^2 + p_n^2}.$$

Для любого наперед заданного  $n$  отношение  $(\omega^2 + \tilde{p}_n^2)/(\omega^2 + p_n^2)$  произвольно близко к единице при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Лишь перемножение очень большого числа сомножителей с  $n \sim \omega\tau_0$ , каждый из которых отличается от 1 на величину порядка  $1/\omega\tau_0$ , дает эффект. (При  $n \gg \omega\tau_0$  разница между  $\omega^2 + \tilde{p}_n^2$  и  $\omega^2 + p_n^2$  опять становится несущественной в полном соответствии с нашей физической интуицией.) В этих условиях можно написать

$$\prod \frac{\omega^2 + \tilde{p}_n^2}{\omega^2 + p_n^2} = \exp \left( \sum_n \ln \frac{\omega^2 + \tilde{p}_n^2}{\omega^2 + p_n^2} \right) \approx \exp \left[ \sum_n \frac{2p_n(\tilde{p}_n - p_n)}{\omega^2 + p_n^2} \right],$$

где произведено разложение по малости  $\tilde{p}_n - p_n$ . Переходя от суммирования по  $n$  к интегрированию по  $p_n$  и воспользовавшись (31) для  $\tilde{p}_n - p_n$ , получаем в правой части

$$\exp \left[ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\delta p \cdot 2p dp}{p^2 + \omega^2} \right] = \exp \left[ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\delta p}{dp} \ln \left( 1 + \frac{p^2}{\omega^2} \right) dp \right].$$

Продифференцировав фазу с помощью (30) и введя безразмерную переменную  $y = p/\omega$ , преобразуем тождественно это выражение к виду

$$\exp \left[ - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dy \left( \frac{1}{1+y^2} + \frac{2}{1+4y^2} \right) \ln(1+y^2) \right] = \frac{1}{9}. \quad (32)$$

Наконец, объединив (32) и (29), получаем окончательно, что

$$\Phi = \frac{1}{12}. \quad (33)$$

Теперь, когда у нас в руках имеются все необходимые заготовки, а именно формулы (33), (28), (27), (22), (18), выпишем ответ для одноинстантонного вклада

$$\langle -\eta | e^{-H\tau_0} | \eta \rangle_{\text{one-inst}} = \left( \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} \right) \left( \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{S_0} e^{-S_0} \right) \omega d\tau_0. \quad (34)$$

Этому результату можно доверять до тех пор, пока

$$\sqrt{S_0} e^{-S_0} \omega\tau_0 \ll 1.$$

При больших  $\tau_0$ , когда это условие нарушается, надо учитывать траектории, построенные из многих инстантонов и антиинстантонов, что будет сделано в следующем разделе.

Сейчас уместно сделать несколько замечаний. Фактор в первых квадратных скобках отвечает простому гармоническому осциллятору. Его

\*) Читатель, возможно, вспомнит, что в знаменателе мы уже «забрали» два собственных значения,  $\omega^2 + \pi^2/\tau_0^2$  и  $\omega^2 + 4\pi^2/\tau_0^2$  при вычислении вклада дискретных мод с  $\epsilon = 0$  и  $\epsilon = 3\omega^2/4$ . Поэтому в знаменателе правильнее было бы писать  $\omega^2 + p_{n+2}^2$ . Однако, как будет видно чуть ниже, существенна область очень больших  $n$ , порядка  $\omega\tau_0$ , так что различие между  $p_{n+2}$  и  $p_n$  неважно.

выделение позволило отнормировать, или регуляризовать, инстантонные вычисления. Подобный прием для регуляризации используется и в квантовой хромодинамике. Фактор во вторых квадратных скобках естественно назвать плотностью инстантона. Помимо экспоненциального множителя  $e^{-S_0}$  плотность содержит предэкспоненту  $\sqrt{S_0}$ , связанную с существованием нулевой моды. Это обстоятельство также носит общий характер. И в квантовой хромодинамике на каждую нулевую моду приходится  $\sqrt{S_0}$ . Наконец, существование нулевой моды приводит к появлению частоты регулятора и интегрирования по коллективной координате  $\omega d\tau_c$ .

Мы хотели бы подчеркнуть, что эти уроки имеет смысл запомнить, так как они непосредственно переносятся и на BPST-инстантон. В данном случае специфично только число —  $\sqrt{6/\pi}$ . Если подобное число не очень существенно (а в КХД, как будет видно ниже, это действительно так), весь остальной ответ можно реконструировать практически мгновенно, без вычислений. Мы с педагогической целью долго и скучно возились с относительно простым детерминантом, чтобы избежать большей скуки в случае BPST-инстантона.

#### 4. ИНСТАНТОННЫЙ ГАЗ

Нам осталось сделать последний совсем небольшой шаг, чтобы воспроизвести формулу (20). Энергия наинизшего состояния определяется переходом к пределу  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Мы не можем перейти к такому пределу

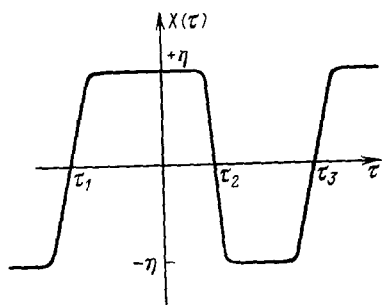


Рис. 5.

непосредственно в формуле (34). При очень больших  $\tau_0$  существенны траектории, построенные из многих инстантонов и антиинстантонов. Если рассеяние между их центрами велико, то такая траектория тоже является классическим решением.

Пусть мы имеем  $n$  инстантонов (антиинстантонов) с центрами  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  (рис. 5). Точки  $\tau_i$  удовлетворяют условию

$$-\frac{\tau_0}{2} < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \frac{\tau_0}{2},$$

а в остальном могут быть разбросаны произвольно. Если характерные интервалы  $|\tau_i - \tau_j| \gg \omega^{-1}$  (мы проверим это условие *a posteriori*), то действие, отвечающее подобной конфигурации, равно  $nS_0$ , где  $S_0$  — действие одного инстантона. Что касается детерминанта, то если бы не  $n$  узких переходных областей (вблизи  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ), мы получили бы, очевидно, тот же ответ, что и в случае гармонического осциллятора,  $\sqrt{\omega/\pi} e^{-\omega\tau_0/2}$ . Переходные области подправляют его, и мы знаем теперь, каким образом:

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} \rightarrow \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} \left( \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{S_0} e^{-S_0} \right)^n \prod_1^n (\omega d\tau_i).$$

В итоге вклад  $n$ -инстантонной конфигурации записывается в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} d^n \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \omega d\tau_n \int_{-\tau_0/2}^{\tau_n} \omega d\tau_{n-1} \dots \int_{-\tau_0/2}^{\tau_2} \omega d\tau_1 = \\ = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} d^n \frac{(\omega\tau_0)^n}{n!}, \end{aligned}$$

где мы обозначили через  $d$  плотность инстантона,

$$d = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{S_0} e^{-S_0}. \quad (35)$$

Амплитуды  $\langle -\eta | e^{-H\tau_0} | \eta \rangle$  и  $\langle \eta | e^{-H\tau_0} | \eta \rangle$  получаются суммированием по  $n$ . В первом случае мы стартуем из  $-\eta$  и приходим в  $+\eta$  — следовательно, количество псевдочастиц нечетное. Во втором случае, наоборот, работает только четное число псевдочастиц:

$$\begin{aligned} \langle -\eta | e^{-H\tau_0} | \eta \rangle &= \sum_{n=1, 3, \dots} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} \frac{(\omega\tau_0 d)^n}{n!} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} \operatorname{sh}(\omega\tau_0 d), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\langle \eta | e^{-H\tau_0} | \eta \rangle = \sum_{n=0, 2, \dots} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} \frac{(\omega\tau_0 d)^n}{n!} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega\tau_0/2} \operatorname{ch}(\omega\tau_0 d).$$

Устремляя  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , мы немедленно воспроизводим формулы (20) для энергии наинизшего состояния. Обозначая основное состояние системы через  $|0\rangle$ , видим, что  $\langle \eta | 0 \rangle = \langle -\eta | 0 \rangle = (\omega/4\pi)^{1/4}$ , т. е. симметрия между правой и левой ямой действительно не нарушена.

Вернемся теперь к предположению о том, что характерные расстояния между центрами инстантонов велики,

$$|\tau_i - \tau_j| \gg \omega^{-1},$$

и посмотрим, насколько хорошо оно работает. Ясно, что суммы в (36) хорошо сходятся, и все члены с номером  $n \gg d\omega\tau_0$  несущественны. Таким образом,  $n_{\text{хар}} \sim d\omega\tau_0$  и  $|\tau_i - \tau_j|_{\text{хар}} \sim d^{-1}\omega^{-1}$ . Имея в руках свободный параметр  $\lambda$ , мы можем добиться произвольной малости  $d$ , так как при  $\lambda \rightarrow 0$   $d \rightarrow 0$  как  $e^{-\omega^3/12\lambda}$ .

Итак, при  $\lambda \ll 1$  мы имеем полное право «нанизывать» инстантоны и антиинстантоны друг на друга, образуя при этом цепочку невзаимодействующих псевдочастиц. Невзаимодействующих — в том смысле, что все они находятся далеко друг от друга, ничего не знают об остальных партнерах, и полная весовая функция получается перемножением индивидуальных весовых функций ( $d^n$  в формулах (36)).

Подобное приближение называется разреженным инстантонным газом. В применении к квантовой хромодинамике оно особенно интенсивно эксплуатировалось в работах Каллана, Дашена и Гросса<sup>8</sup>. К сожалению, в КХД у нас в руках нет свободных параметров вроде  $\lambda$ , которые можно было бы держать малыми. Поэтому разреженный инстантонный газ в КХД не годится в количественном аспекте, и максимум, что из него можно извлечь — те или иные эвристические указания.

В заключение раздела отметим, что несколько более общее изложение инстантонного подхода к двугорбому потенциалу содержится в лекции Коулмана<sup>5</sup>. Читатель, интересующийся специальными вопросами, например выходом за рамки газового приближения, должен обратиться к работе<sup>9</sup>.

## 5. ЕВКЛИДОВА ФОРМУЛИРОВКА КХД

Итак, на простом примере двугорбого потенциала мы убедились, что если существуют нетривиальные решения классических уравнений, то в теории возникают качественно новые эффекты. Туннелирование из одной ямы в другую делает волновую функцию вакуума совсем не похожей на ту, которая получалась бы в теории возмущений. Наша цель в этом обзоре,

разумеется, не квантовая механика, а хромодинамика. В последней, однако, также существует подобное явление, обсуждению которого будет посвящена эта и все последующие главы данного обзора.

Как уже пояснялось выше, речь идет о решении классических уравнений в *евклидовом* пространстве. Поэтому, прежде всего, мы сформулируем евклидову версию КХД. Приведем формулы перехода от пространства Минковского к евклидову. Пространственные координаты  $x_1, x_2, x_3$  не меняются. Для временной же координаты  $x_0$  делается подстановка

$$x_0 = -ix_4. \quad (37)$$

Ясно, что при продолжении  $x_0$  на мнимые значения нулевая компонента вектор-потенциала  $A_\mu$  также становится мнимой.

Определим евклидов вектор-потенциал  $\hat{A}_\mu$  следующим образом:

$$A_m = -\hat{A}_m \quad (m = 1, 2, 3), \quad A_0 = i\hat{A}_4 \quad (38)$$

(в этой главе мы будем помечать шляпками все величины, определенные в евклидовом пространстве). При таком определении величины  $\hat{A}_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ ) образуют евклидов вектор. Отличие формул (38) от соответствующих соотношений для вектора  $x_\mu$  на общий для  $\hat{A}_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ ) знак внесено для удобства записи последующих формул \*).

Так, для оператора ковариантного дифференцирования

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a, \quad (39)$$

где  $T^a$  — матрицы генераторов в рассматриваемом представлении, получаем

$$\begin{aligned} D_m &= -\hat{D}_m, \quad D_0 = i\hat{D}_4, \\ \hat{D}_\mu &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}_\mu} - ig\hat{A}_\mu^a T^a. \end{aligned} \quad (40)$$

Напомним, что оператор  $\partial_\mu$  в пространстве Минковского имеет вид  $\partial_\mu = (\partial/\partial x_0, -\partial/\partial x_m)$ .

Для напряженностей  $G_{\mu\nu}$  получаются следующие формулы:

$$G_{mn}^a = \hat{G}_{mn}^a \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad G_{0n}^a = -i\hat{G}_{4n}^a, \quad (41)$$

где евклидовы напряженности  $\hat{G}_{\mu\nu}^a$

$$\hat{G}_{\mu\nu}^a = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_\mu} \hat{A}_\nu^a - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_\nu} \hat{A}_\mu^a + gf^{abc} \hat{A}_\mu^b \hat{A}_\nu^c \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 4) \quad (42)$$

выражаются через  $\hat{A}_\mu$  и  $\partial/\partial \hat{x}_\mu$  аналогично минковским  $G_{\mu\nu}^a$ .

