1982 г. Март Том 136, вып. 3
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.3

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ ПЛАВНОМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Б. М. Болотовский, В. А. Давыдов, В. Е. Рок

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему зарядов и токов, создающую электромагнитное поле. Пусть до некоторого момента времени параметры этой системы не меняются. Тогда поле, создаваемое системой, будет статическим. Предположим, что, начиная с некоторого момента времени, параметры системы становятся переменными, причем процесс изменения параметров занимает конечное время T. В течение этого времени параметры системы изменяются от некоторых начальных до некоторых конечных значений, а затем параметры уже не меняются.

Изменение параметров системы сопровождается электромагнитным излучением. Спектр излучаемых волн определяется законом изменения параметров, и, следовательно, каждому закону перехода от начального значения параметров к конечному соответствует свой спектр излучения. Однако у спектров излучения при всем их различии есть и общие свойства. Например, в низкочастотной области спектры излучения не зависят от закона изменения параметров, а зависят только от начального и конечного значения этих параметров [1].

Величина времени перехода T не входит в выражение для излучаемых полей, и поэтому низкочастотная область спектра может быть получена в предположении, что изменение параметров происходит мгновенно.

В настоящей методической заметке мы хотим отметить еще одну общую черту спектров излучения, на этот раз в высокочастотной области. А именно, если зависимость параметров от времени описывается гладкими функциями, то спектры излучения спадают на высоких частотах по экспоненциальному закону. При этом под гладкими функциями мы понимаем функции, непрерывные вместе со всеми своими производными.

Поскольку можно думать, что все реальные изменения описываются гладкими функциями, можно считать, что спектры излучения в реальных физических случаях спадают на больших частотах по экспоненциальному закону.

Ниже мы приведем ряд примеров, иллюстрирующих общее свойство излучения при гладких законах изменения параметров — экспоненциальное спадание в пределе больших частот.

1. КРИТЕРИЙ «МГНОВЕННОГО» И «ПЛАВНОГО» ПЕРЕХОДА

В работе [1] было рассмотрено излучение электромагнитных волн при мгновенном изменении параметров излучающей системы. В качестве одного из примеров рассматривалось излучение, возникающее при мгновенном изменении дипольного момента системы. При этом вектор дипольного момента испытывал скачкообразное изменение как по величине, так и по направлению. Рассматривалось также излучение, возникающее при мгновенном изменении скорости заряженной частицы. Во всех рассмотренных задачах предполагалось, что параметр, изменение которого вызывает излучение, ведет себя во времени следующим образом: до некоторого момента времени, скажем, до момента времени $t = 0$, величина параметра не меняется; при $t = 0$ происходит скачкообразное изменение параметра, и новое значение, возникшее после скачка, в дальнейшем уже не меняется. Например, если речь идет о дипольном моменте $\mathbf{p}$, то предполагается, что при $t < 0$ имеем $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$, а при $t > 0$ — дипольный момент $\mathbf{p} = \mathbf{p}_2$, где $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ — два не зависящих от времени вектора. Если меняется скорость частицы $\mathbf{V}$, то закон изменения таков: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1$ при $t < 0$ и $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2$ при $t > 0$, где $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ — два не зависящих от времени вектора.

Представление о мгновенном изменении параметров физической системы есть идеализация. В действительности любой переход между двумя состояниями, в которых параметры системы имеют стационарные значения, протекает в течение некоторого конечного промежутка времени T. Тем не менее в ряде физически интересных случаев оказывается, что время перехода T можно считать пренебрежимо малым, а следовательно, сам переход — мгновенным. Пусть, например, излучающая система движется как целое со скоростью $\mathbf{V}$, а время изменения параметра, ответственного за излучение, равно T. Пусть при этом излучается плоская волна частоты ω под углом θ к направлению скорости. Тогда, если выполняется неравенство

$$\omega T \ll \frac{1}{1-(V/c)\cos\theta}, \tag{1.1}$$

переход можно считать мгновенным. Как показывают вычисления, в случае (1.1) время перехода T не входит в формулы, определяющие поле излучения, его спектр и интенсивность.

В работе [1] было рассмотрено несколько физических случаев, когда можно считать, что неравенство (1.1) выполняется. Неравенство (1.1) имеет простой физический смысл. Если излучающая система покоится (как это, например, имеет место для диполя с изменяющимся во времени моментом), из (1.1) получаем простое условие

$$\omega T \ll 1, \tag{1.2}$$

при выполнении которого переход можно считать мгновенным. Физически это означает, что если период излучаемой волны $2\pi/\omega$ много больше времени T, в течение которого меняется дипольный момент, то детали перехода несущественны, а сам переход можно считать мгновенным. Существенными оказываются лишь начальное и конечное значения дипольного момента.

Если источник движется, то условие мгновенности перехода, как видно из (1.1), включает и скорость источника, и направление излучения.

Пусть точечный источник, движущийся со скоростью V, излучает плоскую волну частоты ω. Направление распространения волны пусть совпадает с направлением движения источника ($\theta = 0$). Тогда за время перехода T источник пройдет путь VT, а излученная волна — путь cT. Таким образом, за время перехода T фаза волны в точке, где находится источник, изменится на величину

$$\Delta\varphi = k(c-V)T = \omega\left(1-\frac{V}{c}\right)T \qquad \left(k=\frac{\omega}{c}\right); \tag{1.3}$$

здесь мы учли соотношение $k = \omega/c$ между волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой ω электромагнитной волны.

Если излучаемая волна распространяется под углом θ к скорости источника, то изменение фазы $\Delta\varphi$ волны за время перехода T имеет вид

$$\Delta\varphi = \omega\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)T = (\omega - (\mathbf{kV}))\,T. \tag{1.4}$$

Условие, при котором переход можно считать мгновенным, выражается теперь в виде простого неравенства

$$\Delta\varphi = \omega\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)T \ll 1. \tag{1.5}$$

Это неравенство совпадает с (1.1).

До сих пор мы рассматривали условия, при которых переход в излучающей системе можно считать мгновенным. Эти условия выполняются, если справедливо неравенство (1.1) или эквивалентное ему неравенство (1.5). Уже из вида этих неравенств можно заключить, что они не выполняются для достаточно высоких частот или в определенных угловых интервалах изменения θ. Например, если рассматривается излучение вперед, ($\theta = 0$), то условие перестает выполняться для частот

$$\omega \gtrsim \frac{1}{T\,[1-(V/c)]}, \tag{1.6}$$

и, следовательно, для таких частот амплитуда излучаемой волны зависит от поведения системы за время перехода T. В этом случае переход, очевидно, уже нельзя считать мгновенным. Если излучающая система движется со скоростью, близкой к скорости света, условие (1.6) определяет очень высокие частоты. Для всех меньших частот мы можем определить поле излучения, исходя из представления о мгновенном переходе.

