1982 г. Март Том 136, вып. 3
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

КРАТКИЙ ПУТЕВОДИТЕЛЬ ДЛЯ ФИЗИКОВ ПО СОВРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

М. А. Ольшанецкий

СОДЕРЖАНИЕ

Самые современные методы дифференциальной геометрии и топологии входят в физику. Примером этому являются обзоры [1, 2, 3, 4], посвященные применению этих разделов математики в теории поля и физике твердого тела. Однако отсутствие достаточно «демократических», ориентированных на физиков книг затрудняет чтение соответствующей литературы, не говоря уже о практическом применении нового аппарата. Предлагаемый путеводитель, как надеется автор, поможет частично восполнить этот пробел. Его следует рассматривать как математическое дополнение к обзору [1]. Структура путеводителя такова:

1) список общеупотребительных в математической литературе обозначений; 2) указатель терминов с соответствующими литературными ссылками; 3) четыре краткие ознакомительные статьи (см. раздел 3), которые, хотя и носят самостоятельный характер, следует читать последовательно; 4) указания к чтению литературы.

Еще раз подчеркнем, что статьи рассчитаны на читателя-физика и не претендуют ни на строгость, ни на полноту. Читателю было бы полезно ознакомиться с соответствующей математической литературой, следуя литературным указаниям.

Автор выражает признательность Л. Б. Окуню, стимулировавшему написание путеводителя.

1. СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A,
$\forall a \exists c$ — для любого a существует c,
$A \approx B$ — множества A и B — изоморфизмы,
$A \cap B$ — пересечение множеств A и B,
$\alpha \wedge \beta$ — внешнее произведение форм α и β,
$\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное пространство,
$\mathbb{C}^n$ — комплексное n-мерное пространство,
S^n — n-мерная сфера,

$\mathbb{R}P^n$ — n-мерное вещественное проективное пространство,
$\mathbb{C}P^n$ — n-мерное комплексное проективное пространство,
$\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел,
$\mathbb{Z}_p$ — циклическая группа из p элементов,
φ^{-1} — отображение, обратное к отображению φ.

2. УКАЗАТЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Указатель составлен по следующему принципу. В тех случаях, когда термин объяснен в обзоре [1], указывается соответствующий раздел перевода обзора [1]. В прочих случаях даются ссылки на книги, вышедшие на русском языке:

3

а) ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Абстрактное понятие дифференцируемого многообразия (ДМ) эквивалентно обычному определению m-мерной гиперповерхности в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Эта поверхность может задаваться с помощью системы равенств

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = m+1, \ldots, n), \tag{1}$$

где f_j— бесконечно дифференцируемые функции. Многообразия можно также задавать параметрически:

$$x_k = x_k(u_1, \ldots, u_m) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Параметры $(u_1, \ldots, u_m)$ могут пробегать не все пространство $\mathbb{R}^n$, а быть, например, периодическими. Описание ДМ способом (2) предпочтительнее первого способа (1), так как оно явно указывает нужное число параметров.

Однако второй способ описания ДМ так же, как и первый, нельзя считать удовлетворительным. Рассмотрим в качестве примера сферу S^2. Ее параметры — сферические координаты θ и φ — не позволяют определить все точки сферы однозначно: в окрестности полюсов ($\theta = 0, \pi$) угол φ не определен.

Кроме того, оба описания (1) и (2) имеют общий недостаток. Они явно указывают вложение ДМ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Но одно и то же ДМ можно вложить в $\mathbb{R}^n$ различными способами, или, иначе говоря, описать различными функциями f_j (1) или x_j (2). Поэтому, если мы хотим определить ДМ инвариантно, необходимо отказаться от попыток глобального описания ДМ с помощью одного набора функций f_j (1) или x_j (2).

Для сферы выход из положения хорошо известен. Координаты любой точки на сфере определяются по атласу, состоящему из некоторого набора перекрывающихся карт. Число этих карт может быть произвольным, лишь бы они с некоторым перекрытием покрывали всю сферу. Можно, например, ограничиться двумя картами, определяемыми с помощью стереографических проекций:

$$U_1 = \left\{z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi},\ \pi - \varepsilon \geqslant \theta \geqslant 0,\ \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\right\},$$

$$U_2 = \left\{w = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi},\ \pi \geqslant \theta \geqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\right\}.$$

Непосредственная проверка показывает, что переход от одной карты к другой, т. е. пересчет z-координат в w-координаты и наоборот, осуществляется с помощью бесконечно дифференцируемых функций. Иначе говоря, карты согласованы между собой. Каждая карта устанавливает взаимно однозначное соответствие между некоторой областью сферы и областью в плоскости $\mathbb{R}^2$. Отметим, что такое описание сферы с помощью атласа в ряде физических задач является единственно правильным, например, при изучении монополя (см. [26]).