Чтобы закончить с переходом к евклидову пространству, нам осталось привести еще формулы для ферми-полей. Начнем с определения четырех эрмитовых  $\gamma$ -матриц  $\hat{\gamma}_\mu$ :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_4 &= \gamma_0, \quad \hat{\gamma}_m = -i\gamma_m \quad (m = 1, 2, 3), \\ \{\hat{\gamma}_\mu, \hat{\gamma}_\nu\} &= 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 4), \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\gamma_0, \gamma_m$  — обычные дираковские матрицы.

Поля  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  рассматриваются как независимые антикоммутирующие переменные, по которым идет интегрирование в функциональном интеграле. При переходе к евклидову пространству удобно определить переменные

\*) Если использовать определение  $\hat{A}_m = A_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ), то во всех последующих формулах связи надо заменить  $g \rightarrow -g$ .



$\hat{\psi}$  и  $\hat{\bar{\psi}}$  как

$$\psi = \hat{\psi}, \quad \bar{\psi} = -i\hat{\bar{\psi}}. \quad (44)$$

Отметим, что при поворотах псевдоевклидова пространства  $\bar{\psi}$  преобразовывалось как  $\psi^+\gamma_0$ . В евклидовом пространстве  $\hat{\bar{\psi}}$  преобразуется как  $\hat{\psi}^+$ . Действительно, при инфинитезимальных поворотах псевдоевклидова пространства, характеризуемых параметрами  $\omega_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 3$ ), спинор  $\psi$  приобретает добавку

$$\delta\psi = -\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\omega_{\mu\nu}\psi.$$

Для изменения  $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$  отсюда следует

$$\delta(\psi^+\gamma_0) = -\frac{1}{4}\psi^+\gamma_0\gamma_0(\gamma_\mu^+\gamma_\nu^+ - \gamma_\nu^+\gamma_\mu^+)\gamma_0\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\psi^+\gamma_0)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\omega_{\mu\nu},$$

так что  $\psi_1^+\gamma_0\psi_2$  — скаляр,  $\psi_1^+\gamma_0\gamma_\mu\psi_2$  — вектор.

При переходе к евклидовому пространству параметры  $\omega_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) не меняются, а  $\omega_{0n} = i\omega_{4n}$  (из-за замены  $x_0 = -ix_4$ ). Для варпаций  $\hat{\psi}$  и  $\hat{\psi}^+$  при поворотах получается

$$\delta\hat{\psi} = \frac{1}{4}(\hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_\nu - \hat{\gamma}_\nu\hat{\gamma}_\mu)\hat{\omega}_{\mu\nu}\hat{\psi}, \quad \delta\hat{\psi}^+ = -\frac{1}{4}\hat{\psi}^+(\hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_\nu - \hat{\gamma}_\nu\hat{\gamma}_\mu)\hat{\omega}_{\mu\nu},$$

так что скаляром и вектором являются величины  $\psi_1^+\psi_2$  и  $\psi_1^+\gamma_\mu\psi_2$ .

Наконец, мы можем написать выражение для евклидова действия:

$$\begin{aligned} iS &= -\hat{S}, \\ S &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \bar{\psi} (i\gamma_\mu D_\mu - M)\psi \right], \\ \hat{S} &= \int d^4\hat{x} \left[ \frac{1}{4}\hat{G}_{\mu\nu}^a \hat{G}_{\mu\nu}^a + \hat{\bar{\psi}} (-i\hat{\gamma}_\mu \hat{D}_\mu - iM)\hat{\psi} \right], \end{aligned} \quad (45)$$

где подразумевается, что  $\hat{\psi}$  — столбец в пространстве ароматов (с цветовым индексом),  $M$  — матрица в этом пространстве.

Ниже мы будем использовать евклидово пространство и опускать шляпки. Формулы же, приведенные выше, позволяют связывать величины в псевдоевклидовом и евклидовом пространствах.

Отметим в заключение главы, что при рассмотрении таких величин, как вакуумные средние от Т-произведений токов при пространственно-подобных внешних импульсах, т. е. когда источники не рождают из вакуума реальных адронов, евклидова формулировка является не просто возможной, но более адекватной, чем псевдоевклидова. В область же времени-подобных импульсов, где имеются особенности, можно попасть с помощью аналитического продолжения. Такое доопределение особенно нужно для квантовой хромодинамики, где исходные объекты теории — кварки и глюоны — имеют смысл только в евклидовой области, а реальные особенности, отвечающие адронам, нужно получить.

## 6. BPST-ИНСТАНТОНЫ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

### а) Конечность действия и топологический заряд

Уже на квантовомеханическом примере, обсужденном выше, была видна принципиальная роль решений, дающих минимум евклидова действия в пределе  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Вообще говоря, при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  действие неогра-

ниченно растет, и условие его конечности накладывает сильные ограничения на траектории.

Так, в разобранным одномерном примере конечность действия означает, что функция  $x(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  должна иметь предел  $\pm\eta$ . Отсюда естественно возникает топологическая классификация функций, дающих конечное действие, по их предельным значениям. Формально топологический заряд можно ввести следующим образом:

$$Q = \frac{1}{2\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \dot{x}(t) = \frac{x(+\infty) - x(-\infty)}{2\eta}.$$

Очевидно, что  $Q$  может принимать значения 0,  $+1$ ,  $-1$ . Функции с разным  $Q$  нельзя перевести друг в друга непрерывной деформацией, оставляющей действие конечным. Поэтому в каждом из классов  $Q = 0, +1, -1$  существует свой минимум действия и свои функции, которые его реализуют. Инстантон и антиинстантон реализуют минимумы для  $Q = \pm 1$ .

Перейдем теперь к глюодинамике — теории неабелевого векторного поля — и рассмотрим сначала случай  $SU(2)$ -группы. Зададимся тем же вопросом: каково должно быть поведение векторных полей  $A_\mu^a$  при  $x \rightarrow \infty$ , чтобы действие было конечным? (Имеется в виду евклидово действие  $\hat{S}$  см. (45)). Ясно, что напряженности  $G_{\mu\nu}^a$  должны падать быстрее, чем  $1/x^2$ . Но это вовсе не означает, что поля  $A_\mu^a$  должны падать быстрее, чем  $1/x$ . Действительно, пусть  $A_\mu^a$  при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид

$$A_\mu = \frac{g\tau^a}{2} A_\mu^a \xrightarrow{x \rightarrow \infty} iS \partial_\mu S^+, \quad (46)$$

где введены матричные обозначения,  $S$  — унитарная унимодулярная матрица, зависящая от углов в евклидовом пространстве. Хотя угловые компоненты  $A_\mu^a$  пропорциональны  $1/x$ , ясно, что в области, где справедливо выражение (46), напряженности  $G_{\mu\nu}^a$  обращаются в нуль, поскольку  $A_\mu^a$  имеет чисто калибровочный вид.

Таким образом, поведение  $A_\mu^a$  при больших  $x$  задается матрицей  $S$ , зависящей от углов. При калибровочном преобразовании над  $A_\mu$ , задаваемым матрицей  $U(x)$ :

$$A_\mu \rightarrow U^+ A_\mu U + iU^+ \partial_\mu U,$$

матрица  $S$  заменяется на  $U^+(x \rightarrow \infty) S$ . Казалось бы, всегда можно выбрать  $U(x)$  так, чтобы  $U(x \rightarrow \infty) = S$  и тем самым убрать члены  $1/x$  из  $A_\mu$ . Однако это рассуждение правильно, только если матрица  $U(x)$  не имеет особенностей ни при каких значениях  $x$ . В противном случае проблема поведения  $A_\mu(x)$  из бесконечно удаленной точки переносится в место особенности  $U(x)$ .

В результате задача о классификации полей  $A_\mu^a$ , дающих конечное действие, сводится к топологической классификации матриц  $S$ . Мы не будем излагать этой классификации, полученной в пионерской работе<sup>1</sup>, а приведем примеры нетривиальных (несводимых к единичной) матриц  $S$ . Таковой матрицей является следующая:

$$S_1 = \frac{x_4 + ix\tau}{\sqrt{x^2}}. \quad (47)$$

Она отвечает единичному топологическому заряду (имеется одно однозначное соответствие между пространством унитарных унимодулярных матриц и точками гиперболы в евклидовом пространстве). Топологическому заряду  $n$  отвечает матрица вида

$$S_n = (S_1)^n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (48)$$

Конечно, можно выбрать и другой вид матрицы  $S$ , отвечающей заряду  $n$ , однако отличие от  $S_n$  сводится к калибровочному преобразованию.

Для величины  $n$  существует калибровочно-инвариантное интегральное представление

$$n = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a, \quad (49)$$

где

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} G_{\gamma\delta}^a, \quad \varepsilon_{1234} = 1. \quad (50)$$

Справедливость формулы (49) можно проверить, воспользовавшись тем, что  $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a$  представляется в виде полной производной

$$G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu K_\mu, \\ K_\mu = 2\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} \left( A_\nu^a \partial_\gamma A_\delta^a + \frac{1}{3} g \varepsilon^{abc} A_\nu^a A_\gamma^b A_\delta^c \right),$$

так что интеграл (49) по объему преобразуется в интеграл по удаленной поверхности, где  $A_\mu^a$  имеет вид (46).

#### б) Выделенность $SU(2)$ -группы

До сих пор мы обсуждали группу  $SU(2)$ . Для групп, отличных от  $SU(2)$ , построение инстантонных решений с  $n = 1$  сводится к случаю  $SU(2)$  с помощью выделения  $SU(2)$ -подгрупп. В чем выделенность  $SU(2)$ -группы? Попытаемся пояснить это обстоятельство, не используя топологической терминологии.

Возможность деформации матриц  $S$  определяется обсуждавшейся выше калибровочной инвариантностью. Попробуем фиксировать калибровку, для чего произвольное поле  $A_\mu$  представим в виде

$$A_\mu(x) = S(x) \tilde{A}_\mu(x) S^+(x) + i S(x) \partial_\mu S^+(x), \quad (51)$$

где поле  $\tilde{A}_\mu$  удовлетворяет определенным калибровочным условиям (например,  $\tilde{A}_0 = 0$  или  $\partial_m \tilde{A}_m = 0$  ( $m = 1, 2, 3$ )). Такое фиксирование не определяет полностью переход к новым полям  $\tilde{A}_\mu(x)$  и  $S(x)$ , поскольку величина  $A_\mu$  инвариантна при глобальных преобразованиях вида

$$S(x) \rightarrow S(x) U_2^+, \quad \tilde{A}_\mu(x) \rightarrow U_2 \tilde{A}_\mu U_2^+ \quad (52)$$

с матрицей  $U_2$ , не зависящей от  $x$ .

Кроме того, и после фиксирования калибровки в теории остается инвариантность относительно глобальных изотопических поворотов для  $A_\mu$ , что в терминах новых полей  $\tilde{A}_\mu(x)$  и  $S(x)$  эквивалентно следующим преобразованиям:

$$S(x) \rightarrow U_1 S, \quad \tilde{A}_\mu(x) \rightarrow \tilde{A}_\mu(x). \quad (53)$$

Таким образом, изотопическая  $SU(2)$  инвариантность теории плюс градиентная инвариантность сводятся к совокупности *глобальных* преобразований (52) и (53), которые, очевидно, образуют  $SU(2) \times SU(2)$ -группу. Поле  $S(x)$  преобразуется по представлению  $(1/2, 1/2)$ , а  $\tilde{A}_\mu(x)$  — по представлению  $(1, 0)$ .

С другой стороны, группа поворотов четырехмерного евклидова пространства — это тоже, как известно,  $SU(2) \times SU(2)$ , причем генераторы

$SU(2)$ -подгрупп имеют вид

$$\begin{aligned} I_1^a &= \frac{1}{4} \eta_{a\mu\nu} M_{\mu\nu}, \\ I_2^a &= \frac{1}{4} \bar{\eta}_{a\mu\nu} M_{\mu\nu} \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} a = 1, 2, 3 \\ \mu, \nu = 1, \dots, 4 \end{array} \right), \quad (54)$$

где  $M_{\mu\nu} = -ix_\mu \partial/\partial x_\nu + ix_\nu \partial/\partial x_\mu +$  спин. часть — операторы инфинитезимальных поворотов в плоскости  $(\mu, \nu)$ , а  $\eta_{a\mu\nu}$  — числовые символы

$$\eta_{a\mu\nu} = \begin{cases} \varepsilon_{a\mu\nu}, & \mu, \nu = 1, 2, 3, \\ -\delta_{a\nu}, & \mu = 4, \\ \delta_{a\mu}, & \nu = 4, \\ 0, & \mu = \nu = 4. \end{cases} \quad (55)$$

(Символы  $\bar{\eta}_{a\mu\nu}$  отличаются от  $\eta$  изменением знака перед  $\delta$ .) Вектор координаты  $x_\mu$  преобразуется по представлению  $(1/2, 1/2)$ . В этом удобно убедиться, рассматривая преобразования матрицы

$$x_4 + ix\tau = i\tau_\mu^+ x_\mu, \quad (56)$$

где введено обозначение

$$\tau_\mu^\pm = (\tau, \mp i). \quad 1268 \quad 1 \quad (57)$$

Для  $\tau_\mu^\pm$  выполнены соотношения

$$\tau_\mu^+ \tau_\nu^- = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{a\mu\nu} \tau^a, \quad \tau_\mu^- \tau_\nu^+ = \delta_{\mu\nu} + i\bar{\eta}_{a\mu\nu} \tau^a. \quad (57')$$

Нетрудно найти закон преобразования матрицы (56)

$$e^{i\varphi_1^a I_1^a + i\varphi_2^a I_2^a} i\tau_\mu^+ x_\mu = e^{-i\varphi_1^a (\tau/2)^a} (i\tau_\mu^+ x_\mu) e^{i\varphi_2^a (\tau/2)^a},$$

где  $\varphi_1^a, \varphi_2^a$  — параметры поворотов, т. е. происходит умножение на унитарные унитарные матрицы слева и справа.