Рассмотрим теперь излучение назад ($\theta = \pi$). В этом случае множитель $1 - (V/c)\cos\theta$ имеет порядок 1 при всех скоростях движения излучающей системы. Условие, при котором необходимо учитывать время перехода T, имеет вид

$$\omega \gtrsim \frac{1}{T} \tag{1.7}$$

для всех скоростей движения.

Неравенства (1.6) и (1.7) определяют условия, при которых необходимо учитывать время перехода T. При этом (1.6) относится к излучению вперед, а (1.7) — к излучению назад. Отметим, что оба эти неравенства могут быть записаны в виде

$$\Delta\varphi \gtrsim 1, \tag{1.8}$$

где $\Delta\varphi$ — величина (1.4), дающая изменение фазы излученной волны за время перехода T в точке, где находится источник.

Видно, что для релятивистской системы ($V \approx c$) условия (1.6) и (1.7) сильно отличаются. Существует широкий интервал частот, в котором излучение вперед можно вычислить, исходя из представления о мгновенном переходе, а излучение назад практически почти всегда, зависит от деталей перехода. Этот интервал определяется неравенствами

$$\frac{1}{T} \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{T\left[1-(V/c)\right]}. \tag{1.9}$$

В ультрарелятивистском случае условие (1.6) справедливо для излучения, испущенного в интервале углов

$$\Delta\theta \approx \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{1.10}$$

вблизи направления движения излучающей системы.

При выполнении условий (1.6) — (1.8) излучение определяется характером поведения излучающей системы за время перехода. Поэтому для определения поля излучения нужно задать конкретный закон перехода. Ниже будет рассмотрено несколько примеров, которые выбраны, исходя из следующих требований:

1. Изменение во времени параметра, определяющего излучение происходит от начального стационарного значения к конечному стационарному значению.

2. Этот переход происходит за промежуток времени, равный по порядку величины T.

3. Зависимость параметра от времени описывается гладкой функцией, имеющей непрерывные производные всех порядков.

4. Закон перехода выбирается так, чтобы поля в рассматриваемой задаче могли быть определены точно.

Требование 3 является естественным, если согласиться с тем, что сами параметры, скорость их изменения, изменение скорости «ускорения» и т. д.— все эти величины не должны меняться скачкообразно.

Требование 4 удобно в том отношении, что точное решение, записанное в аналитическом виде, позволяет оценить с помощью асимптотических разложений, в каких областях справедливы те или иные приближения («мгновенный» или «плавный» переход).

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ ПЛАВНОМ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТИ ОТ НАЧАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ $\mathbf{V}_1$ ДО КОНЕЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ $\mathbf{V}_2$

Пусть точечная заряженная частица движется по следующему закону. Вначале (при $t \to -\infty$) ее скорость равна $\mathbf{V}_1$. Затем эта скорость плавно меняется от $\mathbf{V}_1$ до $\mathbf{V}_2$ так, что переход от начального значения скорости $\mathbf{V}_1$ к конечному значению $\mathbf{V}_2$ происходит за некоторое конечное время, равное порядку величины T.

Исходя из соображений, изложенных выше, зададим закон изменения скорости формулой

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2}{2} + \frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{t}{T}. \tag{2.1}$$

Закон движения (2.1) обладает тем свойством, что скорость частицы меняется от $\mathbf{V}_1$ к $\mathbf{V}_2$ за время порядка T, причем изменение скорости описывается гладкой функцией. Эти два обстоятельства, несмотря на весьма частный вид записи (2.1), позволяют получить некоторые общие заключения о спектре излучения заряженной частицы при выбранном законе движения.

Если скорость задана формулой (2.1), то зависимость координаты заряда от времени имеет вид

$$\mathbf{r}(t)=\frac{\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2}{2}t+\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{2}T\ln\operatorname{ch}\frac{t}{T}. \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) получается интегрированием (2.1) по времени, причем константа интегрирования выбирается так, что при $t=0$ движущийся заряд находится в начале координат. При этом, как видно из (2.1), его скорость равна среднему арифметическому из начальной $\mathbf{V}_1$ и конечной $\mathbf{V}_2$ скоростей.

Вычислим излучение, возникающее при движении заряженной частицы по закону (2.1), (2.2). Для этого можно воспользоваться известным выражением [2] для поля излучения заряженной частицы на больших расстояниях от области, где происходит излучение (эта область расположена вблизи начала координат, так как ускорение частицы происходит именно вблизи от начала координат).

Будем рассматривать поле на частоте ω. Тогда вектор-потенциал этого поля на достаточно больших расстояниях от области, где происходит излучение, имеет вид сферической волны:

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})=\frac{q}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{I}; \qquad (2.3)$$

здесь $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$ — фурье-компонента вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r},t')$, отвечающая частоте ω:

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t. \qquad (2.4)$$

Это соотношение можно обратить, записав

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\int\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \qquad (2.5)$$

В формуле (2.3) q — заряд движущейся частицы, c — скорость света, $k=\omega/c$. Величина $\mathbf{I}$ — векторная амплитуда сферической волны поля излучения. Вектор $\mathbf{I}$ определяется законом движения заряженной частицы. Если закон движения определяется соотношением $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ и вытекающим из него соотношением $\mathbf{V}=\mathbf{V}(t)$, то амплитуда I сферической волны выражается следующим образом:

$$\mathbf{I}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{V}(t)e^{i(\omega t-\mathbf{kr}(t))}\,\mathrm{d}t; \qquad (2.6)$$

здесь $\mathbf{k}$ — вектор, величина которого равна ω/c и который направлен из начала координат в точку наблюдения. Направление вектора $\mathbf{k}$ есть направление излучения.

Вычислим выражение (2.6) для $\mathbf{I}$ в случае, когда закон движения определяется формулами (2.1) и (2.2). Для этого подставим в (2.6) соответствующие выражения для $\mathbf{V}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ и проведем интегрирование по t. Получим

$$\mathbf{I}=2^{i[\mathbf{k}(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1)/2]T-1}\left(\frac{A-B}{A+B}\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{2}+\frac{\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_1}{2}\right)\frac{\Gamma(iA)\,\Gamma(iB)}{\Gamma(iA+iB)}. \qquad (2.7)$$

В этой формуле величины A и B выражаются следующим образом:

$$A=\frac{1}{2}T(\omega-\mathbf{kV}_1),\quad B=-\frac{1}{2}T(\omega-\mathbf{kV}_2), \qquad (2.8)$$

а Γ означает гамма-функцию Эйлера.