Обобщая эту конструкцию, можно дать абстрактное определение ДМ Пусть задано множество M. Оно является ДМ, если выполняются сле дующие условия: 1) для некоторых подмножеств $U_\alpha \subset M$ задано взаимно однозначное отображение φ_α в область m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, т. е. задан набор *карт* ($\{U_\alpha\}$); 2) любой набор карт $\{U_\alpha\}$ должен образовывать *атлас*. Под этим понимается а) каждая точка $x \in M$ принадлежит хотя бы одной карте U_α; б) перекрывающиеся карты U_α и U_β *согласованы*, т. е. отображения $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ и $\varphi_\beta\varphi_\beta^{-1}$ областей пространства $\mathbb{R}^m$ должны быть взаимно однозначны и бесконечно дифференцируемы.

Таким образом, атлас $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ задает структуру ДМ на исходном множестве M. Локально ДМ устроено, как шар $\sum\limits_{j=1}^{m} z_j^2 < 1$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Число m называется размерностью ДМ. Подчеркнем, что, как правило, всякое ДМ требует для своего описания более чем одну карту в атласе. Если ДМ топологически эквивалентно евклидову пространству, то достаточно одной карты. Например, верхнюю полость двухполостного гиперболоида $H^2 = \{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1,\ x_0 > 0\}$ можно взаимно однозначно отобразить на плоскость $\mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$ и тем самым получить атлас, содержащий всего одну карту, т. е. H^2 и $\mathbb{R}^2$ топологически эквивалентны. В общем случае одной карты недостаточно, т. е. недостаточно задать одно отображение (2).

Локальные координаты позволяют использовать обычные понятия анализа на ДМ: рассматривать функции на ДМ, строить касательные векторы и пр. В частности, карты $\{U_\alpha\}$ участвуют в определении расслоений над ДМ.

Пусть f — отображение одного ДМ на другое (f: $M \to M_1$). Если это отображение определяет гладкую деформацию ДМ, то оно называется *диффеоморфизмом*.

Более точно, пусть точка x принадлежит карте $U_\alpha \subset M$, а ее образ $f(x)$ — карте $V_\alpha \subset M_1$. Если φ_α — отображение карты U_α в $\mathbb{R}^m$, а h_α — отображение карты V_α в $\mathbb{R}^m$, то отображение f будет диффеоморфизмом, если композиции отображений $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$ вида $h_\alpha f \varphi_\alpha^{-1}$ и $\varphi_\alpha f^{-1} h_\alpha^{-1}$ будут бесконечно дифференцируемы. Так, например, очевиден диффеоморфизм цилиндра $\{x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_0 — \text{произвольно}\}$ и однополостного гиперболоида $\{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -1\}$.

Нетривиальные примеры ДМ доставляют группы Ли. Скажем, группа SU(2) — множество комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = g$ с определителем 1 — диффеоморфна сфере S^3. В самом деле, условие $\det g = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ определяет сферу S^3 в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$.

С помощью стереографической проекции можно построить атлас сферы S^3 так же, как это было проделано для двумерной сферы S^2. Хорошо известно, что группа SU(2) дважды накрывает группу SO(3). Посмотрим, что представляет собой группа SO(3) как ДМ. Каждое вращение $g \in SO(3)$ можно задать вектором, направленным по оси вращения, длина которого равна углу поворота. Эти векторы заполняют шар радиуса π, причем антиподальные точки на поверхности шара отождествляются, так как повороты на углы π и $-\pi$ совпадают. Полученное многообразие диффеоморфно трехмерному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$. Точками $\mathbb{R}P^3$ являются прямые пространства $\mathbb{R}^4$, проходящие через начало координат. Мы не будем доказывать диффеоморфизм многообразий SO(3) и $\mathbb{R}P^3$, а укажем строение одного атласа для $\mathbb{R}P^3$.

Из определения $\mathbb{R}P^3$ следует, что можно задать его точки так называемыми однородными координатами (x_1, x_2, x_3, x_4), где числа x_j определены с точностью до общего множителя. Составим атлас из четырех карт

$$U_\alpha = \{(x_1, x_2, x_3, x_4),\ |x_\alpha| \geqslant \varepsilon > 0\},$$
$$\varphi_\alpha:\quad U_\alpha \to \mathbb{R}^3\,(y_1, y_2, y_3) \quad (\alpha = 1, \ldots, 4),$$

где функции φ_α определены следующим образом:

$$\varphi_\alpha:\ y_\beta^{(\alpha)} = \frac{x_\beta}{x_\alpha} \quad \alpha \neq \beta.$$

Произвольное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество проходящих через начало координат прямых в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Можно показать, что $\mathbb{R}P^n$ является ДМ размерности n. Укажем еще одну реализацию $\mathbb{R}P^n$. Проведем единичную сферу S^n в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда каждой прямой в $\mathbb{R}^{n+1}$ соответствуют две антиподальные точки на сфере S . Таким образом, сфера S^n с отождествленными антиподальными точками и есть еще одна модель пространства $\mathbb{R}P^n$. Аналогично множество комплексных прямых в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ образует комплексное проективное пространство, которое является ДМ размерности $2n$. Точки на единичной сфере S^{2n+1} в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$, отличающиеся фазой $\exp(i\varphi)$, отвечают одной комплексной прямой.

б) КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Множества различной природы могут быть разбиты на непересекающиеся классы по некоторым признакам. Так, например, плоскость можно представить как совокупность концентрических окружностей с радиусами, меняющимися от нуля до бесконечности, а множество вектор-потенциалов как совокупность классов калибровочно эквивалентных потенциалов. В первом случае точки на плоскости попадают в один класс, если они равноудалены от фиксированного центра. Во втором случае эквивалентные потенциалы связаны соотношением калибровочных преобразований.

Еще один пример разбиения на классы эквивалентности — разбиение непрерывных отображений на классы гомотопически эквивалентных отображений (см. п. г) «Гомотопии»).

Нетрудно заметить, что в первых двух примерах соотношение эквивалентности устанавливается с помощью действия группы преобразований. В первом случае точки плоскости попадают в один класс, если существует вращение, переводящее одну точку в другую, или, иначе говоря, точки принадлежат одной *орбите* группы вращений. Во втором случае эквивалентные потенциалы лежат на одной орбите группы калибровочных преобразований.

Это построение справедливо и в общей ситуации. Пусть группа G действует как группа преобразований многообразия P. Тогда P разбивается на множество классов эквивалентности P/G относительно действия группы G. Каждый класс эквивалентности есть орбита O группы G. Множество классов эквивалентности P/G называется фактор-пространством, а соответствие π, относящее каждой точке $x \in P$, содержащую ее орбиту $O \in P/G$ (π: $P \to P/G$), называется проекцией.

Приведем два примера.

1) Пусть P — сфера S^n, а $G = \mathbb{Z}_2$— группа, переводящая точку x в $-x$. Тогда каждая орбита O группы $\mathbb{Z}_2$ будет состоять из двух точек и фактор-пространство $S^n/\mathbb{Z}_2$ есть вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$.

2) Если P — сфера S^{2n+1} в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$: $\{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots \ldots + |z_n|^2 = 1\}$ и G есть группа $U(1)$, переводящая точки сферы в себя: $z_k \to \exp(i\varphi) z_k$, то $S^{2n+1}/U(1) = \mathbb{C}P^n$.

Важный частный случай этой конструкции возникает, когда исходное пространство P само является группой. Пусть, например, P есть группа $SO(3)$, а $G = SO(2)$ и действие G на P есть умножение справа на элементы $g \in SO(2)$. Таким образом, фактор-пространство P/G есть множество элементов вида $\{pG\}$. Элементы p_1 и p_2, принадлежащие $P = SO(3)$, попадают в один класс, если $p_1^{-1}p_2 \in SO(2)$. Покажем, что P/G есть двумерная сфера S^2. Пусть x_0— фиксированная точка сферы. Тогда любая другая ее точка x_1 может быть получена с помощью вращения из точки x_0: $x_1 = px_0$. Подгруппа вращений G вокруг оси, проходящей через x_0 и начало координат есть $SO(2)$. Таким образом, если $g \in SO(2)$, то $x_0 = gx_0$. Очевидно, для точки x_1 справедливо другое представление $x_1 = p_1x_0$, где $p_1 = pg$ и g — произвольный элемент из $SO(2)$. Поэтому множество точек сферы S^2 совпадает с множеством $\{pG\}$, т. е. с фактор-пространством P/G.

Сфера является *однородным пространством* относительно действия группы $SO(3)$. Это означает, что любые ее точки связаны вращением из группы $SO(3)$. Подгруппа $SO(2)$ есть *стационарная* (малая) *подгруппа* точки x_0. В общем случае разбиение группы P на классы эквивалентности относительно действия подгруппы G приводит к однородному пространству P/G со стационарной подгруппой G. Другие примеры однородных пространств: сферы $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$; верхняя пола гиперболоида $H = \{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1,\ x_0 > 0\} = \mathrm{SO}(3, 1)/\mathrm{SO}(3)$, где $\mathrm{SO}(3)$ сохраняет точку $(1, 0, 0, 0)$; сферы нечетной размерности $S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)$. Из последнего примера следует, что комплексное пространство $\mathbb{C}P^n$ можно рассматривать как однородное пространство $\mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{SU}(n)$.

в) ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Формализм точных последовательностей удобен при вычислении гомотопических групп (см. следующий раздел).

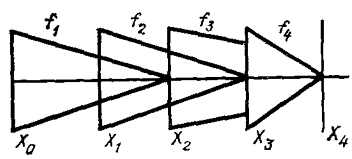
Пусть f — гомоморфизм группы X_1 в группу X_2, т. е. такое отображение, что $f(ab) = f(a)\,f(b)$ и $f(e_1) = e_2$, где e_1 (e_2) — единица группы X_1 (X_2). Множество элементов из X_1, которые отображаются в e_2, называется *ядром* гомоморфизма f и обозначается $\mathrm{Ker}\, f$. Образ группы X_1 в группе X_2 при гомоморфизме f обозначается $\mathrm{Im}\, f$ $(\mathrm{Im}\, f = f(X_1))$. Таким образом, $\mathrm{Ker}\, f \subset X_1$, а $\mathrm{Im}\, f \subset X_2$.