Выбор  $S$  в виде  $S_1 = ix_\mu \tau_\mu^+ / \sqrt{x^2}$  выделяет некоторые направления в изотопическом и координатном пространстве. Однако при повороте на одинаковые углы в пространственной  $SU(2) \times SU(2)$  группе и в группе  $SU(2) \times SU(2)$ , даваемой преобразованиями (52) и (53), матрица  $S_1$ , очевидно, не меняется. Другими словами, если операторами момента назвать вместо  $I_1^a$  и  $I_2^a$  операторы  $I_1^a + T_1^a$  и  $I_2^a + T_2^a$ , где  $T_{1,2}^a$  — операторы инфинитезимальных преобразований (52), (53), то введенный объект имеет спин нуль.

Таким образом, мы видим, что  $SU(2)$ -группа выделена размерностью координатного пространства.

#### в) Величина действия для инстантонных решений

Не имея пока явной формы инстантонного решения, можно тем не менее вычислить значение действия для него. Действительно, для положительных значений топологического заряда  $n$  евклидово действие можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a = \int d^4x \left[ \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a + \frac{1}{8} (G_{\mu\nu}^a - \tilde{G}_{\mu\nu}^a)^2 \right] = \\ &= n \frac{8\pi^2}{g^2} + \frac{1}{8} \int d^4x (G_{\mu\nu}^a - \tilde{G}_{\mu\nu}^a)^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Из этой формулы ясно, что в классе функций с заданным положительным  $n$  минимум  $S$  достигается при  $G_{\mu\nu}^a = \tilde{G}_{\mu\nu}^a$  и равен  $(8\pi^2/g^2)n$ . Напомним, что

задание  $n$  не означает, что мы ищем условный экстремум, поскольку функции с разными  $n$  нельзя связать непрерывной деформацией, оставаясь с конечным действием.

Случай отрицательных  $n$  получается из (58) отражением  $x_{1,2,3} \rightarrow -x_{1,2,3}$ , при котором  $G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu} \rightarrow -G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}$  и соответственно  $n \rightarrow -n$ . То есть минимум действия при отрицательных  $n$  равен  $(8\pi^2/g^2) |n|$ , и достигается он при  $G_{\mu\nu}^a = -\tilde{G}_{\mu\nu}^a$ .

Выполнение условий самодуальности и антисамодуальности  $G_{\mu\nu}^a = \pm \tilde{G}_{\mu\nu}^a$ , как видно из этих рассуждений, автоматически приводит к удовлетворению уравнений движения  $D_\mu G_{\mu\nu} = 0$ . В этом можно убедиться и непосредственно; действительно, скажем, для самодуального поля,

$$D_\mu G_{\mu\nu}^a = D_\mu \tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} D_\mu G_{\gamma\delta}^a = \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} (D_\mu G_{\gamma\delta}^a + D_\gamma G_{\delta\mu}^a + D_\delta G_{\mu\gamma}^a) = 0,$$

где использовано тождество Бьянки,

$$D_\mu G_{\gamma\delta} + D_\delta G_{\mu\gamma} + D_\gamma G_{\delta\mu} = 0.$$

## 7. ЯВНЫЙ ВИД BPST-ИНСТАНТОНА

### а) Решение с $n = 1$

Асимптотика  $A_\mu^a$  для этого решения, как обсуждалось в предыдущей главе, имеет вид

$$g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a \xrightarrow{x \rightarrow \infty} i S_1 \partial_\mu S_1^+,$$

$$S_1 = \frac{i \tau_\mu^+ x_\mu}{\sqrt{x^2}}, \quad (59)$$

где матрицы  $\tau_\mu^\pm$  определены в (57). Мы будем также использовать символы  $\eta_{a\mu\nu}$ ,  $\bar{\eta}_{a\mu\nu}$ , определенные равенствами (55). Эти числовые коэффициенты часто называют символами 'т Хоофта, некоторые полезные соотношения для  $\eta_{a\mu\nu}$  приведены в разделе в) этой главы.

Через символы 'т Хоофта выражение для асимптотики  $A_\mu^a$  переписывается в виде

$$A_\mu^a \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{2}{g} \eta_{a\mu\nu} \frac{x_\nu}{x^2}.$$

Для инстантона с центром в точке  $x = 0$  естественно предположить такую же угловую зависимость поля при всех  $x$ , т. е. искать решение в форме

$$A_\mu^a(x) = \frac{2}{g} \eta_{a\mu\nu} x_\nu \frac{f(x^2)}{x^2}, \quad (60)$$

где  $f(x^2) \xrightarrow{x^2 \rightarrow \infty} 1$ ,  $f(x^2) \xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} \text{const} \cdot x^2$ . Последнее отвечает отсутствию сингулярности в нуле. Оправданием сделанного предположения (60) будет построение самодуального выражения для напряженностей  $G_{\mu\nu}^a$ . Из (60) для  $G_{\mu\nu}^a$  получается

$$G_{\mu\nu}^a = -\frac{4}{g} \left\{ \eta_{a\mu\nu} \frac{f(1-f)}{x^2} + \frac{x_\mu \eta_{a\nu\gamma} x_\gamma - x_\nu \eta_{a\mu\gamma} x_\gamma}{x^4} [f(1-f) - x^2 f'] \right\}. \quad (61)$$

При получении (61) использовано соотношение для  $\varepsilon^{abc} \eta_{b\mu\gamma} \eta_{c\nu\delta}$  из сводки формул п. в) в конце главы. Используя формулу для  $\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} \eta_{a\delta\rho}$  из этой же сводки, для  $\tilde{G}_{\mu\nu}^a$  получаем следующее выражение:

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^a = -\frac{4}{g} \left\{ \eta_{a\mu\nu} f' - \frac{1}{x^4} (x_\mu \eta_{a\nu\gamma} x_\gamma - x_\nu \eta_{a\mu\gamma} x_\gamma) [f(1-f) - x^2 f'] \right\}.$$

Условие самодуальности  $G_{\mu\nu}^a = \tilde{G}_{\mu\nu}^a$  требует выполнения уравнения  $f(1-f) - x^2 f' = 0$ , что определяет функцию  $f$ :

$$f(x^2) = \frac{x^2}{x^2 + \rho^2}, \quad (62)$$

где  $\rho^2$  — постоянная интегрирования,  $\rho$  называют размером инстантона. Трансляционная инвариантность гарантирует получение решения с центром в произвольной точке  $x_0$ , для этого надо заменить  $x$  на  $x - x_0$ .

Таким образом, окончательное выражение для инстантона с центром в точке  $x_0$  и размером  $\rho$  имеет вид

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= \frac{2}{g} \eta_{a\mu\nu} \frac{(x-x_0)_\nu}{(x-x_0)^2 + \rho^2}, \\ G_{\mu\nu}^a &= -\frac{4}{g} \eta_{a\mu\nu} \frac{\rho^2}{[(x-x_0)^2 + \rho^2]^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Можно теперь проверить, что действие для инстантона равно  $8\pi^2/g^2$ , как было показано в общем виде. Антиинстантон получается заменой  $\eta_{a\mu\nu} \rightarrow \rightarrow \eta_{a\mu\nu}$ .

#### б) Сингулярная калибровка. А н з а ц ' т Х о о ф т а

Часто оказывается удобным использовать выражение для  $A_\mu^a$  в так называемой сингулярной калибровке, когда «плохое» поведение  $A_\mu^a$  из бесконечно удаленной точки переносится в центр инстантона. Как обсуждалось в предыдущем параграфе, такой переход осуществляется калибровочным преобразованием с матрицей  $U(x)$ , совпадающей с  $S(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  \*). Выпишем формулы калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} g \frac{\tau^a}{2} \bar{A}_\mu^a &= U^\dagger g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a U + i U^\dagger \partial_\mu U, \\ g \frac{\tau^a}{2} \bar{G}_{\mu\nu}^a &= U^\dagger g \frac{\tau^a}{2} G_{\mu\nu}^a U \end{aligned} \quad (64)$$

и для инстантона с центром в  $x_0$  возьмем матрицу вида

$$U = \frac{i\tau_\mu^+ (x-x_0)_\mu}{V(x-x_0)^2}. \quad (64')$$

Тогда для потенциала  $\bar{A}_\mu^a$  и напряженностей  $\bar{G}_{\mu\nu}^a$  в сингулярной калибровке получается

$$\begin{aligned} \bar{A}_\mu^a &= \frac{2}{g} \eta_{a\mu\nu} (x-x_0)_\nu \frac{\rho^2}{(x-x_0)^2 [(x-x_0)^2 + \rho^2]}, \\ \bar{G}_{\mu\nu}^a &= -\frac{8}{g} \left[ \frac{(x-x_0)_\mu (x-x_0)_\nu}{(x-x_0)^2} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \right] \eta_{a\mu\nu} \frac{\rho^2}{[(x-x_0)^2 + \rho^2]^2} - (\mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned} \quad (65)$$

Инвариантами калибровочного преобразования являются, очевидно, величины  $G_{\mu\nu}^a G_{\gamma\delta}^a$  (см., однако, предыдущее примечание). Отметим также то обстоятельство, что в (65) входят символы  $\eta_{a\mu\nu}$ , а не  $\eta_{a\mu\nu}$ . Такое отличие связано с тем, что в сингулярной калибровке топологический заряд (49) набирается в окрестности  $x = x_0$ , а не на бесконечности.

\*) Точнее, это преобразование следует назвать квазикалибровочным, поскольку в точке, где  $U(x)$  имеет особенность (а такая особенность обязательно имеется), это преобразование меняет калибровочно-инвариантные величины, например  $G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a$ . Чтобы пользоваться такими преобразованиями, надо рассматривать пространство с выколотыми окрестностями особых точек. Так мы и будем делать, памятуя о том, что физические величины несингулярны в особых точках.

Выражение (65) для  $\bar{A}_\mu^a$  можно переписать в виде

$$\bar{A}_\mu^a = -\frac{1}{g} \bar{\eta}_{a\mu\nu} \partial_\nu \ln \left[ 1 + \frac{\rho^2}{(x-x_0)^2} \right]. \quad (66)$$

Как было отмечено 'т Хоофтом, такая запись допускает обобщение на топологический заряд  $n$ , больший единицы. Действительно, если

$$A_\mu^a = -\frac{1}{g} \bar{\eta}_{a\mu\nu} \partial_\nu \ln W(x), \quad (67)$$

то для величины  $G_{\mu\nu}^a - \tilde{G}_{\mu\nu}^a$  получается (см. свойства  $\eta$ -символов (п. в)):

$$G_{\mu\nu}^a - \tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{g} \eta_{a\mu\nu} \frac{\partial_\gamma \partial_\gamma W}{W}.$$

Самодуальность  $G_{\mu\nu}^a$  требует выполнения уравнения  $\partial_\gamma \partial_\gamma W/W = 0$ . Решение с топологическим зарядом  $n$  имеет вид

$$W = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i^2}{(x-x_i)^2}, \quad (68)$$

т. е. описывает инстантоны с центрами в точках  $x_i$ . Эффективный размер инстантона с центром в точке  $x_i$ , очевидно, равен

$$\rho_i^{eff} = \rho_i \left[ 1 + \sum_{k \neq i} \frac{\rho_k^2}{(x_k - x_i)^2} \right]^{-1/2}.$$

Надо заметить, что выбор  $A_\mu^a$  в форме (67) не дает самого общего решения с зарядом  $n$ , поскольку все  $n$  инстантонов одинаково ориентированы в изотопическом пространстве (построение общего решения см. в <sup>10</sup>).