Величины A и B, от которых зависит амплитуда излученной сферической волны, имеют простой физический смысл. Пусть точечная заряженная частица движется со скоростью $\mathbf{V}$ в поле плоской электромагнитной волны $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$. Посмотрим, как меняется фаза волны в точке, где в данный момент времени находится частица. Если траектория частицы определяется уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{V}t$, то в показателе экспоненты, определяющей фазу волны, следует заменить $\mathbf{r}$ на $\mathbf{V}t$. Мы тогда получим, что фаза волны в той точке, где находится движущаяся частица, линейно растет со временем, и в момент времени t фаза равна $(\mathbf{kV} - \omega)\,t$. Поэтому величины A и B, определенные формулами (2.8), дают набег фазы за время T, причем A — это набег фазы (с точностью до знака и до множителя 1/2) для частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{V}_1$, а B — набег фазы (с теми же оговорками относительно множителя 1/2 для частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{V}_2$).

Смысл величин (2.8) тот же, что и величины $\Delta\varphi$, определяемой формулой (1.4). Таким образом, величины A и B (2.8) — это значения набега фазы $\Delta\varphi$ для скоростей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$.

Величина $\mathbf{I}$ (2.7) определяет векторную амплитуду сферической волны излучения (2.3) для случая, когда заряженная частица плавно меняет скорость от значения $\mathbf{V}_1$ до значения $\mathbf{V}_2$ по закону (2.1), (2.2). Как видно из (2.7), амплитуда $\mathbf{I}$ зависит от начальной и конечной скоростей движения $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, причем эти скорости входят в комбинациях A и B (см. формулы (2.7) и (2.8)).

Введем две величины размерности времени:

$$t_1 = \frac{1}{\omega - \mathbf{kV}_1}, \quad t_2 = \frac{1}{\omega - \mathbf{kV}_2}. \tag{2.9}$$

Время t дает по порядку величины то время, за которое волна $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ обгоняет по фазе заряженную частицу, движующуюся со скоростью $\mathbf{V}_1$, если набег фазы имеет порядок единицы. Иными словами, t_1 — это промежуток времени, в течение которого частица движется в фазе с волной. Если скорость частицы равна $\mathbf{V}_2$, то время движения частицы в фазе с волной равно t_2. Времена t_1 и t_2 называются в [3] эффективными временами. Мы будем называть эти величины временами формирования, имея в виду, что за время, например, t_1 частица движется в фазе с волной, и период воздействия волны на частицу (и воздействие частицы на волну) в течение времени $t_{1,2}$ имеет один знак, а по истечении времени $t_{1,2}$ когерентность частицы с волной нарушается (точнее говоря, прекращается интерференция поля частицы, движущейся с постоянной скоростью $V_{1,2}$, с полем излучения).

Используя обозначения (2.9), перепишем величины A и B в виде

$$A = \frac{1}{2}\frac{T}{t_1}, \quad B = -\frac{1}{2}\frac{T}{t_2}; \tag{2.10}$$

здесь T — время перехода от скорости $\mathbf{V}_1$ к скорости $\mathbf{V}_2$, t_1 — время формирования для начального состояния, t_2 — время формирования для конечного состояния.

Поскольку A и B определяют амплитуду (2.7) излученной волны, видно, что излучение зависит от величины отношений времени перехода к начальному и конечному временам формирования.

Угловое и спектральное распределение излучения выражается через величину $\mathbf{I}$ следующим образом:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{q^2}{4\pi^2 c}\,|\,[\mathbf{k}, \mathbf{I}]\,|^2\,d\Omega = W_\omega(\theta, \varphi)\,d\Omega, \tag{2.11}$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, θ и φ — соответственно полярный и азимутальный углы сферической системы координат, определяющие направление вектора $\mathbf{k}$.

Подстановка (2.7) в (2.11) позволяет явно определить $W_\omega(\theta, \varphi)$. Здесь мы для простоты рассмотрим случай $\mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{V}_2$. Тогда выражение для $W_\omega(\theta, \varphi)$ упрощается и имеет вид [4]

$$W_\omega(\theta) = \frac{q^2 \omega T \sin^2\theta}{8\pi c^2 \cos\theta\,[1-(V_1/c)\cos\theta]\,[1-(V_2/c)\cos\theta]} \times$$
$$\times \frac{(V_2 - V_1)\,\mathrm{sh}\,\{[(V_2-V_1)/2c]\,\pi\omega T\cos\theta\}}{\mathrm{sh}\,\{(\pi\omega T/2)\,[1-(V_1/c)\cos\theta]\}\,\mathrm{sh}\,\{(\pi\omega T/2)\,[1-(V_2/c)\cos\theta]\}}, \qquad (2.12)$$

где θ — угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ излученной волны и осью z сферической системы координат, направленной вдоль движения заряда. В силу аксиальной симметрии задачи в данном частном случае зависимость W_ω от азимутального угла φ исчезает.

При выводе формулы (2.12) мы воспользовались соотношением [5]

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y\,\mathrm{sh}\,\pi y} \qquad (\mathrm{Im}\,y = 0). \qquad (2.13)$$

Рассмотрим теперь асимптотику полученного спектра в случае больших и малых значений величин A и B, определяемых формулами (2.8). Пусть сначала $|A| \ll 1$, $|B| \ll 1$. Этот случай имеет место, если время перехода T значительно меньше, чем время формирования t_1 и t_2. При этом получаем

$$W_\omega(\theta) = \frac{q^2 (V_2 - V_1)^2 \sin^2\theta}{4\pi^2 c^3\,[1-(V_1/c)\cos\theta]^2\,[1-(V_2/c)\cos\theta]^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\,\frac{T^2}{t_1 t_2} + \ldots\right). \qquad (2.14)$$

Величина, стоящая в (2.14) перед квадратными скобками,— это интенсивность излучения при мгновенном изменении скорости частицы от V_1 до V_2.

В случае, когда время перехода T много больше времен формирования t_1 и t_2 ($|A| \gg 1$, $|B| \gg 1$), получаем

$$W_\omega(\theta) = \frac{q^2 \omega T\,|V_2 - V_1|\,\sin^2\theta}{4\pi c^2 \cos\theta\,[1-(V_1/c)\cos\theta]\,[1-(V_2/c)\cos\theta]}\, e^{-\pi T/\max(t_1,\, t_2)}; \qquad (2.15)$$

знаком $\max(t_1, t_2)$ обозначена наибольшая из величин t_1, t_2. Спектр (2.15) спадает в области высоких частот экспоненциально, причем в показателе экспоненты стоит отношение времени перехода к наибольшему из времен формирования. Это характерно для достаточно гладких траекторий движения (например, для спектра синхротронного излучения [2], спектра излучения гармонического осциллятора с конечной амплитудой [6] и т. п.). Причина экспоненциального спадания спектра в области высоких частот заключается в том, что во всех этих случаях закон движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ представляет собой гладкую функцию, у которой существуют непрерывные производные всех порядков.