Пусть, например, X_1 и X_2 — два векторных пространства, рассматриваемых как абелевы группы и f — матрица, отображающая X_1 в X_2. Матрица f определяет гомоморфизм (отображение) абелевой группы X_1 в абелеву группу X_2. Тогда $\mathrm{Ker}\, f$ есть множество решений однородного уравнения $fx = 0$, а $\mathrm{Im}\, f$ — векторы из X_2, допускающие представление $y = f\cdot x$ (само пространство X_2 может быть шире и содержать другие векторы). Заметим, что нетривиальное ядро возникает, когда $\det f = 0$.

Рассмотрим последовательность групп и гомоморфизмов f_j: $X_{j-1} \to X_j$. Она называется *точной* в члене X_j, если

$$\mathrm{Im}\, f_j = \mathrm{Ker}\, f_{j+1}.$$

Вот графическая иллюстрация точной последовательности в членах X_1 и X_2 и не являющейся точной в X_3:



На горизонтальной оси располагаются единицы групп X_j.

Рассмотрим интересные частные случаи.

1) Пусть точна последовательность

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} e.$$

Тогда согласно определению $\mathrm{Im}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2$. Но $\mathrm{Ker}\, f_2 = X_1$. Поэтому $\mathrm{Im}\, f_1 = X_1$, т. е. вся группа X_1 является образом группы X_0.

2) Покажем, что точность последовательности

$$e \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X \xrightarrow{f_3} e$$

приводит к изоморфизму $X_1 \simeq X_2$. Действительно, $\mathrm{Ker}\, f_3 = X_2$ и точность в члене X_2 приводит к равенству $\mathrm{Im}\, f_2 = X_2$. Из точности в члене X_1 следует равенство $\mathrm{Ker}\, f_2 = e$. Таким образом, гомоморфизм f_2 отображает группу X_1 на всю группу X_2 с тривиальным ядром, т. е. группы X_1 и X_2 изоморфны.

3) Рассмотрим точную последовательность групп:

$$e \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_3} X_3 \xrightarrow{f_4} e.$$

Так как $\operatorname{Ker} f_2 = e$, то образ $\operatorname{Im} f_2$ изоморфен X_1 ($\operatorname{Im} f_2 \approx X_1$). Но $\operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{Im} f_2$. Поэтому $\operatorname{Ker} f_3 \simeq X_1$. С другой стороны, $\operatorname{Im} f_3 = X_3$. Следовательно, если рассмотреть в группе X_2 множество орбит (см. п. б) «Классы эквивалентности») ее подгруппы $\operatorname{Im} f_2 \simeq X_1$, то полученное фактор-пространство $X_2/\operatorname{Im} f_2$ будет изоморфно X_3, так как орбита, проходящая через единицу, отображена в единицу группы X_3.

Приведем примеры, иллюстрирующие последний случай.

1) Рассмотрим точную последовательность абелевых групп:

$$0 \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_3} S^1 \xrightarrow{f_4} 1;$$

здесь f_1 — вложение нуля в группу целых чисел, f_2 — вложение группы целых чисел в группу действительных чисел, f_3 — экспоненциальное отображение: $f_3(t) = \exp(2\pi i t)$, f_4 — отображение в единицу. Таким образом, окружность S^1 получается при факторизации $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, а отображение f_3 есть проекция π (см. п. б) «Классы эквивалентности»).

2) Существует точная последовательность

$$e_1 \xrightarrow{f_1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f_2} \mathrm{SU}(2) \xrightarrow{f_3} \mathrm{SO}(3) \xrightarrow{f_4} e_2,$$

где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}_2 = \{e_1, -e_1\},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{matrix} \right\}.$$

Гомоморфизм f_3 осуществляется с помощью стереографической проекции дробно-линейного преобразования комплексной плоскости $z \to (\alpha z - \bar{\beta})/(\beta z + \bar{\alpha})$ в группу вращений сферы SO(3). Таким образом, $\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$, т. е. элемент $g \in \mathrm{SO}(3)$ имеет два прообраза в SU(2) при гомоморфизме $f_3 : u$ и $(-u)$. Это означает, что группа SU(2) дважды накрывает группу вращений.

3) Точная последовательность унитарных групп

$$e \xrightarrow{f_1} \mathrm{SU}(n) \xrightarrow{f_2} \mathrm{U}(n) \xrightarrow{f_3} \mathrm{U}(1) \to e.$$

Как обычно, f_2 — вложение группы $\mathrm{SU}(n)$ в $\mathrm{U}(n)$. Отображение f_3 имеет вид $f_3(g) = \det g$, $g \in \mathrm{U}(n)$. Иными словами, имеем $\mathrm{U}(1) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n)$.

г) ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Гомотопические группы являются одним из возможных вариантов алгебраического описания топологических свойств многообразий.