#### в) С о о т н о ш е н и я д л я $\eta$ - с и м в о л о в

Приведем сводку соотношений для символов  $\eta_{a\mu\nu}$ ,  $\bar{\eta}_{a\mu\nu}$ , определенных равенствами (55):

$$\begin{aligned} \eta_{a\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{a\alpha\beta}, \\ \eta_{a\mu\nu} &= -\eta_{a\nu\mu}, \quad \eta_{a\mu\nu} \eta_{b\mu\nu} = 4\delta_{ab}, \\ \eta_{a\mu\nu} \eta_{a\mu\lambda} &= 3\delta_{\nu\lambda}, \quad \eta_{a\mu\nu} \eta_{a\mu\nu} = 12, \\ \eta_{a\mu\nu} \eta_{a\gamma\lambda} &= \delta_{\mu\gamma} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\gamma} + \varepsilon_{\mu\nu\gamma\lambda}, \\ \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \eta_{a\gamma\sigma} &= \delta_{\gamma\mu} \eta_{a\nu\lambda} - \delta_{\gamma\nu} \eta_{a\mu\lambda} + \delta_{\gamma\lambda} \eta_{a\mu\nu}, \\ \eta_{a\mu\nu} \eta_{b\mu\lambda} &= \delta_{ab} \delta_{\nu\lambda} + \varepsilon_{abc} \eta_{c\nu\lambda}, \\ \varepsilon_{abc} \eta_{b\mu\nu} \eta_{c\gamma\lambda} &= \delta_{\mu\gamma} \eta_{a\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} \eta_{a\nu\gamma} - \delta_{\nu\gamma} \eta_{a\mu\lambda} + \delta_{\nu\lambda} \eta_{a\mu\gamma}, \\ \eta_{a\mu\nu} \bar{\eta}_{b\mu\nu} &= 0, \quad \eta_{a\gamma\mu} \bar{\eta}_{b\gamma\lambda} = \eta_{a\gamma\lambda} \bar{\eta}_{b\gamma\mu}. \end{aligned}$$

Чтобы перейти от соотношений для  $\eta_{a\mu\nu}$  к соотношениям для  $\bar{\eta}_{a\mu\nu}$  нужно сделать замену

$$\eta_{a\mu\nu} \rightarrow \bar{\eta}_{a\mu\nu}, \quad \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} \rightarrow -\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}.$$

## 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЭКСПОНЕНТЫ ДЛЯ BPST-ИНСТАНТОНА

## а) Разложение вблизи перевальной точки и. Выбор калибровки и регуляризация

Как и в квантовомеханическом примере, для вычисления предэкспоненциального фактора во вкладе инстантона в вакуум-вакуумный переход необходимо представить поле  $A_\mu^a$  в виде

$$A_\mu^a = A_\mu^{a(\text{ins})} + a_\mu^a \quad (69)$$

и разложить действие  $S(A)$  по отклонению  $a_\mu^a$  от инстантонного поля  $A_\mu^{a(\text{ins})}$

$$\begin{aligned} S(A) &= S_0 + \frac{1}{2} \int d^4x a_\mu^a L_{\mu\nu}^{ab} (A^{\text{ins}}) a_\nu^b = \\ &= \frac{8\pi^2}{g^2} + \frac{1}{2} \int d^4x a_\mu^a [D^2 a_\mu^a - D_\mu D_\nu a_\nu^a - 2g \epsilon^{abc} G_{\mu\nu}^b a_\nu^c], \end{aligned} \quad (70)$$

где в  $D_\mu$  и  $G_{\mu\nu}$  подставлено инстантонное поле. Интегрирование по отклонениям  $a_\mu^a$ , как и в одномерном случае, сводится к вычислению детерминанта оператора  $L_{\mu\nu}^{ab}$ . Имеются, однако, два существенных отличия от одномерного случая:

Оператор  $L$  является вырожденным из-за калибровочной инвариантности. Действительно, поля  $a_\mu^a$  вида  $a_\mu^a = (D_\mu \lambda)^a$  с произвольной функцией  $\lambda^a(x)$  задуляют квадратичную форму (70). Чтобы иметь возможность работать с такой вырожденной формой, надо фиксировать калибровку. Это удобно сделать, добавив в действие член

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int d^4x (D_\mu a_\mu^a)^2 = \frac{1}{2} \int d^4x a_\mu^a (\Delta L)_{\mu\nu}^{ab} a_\nu^b, \quad (71)$$

снимающий вырождение. Чтобы не изменить содержание теории, надо, как известно, одновременно добавить духи Фадеева — Попова:

$$\Delta S_{\text{gh}} = \int d^4x \bar{\Phi}^a D^2 \Phi^a = \int d^4x \bar{\Phi}^a L_{\text{gh}}^{ab} \Phi^b, \quad (72)$$

где  $\Phi^a$  — комплексное антикоммутирующее поле. В результате вклад инстантона записывается в виде

$$\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}} = [\det (L + \Delta L)]^{-1/2} (\det L_{\text{gh}}) e^{-S_0}, \quad (73)$$

где  $| 0_T \rangle$  — вакуум через время  $T$ ,  $| 0_T \rangle = e^{-HT} | 0 \rangle$ ,  $H$  — гамильтониан,  $S_0 = 8\pi^2/g^2$ ,  $(L + \Delta L)_{\mu\nu}^{ab}$  — оператор в квадратичной форме полей  $a_\mu^a$ ,  $L_{\text{gh}}$  действует на поля духов. Детерминант  $L_{\text{gh}}$  входит в положительной степени, поскольку  $\Phi^a$ ,  $\bar{\Phi}^a$  — антикоммутирующие поля.

Вторым отличием от одномерного случая является наличие в теории ультрарасходимых расходимостей. В силу перенормируемости все расходимости должны устраняться перенормировкой константы связи, но сначала нужно регуляризовать рассматриваемые выражения. Регуляризацию можно произвести следующим образом. Вместо детерминанта оператора  $L + \Delta L$  будем рассматривать отношение  $\det (L + \Delta L) / \det (L + \Delta L + M^2)$ , где введение параметра обрезания  $M$  можно интерпретировать как добавление в теорию паули-вилларсовского векторного поля с массой  $M$ . Аналогично регуляризуется детерминант  $L_{\text{gh}}$ . Таким образом, нужно вычислить

$$\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}^{\text{Reg}} = \left[ \frac{\det (L + \Delta L)}{\det (L + \Delta L + M^2)} \right]^{-1/2} \frac{\det L_{\text{gh}}}{\det (L_{\text{gh}} + M^2)} e^{-S_0}, \quad (74)$$

а более точно, отношение  $\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}^{\text{Reg}}$  к соответствующей теоретико-возмущенческой величине  $\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{p.th.}}$ , отличающейся тем, что вместо инстантонного поля подставлено  $A_\mu^a \equiv 0$ . Для  $A_\mu^a = 0$ , очевидно,  $S_0 = 0$ , а для инстантона  $S_0 = 8\pi^2/g^2$ , где индекс в константе связи  $g_0$  подчеркивает, что это затравочная константа связи, нормированная на параметре обрезания  $M$ ,  $g_0 = g(M)$ .

Мы не будем заниматься подробным изложением вычислений 'т Хофта для  $\langle 0 | 0_T \rangle / \langle 0 | 0_T \rangle_{\text{p.th.}}$ , а получим результат с точностью до численного фактора. Основную роль в получении результата играет рассмотрение нулевых мод.

## б) Нулевые моды

Каждая нулевая мода, как было показано в одномерном примере, дает в величине  $[\det (L + \Delta L)]^{-1/2}$  фактор, пропорциональный  $V \bar{S}_0$ , и интеграл по соответствующей коллективной координате. Какие же коллективные координаты имеются в случае BPST-инстантона в группе  $SU(2)$ ?



Во-первых, это четыре координаты центра  $x_0$ , затем размер  $\rho$  и, наконец, три угла Эйлера  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ , задающие ориентацию инстантона в изопро-  
странстве. Пространственные вращения не надо считать, поскольку они эквивалентны (см. п. 6) гл. 6) изоповоротам.

При регуляризации  $[\det(L + \Delta L)]^{-1/2}$  умножается на  $[\det(L + \Delta L + M^2)]^{1/2}$ , т. е. от каждой нулевой моды возникает фактор  $M$ . Таким образом, от всех (поскольку мы перечислили *все* коллективные коор-  
динаты) нулевых мод в  $\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}^{\text{Reg}}$  возникает фактор

$$\int d^4 x_0 d\rho \sin \theta d\theta d\varphi d\psi M^8 (V \overline{S_0})^8 \rho^3. \quad (75)$$

Множитель  $\rho^3$  возникает из якобиана перехода к интегрированию по  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  и восстанавливается по размерности.

Используя (75), величину  $\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}^{\text{Reg}} / \langle 0 | 0_T \rangle_{\text{p.th}}$  перепишем в виде

$$\frac{\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}^{\text{Reg}}}{\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{p.th}}} = \text{const} \int \frac{d^4 x d\rho}{\rho^5} \left( \frac{8\pi^2}{g_0^2} \right)^4 \exp \left( - \frac{8\pi^2}{g^2} + 8 \ln M\rho + \Phi_1 \right), \quad (76)$$

где через  $\exp \Phi_1$  обозначен вклад ненулевых мод.

#### в) Ненулевые моды. Эффективный заряд

Величина  $\Phi_1$  зависит от безразмерного параметра  $M\rho$  и в пределе  $M\rho \gg 1$  легко находится с помощью обычной теории возмущений. Действи-  
тельно, вычисление предэкспоненты с помощью удержания квадратичных по отклонению от внешнего поля членов соответствует вычислению одно-  
петлевых поправок в теории возмущений. Речь идет о диаграммах вида

$$\text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \dots, \quad (77)$$

где крестиком помечены вершины взаимодействия с внешним полем, а штри-  
ховые линии соответствуют функциям распространения полей  $a_\mu^a$  (плюс  
аналогичные петли с духами  $\Phi^a$ ,  $\overline{\Phi}^a$ ), внешнее поле имеет вид  $A_\mu^{a(\text{ins})}$ .

Ясно, что полное вычисление вклада нулевых мод требует суммирова-  
ния всей цепочки диаграмм — ни в каком конечном порядке нулевых мод  
не появляется. Проявлением этой неаналитичности является наличие члена  
 $\ln(8\pi^2/g_0^2)$  в величине  $\ln \langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}$ . Ясно также, что такой неаналитич-  
ности нет для ненулевых мод.

В интересующем нас пределе  $M\rho \gg 1$  в вычислении существенна лишь  
первая из диаграмм (77), поскольку все последующие диаграммы являются  
сходящимися и не дают зависимости от параметра обрезания  $M$  (они  
меняют  $\text{const}$  в (76)). Более того, во втором порядке по внешнему полю  
можно убедиться в том, что вклад ненулевых мод дается безвычитательным  
дисперсионным соотношением для поляризационного оператора  $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$ .

Мнимая часть  $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$  получается сечением первой диаграммы (77) и хоро-  
шо определена. При ее вычислении нужно учесть лишь кванты с трехмерно-  
поперечными состояниями поляризации, и не нужны нефизические поля-  
ризации и духи. Не останавливаясь подробно на этом простом вычислении,  
приведем результат для  $\text{Im} \Pi_{\mu\nu}$

$$\text{Im} \Pi_{\mu\nu}^{ab} = \text{---} \circ \text{---} = \delta^{ab} (g_\mu, k^2 - k_\mu k_\nu) \frac{g^2}{16\pi} \cdot \frac{2}{3}.$$

Написав безвычитательное дисперсионное представление для  $\Pi_{\mu\nu}^{(1)}$  (связанной с ненулевыми модами части поляризаационного оператора), получаем

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{ab(1)} &= \delta^{ab} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \frac{1}{\pi} \int \frac{ds}{s-k^2} \cdot \frac{2}{3} \frac{g^2}{16\pi} = \\ &= \delta^{ab} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \frac{2}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{M^2}{-k^2},\end{aligned}\quad (78)$$

где мы обрезали интегрирование по  $s$  на  $M^2$ , поскольку при регуляризации вычитается аналогичный вклад с паули-вилларсовскими частицами массы  $M$ .

Результат (78) для вклада ненулевых мод означает, что от этих квантовых поправок действие для внешнего поля приобретает эффективную добавку

$$\Delta S^{\text{Mink}} = \frac{2}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} \ln M^2 \rho^2 \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^a)^2 \right], \quad (79)$$

где используются обозначения псевдоевклидова пространства и вместо  $1/(-k^2)$  подставлен квадрат характерного размера поля  $\rho^2$  (строго говоря, надо было бы писать дифференциальный оператор, но для вычисления коэффициента при  $\ln M\rho$  это не важно). Переходя к евклидовскому действию и подставляя инстантонное  $G_{\mu\nu}^a$ , получаем ответ для  $\Phi_1$

$$\Phi_1 = \frac{2}{3} \ln M\rho. \quad (80)$$

Таким образом, учет нулевых и ненулевых мод приводит к тому, что величина  $8\pi^2/g_0^2$  в показателе экспоненты (76) заменяется на эффективный заряд  $8\pi^2/g^2(\rho)$ :

$$\frac{8\pi^2}{g^2(\rho)} = \frac{8\pi^2}{g_0^2} - 8 \ln M\rho + \frac{22}{3} \ln M\rho = \frac{8\pi^2}{g_0^2} - \frac{22}{3} \ln M\rho. \quad (81)$$

Конечно, этот результат является прямым следствием перенормируемости, и мы потратили время на его получение только для того, чтобы подчеркнуть очень красивое объяснение антиэкранировки заряда в неабелевой теории, возникающее из рассмотрения нулевых мод.