Величина $\mathbf{I}$ из (2.6), определяющая амплитуду поля излучения, пропорциональна компоненте Фурье плотности тока, связанного с движущимся зарядом. При этом, как известно, из свойств преобразования Фурье, если $\mathbf{r}(t)$ является функцией, непрерывной вместе со всеми своими производными, величина $\mathbf{I}$ спадает при больших значениях ω быстрее любой конечной степени ω. Таким образом, быстрое спадание спектра с ростом частоты является общим свойством излучения для достаточно гладких траекторий.

В случае, когда скорость заряда меняется не только по величине, но и направлению, угловое и спектральное распределения излучения зависят также от азимутального угла φ, поскольку в этом случае векторы $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ определяют в пространстве выделенную плоскость.

Выражение для $W_\omega(\theta, \varphi)$ может быть получено из общего соотношения (2.11). Соответствующая формула является достаточно громоздкой, и мы ее здесь не приводим. Отметим только, что основные особенности спектра излучения оказываются такими же, как и в рассмотренном выше случае, когда скорость заряда сохранялась по направлению и менялась только по величине. А именно, первая поправка к спектральному и угловому распределению энергии излучения при мгновенном изменении скорости заряда пропорциональна T^2, спектр на высоких частотах экспоненциально убывает, как и в разобранном выше частном случае.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ПЛАВНОМ ИЗМЕНЕНИИ ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА

При изменении дипольного момента физической системы излучаются электромагнитные волны, характеристики которых зависят от закона, описывающего процесс изменения дипольного момента во времени.

Рассмотрим точечный диполь с дипольным моментом

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(t)\,\delta(\mathbf{r}). \tag{3.1}$$

В качестве модельной зависимости $\mathbf{p}(t)$ примем

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2} + \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{t}{T} \tag{3.2}$$

(начало координат совмещено с точкой пространства, в которой находится диполь). Согласно (3.2) дипольный момент системы плавно изменяется от $\mathbf{p}_1$ (при $t \to -\infty$) до $\mathbf{p}_2$ (при $t \to +\infty$). Характерное время существенного изменения дипольного момента имеет порядок T. Легко видеть, что при $T \to 0$ $\mathbf{p}(t)$ переходит в

$$\mathbf{p} = \begin{cases} \mathbf{p}_1, & t < 0, \\ \mathbf{p}_2, & t > 0. \end{cases}$$

Последний случай был рассмотрен ранее в [1] и может служить для сравнения с результатами настоящей работы.

С перестройкой дипольного момента по закону (3.2) связана плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\Delta\mathbf{p}\,\delta(\mathbf{r})}{2T\,\mathrm{ch}^2(t/T)}. \tag{3.3}$$

Фурье-компонента тока $\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})$ определяется формулой

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\,e^{i\omega t}\,dt = \frac{\Delta\mathbf{p}\,\omega T\,\delta(\mathbf{r})}{4\,\mathrm{sh}(\pi\omega T/2)} \tag{3.4}$$

(при $T \to 0$ $j_\omega(\mathbf{r}) \to (\Delta\mathbf{p}/2\pi)\,\delta(\mathbf{r})$, что соответствует формуле (2.7) из [1]), где $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ — полное изменение дипольного момента.

Как известно, Фурье-компонента $\mathbf{A}_\omega$ вектор-потенциала $\mathbf{A}$ связана с Фурье-компонентой плотности тока следующим соотношением:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}')\,\frac{\exp(i(\omega/c)\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'. \tag{3.5}$$

Подставив $\mathbf{j}_\omega$ из (3.4) в (3.5) найдем

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{\Delta\mathbf{p}\,\omega T\,\exp(ikr)}{4cr\,\mathrm{sh}(\pi\omega T/2)}, \qquad k = \frac{\omega}{c}. \tag{3.6}$$

Применяя к (3.6) обратное преобразование Фурье получим выражение для вектор-потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta \mathbf{p}}{2crT\,\mathrm{ch}^2\{[t - r/c)]/T\}}. \tag{3.7}$$

Из (3.7) видно, что поле $\mathbf{A}$ в основном сосредоточено в сферическом слое $|r - ct| < cT$ толщиной $2cT$. При $T \to 0$ толщина этого слоя стремится к нулю и он вырождается в сферу радиуса $r = ct$.

Для того чтобы исследовать поведение функции (3.7) при $T \to 0$, рассмотрим последовательность функции $f_T(x) = 1/2T\,\mathrm{ch}^2(x/T)$ при $T \to 0$.

Очевидно, что $f_T(t) \to 0$ при $x/T \to \pm\infty$ (при $T \to 0$ для этого требуется $x \neq 0$), в то же время

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2(x/T)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{x}{T}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

независимо от величины T.

Таким образом, можно считать, что последовательность $f_T(x)$ имеет пределом обобщенную функцию $\delta(x)$. Для поля $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в этом случае получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta \mathbf{p}}{cr}\,\delta\left(t - \frac{r}{c}\right), \tag{3.8}$$

что совпадает с выражением (2.10) из [1], вычисленным для мгновенного изменения дипольного момента.

Скалярный потенциал φ рассматриваемого поля определяется плотностью заряда

$$\rho = -\mathrm{div}\,\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \tag{3.9}$$

в соответствии с волновым уравнением для φ, которое получается в лоренцевой калибровке $\left(\mathrm{div}\,\mathbf{A} = -\left(\frac{1}{c}\right)\partial\varphi/\partial t\right)$ и имеет вид

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi(\mathbf{p}(t), \nabla)\,\delta(\mathbf{r}). \tag{3.10}$$

Решение (3.10) имеет вид

$$\varphi = -\int \frac{(\mathbf{p}[t - (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)], \nabla')\,\delta(\mathbf{r})'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{3.11}$$

Для $\mathbf{p}(t)$ из (3.2) получим

$$\varphi = \frac{(\Delta\mathbf{p}, \mathbf{r})}{2r^2cT\,\mathrm{ch}^2\{[t - (r/c)]/T\}} - \left(\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right), \nabla\right)\frac{1}{r}. \tag{3.12}$$

В пределе при $T \to 0$ из (3.12) следует

$$\varphi \to \frac{(\Delta\mathbf{p}, \mathbf{r})}{cr^2}\,\delta\left(1 - \frac{r}{c}\right) - \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{sgn}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right](\mathbf{p}_1, \nabla)\frac{1}{r} - \\ - \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{sgn}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right](\mathbf{p}_2, \nabla)\frac{1}{r}, \tag{3.13}$$

здесь $\mathrm{sgn}\,x = x/|x|$.

Выражение (3.13) совпадает с (2.13) из [1].