Прежде всего введем понятие гомотопности двух непрерывных отображений одного многообразия в другое. Пусть φ и g — два таких отображения X в Y. Они называются *гомотопными*, если существует параметрическое семейство непрерывных по $x \in X$ и $t \in [0, 1]$ отображений f_t: $X \to Y$ такое, что $f_0 = \varphi$ и $f_1 = g$. Иными словами, гомотопность означает возможность непрерывной деформации одного отображения в другое. Все непрерывные отображения X в Y разбиваются на классы гомотопных друг другу отображений.

Посмотрим, как выглядит разбиение на классы в случае непрерывного отображения окружности на окружность ($X = S^1 \to S^1 = Y$). Пусть окружность задается уравнением $|z| = 1$. Тогда отображение $\exp(i\theta) = \exp(i\varphi(\theta))$ будет непрерывно, если выполняется условие $\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2k\pi$, где k — целое. Число k называется *степенью отображения* и указывает на число оборотов при отображении φ. Можно показать, что отображения, имеющие одинаковую степень отображения, гомотопны; в то же время, если степени отображения разные, то отображения принадлежат разным гомотопическим классам. Таким образом, всякое отображение гомотопно каноническому отображению $z \to z^k$.

Одной из важнейших задач топологии является задача гомотопической классификации отображений n-мерной сферы S^n в данное многообразие X. Оказывается, что можно определить операцию умножения гомотопических классов отображений и превратить множество классов в группу.

Рассмотрим сначала непрерывные отображения окружности S^1 в многообразие X. Зафиксируем точку x_0 в X и ограничимся отображениями $\gamma(t)$: $S^1 \to X$ (t — параметр на окружности) такими, что $\gamma(0) = x_0$. Множество таких отображений $\{\gamma(t)\} = \Omega(X, x_0)$, представляющее собой всевозможные замкнутые контуры в X, проходящие через точку x_0, называется *пространством контуров* (*петель*). Контуры из $\Omega(X, x_0)$ можно следующим образом перемножать. Произведением двух контуров $\gamma_1 * \gamma_2(t)$ называется контур $\gamma(t)$, который начинается в точке x_0, проходит по контуру γ_1, а затем по контуру γ_2. Однако это произведение не превращает пространство петель $\Omega(X, x_0)$ в группу. Дело в том, что такое умножение не является ассоциативным из-за различия в параметризациях: $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) \neq (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$. Хотя контуры не равны, они оказываются гомотопны друг другу: $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) \approx (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$. Поэтому будем отождествлять гомотопные контуры в пространстве $\Omega(X, x_0)$. Таким образом, если $\gamma_1 \approx \sigma_1$ и $\gamma_2 \approx \sigma_2$, то гомотопны их произведения $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \sigma_1 * \sigma_2(t)$. Введенное умножение превращает классы гомотопных контуров в группу. Единицей группы будет класс контуров, гомотопных постоянному отображению $\gamma(t) = x_0$. Иными словами, это класс контуров, которые можно непрерывно стянуть в точку. Построенная группа называется *фундаментальной группой* многообразия X и обозначается $\pi_1(X, x_0)$.

Согласно определению, группа $\pi_1(X, x_0)$ зависит от выбора точки x_0. Однако если многообразие X линейно связное, т. е. любые его точки можно соединить путем, то построенные для разных точек группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны. Поэтому в этих случаях точка x_0 не упоминается.

Многообразие X называется *односвязным*, если его фундаментальная группа тривиальна, т. е. любой контур на X можно стянуть в точку. Примерами односвязных пространств являются евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$, шары, сферы S^n при $n \geqslant 2$. Однако окружность S^1 неодносвязна. Мы уже фактически вычислили ее фундаментальную группу: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Нетрудно видеть, что на торе T^2 есть два независимых нестягиваемых контура, порождающих его фундаментальную группу. Поэтому $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Тор есть прямая сумма двух окружностей $T^2 = S^1 \oplus S^1$. Этот пример есть частный случай общего утверждения: $\pi_1(X \oplus Y) = \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$.

В разделе а) «Дифференцируемые многообразия» было показано, что группа SU(2) представляет из себя сферу S^3 и поэтому является односвязным многообразием. В то же время в группе SO(3) существует нестягиваемый в точку замкнутый контур, соединяющий вращения вокруг заданной оси на угол π и $-\pi$. Произведение этого контура на самого себя уже стягивается в точку. Это означает, что $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$. Группы SU(2) и SO(3) локально изоморфны, а различие их фундаментальных групп как раз и указывает на то, что группа SU(2) дважды накрывает группу SO(3). Мы в дальнейшем приведем другие примеры. А сейчас отметим, что, хотя во всех приведенных примерах фундаментальные группы были абелевы, это не является общим правилом. Например, фундаментальная группа кренделя неабелева. Однако фундаментальные группы групп Ли абелевы.