Действительно, и знак, и величина коэффициента при «антиэкранировочном» логарифме (76) являются очевидным следствием проведенного выше рассмотрения — коэффициент есть просто число нулевых мод.

В рамках теоретико-возмущенческих вычислений «антиэкранировочный» результат нагляднее всего объясняется в рамках бездуховой кулоновской калибровки, вычисления в которой были проделаны И. Б. Хриповичем еще в 1969 г.<sup>11</sup> Кроме «дисперсионной» части, вычисление которой обсуждалось выше, в этой калибровке в поляризаационном операторе есть не имеющий мнимой части вклад в поляризаационный оператор, когда один из виртуальных квантов имеет трехмернопоперечную поляризацию, а второй — кулоновский. Противоположный знак «недисперсионной» и «дисперсионной» частей  $\Pi_{\mu\nu}$  соответствует противоположным знакам взаимодействий, обусловленных обменом кулоновским и поперечным квантами (электрические силы расталкивают одноименные заряды, а магнитные притягивают одноименные токи).

Вычисление «недисперсионной» части в кулоновской калибровке требует аккуратности, поскольку приходится пользоваться нековариантным гамильтоновым формализмом, и величина коэффициента при логарифме, конечно, не является априорно известной. Всех этих проблем нет, как мы видели, при определении вклада нулевых мод. На этом мы и закончим похвальное слово нулевым модам.

## г) Д в у х п е т л е в о е п р и б л и ж е н и е

Проведенные выше вычисления привели к замене затравочной константы связи  $g_0$  в классическом действии на эффективную константу  $g(\rho)$ . Однако затравочная константа еще осталась в факторе  $(8\pi^2/g_0^2)^4$  (см. (76)), хотя ясно, что затравочная константа в силу перенумеруемости не должна входить в ответ. Дело в том, что точность использования однопетлевого приближения недостаточна, чтобы отличить фактор  $(8\pi^2/g_0^2)^4$  от  $(8\pi^2/g^2(\rho))^4$ , и мы нуждаемся в двухпетлевом вычислении.

Мы покажем, что реально от двухпетлевого вычисления нужно только выражение для эффективного заряда — такое выражение известно из теории возмущений<sup>12</sup>

$$\frac{8\pi^2}{g^2(\rho)} = \frac{8\pi^2}{g^2(\rho_0)} + N \left[ \frac{11}{3} \ln \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{17}{11} \ln \left( 1 + \frac{11}{3} N \frac{g^2(\rho_0)}{8\pi^2} \ln \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right], \quad (82)$$

где приведен результат для группы  $SU(N)$  (без вклада фермионов). Затравочная константа  $g_0 = g(\rho_0 = 1/M)$ . Вклад инстантона в вакуум-вакуумный переход для группы  $SU(2)$  имеет вид

$$\frac{\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}^{\text{Reg}}}{\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{p. th}}} = \text{const} \cdot \left[ \frac{8\pi^2}{g^2(\rho)} \right]^4 e^{-8\pi^2/g^2(\rho)} (1 + O(g^2(\rho))), \quad (83)$$

где  $g^2(\rho)$  дается формулой (82) с  $N = 2$ . Для фактора  $[8\pi^2/g^2(\rho)]^4$  можно ограничиться однопетлевой формулой для  $g^2(\rho)$  — отличие порядка неучтенных членов, дающих относительные поправки порядка  $g^2(\rho)$ . Отметим, что полное двухпетлевое вычисление инстантонного вклада определило бы эти поправки.

Доказательство правильности (83) основано на перенормируемости теории и методе эффективных лагранжианов. Проинтегрируем в духе Вильсона в функциональном интеграле по полям малых размеров (меньших  $\rho_c$ ), т. е. и по конфигурациям, отвечающим инстантонам с малым  $\rho < \rho_c$ . В результате возникает эффективный лагранжиан полей с масштабами, большими  $\rho_c$ . В этом лагранжиане флуктуации малых размеров учтены в коэффициентах разложения по операторам.

Вычисление вклада инстантонов в вакуум-вакуумный переход эквивалентно определению их вклада в коэффициент при единичном операторе. Вычисление коэффициентов при других операторах будет рассмотрено в гл. 10. Спецификой единичного оператора является независимость его матричных элементов от точки нормировки,  $\rho_c$  — нулевая аномальная размерность. Поэтому коэффициент при нем, выраженный через  $g(\rho)$ , уже не может содержать величины  $\rho_c$  (для операторов с ненулевой аномальной размерностью возникает фактор  $[g^2(\rho_c)/g^2(\rho)]^{\delta}$ ).

Теперь остается только выразить  $g^2(\rho)$  через  $g^2(\rho_0)$  с помощью уравнений ренорм-группы, причем удержание двухпетлевой добавки в (82) является вполне законным.

д) П л о т н о с т ь и н с т а н т о н о в в г р у п п е  $SU(N)$ 

Как изменится число нулевых мод при переходе к группе  $SU(N)$ ? Мы уже говорили, что инстантонное поле использует лишь  $SU(2)$ -подгруппу полной группы. Пусть эта подгруппа занимает левый верхний угол в  $N \times N$ -матрице генераторов. Ясно, что пять нулевых мод, связанных со сдвигами и растяжениями, остаются теми же, что и в  $SU(2)$ -группе, а меняются лишь моды, связанные с групповыми поворотами. В  $SU(2)$

их было три — в  $SU(N)$  они отвечают трем генераторам в матрице  $2 \times 2$  слева вверху (рис. 6). Те из оставшихся генераторов, которые попадают в матрицу  $(N-2) \times (N-2)$  справа внизу, очевидно, не поворачивают инстантонное поле. Так что к трем  $SU(2)$  поворотам добавляется еще 4

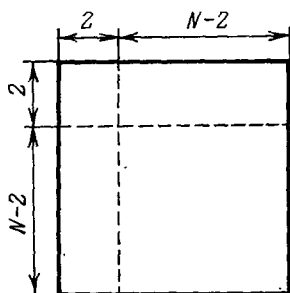


Рис. 6.

$(N-2)$  унитарных поворотов. Полное число нулевых мод равно  $5 + 3 + 4(N-2) = 4N$ . Конечно, это число  $4N$  точно соответствует коэффициенту при «антиэкранировочном» логарифме в формуле для  $8\pi^2/g^2(\rho)$ . Выпишем, наконец, формулу для приведенной плотности инстантонов  $d(\rho)$ , определенной следующим образом:

$$\frac{\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}^{\text{Reg}}}{\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{p. th}}} = \int \frac{d^4x d\rho}{\rho^5} d(\rho). \quad (84)$$

Функция  $d(\rho)$  равна

$$d(\rho) = \frac{C_1}{(N-1)!(N-2)!} \left[ \frac{8\pi^2}{g^2(\rho)} \right]^{2N} e^{-[8\pi^2/g^2(\rho)] - C_2 N}, \quad (85)$$

где  $g^2(\rho)$  выражается через  $g_0^2 = g^2(\rho_0 = 1/M)$  формулой (82), а константы  $C_1, C_2$  находятся некоторой модификацией вычислений 'т Хоофта<sup>13</sup>. Конкретно надо учесть дополнительно 4  $(N-2)$  векторных поля с указанными выше квантовыми числами как в нулевых, так и в ненулевых модах. Кроме того, нужен объем вложения  $SU(2)$  в  $SU(N)$  — фактор  $[(N-1)!(N-2)!]^{-1}$  связан с ним. Эта часть модификации оказалась наиболее сложной (см. <sup>13</sup>). Результат для  $C_1$  и  $C_2$  имеет вид

$$C_1 = \frac{2e^{5/6}}{\pi^2} = 0,466,$$

$$C_2 = \frac{5}{3} \ln 2 - \frac{17}{36} + \frac{1}{3} (\ln 2\pi + \gamma) + \frac{2}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\ln s}{s^2} = +1,679. \quad (86)$$

Отметим, что константа  $C_2$  зависит от способа регуляризации, который фактически задает определение затравочной константы. Вместо регуляризации по Паули-Вилларсу (PW-схемы) часто используется так называемая размерная регуляризация. Вместо логарифмов параметра обрезания в этом способе возникают полюса по размерности пространства,  $\ln M \rightarrow 1/(4-D)$ . Использование минимальной схемы<sup>14</sup> (MS) определения константы связи приводит к выражению вида (85) с заменой

$$g(\rho) \rightarrow g_{\text{MS}}(\rho) \quad C_2 \rightarrow C_{2\text{MS}},$$

$$C_{2\text{MS}} = C_2 - \frac{5}{36} - \frac{11}{6} (\ln 4\pi - \gamma) = C_2 - 3,721. \quad (87)$$

Численный коэффициент в  $d(\rho)$  для MS-схемы в  $e^{3,72N}$  раз больше, чем в схеме PW, что для  $SU(3)$  дает фактор  $\sim 7 \cdot 10^4$ .

Конечно, соотношения между наблюдаемыми амплитудами не зависят от определения  $g^2$  — те же пересчетные константы при смене регуляризации входят и, например, в поправки по  $g^2$  к сечению  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны (правда, зависимость от них там не экспоненциальная). Отметим в связи с этим, что в теории возмущений удобной оказалась  $\overline{\text{MS}}$ -схема, в которой не возникает слишком больших коэффициентов разложения

по  $g^2$ <sup>15</sup>. Отличие  $\overline{MS}$  от  $MS$ -схемы сводится к замене

$$\frac{8\pi^2}{g_{\overline{MS}}^2} = \frac{8\pi^2}{g_{MS}^2} - \frac{11}{6} N (\ln 4\pi - \gamma), \quad (88)$$

$$C_{2\overline{MS}} = C_2 - \frac{5}{36} \approx 1,54.$$

Приведем в заключение явный вид зависимости от  $\rho$  для функции  $d(\rho)$

$$d(\rho) = \frac{0,466}{(N-1)!(N-2)!} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{11N/3} \left[ 1 + \frac{11}{3} N \frac{g^2(\rho_0)}{8\pi^2} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right]^{5N/11} \times \\ \times \left[ \frac{8\pi^2}{g^2(\rho_0)} \right]^{2N} e^{-[8\pi^2/g^2(\rho_0)] - 1,679N}. \quad (89)$$

## 9. ИНСТАНТОННЫЙ ГАЗ И ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

Вычисленный вклад инстантона пропорционален  $\int d^4x_0 = V_4$  — объему рассматриваемой области евклидова пространства. Пока  $V_4 \rho^{-4} d(\rho)$  — вероятность найти инстантон размера  $\rho$  в рассматриваемом объеме — является малой величиной, можно не рассматривать таких флуктуаций, когда в этом объеме имеется два и более инстантонов размера  $\rho$ . Но при увеличении  $V_4$  мы естественным образом приходим к необходимости рассматривать инстантонный газ.

Аналогично одномерному случаю величина вакуум-вакуумного перехода имеет вид

$$\langle 0 | 0_T \rangle = \langle 0 | \exp \left( - \int d^4x \mathcal{H} \right) | 0 \rangle = e^{-\varepsilon V_4}, \quad (90)$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтонова плотность, а величину  $\varepsilon$  можно назвать плотностью энергии вакуума. Ясно, что для суммирования удобно рассмотреть логарифм (90), т. е. величину  $\varepsilon$

$$\varepsilon = - \frac{1}{V_4} \ln \langle 0 | 0_T \rangle = - \frac{1}{V_4} \ln [\langle 0 | 0_T \rangle_{p. th} + \langle 0 | 0_T \rangle_{ins}] \approx \\ \approx - \frac{1}{V_4} \left[ \ln \langle 0 | 0_T \rangle_{p. th} + \frac{\langle 0 | 0_T \rangle_{ins}}{\langle 0 | 0_T \rangle_{p. th}} \right] \approx \varepsilon_{p. th} - \int \frac{d\rho}{\rho^5} d(\rho). \quad (91)$$

Таким образом, поправка к плотности энергии вакуума в газовом приближении отрицательна и дается интегралом  $\int d\rho \rho^{-5} d(\rho)$ .

Этот интеграл из-за степенного роста  $d(\rho) \sim \rho^{11N/3}$  определяется большими  $\rho$ , и формальное выражение расходится степенным образом.