Из выражений для потенциалов $\mathbf{A}$ и φ можно получить выражения для электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей с помощью известных соотношений

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{3.14}$$

Подстановка (3.7) и (3.12) в (3.14) дает

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{cr^3}[\mathbf{r}, [\Delta\mathbf{p}, \mathbf{r}]]\left[\frac{1}{2rT\,\mathrm{ch}^2\{[t-(r/c)]/T\}} - \frac{\mathrm{sh}\{[t-(r/c)]/T\}}{cT^2\,\mathrm{ch}^3\{[t-(r/c)]/T\}}\right] + \\ + \frac{3\{\mathbf{p}[t-(r/c)], \mathbf{r}\}\mathbf{r} - \mathbf{p}[t-(r/c)]r^2}{r^5}, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{H} = \frac{[\Delta\mathbf{p}, \mathbf{r}]}{cr^2}\left[\frac{1}{2rT\,\mathrm{ch}^2\{[t-(r/c)]/T\}} - \frac{\mathrm{sh}\{[t-(r/c)]/T\}}{cT^2\,\mathrm{ch}^3\{[t-(r/c)]/T\}}\right]. \tag{3.16}$$

Как видно из (3.15), (3.16), поток энергии через сферу достаточно большого радиуса, окружающую диполь, связан с полем свободного излучения, электрическая составляющая которого представляет собой первое слагаемое в (3.15) (второе слагаемое убывает с ростом r как r^{-3}, и потому интеграл от него по сферической поверхности достаточно большого радиуса стремится к нулю как r^{-1}).

Спектральная плотность излучения в интервале частот $(\omega, \omega + \mathrm{d}\omega)$ в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$ равна

$$\mathrm{d}W_{\mathbf{n},\,\omega} = \frac{|\Delta\mathbf{p}|^2\omega^4T^2}{16c^3\,\mathrm{sh}^2(\pi\omega T/2)}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\omega, \tag{3.17}$$

где θ — угол между векторами $\Delta\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$, φ — азимутальный угол в сферической системе координат с началом в точке расположения диполя и осью z, направленной вдоль $\Delta\mathbf{p}$; $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ — телесный угол в направлении $\mathbf{n}$.

Из (3.17) видно, что спектральная плотность излучения сосредоточена в основном в области частот $\omega \leqslant 1/T$ и экспоненциально убывает за ее пределами.

Для определения полной энергии излучения в направлении $\mathbf{n}$ проинтегрируем (3.17) по всем частотам. В результате получим

$$\mathrm{d}W_{\mathbf{n}} = \frac{12|\Delta\mathbf{p}|^2}{\pi^5c^3T^3}\zeta(4)\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{3.18*}$$

При $T \to 0$ $\mathrm{d}W_{\mathbf{n}}$ расходится как T^{-3}. Это естественно, так как при рассмотрении мгновенного скачка $\mathbf{p}$ для спектральной плотности было получено выражение (2.21) [1]:

$$\mathrm{d}W_{\mathbf{n},\,\omega} = \frac{|\Delta\mathbf{p}|^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega.$$

Интеграл от этого выражения расходится как ω_0^3, где ω_0 — частота, характеризующая верхнюю границу спектра излучения, которая в случае плавной перестройки $\mathbf{p}(t)$ имеет порядок $\sim 1/T$.

*) Использована формула

$$\int_0^\infty \frac{x^p\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p-1}}\zeta(p),$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.

4. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА НА РАЗМЫТОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД ИЛИ В ПЛАВНО-НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим теперь излучение, возникающее при пересечении движущимся зарядом пространственной или временно́й размытой границы двух сред. Свойства излучения равномерно движущегося заряда в неоднородной или нестационарной среде во многом аналогичны свойствам излучения заряда, движущегося неравномерно в однородной среде. Действительно, при движении заряда в среде с диэлектрической проницаемостью ε излучение возникает, если вдоль траектории движения меняется параметр $\eta = (V/c)\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, одинакового изменения параметра η можно добиться как в однородной стационарной среде ($\varepsilon = \text{const}$), изменяя скорость V, так и в случае равномерного движения заряда, изменяя диэлектрическую проницаемость ε. Получим сначала уравнения, определяющие излучение в случае пространственной границы раздела двух сред. Здесь мы будем следовать работе [7], где рассмотрено излучение на размытой границе.

Пусть диэлектрическая проницаемость среды ε меняется в направлении оси z. Будем считать, что среда немагнитная ($\mu = 1$). Рассмотрим заряд q, движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{V}$ вдоль оси z. В этом случае уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} q\mathbf{V}\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-Vt), \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi q\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-Vt).$$

Разложим напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в интеграл Фурье вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}(\boldsymbol{\varkappa}, \omega, z)\, e^{i(\varkappa\rho-\omega t)}\, d\boldsymbol{\varkappa}\, d\omega, \tag{4.2}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор, перпендикулярный z, имеющий компоненты x и y. Совершим также преобразование, аналогичное (4.2) по отношению к другим векторам поля ($\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$), а также к плотностям заряда и тока. В итоге из (4.1) получим уравнение для фурье-компоненты магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{dz}\mathbf{H}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\right)\mathbf{H} = \frac{iq\,[\mathbf{n}, \boldsymbol{\varkappa}]}{2\pi^2 c\varepsilon}\, e^{i\omega z/V}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{V}/c$.

Введя вместо $\mathbf{H}$ новую функцию $u(\varkappa, \omega, z)$, по формуле

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\varkappa}]\sqrt{\varepsilon}\, u \tag{4.4}$$

получим для u уравнение

$$u'' + \left[-\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)'' + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa^2\right] u = \frac{iq}{2\pi^2 c\sqrt{\varepsilon}}\, e^{i\omega z/V} \tag{4.5}$$

Пусть диэлектрическая проницаемость изменяется по закону переходного слоя Эпштейна:

$$\varepsilon(\omega, z) = 1 + \frac{\alpha(\omega)\, e^{az}}{1+e^{az}}, \quad a > 0. \tag{4.6}$$

При $z \to +\infty$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1 + \alpha$; при $z \to -\infty$, $\varepsilon = 1$. Таким образом, выражение (4.6) описывает размытую границу между вакуумом и средой с диэлектрической проницаемостью ε_0, причем характерная ширина зоны размытости порядка $1/a$. Для упрощения уравнения (4.5) будем считать, что частица движется с релятивистской скоростью. В этом случае излучение сосредоточено в узком конусе вокруг направления движения (угол раствора конуса $\theta \sim mc^2/E$, где E — энергия частицы), причем излучаются, в основном, частоты, большие оптических. Тогда мы можем считать

$$\alpha = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad |\alpha| \ll 1, \quad \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} - \varkappa^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{4.7}$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2/m}$ — плазменная частота.

При выполнении условий (4.7) мы можем пренебречь членом $\sqrt{\varepsilon}\,(1/\sqrt{\varepsilon})''$ в уравнении (4.5), а также положить $\sqrt{\varepsilon}$ в правой части (4.5) равным единице. Окончательно в рассматриваемом приближении уравнение (4.5) принимает вид

$$u'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa^2\right) u = \frac{iq}{2\pi^2 c} e^{i\omega z/V}, \tag{4.8}$$

где ε определяется формулой (4.6).