По аналогии с фундаментальной группой определяются высшие гомотопические группы. Для этого необходимо определить умножение гомотопических классов отображений n-мерной сферы S^n в многообразие X. Будем рассматривать отображения $\alpha\colon S^n \to X$, которые переводят фиксированную точку сферы $s_0 \in S^n$ в фиксированную точку $x_0 = \alpha(s_0) \in X$. Произведение $\alpha * \beta$ отображений α и β определяется как отображение S^n в X, совпадающее с α на одной полусфере и с β — на другой. При этом экватор S^{n-1} сферы S^n, разделяющий полусферы и содержащий точку s_0, целиком отображается в точку x_0. Если гомотопны отображения $\alpha \approx \alpha_1$ и $\beta \approx \beta_1$, то гомотопно их произведение $\alpha * \beta \approx \alpha_1 * \beta_1$. Поэтому умножение переносится на гомотопические классы отображений S^n в X. Эта операция определяет гомотопическую группу $\pi_n(X, x_0)$ порядка n. Легко показать, что при $n > 1$ эти группы абелевы. Связь между группами $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$ такая же, как и у фундаментальных групп, построенных для разных точек. Отметим еще, что множество $\pi_0(X, x_0)$ не обладает структурой группы. Оно указывает на число компонент связности многообразия X. Это следует из того, что сфера S^0 есть пара точек. Если же X является группой Ли, то в множестве компонент связности можно ввести групповую операцию, и $\pi_0(X, x_0)$ превращается в группу. Можно также показать, что умножение в группе $\pi_n(X)$ задается с помощью умножения в группе X.

Следующее утверждение позволяет понять важность гомотопических групп в топологии. Если f — непрерывное отображение многообразия X в Y, то существует гомоморфизм f_* топологических групп:

$$f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y). \tag{3}$$

Если многообразия топологически эквивалентны, то их гомотопические группы совпадают. Обратное, вообще говоря, неверно.

Вычисление гомотопических групп многообразий в общем случае является сложной задачей. В некоторых случаях ответы интуитивно ясны. Например, гомотопические группы эвклидова пространства тривиальны. Аналогично $\pi_i(S^n) = 0$ при $i < n$, $n > 1$, и $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Укажем теперь один способ, позволяющий выразить неизвестные гомотопические группы через известные. Рассмотрим многообразие P, на котором задано соотношение эквивалентности действием группы G (см. п. б) «Классы эквивалентности»). Мы можем построить два отображения: 1) вложение i орбиты O группы G в многообразие P

$$i\colon O \to P;$$

2) проекцию P на пространство орбит $M = P/G$:

$$\pi\colon P \to M.$$

Согласно (3) существует последовательность гомоморфизмов гомотопических групп

$$\pi_n(O) \xrightarrow{i_*} \pi_n(P) \xrightarrow{\pi_*} \pi_n(M).$$

Кроме того, существует связь между гомотопическими группами пространства орбит M и группы G. Она осуществляется с помощью так называемого граничного гомоморфизма:

$$\pi_n(M) \xrightarrow{d} \pi_{n-1}(O).$$

Мы не будем его строить в общем случае, а укажем в последующих примерах. Оказывается, что продолженная с помощью граничного гомоморфизма последовательность становится точной (см. в) «Точные последовательности»)

$$\xrightarrow{d} \pi_n(O) \xrightarrow{i_*} \pi_n(P) \xrightarrow{\pi_*} \pi_n(M) \xrightarrow{d} \pi_{n-1}(O) \xrightarrow{i_*}.$$

Покажем на приведенных в разделах в) «Точные последовательности» и б) «Классы эквивалентности» примерах, как с помощью этой точной последовательности, вычисляются гомотопические группы.

1) Факторизация $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ приводит к точной последовательности

$$0 = \pi_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\pi_*} \pi_n(S^1) \xrightarrow{d} \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(\mathbb{R}) = 0.$$

Так как $\pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и $\pi_n(\mathbb{Z}) = 0$ при $n > 0$, то $\pi_n(S^1) = 0$ $(n > 1)$, $\pi^1(S^1) = \mathbb{Z}$.

2) Рассмотрим сферу S^m как однородное пространство $S^m = \mathrm{SO}(m+1)/\mathrm{SO}(m)$. Так как при $m > 2$ $\pi_2(S^m) = 0$ и $\pi_1(S^m) = 0$, то имеем точную последовательность

$$0 = \pi_2(S^m) \xrightarrow{d} \pi_1(\mathrm{SO}(m)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathrm{SO}(m+1)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(S^m) = 0.$$

Откуда следует, что при $m \geqslant 3$

$$\pi_1(\mathrm{SO}(m)) = \pi_1(\mathrm{SO}(m+1)).$$

Но мы доказали, что $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$. Следовательно, $\pi_1(\mathrm{SO}(m)) = \mathbb{Z}_2$. Это означает, что группа $\mathrm{SO}(m)$ неодносвязна и дважды накрывается группой $\mathrm{Spin}(m)$, которая при $m = 3$ совпадает с группой $\mathrm{SU}(2)$. Строя точную последовательность для высших гомотопических групп, получим

$$\pi_k(\mathrm{SO}(m+1)) = \pi_k(\mathrm{SO}(m)) \text{ при } k < m-1.$$

3) Сфера нечетной размерности $S^{2n-1} = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1)$ $(n \geqslant 2)$ приводит к точной последовательности

$$0 = \pi_2(S^{2n-1}) \xrightarrow{d} \pi_1(\mathrm{SU}(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathrm{SU}(n)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(S^{2n-1}) = 0.$$

Откуда следует односвязность группы $\mathrm{SU}(n)$: $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) = 0$.