К сожалению, величина  $d(\rho)$  известна лишь в области достаточно малых  $\rho$  — таких, чтобы гарантировать малость неучтенных квантовых поправок  $\sim g^2(\rho)$ . Кроме того, в  $\varepsilon$  есть вклад флуктуаций с топологическим зарядом  $|n| > 1$ , который, грубо говоря, пропорционален  $[d(\rho)]^n$ . Оба явления ведут к неприменимости формулы (91) при больших  $\rho$ . Особенно интересной представляется возможность, когда флуктуации с большим топологическим зарядом становятся существенными в области масштабов, для которых поправки  $\sim g^2(\rho)$  еще невелики. Такая ситуация выглядит тем более правдоподобной, что величина  $d(\rho)$  растет с  $\rho$  гораздо быстрее, чем  $g^2(\rho)$ . Примером, когда в волновой функции вакуума доминируют плотные флуктуации с большим топологическим зарядом, являются двумерные модели, разобранные в интересных работах<sup>16</sup>. Авторы назвали найденную ими антигазовую ситуацию плавлением инстантонов.

Приближение разреженного инстантонного газа развивалось в работах<sup>8</sup>. Приближение основывается на гипотезе, что явления, связанные

с большими  $\rho$ , эффективно сводятся к появлению верхнего предела  $\rho_m$  в интеграле по  $\rho$ , а для  $d(\rho)$  при всех  $\rho < \rho_m$  можно использовать одноинстантонную формулу (91).

В этом параграфе мы продемонстрируем несамосогласованность гипотезы разреженного газа на примере нарушения общего соотношения. В следующей главе будет найдена явно область  $\rho$ , в которой справедливы одноинстантонные формулы, на основе феноменологической информации о полях в КХД-вакууме. Мы увидим, что допустимые  $\rho$  являются слишком малыми, чтобы претендовать на описание вакуумной структуры в области основных масштабов хотя бы по порядку величины.

Точное соотношение, проверку которого мы имеем в виду, это связь между плотностью энергии вакуума и средним квадратом напряженности глюонного поля в вакууме. Для вывода рассмотрим вакуумное среднее от тензора энергии-импульса  $\theta_{\mu\nu}(x)$ . В силу релятивистской инвариантности

$$\langle 0 | \theta_{\mu\nu} | 0 \rangle = g_{\mu\nu} \varepsilon, \quad (92)$$

откуда после суммирования следует выражение для  $\varepsilon$  через вакуумное среднее от шпура тензора энергии-импульса

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \langle 0 | \theta_{\mu\mu} | 0 \rangle. \quad (93)$$

Для  $\theta_{\mu\mu}$  в глюодинамике с группой  $SU(N)$  справедливо следующее операторное выражение<sup>17</sup>:

$$\theta_{\mu\mu} = \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \quad (a = 1, \dots, N^2 - 1), \quad (94)$$

где  $\alpha_s = g^2/4\pi$ ,  $\beta(\alpha_s)$  — функция Гелл-Манна — Лоу

$$\beta(\alpha_s) = \mu \frac{d\alpha_s(\mu)}{d\mu} = -\frac{11}{3} N \frac{\alpha_s^2}{2\pi} + O(\alpha_s^3). \quad (95)$$

Выражение (94) для  $\theta_{\mu\mu}$  называют аномалией в шпуре тензора энергии-импульса. Действительно, для классического безмассового векторного поля  $\theta_{\mu\mu} = 0$ . Отличие от нуля появляется на однопетлевом уровне и связано с необходимостью ввести градиентно-инвариантное обрезание.

Появление в  $\theta_{\mu\mu}$  функции  $\beta(\alpha_s)$ , управляющей перенормировкой заряда, можно пояснить следующим образом. Преобразование растяжений всех масштабов,  $x \rightarrow \lambda x$  в своей инфинитезимальной форме определяется оператором дилатации  $D$ :

$$D = \int d^3x D_0(x), \quad D_\mu(x) = \theta_{\mu\nu} x_\nu.$$

Нетрудно видеть, что инвариантность относительно растяжений есть лишь в случае, когда обращается в нуль дивергенция дилатационного тока  $D_\mu$ . Эта дивергенция равна

$$\partial_\mu D_\mu = \theta_{\mu\mu},$$

т. е. оператор  $\theta_{\mu\mu}$  определяет неинвариантность при растяжениях. Неинвариантность означает существование некоторого масштаба расстояний. В безмассовой теории единственная возможность возникновения масштаба связана с необходимостью ведения при рассмотрении квантовых эффектов параметра обрезания  $M$ . При одновременных преобразованиях  $x \rightarrow \lambda x$ ,  $M \rightarrow M/\lambda$  теория инвариантна, т. е. растяжения эквивалентны изменению  $M$ . Именно поэтому величина  $\theta_{\mu\mu}$  пропорциональна  $\beta(\alpha_s) = M d\alpha_s/dM$ .

Рассматривая действие преобразований растяжения на амплитуды переходов, записанные в форме функциональных интегралов, нетрудно

вывести соотношение (94). Мы не будем останавливаться на этом выводе. Сделаем лишь два замечания по выводу соотношения (94):

а) сохранение энергии-импульса  $\partial_\mu \theta_{\mu\nu} = 0$  означает независимость правой части равенства от точки нормировки  $\mu$  оператора  $G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a$ , эффективный заряд  $\alpha_s$  должен быть взят в этой же точке,  $\alpha_s = \alpha_s(\mu)$ ;

б) квантовые поправки приводят также к зависящей от обрезания  $c$ -числовой части в  $\theta_{\mu\mu}$ . Поэтому более точная запись выглядит следующим образом:

$$\theta_{\mu\mu} = (0 | \theta_{\mu\mu} | 0)_{p.th} + \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a, \quad (96)$$

где  $c$  — числовая часть — выделена усреднением по вакууму теории возмущений  $|0\rangle$  (отличающемуся от точного физического вакуума  $|0\rangle$ ).

Подставляя выражение (96) для  $\theta_{\mu\mu}$  в (93), приходим к искомой связи между  $\varepsilon$  и средним квадратом напряженности поля в вакууме

$$\varepsilon = \varepsilon_{p.th} + \frac{\beta(\alpha_s)}{16\alpha_s} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle. \quad (97)$$

Из вывода ясно, что в  $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle$  нужно учесть лишь не даваемые теорией возмущений флуктуации.

Инстантоны как раз представляют пример таких флуктуаций. Одноинстантонный вклад в  $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle$  легко находится: надо перейти к евклидовому пространству (выше использовались обозначения пространства Минковского), заменить поле  $\hat{G}_{\mu\nu}^a$  на инстантонное и приписать фактор  $d^4x_0 d\rho \rho^{-5} d(\rho)$  — вероятность иметь инстантон размера  $\rho$  с центром в  $x_0$ . Результат для одноинстантонного вклада в  $\varepsilon$  —  $\varepsilon_{p.th}$ , проинтегрированный по  $x_0$  (интеграл  $\int d^4x_0 G_{\mu\nu}^a(x-x_0) \hat{G}_{\mu\nu}^a(x-x_0) = \int d^4x G_{\mu\nu}^a(x) \hat{G}_{\mu\nu}^a(x) = 4 \cdot 8\pi^2/g^2$ ), равен

$$\varepsilon - \varepsilon_{p.th} = -\frac{11}{12} N \int \frac{d\rho}{\rho^5} d(\rho). \quad (98)$$

(для  $\beta(\alpha_s)$  использовано однопетлевое приближение). С другой стороны, одноинстантонный вклад в  $\varepsilon - \varepsilon_{p.th}$  дается полученной ранее формулой (91) и отличается от (98) отсутствием фактора  $11N/12$ .

Что же это значит? Поскольку интеграл по  $\rho$  определяется большими  $\rho$ , то парадокс разрешается тем, что одноинстантонное приближение не дает возможности найти  $\varepsilon - \varepsilon_{p.th}$  и  $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle$ . Более того, попытка учесть неодноразмерные эффекты введением обрезания по  $\rho$  несогласована в том отношении, что это нельзя сделать единым образом даже для величин, связанных общими соотношениями — обрезание в них эффективно разное.

В заключение главы заметим, что недостаточность одноинстантонного приближения для таких величин, как  $\varepsilon$  или  $\langle 0 | [\beta(\alpha_s)/\alpha_s] G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle$ , можно показать и несколько другим рассуждением. Физические величины, конечно, не зависят от точки нормировки. Для обсуждаемых величин, имеющих размерность  $m^4$ , точка нормировки  $\mu$  может входить лишь в комбинации (не зависящей от  $\mu$ ):

$$\left\{ \mu \left[ \frac{2\pi}{\alpha_s(\mu)} \right]^{b_1/b} e^{-(1/b)2\pi/\alpha_s} \right\}^4 [1 + O(\alpha_s(\mu))], \quad (99)$$

где  $b, b_1$  — первый и второй коэффициенты разложения функции Гелл-Манна — Лоу

$$\beta(\alpha_s) = -b \frac{\alpha_s^2}{2\pi} - b_1 \frac{\alpha_s^3}{(2\pi)^2} + O(\alpha_s^4). \quad (100)$$

В  $SU(N)$ -глюодинамике (см. (82))

$$b = \frac{11}{3} N, \quad \frac{b_1}{b} = \frac{17}{11} N. \quad (100a)$$

С другой стороны, одноинстантонное приближение с обрезанием интеграла по  $\rho$  сверху на  $\rho_m$  дает для тех же параметров результат, пропорциональный

$$\frac{1}{\rho_m^4} d(\rho_m) \sim \frac{1}{\rho_m^4} \left[ \frac{2\pi}{\alpha_s(\rho_m)} \right]^{2N} e^{-2\pi/\alpha_s(\rho_m)}, \quad (101)$$

где учтено, что главный вклад дает область  $\rho$  вблизи  $\rho_m$ . Сравнивая (101) с (99) при  $\mu = 1/\rho_m$ , видим, что зависимость от  $\rho_m$  не совпадает с требуемой по ренорм-инвариантности. Степень  $\rho_m$  больше в те же  $b/4 = 11N/12$  раз, не совпадает и степень  $\ln \rho_m$ .

#### 10. ИНСТАНТОНЫ В КХД-ВАКУУМЕ

Как уже обсуждалось, основными флуктуациями в КХД-вакууме, являются флуктуации больших масштабов — порядка радиуса конфайнмента или, что то же самое, размеров адронов. К сожалению, пока мы не умеем количественно рассматривать такие флуктуации.

Развитые квазиклассические методы применимы к рассмотрению теоретико-невозмущенческих флуктуаций малых размеров, среди которых доминирующими являются инстантоны.

В этом параграфе мы учтем влияние, которое оказывают на инстантоны малых размеров поля, обусловленные характерными длинноволновыми флуктуациями в вакууме<sup>18</sup>.

Так как мы различаем поля двух типов, а именно, поля инстантонов малых размеров и поля характерных вакуумных флуктуаций, то удобно ввести эффективный лагранжиан. В нем, как обычно, вклад быстроменяющихся полей включен в коэффициенты при различных операторах, действующих в пространстве медленно меняющихся полей.

Так, эффект выделенного инстантона с размером  $\rho$  и центром в  $x_0$  сводится к следующей добавке к эффективному лагранжиану длинноволновых флуктуаций

$$\Delta L(x_0) = \frac{d\rho}{\rho^5} \sum_n C_n(\rho) O_n(x_0),$$

где  $C_n(\rho)$  — числовые коэффициенты и  $O_n(x_0)$  — локальные операторы, построенные из глюонных полей (мы рассматриваем чистую глюодинамику, изменения, вносимые фермионами, обсуждаются в следующей главе).

Вероятность найти рассматриваемый инстантон в физическом вакууме дается усреднением  $\Delta L$  по этому состоянию. С другой стороны, чтобы найти коэффициенты  $C_n$ , нужно рассмотреть матричные элементы от  $\Delta L$  по состояниям теории возмущений (с разным числом свободных глюонов с импульсами  $q \ll 1/\rho$ ). Эти матричные элементы вычисляются квазиклассическими методами.

Конкретно, рассмотрим инстантонный вклад в переход вакуум  $\rightarrow n$  глюонов и применим к нему редукционную формулу

$$\langle n \text{ gluons} | \Delta L | 0 \rangle = \langle 0 | T \prod_{k=1}^n \int d x_k e^{i q_k x_k} \epsilon_{\mu_k}^{a_k} q_k^2 A_{\mu_k}^{a_k}(x_k) | 0 \rangle, \quad (102)$$

где  $q_k$ ,  $\epsilon_{\mu_k}^{a_k}$  — 4-импульс и поляризация  $k$ -го глюона,  $A_{\mu}^a(x)$  — оператор глюонного поля. Для  $n = 0$ , т. е. для вакуум-вакуумного перехода,



правая часть (102) уже была вычислена в гл. 8 и равна  $d\rho\rho^{-5}d(\rho)$ , левая же часть равна, очевидно, коэффициенту при единичном операторе,  $C_I d\rho/\rho^5$ .