Введем новую переменную $x = -e^{-az}$ и новую функцию $u = x^\nu w(x)$. Тогда уравнение (4.8) без правой части для функции w имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &x(1-x)w'' + [2\nu + 1 - (2\nu+1)x]\,w' - (\nu^2 - \mu^2)\,w = 0,\\ &\nu = \frac{i\lambda_2}{a}, \quad \mu = \frac{i\lambda_1}{a}, \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2},\\ &\lambda_2 = \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} - \varkappa^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Перейдем теперь к выводу уравнения, определяющего излучение заряда в плавно-нестационарной среде [8]. Запишем уравнение для электрической индукции $\mathbf{D}$:

$$\Delta \mathbf{D} - \frac{\varepsilon(t)}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 4\pi\left(\operatorname{grad}\rho + \frac{\varepsilon(t)}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\right). \tag{4.10}$$

Разложим $\mathbf{D}$ в интеграл Фурье вида

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{D}_\mathbf{k}(t)\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d\mathbf{k}. \tag{4.11}$$

Тогда, применив к плотности заряда и тока преобразование, аналогичное (4.11), получим из (4.10) уравнение для $\mathbf{D}_\mathbf{k}$

$$\mathbf{D}_\mathbf{k}'' + \tilde{\varepsilon}(t)\,\omega_0^2\,\mathbf{D}_\mathbf{k} = i\frac{q}{2\pi^2}\,[\mathbf{V}(\mathbf{k}\mathbf{V}) - \tilde{\varepsilon}(t)\,c^2\mathbf{k}]\,e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{V})t}, \tag{4.12}$$

где $\omega_0 = kc$, $\tilde{\varepsilon}(t) = [\varepsilon(t)]^{-1}$.

Поскольку в нестационарной среде все излучение определяется поперечной составляющей индукции

$$\mathbf{D}_\mathbf{k}^{tr} = \mathbf{D}_\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{D}_\mathbf{k})}{k^2},$$

то будем решать уравнение только для $\mathbf{D}_\mathbf{k}$. Оно имеет вид

$$(\mathbf{D}_\mathbf{k}^{tr})'' + \tilde{\varepsilon}(t)\,\omega_0^2\,\mathbf{D}_\mathbf{k}^{tr} = \mathbf{B}e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{V})t}, \tag{4.13}$$

где

$$\mathbf{B} = \frac{iq}{2\pi^2}(\mathbf{k}\mathbf{V})\left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{V})}{k^2}\right).$$

Пусть диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(t)$ меняется по закону нестационарного слоя Эпштейна:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{\varepsilon}_1 + (\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1)\frac{e^{t/T}}{1 + e^{t/T}}. \tag{4.14}$$

Диэлектрическая проницаемость среды, описываемая выражением (4.14), плавно меняется от значения ε_1 при $t \to -\infty$ до значения ε_2 при $t \to +\infty$; параметр T характеризует время изменения диэлектрической проницаемости от ε_1 до ε_2. Отметим, что трансформация плоской электромагнитной волны на нестационарном слое Эпштейна рассматривается в [9].

Вводя переменную $\xi = -e^{t/T}$, а также сделав замену $\mathbf{D}_\mathbf{k}^{\mathrm{tr}} = (-\xi)^a \mathbf{f}(\xi)$, для $\mathbf{f}(\xi)$ из (4.13) получим уравнение

$$(\xi - 1)\,\xi \mathbf{f}'' + [-\gamma + (\alpha + \beta + 1)\,\xi]\,\mathbf{f}' + \alpha\beta\mathbf{f} = \\ = T^2\mathbf{B}\,(-\xi)^{-[i(\mathbf{kv})T+a+1]}\,(1 - \xi), \qquad (4.15)$$

где $a = is\sqrt{\varepsilon_1}$, $b = is\sqrt{\varepsilon_2}$, $\alpha = a + b$, $\beta = a - b$, $\gamma = 2a + 1$, $s = \omega_0 T$.

Таким образом, как переходное излучение на размытой границе, так и излучение в плавно-нестационарной среде описываются гипергеометрическими уравнениями (4.9), (4.15). Способы решения их во многом аналогичны. Поэтому, рассмотрим подробно решение одного из них — (4.15), по ходу дела отмечая возникающие отличия в решении уравнения (4.9). Два линейно независимых решения уравнения (4.15) без правой части, регулярные в окрестности особой точки $\xi = 0$ (отметим, что стремлению ξ к нулю отвечает стремление t к $-\infty$) описываются следующими выражениями [10]:

$$f_1 = F\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \xi), \qquad (4.16)$$
$$f_2 = \xi^{1-\gamma}F\,(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ \xi),$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ — гипергеометрическая функция аргумента ξ. Теперь нам будет удобно вернуться к уравнению (4.13), поскольку вронскиан этого уравнения есть постоянная величина, не зависящая от времени t. Действительно, вронскиан линейного дифференциального уравнения равен [10]

$$W = \mathrm{const}\cdot e^{a_1(t)t}, \qquad (4.17)$$

где $a_1(t)$ — коэффициент при первой производной в уравнении. Поскольку в уравнении (4.13) $a_1 = 0$, т. е. из (4.17) следует постоянство вронскиана этого уравнения. Из (4.16) получим, что уравнение (4.13) без правой части имеет следующие два линейно независимых решения:

$$d_1 = e^{i\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}\,t}\,F\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ -e^{t/T}), \qquad (4.18)$$
$$d_2 = e^{-i\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}\,t}\,F\,(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma, -e^{t/T}).$$

Поскольку $F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1$, то в пределе $t \to -\infty$ решения d_1 и d_2 представляют собой две плоские волны, распространяющиеся навстречу друг другу. Аналогично два линейно независимых решения уравнения (4.8) без правой части в пределе $z \to -\infty$ представляют собой две плоские волны, распространяющиеся навстречу друг другу по и против направления оси z.