4) Вычислим фундаментальную группу группы $U(n)$. Из соотношения $\mathrm{U}(1) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n)$ имеем точную последовательность

$$0 = \pi_1(\mathrm{SU}(n)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathrm{U}(n)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathrm{U}(1)) \xrightarrow{d} \pi_0(\mathrm{SU}(n)).$$

Так как $\pi_1(\mathrm{U}(1)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ и $\pi_0(\mathrm{SU}(n)) = 0$, то $\pi_1(\mathrm{U}(n)) = \mathbb{Z}$.

Для произвольного $k > 1$ имеем точную последовательность

$$0 = \pi_{k+1}(\mathrm{U}(1)) \xrightarrow{d} \pi_k(\mathrm{SU}(n)) \xrightarrow{i_*} \pi_k(\mathrm{U}(n)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_k(U(1)) = 0.$$

Следовательно,

$$\pi_k(\mathrm{SU}(n)) = \pi_k(\mathrm{U}(n)).$$

5) Рассмотрим вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$. Соответствующая точная последовательность имеет вид при $n \geqslant 2$

$$0 = \pi_1(S^n) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{d} \pi_0(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_*} \pi_0(S^n) = 0.$$

Так как $\pi_0(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, то $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$. Рассматривая эту же последовательность для групп порядка $k \leqslant n$, получим $\pi_k(\mathbb{R}P^n) = 0$ $(k < n)$ и $\pi_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$. В частности, $\pi_2(\mathrm{SO}(3)) = 0$. Из примера 2) следует, что для всех групп $\mathrm{SO}(n)$ группа π_2 тривиальна. Можно показать, что она тривиальна для любой группы Ли.

6) Для комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\mathrm{U}(1)$ имеем $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$, что является следствием связности и односвязности сферы S^{2n+1}. В то же время из точной последовательности

$$0 = \pi_2(S^{2n+1}) \xrightarrow{\pi_*} \pi_2(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{d} \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\|}}{\pi_1(\mathrm{U}(1))} \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^{2n+1}) = 0$$

следует, что $\pi_2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$. Таким образом, существуют нетривиальные гомотопические классы отображений $S^2 \to \mathbb{C}P^n$. В $\mathbb{C}P^n$-модели им соответствуют инстантонные решения, заряд которых определяется гомотопическим классом решения [27].

7) Рассмотрим снова нечетномерную сферу как фактор-пространство $S^{2n-1} = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1)$. При $n \geqslant 3$ имеем точную последовательность

$$0 = \pi_4(S^{2n-1}) \xrightarrow{d} \pi_3(\mathrm{SU}(n-1)) \xrightarrow{i_*} \pi_3(\mathrm{SU}(n)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_3(S^{2n-1}) = 0.$$

Откуда $\pi_3(\mathrm{SU}(n)) = \pi_3(\mathrm{SU}(n-1))$. Так как $\pi_3(\mathrm{SU}(2)) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$, то $\pi_3(\mathrm{SU}(n)) = \mathbb{Z}$. Этот факт связан с классификацией инстантонов в теории Янга — Миллса [1]. Имеется более общее утверждение: для всякой простой группы Ли ее третья группа гомотопий изоморфна группе $\mathbb{Z}$.

8) В заключение укажем гомотопическую классификацию отображений сферы S^3 в сферу S^2; вычислим группу $\pi_3(S^2)$. Так как $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$, то, с учетом полученных в предыдущих примерах результатов имеем точную последовательность

$$0 = \pi_3(\mathrm{SO}(2)) \xrightarrow{i_*} \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\|}}{\pi_3(\mathrm{SO}(3))} \xrightarrow{\pi_*} \pi_3(S^2) \xrightarrow{d} \pi_2(\mathrm{SO}(2)) = 0,$$

откуда следует, что $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

Сведем полученную информацию в таблицу

ДМ	π_1	π_2	π_3
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$
$T^2 = S^1 \oplus S^1$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	0
$\mathrm{SO}(n)$ $(n > 2)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{SU}(n)$	0	0	$\mathbb{Z}$
Простые группы Ли	—	0	$\mathbb{Z}$
$U(n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}P^n$	$\mathbb{Z}_2$ $(n > 1)$	$\begin{cases} 0 & n > 2 \\ \mathbb{Z} & n = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & n > 3 \\ \mathbb{Z} & n = 3 \end{cases}$
$\mathbb{C}P^n$	0	$\mathbb{Z}$	—

4. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Прежде всего дадим указания, связанные с геометрией классических калибровочных полей. Ясное, довольно подробное (и одно из наиболее ранних) изложение геометрического подхода к теории калибровочных полей дано в книге Коноплевой и Попова [5]. Полезна также статья Попова [6].