Для  $n \neq 0$  рецепт квазиклассического вычисления выражения (102) сводится к

а) переходу к евклидову пространству (см. формулы гл. 5);

б) замене евклидова  $A_\mu^a(x)$  на инстантонное поле  $\bar{A}_\mu^a(x - x_0)$ , даваемое формулой (65). Использование именно сингулярной калибровки обусловлено тем, что редукционная формула (102) справедлива лишь для быстро спадающих полей  $A_\mu^a(x)$ . Для несингулярной калибровки обратный пропагатор  $q^2$  заменяется на более сложное выражение;

в) умножению на амплитуду  $\langle 0 | 0_T \rangle_{\text{inst}}$ -перехода, равную  $d\rho\rho^{-5}d(\rho)$ . Итого, для матричного элемента (102) получается

$\langle n \text{ gluons} | \Delta L(x) | 0 \rangle =$

$$= \frac{d\rho}{\rho^5} d(\rho) e^{-ix\Sigma q_k} \prod_{k=1}^n \left[ \int dx_k e^{-iq_k x_k} (-q_k^2) \varepsilon_{\mu_k}^{a_k} \bar{A}_{\mu_k}^{a_k}(x_k) \right], \quad (103)$$

где все величины в правой части — евклидовы.

Фурье-образ инстантонного решения, интересующий нас в пределе  $q\rho \rightarrow 0$ , легко находится:

$$\int dx e^{-iqx} (-q^2) A_\mu^a(x) = \frac{4\pi i}{g} \bar{\eta}_{a\mu\nu} q_\nu \rho^2. \quad (104)$$

После этого нетрудно восстановить полный операторный вид  $\Delta L$ :

$$\Delta L(x) = \frac{d\rho}{\rho^5} d(\rho) \exp \left[ -\frac{2\pi^2}{g} \rho^2 \bar{\eta}_{a\mu\nu}^M G_{\mu\nu}^a(x) \right],$$

$$\bar{\eta}_{a\mu\nu}^M = \begin{cases} \bar{\eta}_{am\nu}, & \mu = m, \nu = n; \quad m, n = 1, 2, 3, \\ i\bar{\eta}_{a4n}, & \mu = 0, \nu = n; \quad n = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (105)$$

где  $G_{\mu\nu}^a(x)$  — оператор напряженности глюонного поля больших масштабов. Факториалы, входящие в разложение экспоненты, сокращаются с комбинаторными коэффициентами при взятии матричного элемента (103).

Выражение (105) для взаимодействия инстантона с внешним полем было впервые получено Калланом, Дашеном и Гроссом<sup>8</sup> другим, более сложным способом. Важнее то, что мы в отличие от этих авторов не фиксируем внешнее  $G_{\mu\nu}^a(x)$  «руками», а связываем его с полем крупномасштабных флуктуаций.

Эта связь осуществляется усреднением лагранжиана (105) по физическому вакууму. Член, линейный по  $G_{\mu\nu}^a$ , очевидно, исчезает при таком усреднении, и первая неисчезающая поправка к эффективной плотности инстантонов пропорциональна  $G^2$ :

$$\langle 0 | \Delta L | 0 \rangle = \frac{d\rho}{\rho^5} d_{\text{eff}}(\rho) = \frac{d\rho}{\rho^5} d(\rho) \left[ 1 + \frac{\pi^3 \rho^4}{(N^2 - 1) \alpha_s} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle + O(\rho^6) \right], \quad (106)$$

где при усреднении было использовано соотношение

$$\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu'\nu'}^{a'} | 0 \rangle = \frac{\delta^{aa'}}{N^2 - 1} \cdot \frac{1}{12} (g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} - g_{\mu\nu'} g_{\nu\mu'}) \langle 0 | G_{\alpha\beta}^b G_{\alpha\beta}^b | 0 \rangle. \quad (107)$$

Отметим, что константа  $\alpha_s$  и оператор  $(G_{\mu\nu}^a)^2$  входят нормированными в точке  $\rho$ . Величиной, не зависящей от точки нормировки (с точностью до  $\alpha_s(\rho)$ ), является произведение  $\alpha_s G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a$  (см. предыдущую главу).

Чтобы получить количественную оценку поправки, нужно знать средний квадрат напряженности глюонного поля в физическом вакууме. Эта величина была найдена в работах <sup>19</sup> из анализа влияния вакуумных полей на состояния чармония и оказалась равной

$$\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \approx 0,012 \text{ ГэВ}^4. \quad (107')$$

Для SU (3) группы относительная поправка к  $d(\rho)$  записывается в виде

$$\frac{\pi^4 \rho^4}{8\alpha_s^2(\rho)} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle. \quad (108)$$

Оно достигает единицы при значении  $\rho$ , равном

$$\rho_{\text{crit}} \approx \frac{1}{1,15 \text{ ГэВ}}, \quad (109)$$

если для  $\alpha_s$  принять  $\alpha_s(\rho) = 2\pi/9 \ln(1/\Lambda\rho)$  с  $\Lambda = 100 \text{ МэВ}$ . При  $\rho = \rho_{\text{crit}}$  взаимодействие инстантона с вакуумными полями других флуктуаций становится стопроцентно важным. Это  $\rho_{\text{crit}}$  весьма мало по сравнению с характерными адронными размерами  $1/(200-300) \text{ МэВ}$ . Слово «весьма» действительно можно употребить, учитывая пропорциональность  $d(\rho)$  высокой степени  $\rho$  — вклад  $\rho \leq \rho_{\text{crit}}$ , скажем, в вакуумную плотность энергии крайне мал.

По-другому малость  $\rho_{\text{crit}}$ , даваемого оценкой (109), можно увидеть, вычисляя вклад инстантонов в коррелятор

$$i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T A(x) B(0) | 0 \rangle, \quad (110)$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые локальные операторы. При евклидовых больших  $q$  инстантоны дают в (110) вклады двух типов. Во-первых, есть вклад флуктуаций фиксированного (не зависящего от  $q$ ) размера в коэффициенты регулярного разложения по степеням  $1/q^2$ . Во-вторых, есть вклад от инстантонов с размерами  $\rho \sim \rho_{\text{eff}} = C/q$ , пропорциональный  $d(\rho_{\text{eff}})$ , т. е. высокой (и необязательно целой) степени  $1/q^2$ . Константа пропорциональности  $C$  определяется методом перевала и из-за высокой степени  $\rho$  в  $d(\rho)$  равна приблизительно 5.

Таким образом, в терминах  $q$  можно вычислять одноинстантонный вклад в (110) по обычным формулам лишь при  $q^2 > (5,5 \text{ ГэВ})^2$ . Ясно, что такие  $q^2$  гораздо больше характерных адронных масс.

Закончим этот параграф формулой, учитывающей высшие степени  $G_{\mu\nu}^a$  в эффективной плотности инстантонов. Эта формула основана на гипотезе доминантности вакуумного промежуточного состояния, позволяющей свести  $\langle 0 | (G^2)^n | 0 \rangle$  к  $\langle 0 | G^2 | 0 \rangle^n$ . Приближение это аналогично используемому в теории многих тел и для некоторых 4-кварковых операторов, где его удастся проверить, имеет точность порядка нескольких процентов.

Факторизация приводит к соотношению

$$\langle 0 | \left( \frac{2\pi^2}{g_{\text{eff}}^2} \rho^2 \bar{\eta}_{a\mu\nu}^M G_{\mu\nu}^a \right)^{2k} | 0 \rangle = (2k-1)!! \left[ \frac{4\pi^4}{g^2} \rho^4 \langle 0 | (\bar{\eta}_{a\mu\nu}^M G_{\mu\nu}^a)^2 | 0 \rangle \right]^k,$$

с помощью которого получается следующий результат для эффективной плотности инстантонов:

$$d_{\text{eff}}(\rho) = d(\rho) \exp \left[ \frac{\pi^4 \rho^4}{(N^2-1) \alpha_s^2(\rho)} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \right], \quad (111)$$

который можно представить как замену в выражении для  $d(\rho)$  величины  $2\pi/\alpha_s(\rho)$  на величину

$$\frac{2\pi}{\alpha_s(\rho)} \rightarrow \frac{2\pi}{\alpha_s(\rho)} \left[ 1 - \frac{\pi^2 \rho^4}{2(N^2 - 1)\alpha_s^2(\rho)} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} (G_{\mu\nu}^a)^2 | 0 \rangle \right]. \quad (112)$$

Используя для  $d(\rho)$  выражение (111), можно двигаться по  $\rho$  на  $\rho > \rho_{\text{crit}}$ . Однако, когда взаимодействие с вакуумными полями сильно меняет классическое действие, т. е. при обращении в нуль величины (112), квазиклассическими методами пользоваться нельзя. Эта граница при тех же предположениях об  $\alpha_s$  и  $\langle 0 | G^2 | 0 \rangle$  равна  $\rho < 1/500$  Мэв.

Несмотря на численные неопределенности в величине  $\langle 0 | G^2 | 0 \rangle$  (порядка двойки) и в  $\alpha_s$  (неопределенность в  $\Lambda$  тоже порядка двойки), можно сказать, что вакуумные поля деформируют инстантоны на масштабах, гораздо меньших, чем характерные размеры доминирующих в вакууме флуктуаций.

#### 11. ФЕРМИОНЫ В ИНСТАНТОННОМ ПОЛЕ

В этом разделе мы относительно кратко обсудим, как меняется инстантонный вклад в амплитуду вакуум-вакуумного перехода при включении в теорию фермионов.

Сразу ясно, что для флуктуации с данным размером  $\rho$  влияние «тяжелых» кварков с массой  $m \gg \rho^{-1}$  мало. Действительно, в этом случае кварки

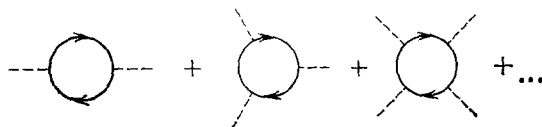


Рис. 7.

появляются на временах и расстояниях  $\sim 1/m \ll \rho$ , на которых можно воспользоваться теорией возмущений для вычисления кварковых петель вида рис. 7. Приведем первые несколько членов эффективного лагранжиана, учитывающего фермионные петли:

$$\Delta L_F = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^2 \times \frac{g^2}{24\pi^2} \ln \frac{M^2}{m^2} + \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{ig^3}{180m^2} G_{\mu\nu} G_{\nu\gamma} G_{\gamma\mu} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g^4}{288m^4} \left[ -(G_{\mu\nu} G_{\mu\nu})^2 + \frac{7}{10} \{G_{\mu\nu}, G_{\nu\gamma}\}_+^2 + \frac{29}{70} [G_{\mu\nu}, G_{\nu\gamma}]_-^2 - \frac{8}{35} [G_{\mu\nu}, G_{\gamma\delta}]_-^2 \right] \right\}, \quad (113)$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a t^a, \quad \text{Tr } t^a t^b = 2\delta^{ab}$$

Первый член в этом выражении содержит параметр обрезания  $M$  и, очевидно, описывает вклад рассматриваемого кварка в изменение заряда  $g$ . Поэтому он автоматически учитывается, когда результат выражается через заряд на расстояниях, больших чем  $1/m$ .

Следующие же члены в (113) при переходе в евклидово пространство и подстановке инстантонного поля дают ряд по степеням  $1/m^2 \rho^2$ .

Обратимся теперь к предельному случаю «легких» кварков,  $m \rho \ll 1$ . Отметим, что для инстантонов достаточно малых размеров все кварки являются легкими. Вычислим интеграл по ферми-полям в функциональном интеграле, определяющем вакуум-вакуумный переход  $\langle 0 | 0_T \rangle$ . В евклидовом действии фермион с массой  $m$  добавляет слагаемое вида (см. (45))

$$S_F^{(E)} = \int d^4x \bar{\psi} (-i\gamma_\mu D_\mu - im) \psi,$$

интегрирование которого по антикоммутирующим полям приводит к

$$\text{Det}(-i\gamma_\mu D_\mu - im).$$

Детерминант надо понимать как произведение собственных значений соответствующего оператора,

$$\text{Det}(-i\gamma_\mu D_\mu - im) = \prod_n (\lambda_n - im),$$

где действительные числа  $\lambda_n$  — собственные числа эрмитового оператора  $-i\gamma_\mu D_\mu$ :

$$-i\gamma_\mu D_\mu u_n(x) = \lambda_n u_n(x). \quad (114)$$

Принципиально важным при изучении предела  $m = 0$  является вопрос о том, обращаются ли некоторые  $\lambda_n$  в нуль, т.е. вопрос о нулевых модах фермионного поля. Покажем, что взаимодействие с инстантонным полем приводит к появлению одной такой моды  $u_0$ ,

$$-i\gamma_\mu D_\mu u_0 = 0. \quad (115)$$

Перейдем к двухкомпонентным спинорам  $\chi_{L,R}$  (мы используем стандартное представление для  $\gamma$ -матриц):

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \chi_L + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \chi_R, \quad \sigma_\mu^+ D_\mu \chi_L = 0, \quad \sigma_\mu^- D_\mu \chi_R = 0, \quad (116)$$

где  $\sigma_\mu^\pm = (\sigma, \mp i)$ . Подействуем на уравнения для  $\chi_L, \chi_R$  операторами  $\sigma_\mu^- D_\mu, \sigma_\mu^+ D_\mu$  соответственно. Используя соотношения<sup>1</sup> (57), коммутатор  $[D_\mu D_\nu] = -(ig/2)\tau^a G_{\mu\nu}^a$  и явный вид  $G_{\mu\nu}^a$  (см. (63)), получаем

$$-D_\mu^2 \chi_L = 0, \quad -D_\mu^2 \chi_R = -4\sigma\tau \frac{\rho^2}{[(x-x_0)^2 + \rho^2]^2} \chi_R.$$

Оператор  $-D_\mu^2$  является суммой квадратов эрмитовых операторов  $-D^2 = (-iD_\mu)^2$ , т.е. положительно определен. Поэтому он не имеет нулевых собственных значений (граничные условия ставятся на большом, но конечном расстоянии  $R$ ) и, следовательно,  $\chi_L = 0$ .