Будем решать неоднородное уравнение (4.13) (и уравнение (4.18)) методом вариации постоянных. Для этого необходимо вычислить вронскиан уравнения:

$$W = d_1 d_2' - d_2 d_1'. \qquad (4.19)$$

Поскольку, как мы показали выше, вронскиан W_1 есть постоянная величина, для его вычисления можно воспользоваться асимптотикой решений (4.18) при $t \to -\infty$ $(\lim\limits_{t\to\infty} F\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ -e^{t/T}) = 1)$. В этом случае имеем

$$W_1 = i2\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}. \qquad (4.20)$$

Выпишем теперь общее решение уравнения (4.13):

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{tr}}=-\frac{\mathbf{B}}{W_1}d_1\int d_2e^{-i(\mathbf{kV})t}\,dt+\frac{\mathbf{B}}{W_1}d_2\int d_1e^{-i(\mathbf{kV})t}\,dt+\mathbf{C}_1d_1+\mathbf{C}_2d_2. \quad (4.21)$$

Взять интегралы в (4.21) можно, воспользовавшись интегральным представлением Барнса для гипергеометрической функции [10]:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s\,ds, \quad (4.22)$$

где путь интегрирования искривлен (если это необходимо) для того, чтобы полюсы функций $\Gamma(\alpha+s)$, $\Gamma(\beta+s)$, $\Gamma(-s)$ лежали справа от пути интегрирования. В (4.22) $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Поскольку $t<0$, то для применения леммы Жордана контур интегрирования необходимо замкнуть окружностью бесконечно большого радиуса справа от мнимой оси s. Подставив (4.22) под знаки интегралов в (4.21) проведем сначала элементарное интегрирование по t, а затем и по s и в итоге получим

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{tr}}=\frac{\mathbf{B}}{W_s}Ae^{-i(\mathbf{kV})t}+\frac{\mathbf{B}}{W_1}M_1d_1-\frac{\mathbf{B}}{W_1}M_2d_2+\mathbf{C}_1d_1+\mathbf{C}_2d_2, \quad (4.23)$$

где первый член, имеющий множителем $e^{-i(\mathbf{kV})t}$, есть поле движущегося заряда, не связанное с излучением:

$$M_1=\frac{T\Gamma(1-2a)\Gamma(iT(\mathbf{kV}+\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}))\Gamma(iT(\mathbf{kV}-\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}))\Gamma(-iT(\mathbf{kV}+\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}))}{2\Gamma(-\beta)\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-2a+i\mathbf{kV}T+i\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}T)},$$
$$M_2=\frac{T\Gamma(1+2a)\Gamma(iT(\mathbf{kV}+\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}))\Gamma(iT(\mathbf{kV}-\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}))\Gamma(iT(\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}-\mathbf{kV}))}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1+2a+i\mathbf{kV}T-i\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}T)}. \quad (4.24)$$

Постоянные $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ в (4.23) найдем из условия отсутствия излучения при $t\to-\infty$; имеем

$$\mathbf{C}_1=-\frac{\mathbf{B}}{W_1}M_1,\quad \mathbf{C}_2=\frac{\mathbf{B}}{W_1}M_2. \quad (4.25)$$

Здесь впервые появляется отличие решения уравнения (4.8) для размытой границы и уравнения (4.13). А именно, условием для определения произвольных постоянных в общем решении уравнения (4.8) будет отсутствие при $z\to-\infty$ волн, распространяющихся в направлении оси z и отсутствие при $z\to+\infty$ волн, распространяющихся против направления оси z.

Рассмотрим теперь область $t>0$. Этой области отвечает окрестность особой точки $\xi=\infty$ уравнения (4.15). Регулярными в области $t>0$ линейно независимыми решениями уравнения (4.15) без правой части являются следующие функции:

$$\delta_1=e^{i\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}t}F(\beta,\ -\alpha,\ 1-2b,\ -e^{-t/T}),$$
$$\delta_2=e^{-i\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}t}F(\alpha,\ -\beta,\ 1+2b,\ -e^{-t/T}). \quad (4.26)$$

Две пары решений — d_1, d_2 и δ_1, δ_2 связаны между собой линейными отношениями, поскольку уравнение (4.13), будучи уравнением второго порядка, не может иметь более двух линейно независимых решений. Эти соотношения следующие [10]:

$$d_1=a_{11}\delta_1+a_{12}\delta_2,$$
$$d_2=a_{21}\delta_1+a_{22}\delta_2, \quad (4.27)$$

где

$$a_{11}=\frac{\Gamma(1+2a)\,\Gamma(2b)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1+a+b)},\quad a_{12}=\frac{\Gamma(1+2a)\,\Gamma(-2b)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1+a-b)},$$
$$a_{21}=\frac{\Gamma(1-2a)\,\Gamma(2b)}{\Gamma(-\beta)\,\Gamma(1-a+b)},\quad a_{22}=\frac{\Gamma(1-2a)\,\Gamma(-2b)}{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(1+a-b)}. \tag{4.28}$$

Выпишем теперь решение уравнения (4.15) при $t>0$:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{tr}=-\frac{\mathbf{B}}{W_2}\delta_1\int\delta_2 e^{-i(\mathbf{kV})t}\,dt+\frac{\mathbf{B}}{W_2}\delta_2\int\delta_1 e^{-i(\mathbf{kV})t}\,dt+\mathbf{A}_1\delta_1+\mathbf{A}_2\delta_2\,; \tag{4.29}$$

здесь вронскиан $W_2=\delta_1\delta_2'-\delta_2\delta_1'$ находим аналогично тому, как это делалось выше при вычислении W_1, рассчитывая его асимптотику при $t\to+\infty$. Получаем

$$W_2=i2\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}. \tag{4.30}$$

В (4.29) $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — постоянные, но уже не произвольные, а связанные с постоянными $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ (см. (4.25)) определенными линейными соотношениями, а именно, из (4.27) следует, что

$$\mathbf{A}_1=a_{11}\mathbf{C}_1+a_{21}\mathbf{C}_2,\quad \mathbf{A}_2=a_{12}\mathbf{C}_1+a_{22}\mathbf{C}_2. \tag{4.31}$$

Взяв интегралы в (4.29) аналогично тому, как это делалось выше, вычислим поле излучения $\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{rad}$ при $t\to\infty$, т. е. к тому моменту, как заряд прошел «сквозь» слой Эпштейна. Используя (4.28) — (4.31), получим

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{rad}=\mathbf{a}_+(\mathbf{k})e^{-i\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}\,t}+\mathbf{a}_-(\mathbf{k})\,e^{+i\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}\,t}, \tag{4.32}$$

где

$$\mathbf{a}_+(\mathbf{k})=\mathbf{B}T^2\frac{\Gamma(-2b)\,\Gamma(-iT(\mathbf{kV}+\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}))\,\Gamma(iT(\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}-\mathbf{kV}))\,\Gamma(iT(\mathbf{kV}-\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}))}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(1-i(\mathbf{kV})T-i\varepsilon_2^{1/2}\omega_0T)},$$
$$\mathbf{a}_-(\mathbf{k})=(\mathbf{a}_+(-\mathbf{k}))^*. \tag{4.33}$$

Аналогичные выражения получаем для излучения на размытой границе:

$$u_1=\frac{b}{Wa}\Delta(-\sigma,\ \nu,\ -\mu),$$
$$u_2=\frac{b}{Wa}\Delta(\sigma,\ \mu,\ -\nu), \tag{4.34}$$