Приемлемое для физиков изложение используемых в калибровочных теориях методов дифференциальной геометрии можно найти в книге Дубровина, Новикова и Фоменко [7]. Авторы обзора [1], вводя математические понятия, использовали в основном двухтомную монографию Кобаяси и Номидзу [8], которая вышла в русском переводе в 1981 г. К ней примыкает книга Номидзу [9]. Из математических книг в дополнение к указанным можно рекомендовать книги Стинрода [21], Бишопа и Криттендена [10] и Чжэня [11]. Последняя из них содержит, в частности, теорию характеристических классов. Специально этой теории посвящена статья Чженя [12] и книга Милнора и Сташефа [13]. Теория дифференциальных форм изложена в книгах Ефимова [14], Картана [15] и де Рама [16]. Последняя книга содержит изложение теории когомологий. О геометрии групп Ли см. коллективную монографию «Семинар Софус Ли» [17]. Адресованное физикам изложение некоторых вопросов топологии дано в лекциях Шварца [18] и Шапиро и Ольшанецкого [19].

Геометрическое описание инстантонов и новый подход к геометрии инстантонных конфигураций дан в статье Дринфельда и Манина [25].

Наконец, кратко охарактеризуем упомянутые выше обзоры [2-4]. В обзоре [2] изложено применение теории гомотопий к различным моделям теории поля. Обзор содержит большой фактический материал по гомотопическим группам. Обзор [3] содержит приложение той же теории к некоторым вопросам физики твердого тела. Подробно объяснены основные понятия теории гомотопий. Применению методов алгебраической топологии и дифференциальной геометрии в теории Янга — Миллса и теории гравитации посвящен обзор [4].

Перейдем теперь к литературе, относящейся к ознакомительным статьям. Отметим прежде всего, что определение дифференциальных многообразий содержит большинство из указанных в библиографии математических книг. С теорией гомотопий лучше всего ознакомиться по лекциям Шварца [18], книге Дубровина, Новикова и Фоменко[7] или по рассчитанной на подготовленного читателя монографии Ху Сы-цзяна [20]. Точные последовательности рассмотрены в лекциях Шапиро и Ольшанецкого [19]. С материалом, содержащимся в разделе в) гл. 3 «Классы эквивалентности», можно познакомиться по книгам Дубровина, Новикова и Фоменко [7] и Номидзу [8].

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Daniel M., Viallet C. M.— Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, p. 175; перевод — в этом же номере УФН, с. 377.
2. Boya L. J., Carinena J. F., Mateos J.— Fortschr. Phys., 1978, Bd. 26, S. 175.
3. Mermin N. D.— Rev. Mod. Phys., 1979, v. 51, p. 591.
4. Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J.— Phys. Rept., 1980, v. 66, p. 213.
5. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля.— М.: Атомиздат, 1972 (1-е изд.); 1980 (2-е изд.).
6. Попов Д. А.— ТМФ, 1975, т. 24, с. 347.

7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.
8. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry.— N. Y.: Interscience, v. I, 1963, v. II, 1969; перевод: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии.— М.: Наука, 1981. Т. 1, 2.
9. Номидзу К. Группа Ли и дифференциальная геометрия.— М.: ИЛ, 1960.
10. Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж. Геометрия многообразий.— М.: Мир, 1967.
11. Чжэнь Шэн-шэнь. Комплексные многообразия.— М.: ИЛ, 1961.
12. Чжэнь Шэн-шэнь (Черн С. С.).— УМН, 1973, т. 22, вып. 3, с. 121.
13. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы.— М.: Мир, 1979.
14. Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм.— М.: Наука, 1977.
15. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.— М.: Мир, 1971.
16. Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия.— М.: Мир, 1956.
17. Семинар Софус Ли: Теория алгебр Ли. Топология групп Ли.— М.: ИЛ, 1962.
18. Шварц А. С. Гомотопическая топология для физиков.— В кн. Элементарные частицы: 3-я школа физики ИТЭФ, М.: Атомиздат, 1975, вып. 1, с. 78.
19. Шапиро И. С., Ольшанецкий М. А. Лекции по топологии для физиков.— В кн. Элементарные частицы: 6-я школа физики ИТЭФ, М.: Атомиздат, 1979, вып. 4, с. 3.
20. Ху Сы-цзян. Теория гомотопий.— М.: Мир, 1964.
21. Стинрод Н. Топология косых произведений.— М.: ИЛ, 1953.
22. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии.— М.: Наука, 1977.
23. Спеньер Э. Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1971.
24. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.
25. Дринфельд В. Г., Манин Ю. И.— ЯФ, 1979, т. 29, с. 1646.
26. Wu T. T., Yang C. N.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 437.
27. Golo V. L., Perelomov A. M. — Lett. Math. Phys., 1978, v. 2, p. 477.