В уравнении для  $\chi_R$  используем базис в пространстве спинорных и цветовых индексов, диагонализующий матрицу  $\sigma\tau$ . Напоминаем, что  $\sigma$  действует на спинорные, а  $\tau$  — на цветовые индексы. Этот базис соответствует сложению обычного и цветового спина в полный момент, равный либо нулю (при этом  $\sigma\tau = -3$ ), либо единице ( $\sigma\tau = +1$ ). Опять же из положительной определенности  $-D_\mu^2$  следует, что нам подходит лишь случай, когда суммарный спин равен нулю, что полностью определяет зависимость  $\chi_R$  от индексов.

$$(\sigma + \tau) \chi_R = 0, \quad \chi_R^{\alpha m} \sim \varepsilon^{\alpha m}, \quad (117)$$

где  $\alpha = 1, 2$  — спиновый, а  $m = 1, 2$  — цветовой индексы.

Зависимость от координат легко находится из явного вида  $D_\mu^2$ , и окончательный ответ для нулевой моды  $u_0(x - x_0)$  (нормированной условием  $\int u^\dagger u dx = 1$ ) имеет вид

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi, \quad \varphi^{\alpha m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha m}. \quad (118)$$

Выпишем еще выражение для нулевой моды в сингулярной калибровке  $u_0^{\text{sing}}(x - x_0)$  (оно нам пригодится),

$$u_0^{\text{sing}}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} \frac{x_\mu \gamma_\mu}{\sqrt{x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \varphi, \quad (119)$$

которое получается умножением (118) на матрицу калибровочного преобразования (64а).

Вернемся теперь к инстантонной части амплитуды вакуум-вакуумного перехода. В ней возникает фактор

$$F = \frac{m}{M} \frac{\text{Det}'(-i\gamma_\mu D_\mu)}{\text{Det}'(-i\gamma_\mu D_\mu - iM)} \frac{\text{Det}(-i\gamma_\mu \partial_\mu - iM)}{\text{Det}(-i\gamma_\mu \partial_\mu)},$$

где  $\text{Det}'$  обозначает детерминант без нулевой моды и учтена регуляризация, а также нормировка на теорию возмущений. Во всех ненулевых модах величина  $m$  положена равной нулю, так что после выделения в  $F$  фактора  $m/M$  оставшаяся часть зависит лишь от безразмерного параметра  $M\rho$ . Как и в чистой глюодинамике (см. гл. 8), эта зависимость должна быть такой, чтобы параметр обрезания  $M$  убирался перенормировкой константы связи, т. е. зависимость  $F$  от  $M\rho$  должна давать перенормировку константы связи за счет фермионов в факторе  $e^{-8\pi^2/g_0^2}$ ,

$$\Delta_F \frac{8\pi^2}{g^2} = -\ln \frac{F}{m\rho \cdot \text{const}} = \ln M\rho - \frac{1}{3} \ln M\rho. \quad (120)$$

Первый логарифм пришел от нулевой моды, а второй — от ненулевых. Сравнивая с формулой (84) для глюонов, видим, что из-за антикоммутативности ситуация изменилась: нулевые моды легких кварков приводят к экранировке заряда, а ненулевые — к антиэкранировке.

В обычной теории возмущений разбиение (120) можно связать с зависящей от спина частью взаимодействия (первый логарифм) и «зарядовой» частью, не связанной со спином (второй логарифм). Действительно, мнимая часть глюонного поляризационного оператора, происходящая от промежуточного  $q\bar{q}$ -состояния, представляется в виде

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi_{\mu\nu}^{Fab} &= \delta^{ab} \frac{g^2}{2} \int \frac{d\omega}{32\pi^2} \{q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2 - (p_1 - p_2)_\mu (p_1 - p_2)_\nu\} = \\ &= \delta^{ab} \frac{g^2}{16\pi} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left(1 - \frac{1}{3}\right). \end{aligned} \quad (121)$$

В этой формуле  $p_1, p_2$  — импульсы частицы и античастицы  $q = p_1 + p_2$ , и интегрирование идет по направлениям  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  в ЦИ. Второй член в (121) лишь фактором  $(-2)$  отличается от вклада бесспинового цветового дублета. Двойка соответствует двум поляризационным состояниям, а минус — антикоммутативности.

Отметим, что для поляризации вакуума также справедливо аналогичное соотношение между спиновой частью поляризации и нулевыми модами. Это легко увидеть в «фоновой» калибровке, задаваемой добавлением к действию члена (74). В теории возмущений в качестве «внешнего» поля можно взять, например, потенциал, имеющий лишь третью цветовую компоненту, а в петле будут распространяться лишь «заряженные» компоненты. Трехглюонная вершина в этой калибровке имеет вид суммы зарядовой и магнитной частей, которые не интерферируют в поляризационном операторе. Спиновая часть дает «антиэкранировочный» логарифм, а зарядовая (вместе с хиггсами) — «экранировочный».

Что же получилось от включения в теорию легкого кварка? В пределе  $m \rightarrow 0$  амплитуда вакуум-вакуумного перехода стремится к нулю. Означает ли это, что при  $m = 0$  нет туннельных переходов? Совсем нет. Дело в том, что теперь инстантонная флуктуация связывает вакуум с состояниями кварк-антикварковой пары.

Чтобы увидеть это, рассмотрим кроссинговый процесс — переход из однокваркового состояния в однокварковое, причем импульсы кварков  $p, p'$  будем считать малыми по сравнению с  $1/\rho$ . Действуя, как в гл. 10, применим редукционную формулу

$$\langle p' | p_T \rangle = - \int dx dx' e^{ip'x} e^{-ipx} \bar{u}_\alpha^m(\hat{p}')_{\alpha\gamma} \langle 0 | T \{ q_\gamma^m(x') \bar{q}_\beta^h(x) \} | 0 \rangle_{\text{ins}} (\hat{p})_{\beta\delta} v_\delta^h, \quad (122)$$

где  $\bar{v}_\alpha^m$ ,  $v_\delta^k$  — спиноры, описывающие конечный и начальный кварк (вверху — цветовой, внизу — спинорный индексы).

Инстантонный вклад в фермионную функцию Грина найдем, используя соотношение

$$\langle 0 | T \{ q_\gamma^m(x') q_\beta^k(x) \} | 0 \rangle_{\text{ins}} \xrightarrow{x_0 \rightarrow -ix_4} \sum_n \frac{u_{(n)\gamma}^m(x') u_{(n)\beta}^{+k}(x)}{m + i\lambda_n} \langle 0 | 0_T \rangle_{\text{ins}}. \quad (123)$$

В пределе  $m \rightarrow 0$  главный вклад дает нулевая мода, причем величина (123) конечна при  $m = 0$ .

Используя явный вид (119) нулевой моды в сингулярной калибровке, нетрудно теперь получить ответ. Сформулируем его в виде выражения для эффективного лагранжиана, описывающего все переходы, возникающие от инстантонной флуктуации с размером  $\rho$

$$\Delta L(x) = \prod_q \left[ m_q \rho - 2\pi^2 \rho^3 \bar{q}_R \left( 1 + \frac{i}{4} \tau^a \bar{\eta}_{a\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right) q_L \right] \times \\ \times \exp \left( - \frac{2\pi^2}{g} \rho^2 \bar{\eta}_{b\gamma\delta} G_{\gamma\delta}^b \right) d_0(\rho) \frac{d\rho}{\rho^5} d\hat{o}. \quad (124)$$

Здесь входит произведение по всем сортам легких ( $m_q \rho \ll 1$ ) кварков  $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$ . В пространстве Минковского символы  $\eta_{a\mu\nu}$  отличаются от евклидовых лишь при  $\mu$  или  $\nu = 0$  фактором  $i$ . Через  $d\hat{o}$  обозначен дифференциал, относящийся к цветовой ориентации инстантона, нормированный на единицу,  $\int d\hat{o} = 1$ . Зависимость от ориентации входит через подстановку  $\bar{\eta}_{a\mu\nu} \rightarrow h_{aa'} \bar{\eta}_{a'\mu\nu}$  ( $h$  — матрица поворотов в цветовом пространстве), которую следует произвести в (124).

Величина  $d_0(\rho)$  отличается от  $d(\rho)$  в чистой глюодинамике (85) домножением на фактор

$$\exp F \left[ -\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{17}{36} + \frac{1}{3} (\ln 2\pi + \gamma) + \frac{2}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\ln s}{s^2} \right] = e^{0.292F},$$

где  $F$  — число легких фермионов. Это для регуляризации Паули — Вилларса; для MS-схемы вместо 0,292 входит  $(-0,495)$  и 0,153 для  $\overline{\text{MS}}$ . Кроме того, в выражение (82) для  $8\pi^2/g^2(\rho)$  следует включить вклад фермионов.

Для антиинстантона  $\Delta L$  получается из (124) заменой  $\eta_{a\mu\nu} \rightarrow \eta_{a\mu\nu}$ ,  $q_{L,R} \rightarrow q_{R,L}$ . Отметим также, что все операторы, константа  $g$  и массы  $m_q$ , входящие в  $\Delta L$  нормированы в точке  $\rho$ , так что, помимо выявленной, имеется логарифмическая зависимость от  $\rho$ , определяемая аномальной размерностью рассматриваемого операторного члена в  $\Delta L$ .

Особый интерес представляют генерируемые инстантоном фермионные вершины — это взаимодействие часто называется детерминантным взаимодействием 'т Хоофта. Дело в том, что оно явно демонстрирует нарушение  $U(1)$ -симметрии, связанной с преобразованиями вида  $q' = e^{i\alpha\gamma_5} q$ . Наивно такая симметрия имеет место в теории с безмассовыми кварками. Нетривиальный характер нарушения этой симметрии виден из того, что, например, в теории с одним кварком  $\Delta L$  описывает переход «левого» кварка в «правый», что невозможно ни в каком конечном порядке теории возмущений для  $m = 0$ .

Институт теоретической и экспериментальной физики,  
Москва  
Институт ядерной физики СО АН СССР,  
Новосибирск

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.— Phys. Lett., Ser. B, 1975, v. 59, p. 85.
2. Polyakov A. M.— Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 120, p. 429.
3. Фейнман Р., Хибс А.— Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. А. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1962.
5. Coleman S. The Uses of Instantons: Preprint HUTP-78/004.— 1977.
6. 't Hooft G.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 3432.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
8. Callan C. G., Dashen R., Gross D. J.— Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 17, p. 2717; 1979, v. 19, p. 1826.
9. Willemssen J. F.— Ibid., 1979, v. 20, p. 3292.
10. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I.— Phys. Lett. Ser. A, 1978, v. 65, p. 185.
11. Дринфельд В. Г., Манин Ю. И.— ЯФ, 1979, т. 29, с. 1646.
12. Хриплович И. Б.— ЯФ, 1969, т. 10, с. 409.
13. Jones D. R. T.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 75, p. 531.
14. Bernard C.— Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 19, p. 3013.
15. 't Hooft G., Veltman M.— Nucl. Phys. Ser. B, 1972, v. 144, p. 189.
16. 't Hooft G.— Ibid., 1973, v. 162, p. 444.
17. Bardeen W. A., Buras A. J., Duke D. W., Muta T.— Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 18, p. 3998.
18. Fateev V. A., Frolov I. V., Schwartz A. S.— Nucl. Phys., Ser. B, 1979, v. 154, p. 121; ЯФ, 1979, т. 30, с. 1134.
19. Crewther R.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1421.
20. Chanowitz M., Ellis J.— Phys. Lett., Ser. B, 1972, v. 40, p. 397.
21. Collins J., Duncan L., Joglekar S.— Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 438.
22. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.— Nucl. Phys., Ser. B, 1980, v. 163, p. 46; v. 165, p. 45.
23. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.— Nucl. Phys., Ser. B, 1979, v. 147, p. 385, 448.