где u_1 — амплитуда поля излучения «вперед» при $z\to+\infty$, u_2 — амплитуда поля излучения «назад» при $z\to-\infty$, $b=iq/2\pi^2c$, W — вронскиан уравнения (4.8), $\sigma=i\omega/aV$,

$$\Delta(\sigma,\ \mu,\ \nu)=\frac{\Gamma(1+2\nu)\,\Gamma(\sigma-\mu)\,\Gamma(\mu+\sigma)\,\Gamma(-\sigma+\nu)}{\Gamma(\nu-\mu)\,\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(1+\nu+\sigma)}. \tag{4.35}$$

Вычислим теперь интенсивность излучения заряда в плавно нестационарной среде на частоте $\omega=kc/\sqrt{\varepsilon_2}$ в элемент телесного угла $d\Omega=2\pi\sin\theta\,d\theta$, где $\cos\theta=(\mathbf{kV})/kV$. Для получения правильного выражения интенсивности излучения необходимо учесть, как это делалось в [11], что в направлении $\mathbf{k}$ (под углом θ к оси z) распространяется не только волна с амплитудой $\mathbf{a}_+(\mathbf{k})$, но и волна с амплитудой $\mathbf{a}_-(-\mathbf{k})$. Используя (4.33), а также известные свойства гамма-функций

$$|\Gamma(iy)|^2=\frac{\pi}{y\,\mathrm{sh}\,\pi y},\quad |\Gamma(1+iy)\,\Gamma(1-iy)|=\frac{\pi y}{\mathrm{sh}\,\pi y}, \tag{4.36}$$

получим

$$W_{\theta,\omega}\,d\Omega=\frac{q^2V^4\sqrt{\varepsilon_2}\,\omega T\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\cos^2\theta\sin^2\theta}{2\pi c^5\,[1-(V^2/c^2)\,\varepsilon_1\cos^2\theta]\,[1-(V^2/c^2)\,\varepsilon_2\cos^2\theta]}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}(\pi\omega_0T(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}))\operatorname{sh}(\pi\omega_0T(\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}))\operatorname{sh}(\pi T(\mathbf{kV}+\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}))\,d\Omega}{\operatorname{sh}(2\pi\omega_0T\sqrt{\varepsilon_2})\operatorname{sh}(\pi T(\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}+\mathbf{kV}))\operatorname{sh}(\pi T(\omega_0\sqrt{\varepsilon_1}-\mathbf{kV}))\operatorname{sh}(\pi T(\omega_0\sqrt{\varepsilon_2}-\mathbf{kV}))}.\tag{4.37}$$

Аналогичное выражение, которое из-за громоздкости мы не приводим, получается для интенсивности излучения на размытой границе [7].

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи формулы (4.37). Пусть время изменения T диэлектрической проницаемости настолько мало, что аргументы всех гиперболических синусов в (4.37) много меньше единицы. Найдем при этих условиях первые два члена разложения интенсивности излучения. Вычисления дают

$$W_{\theta,\omega}=W^0_{\theta,\omega}\left[1-\frac{\pi^2}{3}\omega^2\left(1-\frac{V}{c}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta\right)^2T^2\right],\tag{4.38}$$

где $W^0_{\theta,\omega}$ — интенсивность излучения при мгновенном изменении диэлектрической проницаемости среды [11]:

$$W^0_{\theta,\omega}=\frac{q^2V^4\,(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{4\pi^2c^5\sqrt{\varepsilon_2}\,[1-(V^2/c^2)\,\varepsilon_1\cos^2\theta]^2[1-(V/c)\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta]^2}.\tag{4.39}$$

Из (4.38) видно, что малым параметром, по которому производится разложение интенсивности излучения служит отношение времени изменения диэлектрической проницаемости ко времени формирования излучения в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2. Для переходного излучения вперед на размытой границе в случае малой ширины зоны размытости $z_0=1/a$ имеем следующее выражение:

$$W_{\theta,\omega}=W^0_{\theta,\omega}\left[1-\frac{\pi^2}{3}\frac{z_0^2\omega^2}{V^2}\left(1-\frac{V}{c}\sqrt{1-\varepsilon_0\sin^2\theta}\right)\left(1-\frac{V}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta\right)\right],\tag{4.40}$$

где $W^0_{\theta,\omega}$ в формуле (4.40) — интенсивность переходного излучения на резкой границе вакуум — среда [12]. При выполнении условий (4.7) $1-(V/c)\sqrt{1-\varepsilon_0\sin^2\theta}\approx 1-(V/c)\cos\theta$, так что основная поправка к интенсивности излучения на резкой границе пропорциональна отношению z_0^2 к произведению длин формирования излучения в вакууме и в среде с диэлектрической проницаемостью ε_0. Рассмотрим теперь излучение высоких частот. При этом интенсивности излучения заряда на размытой границе и нестационарном слое Эпштейна экспоненциально малы, причем показатель экспоненты в случае размытой границы равен

$$-\frac{2\pi z_0\omega}{V}\max\left[\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right),\ \left(1-\frac{V}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta\right)\right],\tag{4.41}$$

т. е. он пропорционален отношению характерной ширины зоны размытости к z_0 наибольшей из длин формирования (в вакууме или в среде с диэлектрической проницаемостью ε_0). В случае излучения на нестационарном слое показатель экспоненты равен

$$-2\pi T\omega\max\left[\left(1-\frac{V}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta\right),\ \left(1-\frac{V}{c}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta\right)\right].\tag{4.42}$$

Таким образом, показатель экспоненты (4.42) пропорционален отношению характерного времени изменения диэлектрической проницаемости к максимальному из времен формирования излучения в средах с ε_1 и ε_2.

Формулы (4.38), (4.40) позволяют сформулировать критерий законности приближения резкой границы или мгновенного скачка: приближение мгновенного скачка диэлектрической проницаемости допустимо для таких излучаемых волн, времена формирования которых в среде с ε_2 много больше характерного времени изменения диэлектрической проницаемости от ε_1 до ε_2; приближение резкой границы допустимо для таких излучаемых волн, длины формирования которых в вакууме и в среде с ε_0 много больше характерной ширины зоны размытости z_0. Таким образом, для релятивистской заряженной частицы спектр излучаемых ею под малыми углами высоких частот, для расчета которого границу можно считать резкой (скачок мгновенным), существенно расширяется в сторону коротких волн.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. Е.— УФН, **1978**, т. 126, с. 311.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.
3. Тер-Микаэлян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях.— Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1969.
4. Болотовский Б. М., Давыдов В. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», **1981**, т. 24, с. 231.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
6. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон.— М.: Наука, **1974**.
7. Аматуни А. Ц., Корхмазян Н. А.— ЖЭТФ, **1960**, т. 39, с. 1011.
8. Давыдов В. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», **1979**, т. 22, с. 95.
9. Столяров С. Н.— Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР), **1974**, № 3, с. 20.
10. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Курс современного анализа.— М.: Физматгиз, 1963.
11. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.— ЖЭТФ, **1973**, т. 65, с. 132.
12. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.— УФН, 1978, т. 126, с. 553.